

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 1

Расчет доз внешнего и внутреннего облучения

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 x 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комитету

С.А. Уиоров



**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Александрова Ж. Н.

Екатеринбург

2020



0

ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

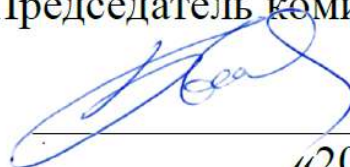
Часть 2

Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

**Екатеринбург
2020**

Федеральное агентство по образованию
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 2
Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

Рецензент: Щапов В.А., старший научный сотрудник
Института геофизики УрО РАН, д-р геол.-мин. наук

Александрова Ж.Н.

- А46 Лабораторный практикум по радиационной безопасности: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине "Радиационная безопасность" для студентов специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки» очной и заочной формы обучения; Часть 2. Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий / Ж. Н. Александрова; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2020. – 26 с.

В учебно-методическом пособии дан краткий обзор существующих способов реабилитации радиоактивно загрязненных территорий, приведены приближенная теория и сведения о практическом применении ботанической реабилитации зараженных почв. Пособие содержит руководства к выполнению двух лабораторных работ по изучению распределения радионуклидов в почвах Чернобыльского следа и факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся специализациям «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» по специальности «Технология геологической разведки».

© Александрова Ж.Н., 2020

© Уральский государственный
горный университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. БОТАНИЧЕСКАЯ РЕАБИЛИТАЦИЯ РАДИОАКТИВНО ЗАГРЯЗНЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ	5
1.1. Краткий обзор существующих способов дезактивации радиоактивно загрязненных территорий	5
1.2. Теория ботанической реабилитации	6
1.2.1. Предпосылки к применению метода ботанической реабилитации ..	6
1.2.2. Основные количественные соотношения	11
1.2.3. Оценка сроков реабилитации	13
1.2.4. Понятие о факторе ботанической реабилитации и способы его количественной оценки	15
1.3. Практическое применение ботанической реабилитации	16
2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	20
2.1. Изучение распределения радионуклида Cs^{137} в почвах Чернобыльского следа	20
Задание	20
Материалы и оборудование	20
Порядок выполнения работы	20
Контрольные вопросы	22
Содержание отчета	22
2.2. Определение факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения ..	
Задание	23
Материалы и оборудование	24
Порядок выполнения работы	24
Контрольные вопросы	25
Содержание отчета	25
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	26

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий в биосфере нашей планеты появились новые компоненты - искусственно синтезированные человеком радиоактивные изотопы. Загрязнение биосферы радиоактивными материалами связано с быстрым ростом атомной промышленности и увеличением применения энергии расщепленного ядра атома.

Проблема радиоактивного загрязнения биосферы привлекает внимание широкого круга специалистов: медиков, биофизиков, геофизиков, радиоэкологов, так как стала очевидна возможная опасность серьезных последствий, вызванных действием на живые организмы ионизирующих излучений, источником которых являются рассеиваемые в природе радиоактивные изотопы.

Особую актуальность эти проблемы приобретают в случае аварийных ситуаций, связанных с выбросами радиоактивных веществ в атмосферу. Такие случаи могут приводить к выведению из сельскохозяйственного оборота больших площадей, где будет невозможно проживание людей и получение продукции, отвечающей нормативным требованиям.

Многие радиоактивные вещества, образующиеся в результате деления тяжелых ядер, играют важную роль в биотическом цикле, в том числе долгоживущие радиоактивные изотопы (например, Sr^{90} и Cs^{137} с периодами полураспада соответственно 28 и 30 лет), так как растворимы в воде и могут участвовать в пищевой цепочке человека. Они активно поглощаются растениями из зараженного почвенного слоя и попадают в продукты питания как растительного, так и животного происхождения.

Повышение уровня радиоактивности в сельском хозяйстве в результате радиоактивного загрязнения почв после выпадения радиоосадков и других возможных причин загрязнения почвенного покрова указывает на необходимость дезактивационных мероприятий, целью которых является исключение неблагоприятных последствий распространения радиоактивных продуктов в природе.

1. БОТАНИЧЕСКАЯ РЕАБИЛИТАЦИЯ РАДИОАКТИВНО ЗАГРЯЗНЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ

1.1. Краткий обзор существующих способов дезактивации радиоактивно загрязненных территорий

В настоящее время в качестве способов дезактивации загрязненных радионуклидами почв используются механические и химические способы [5], а также пассивное ожидание уменьшения радиационного фона за счет естественного распада радионуклидов.

Механическая дезактивации почвы осуществляется путем удаления верхнего слоя почвы с последующим его захоронением на специально отведенных территориях, либо путем глубокой вспашки, в результате которой верхний горизонт сбрасывается ниже границы корнеобитаемого слоя, а более глубокие горизонты переносятся на дневную поверхность [5]. Указанные приемы существенно снижают плодородие почв, так как они связаны с удалением поверхностного, наиболее плодородного слоя почвы или захоронением этого слоя на глубину. На естественное восстановление изъятых слоев почвы, в зависимости от климатических условий, требуются многие десятки и даже сотни лет [4]. Кроме того, механическая дезактивация абсолютно не пригодна для песчаных почв с тонким плодородным слоем, как, например, в Белоруссии, поскольку ее осуществление может привести к невозможности дальнейшего сельскохозяйственного использования таких территорий. Другим ограничивающим фактором для применения механической дезактивации является трудность, связанная с транспортировкой большой снятой массы почвы и организацией специальных "могильников". Здесь возникают проблемы ветровой эрозии и загрязнения грунтовых и питьевых вод.

При химической дезактивации почв предлагается проводить выщелачивание радиоактивных изотопов Cs^{137} и Sr^{90} с помощью химических агентов. Однако применение этой технологии связано с проблемой выбора химического агента. Невозможно подобрать такой агент, который действовал бы только на

атомы Cs^{137} и Sr^{90} , поскольку в системе почва - почвенный раствор будут всегда находиться различные соединения других элементов, которые так же, как соединения Cs^{137} и Sr^{90} , будут вступать в реакции с этим агентом. Применение химических соединений может ухудшать физические и химические свойства почв и приводить их в состояние, когда нормальная жизнедеятельность растений будет затруднена или исключена вовсе. Кроме того, химическое выщелачивание опасно применять на территориях с неглубоким уровнем грунтовых вод, так как это может привести к загрязнению последних.

Пассивное ожидание снижения уровня радиоактивности за счет естественного распада изотопов Cs^{137} и Sr^{90} предусматривает исключение загрязненных территорий из сельскохозяйственного использования и может растянуться, в зависимости от степени загрязнения, на сотни лет, так как указанные радионуклиды имеют большие периоды полураспада. Активность изотопов до безопасных пределов в 1000 раз уменьшается за десять периодов.

Таким образом, возникает необходимость в такой технологии дезактивации, которая была бы лишена отмеченных недостатков - не наносила бы экологического ущерба почвам и другим экосистемам и позволяла бы сократить сроки их реабилитации. Указанных недостатков лишена ботаническая дезактивация радиоактивно загрязненных территорий.

1.2. Теория ботанической реабилитации

1.2.1. Предпосылки к применению метода ботанической реабилитации

О способности растений накапливать различные химические элементы известно давно. Еще древние римляне предполагали, что растительный покров отражает до некоторой степени характер подпочвы. Взаимосвязь между растительностью и ее подпочвой использовали рудоискатели Европы и Китая уже 400 лет назад при поисках месторождений.

Русский геолог Карпинский А.М. [3] был одним из первых, кто установил, что отдельные ассоциации растений существуют на отличительных под-

почвах, таких как песчаники, глины, известняки и т.д., и что распределение растительного покрова может быть использовано для характеристики геологических особенностей района. Его классические работы в конечном итоге служат введением в геоботанику индикаторов, которая стала изучать растительный покров и его разновидности, указывающие на условия окружающей среды.

Способность растений по-разному аккумулировать химические элементы можно использовать в практических целях для очищения загрязненных территорий от радиоактивных продуктов деления с помощью отчуждения выращенной растительной массы и последующей ее утилизации.

Эффективность технологии фитодезактивации загрязненных территорий зависит от ряда факторов: используемых видов растительности, их морфобиологических особенностей, длительности вегетационного периода, а также от свойств дезактивируемых почв и применяемых агрохимических и агротехнических приемов, которые позволяли бы усиливать поступление радионуклидов из почв в растения, то есть управлять выносом радиоактивных элементов [3].

Существует несколько возможностей управления переходом радиоизотопов из почв в растения: 1) использование растений-гипераккумуляторов радиоактивных элементов, 2) стимуляция роста растений-гипераккумуляторов для получения наибольшей биомассы, 3) улучшение доступности радионуклидов для корневого питания растений

Способность растений накапливать радиоактивные элементы оценивается по факторам перехода радионуклида из почв в растения [2].

Фактор перехода (доля радиоактивности, переходящая из загрязненной почвы в зеленую массу растения) представляет собой следующее отношение:

$$\varphi_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_i}, \quad (1)$$

где A_{ij} - удельная активность [Бк/кг] i -го радионуклида в j -ом растении; A_i - удельная активность [Бк/кг] i -го радионуклида в почве.

В таблице 1 приведены экспериментально установленные величины фак-

торов перехода радионуклида Cs^{137} для некоторых растений локального участка Чернобыльского следа [1], среди которых как культурные (*рожь посевная*, *клевер белый*, *клевер луговой красный*, *люцерна* и др.), так и дикие представители флоры. Растения ранжированы в порядке убывания их факторов перехода.

таблица 1

	Название растения	Φ , отн.ед.		Название растения	Φ , отн.ед.
1	<i>Кипрей болотный</i>	0,671	34	<i>Повой заборный</i>	0,040
2	<i>Очиток пурпурный</i>	0,244	35	<i>Будра плющевидная</i>	0,039
3	<i>Осока острая</i>	0,242	36	<i>Крестовник луговой</i>	0,035
4	<i>Шлемник обыкновенный</i>	0,230	37	<i>Зверобой продырявленный</i>	0,034
5	<i>Мышиный горошек</i>	0,221	38	<i>Астрагал болотный</i>	0,034
6	<i>Жерушник</i>	0,208	39	<i>Вербейник обыкновенный</i>	0,034
7	<i>Горец земноводный</i>	0,208	40	<i>Вязель пестрый</i>	0,034
8	<i>Язвенник Линнея</i>	0,199	41	<i>Донник желтый</i>	0,034
9	<i>Черёда трехраздельная</i>	0,194	42	<i>Пижма обыкновенная</i>	0,031
10	<i>Клевер белый</i>	0,168	43	<i>Поручейник широколистный</i>	0,030
11	<i>Двукисточник тростниковый</i>	0,147	44	<i>Дрок красильный</i>	0,029
12	<i>Дудник обыкновенный</i>	0,146	45	<i>Болиголов пятнистый</i>	0,029
13	<i>Горичник Любименко</i>	0,129	46	<i>Девясил британский</i>	0,026
14	<i>Чистец болотный</i>	0,116	47	<i>Полынь обыкновенная</i>	0,024
15	<i>Люттик ползучий</i>	0,113	48	<i>Льнянка обыкновенная</i>	0,022
16	<i>Чахотная трава</i>	0,109	49	<i>Марь белая</i>	0,022
17	<i>Папоротник мужской</i>	0,104	50	<i>Щавель конский</i>	0,021
18	<i>Вероника длиннолистная</i>	0,098	51	<i>Кострец безостый</i>	0,020
19	<i>Хвоц приречный</i>	0,090	52	<i>Подмаренник мягкий</i>	0,019
20	<i>Дербенник иволистный</i>	0,089	53	<i>Одуванчик лекарственный</i>	0,017
21	<i>Люцерна хмелевидная</i>	0,082	54	<i>Луговик дернистый</i>	0,016
22	<i>Донник белый</i>	0,072	55	<i>Марь узколистная</i>	0,016
23	<i>Звездчатка злаковая</i>	0,069	56	<i>Лопух большой</i>	0,016
24	<i>Клевер луговой красный</i>	0,064	57	<i>Цикорий обыкновенный</i>	0,015
25	<i>Икотник серый</i>	0,063	58	<i>Тысячелистник обыкновенный</i>	0,015
26	<i>Мята болотная</i>	0,062	59	<i>Молочай обыкновенный</i>	0,014
27	<i>Клевер сходный</i>	0,053	60	<i>Бальзамин</i>	0,014
28	<i>Рожь посевная</i>	0,047	61	<i>Клевер шуршащий</i>	0,013
29	<i>Чистотел большой</i>	0,046	62	<i>Василек луговой</i>	0,012
30	<i>Редька дикая</i>	0,043	63	<i>Зюзник европейский</i>	0,011
31	<i>Подорожник большой</i>	0,043	64	<i>Мальва культурная</i>	0,010
32	<i>Ежа сборная</i>	0,042	65	<i>Спаржа лекарственная</i>	0,007
33	<i>Частуха подорожная</i>	0,041	66	<i>Пырей ползучий</i>	0,007

Обращает на себя внимание тот факт, что все растения в той или иной мере накапливают радиоактивный цезий. Диапазон изменения факторов перехода для различных видов растений очень велик и достигает трех порядков.

Максимальными факторами перехода характеризуются *кипрей болотный* (0,671), *очиток пурпурный* (0,244), *осока* (0,242), *шлемник обыкновенный* (0,23), *мышинный горошек* (0,221), *жерушник* (0,208) и другие растения, которые можно отнести к гипераккумуляторам радиоактивного цезия.

Минимальными факторами перехода обладают *полынь горькая* (0,001), *пырей ползучий* (0,007), *спаржа лекарственная* (0,007), которые можно назвать гипоаккумуляторами Cs^{137} .

Обращает на себя внимание тот факт, что некоторые виды растений способны в больших количествах накапливать радионуклиды (более 20 % от содержания последних в почве). Это обстоятельство является предпосылкой для ботанической реабилитации площадей, загрязненных по типу Чернобыльского следа.

Сущность указанного способа реабилитации заключается в следующем. На почвах, подлежащих очистке от радиоактивного загрязнения, систематически выращиваются растения, характеризующиеся максимальной способностью к извлечению радиоактивного элемента из питающей среды (почвы), то есть растения-гипераккумуляторы Cs^{137} (*мышинный горошек*, *шлемник обыкновенный* и другие). Урожай, обогащенный частично выведенными из почвы радионуклидами скашивается, озоляется и утилизируется. При этом цикл "выращивание гипераккумуляторов - скашивание - утилизация" повторяется до тех пор, пока уровень радиоактивности почвы не окажется соответствующим нормам радиационной безопасности.

Описанный способ позволяет сохранить плодородный почвенно-растительный слой и значительно сокращает срок реабилитации загрязненных площадей, если иметь в виду только естественную убыль активности загрязняющего радионуклида за счет распада.

При использовании технологии ботанической реабилитации почв, загрязненных радионуклидом Cs^{137} , важно знать характер распределения этого радионуклида в почвенном слое. Это может иметь значение при решении вопроса: доступен ли Cs^{137} для корневой системы растений.

На рис. 1 представлены результаты исследования распределения Cs^{137} по глубине почвенных разрезов [5]. Приведенные данные характеризуют ситуацию на 1995 год – спустя 9 лет после аварийного выброса на Чернобыльской АЭС. Из рисунка видно, что вся радиоактивность сосредоточена в верхнем 20-сантиметровом слое, а основная ее доля (около 90 %) - в 10-сантиметровом слое. Таким образом, скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} невелика, и ожидать значительного "самоочищения" почвы в ближайшие десятилетия не приходится. В настоящее время радиоцезий находится в корнеобитаемом почвенном слое и доступен растениям.

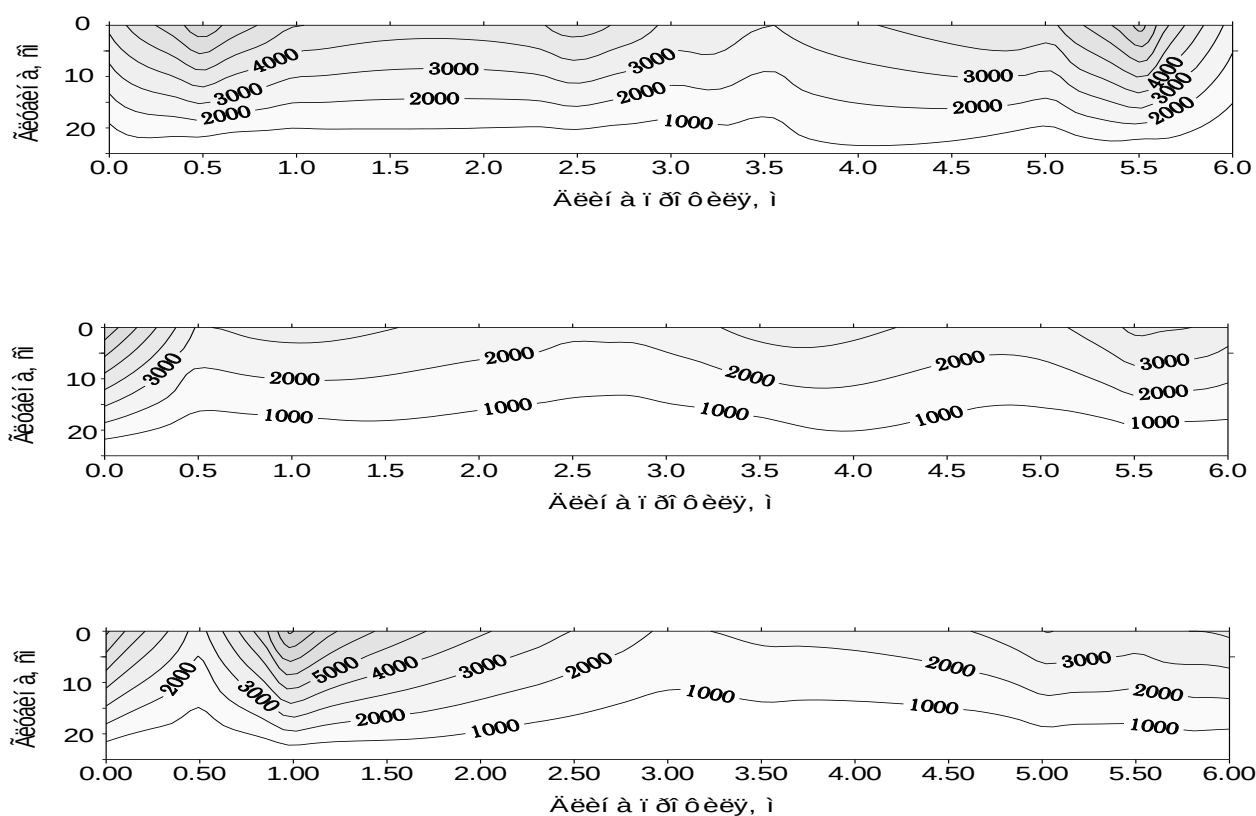


Рис. 1. Распределение удельной активности Cs^{137} по глубине нескольких почвенных разрезов Чернобыльского следа. Отметки изолиний соответствуют Бк/кг [1].

1.2.2. Основные количественные соотношения

Оценим время t , необходимое для снижения активности i -го радионуклида от начального a_{oi} до заданного $a_i(t)$ значения. При этом ограничимся только двумя из возможных факторов реабилитации – естественным остыванием и ботаническим выведением i -ой компоненты из среды загрязнения при культивировании растений j -го вида.

Предполагается, что в процессе "отсасывания" растениями i -го радионуклида, его количество, переходящее при прочих равных условиях из почвы в зеленую массу (подлежащую после созревания обязательной утилизации) составляет определенную, характерную для данного нуклида i и данного растения j долю активности i -ой компоненты, находящейся в среде загрязнения (почве).

Другими словами, фактор перехода ϕ_{ij} i -го радионуклида в зеленую массу j -го растения является константой, хотя результаты прямых измерений свидетельствуют о неустойчивости параметра ϕ_{ij} .

С учетом указанного выше допущения, формула для срока ботанической реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом i , остывающим с постоянной распада λ_i , выглядит следующим образом:

$$t = - \left(\frac{\tau_i \tau_{ij}}{\tau_i + \tau_{ij}} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (2)$$

где τ_i - средняя продолжительность жизни ядер i -го радионуклида; τ_{ij} - средняя продолжительность пребывания i -го радионуклида в загрязненной почве с учетом его выведения (эвакуации) j -ым растением (при заданных параметрах урожайности).

Из формулы (2) видно, что для оценки сроков реабилитации необходимо иметь количественные сведения о параметре τ_{ij} , поскольку остальные величины либо табулированы (τ_{ij}), либо известны из результатов непосредственных измерений (a_{oi}) или заданы [$a_i(t)$].

Прежде всего, оценим величину t для частных случаев.

1. Если $\tau_i \ll \tau_{ij}$, то

$$t \approx -\tau_{ij} \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (3)$$

В этом случае срок реабилитации будет определяться средней продолжительностью пребывания радионуклида i в среде загрязнения в связи с ботаническим фактором.

2. Допустим, что $\tau_i \gg \tau_{ij}$, тогда

$$t \approx -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (4)$$

Если средняя продолжительность естественного остывания i -го радионуклида невелика в сравнении с продолжительностью ботанического выведения, то срок реабилитации будет определяться параметром τ_i .

3. В частном случае, когда $\tau_i = \tau_{ij}$

$$t = -\frac{\tau_i}{2} \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (5)$$

то есть в этом случае срок реабилитации сокращается вдвое по сравнению с естественным остыванием.

Сопоставляя сроки реабилитации с использованием механизма ботанического выведения (t_{ij}) и без него (t_i) имеем при прочих равных условиях

$$\frac{t_i}{t_{ij}} = 1 + \frac{\tau_i}{\tau_{ij}}. \quad (6)$$

Поскольку параметры τ_i , τ_{ij} больше нуля, то правая часть (6) будет больше единицы.

Другими словами, при любых соотношениях между параметрами естественного остывания τ_i и ботанического выведения τ_{ij} срок реабилитации с применением технологии ботанического выведения оказывается меньше, чем без его использования, то есть в любом случае $t_{ij} < t_i$.

Для расчета параметра τ_{ij} введем понятие периода ботанического полувыведения T_{ij} , под которым будем понимать время, необходимое для выноса половины i -ой компоненты j -ым растением при некотором уровне урожайности.

Учитывая отмеченное, имеем для функции выживания i -го радионуклида в среде культивирования j -го аккумулятора:

$$1 - n \frac{m_j}{M} \varphi_{ij} = 2^{-k_{ij}}, \quad (7)$$

где m_j - урожайность (масса с единицы площади) аккумулирующей зеленой массы; M - масса загрязненного корнеобитаемого почвенного слоя единичной площади; n - кратность утилизации (количество урожаев за сезон); k_{ij} - срок выращивания j -го растения (промежуток времени Δt) в нормировке к периоду полувыведения j -ым растением i -го радионуклида (T_{ij}), то есть

$$k_{ij} = \frac{\Delta t}{T_{ij}}. \quad (8)$$

Если отношение nm_j/M обозначить через μ_j , тогда

$$T_{ij} = - \left(\frac{\ln 2}{\ln(1 - \mu_j \varphi_{ij})} \right) \Delta t, \quad (9)$$

откуда для τ_{ij} имеем

$$\tau_{ij} = - \frac{\Delta t}{\ln(1 - \mu_j \varphi_{ij})}. \quad (10)$$

Подставляя выражение для параметра τ_{ij} в формулу (2), получим выражение для оценки срока ботанической реабилитации почвы:

$$t = \left(\frac{\tau_i \Delta t}{\tau_i \ln(1 - \mu_j \varphi_{ij}) - \Delta t} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (11)$$

1.2.3. Оценка сроков реабилитации

Оценим время t для предельных случаев.

1. Если $\mu_j \varphi_{ij} \rightarrow 0$, то есть переход i -го радионуклида из почвы в растительную массу практически отсутствует. Тогда

$$t \rightarrow -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (12)$$

Это означает, что срок реабилитации почвы будет определяться лишь естественным остыванием i -го радионуклида.

2. Если $\mu_j \varphi_{ij} \rightarrow 1$, то есть практически вся активность за время Δt из почвы переходит в растительную массу. При этом

$$\frac{a_i(t = \Delta t)}{a_{oi}} \rightarrow 0 \quad (13)$$

и тогда

$$t \rightarrow \Delta t \quad (14)$$

В этом случае срок реабилитации почвы будет определяться лишь длительностью вегетационного периода Δt и может составить несколько месяцев.

Для большинства растений $0 < \mu_j \varphi_{ij} < 1$. На рис. 2 представлена оценка по соотношению (11) срока реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом Cs^{137} , при использовании в качестве средства дезактивации растения *мышинный горошек*.

Так, для гипераккумулятора *мышинный горошек* $\varphi_{ij} = 0,221$, его урожайность m_j при благоприятных условиях составляет 11 т/га . Масса загрязненного почвенного слоя площади 1 га , мощности 10 см и плотности 1 г/см^3 равна 1000 т . При двух укосах ($n=2$) за вегетационный период ($\Delta t = 0,25$ года) величина $\mu_j = 0,022$. Для уменьшения активности радионуклида Cs^{137} ($\tau_i = 43$ года) в загрязненной почве в 10 раз потребуется время равное 55 годам, для снижения почвенной радиоактивности в 5 раз - примерно 38 лет, в 2 раза - примерно 16 лет (рис. 2).

Рассчитанные сроки оказываются значительно меньше сроков реабилитации почвы без ботанического выведения радиоактивной компоненты. Так, за

счет естественного распада Cs^{137} его активность в почве снижается в 10 раз через 104 года. Это примерно в 2 раза больше, чем при использовании в качестве средства дезактивации *мышинного горошка*.

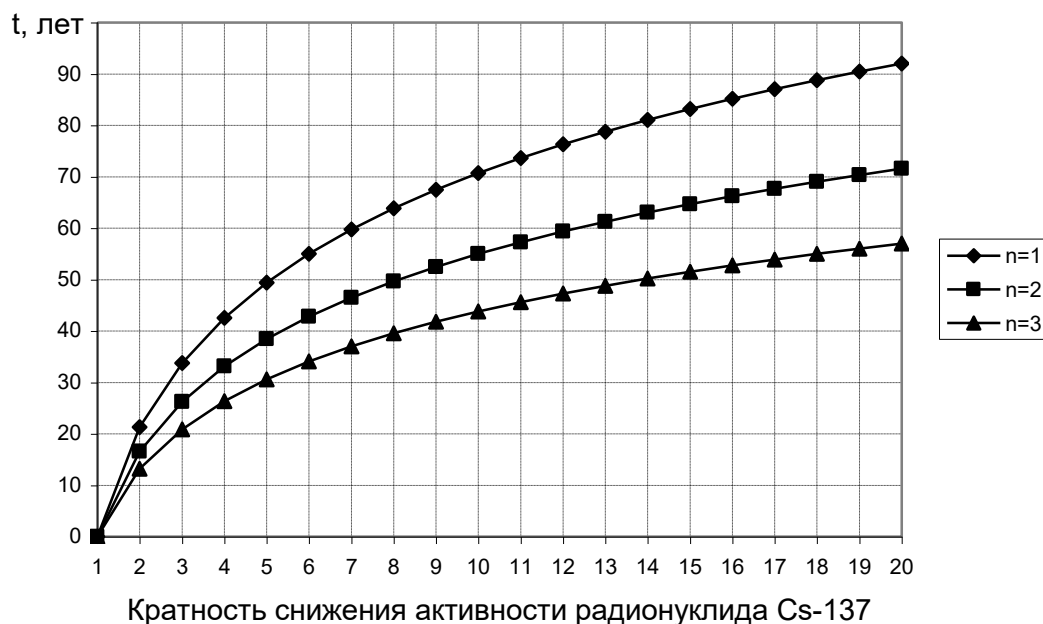


Рис. 2. Оценка срока реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом Cs^{137} , при использовании в качестве средства дезактивации растения *мышинный горошек*.

1.2.4. Понятие о факторе ботанической реабилитации и его количественная оценка

Выражение (11) для срока ботанической реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом i , можно упростить, имея в виду разложение

$$\ln(1-a)|_{a \ll 1} \approx -a. \quad (15)$$

С учетом (15) формула (11) выглядит следующим образом:

$$t \approx - \left(\frac{\tau_i \Delta t}{\tau_i \varphi_{ij} \mu_j + \Delta t} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (16)$$

или

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t} \varphi_{ij} \mu_j} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (17)$$

Обозначив $\theta_i = \tau_i / \Delta t$, получим:

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + \theta_i \varphi_{ij} \mu_j} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (18)$$

или

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + R} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (19)$$

где $R = \mu_j \theta_i \varphi_{ij}$ - фактор ботанической реабилитации.

Из формулы (19) видно, что при $R = 0$ реабилитация будет связана только с естественным остыванием радиоактивной компоненты, то есть

$$t_i \approx -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (20)$$

С возрастанием фактора реабилитации R , который включает в себя несколько составляющих, сроки дезактивации почвы уменьшаются и наоборот.

1.3. Практическое применение ботанической реабилитации

Результаты практического применения технологии ботанической реабилитации подтверждают ее основные теоретические положения и указывают на возможности очистки почв от радиоактивного загрязнения путем систематического отчуждения фитомассы, обогащенной радионуклидами.

Примером может служить один из участков Восточно-Уральского радиоактивного следа (ВУРСа), сформировавшегося в результате Кыштымской аварии 1957 года на ПО "Маяк". Участок располагается в южной части Каменского района Свердловской области в окрестностях оз. Тыгиш, где в настоящее время наблюдаются наибольшие остаточные уровни радиоактивного загрязнения, Содержание Sr^{90} в отдельных почвенных пробах соответствует плотности поверхностного загрязнения 5 и более Ки/км^2 .

Участок представлен почвами, с которых велся регулярный в послеаварийный период укос травы, и почвами, где отчуждение фитомассы не производилось (рис. 3а). Уровень загрязнения участка по Sr^{90} на 1997 год – до 1 Ки/км^2 .

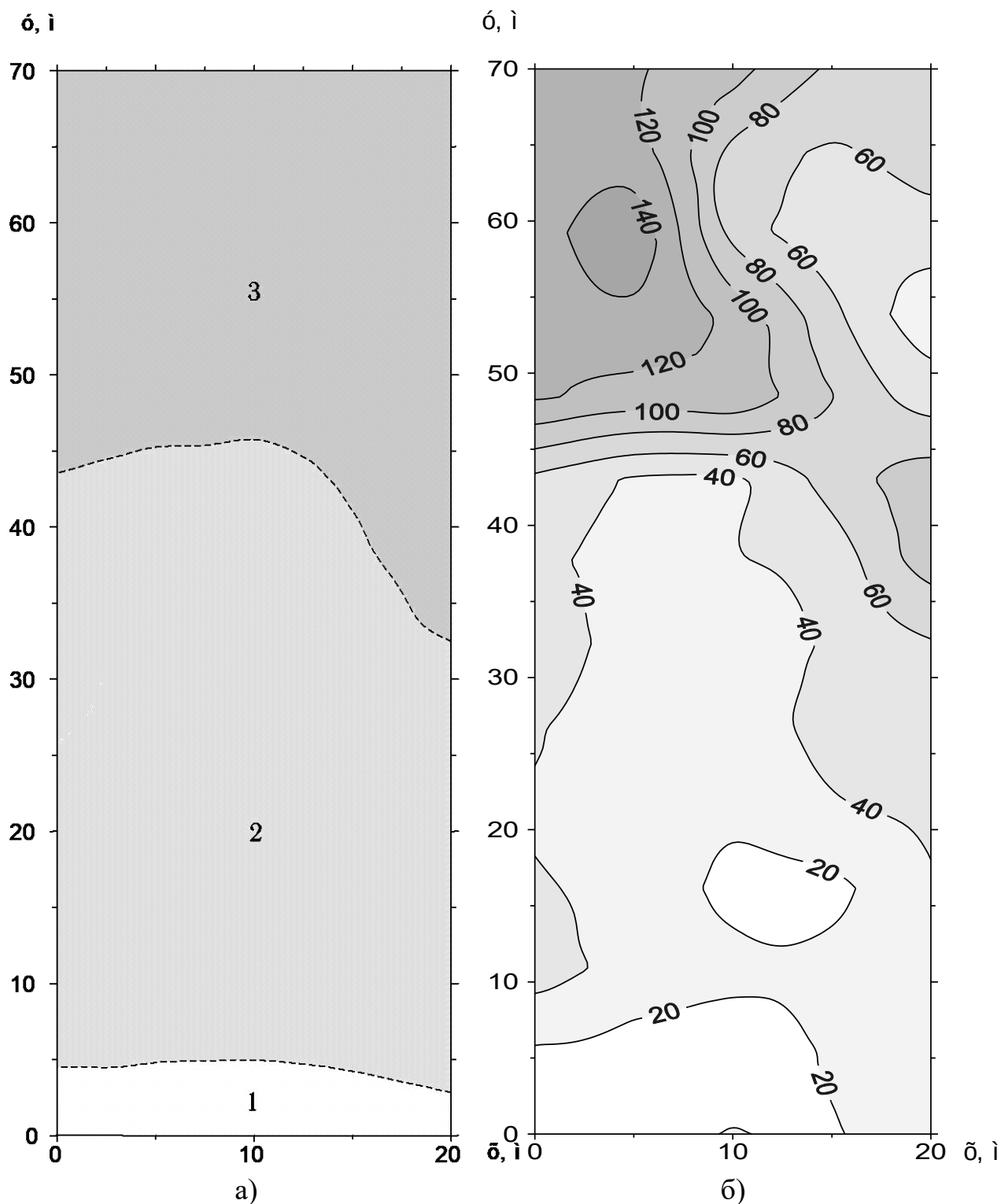


Рис. 3. а) Схема расположения различных по использованию почв на участке радиоэкологических исследований. б) Распределение β -активности по площади исследованного участка. Отметки изолиний соответствуют *имп/мин*.

Обозначения: 1 - сенокос на рекультивированной почве, 2 - сенокос на целинной почве, 3 - участок леса, где скашивание травы в послеаварийный период не производилось [1].

Так, северо-западную часть участка занимают почвы с погребенным гумусовым горизонтом, образование которого связано с проведением в начальный послеаварийный период серии дезактивационных работ. Последние были проведены на территории ВУРСа в зонах с максимальной плотностью загрязнения, и они представляют собой высокую отвальную вспашку, в результате которой верхняя часть гумусового профиля оказалась перемещенной на глубину 50-90 см. В настоящее время на этой почве производится выращивание многолетних трав, скашивание ведется с применением техники.

Средняя часть участка занята почвами, незатронутыми дезактивационными мероприятиями и которые с 1957 года используются местными жителями как естественный сенокос, скашивание ведется вручную.

И, наконец, юго-западную часть занимает лес. Эти почвы также не затронуты дезактивационными работами, но укос травы с них не производится даже вручную из-за наличия большого количества древесной растительности.

Исследования распределения β -активности по площади участка (Sr^{90} и его дочерний продукт Y^{90} являются β -излучателями) показали, что активность по β -лучам в той части участка, где производилось регулярное с момента загрязнения скашивание растительности, оказалась заметно ниже, чем в точках наблюдений, расположенных за пределами этой части, то есть где укос травы не производился (рис. 3б).

Контраст в аппаратном отклике по β -лучам хорошо виден на рис. 4, где представлена интенсивность β -излучения по одному из съемочных профилей участка. Так, минимальной β -активностью – 20 *имп/мин* характеризуются вспаханные рекультивированные почвы, на сенокосе β -отклик составил 30-40 *имп/мин*, а на территории леса отмечается максимальная активность по β -лучам – 80-140 *имп/мин*, что примерно в 3 раза больше, чем на сенокосе.

Систематическое скашивание и эвакуация растительности с фактором перехода по радиостронцию $\varphi_{ij} = 0,25$ с зараженной территории за 39 лет умень-

шили активность почв в 10 раз. Это сократило время, необходимое на такое снижение активности, более чем в 2 раза. Выращивание и утилизация *шлемника обыкновенного* с фактором перехода $\varphi_{ij} = 0,93$ могло бы обеспечить снижение активности Sr^{90} в почве в 10 раз, которое удалось зарегистрировать на участке, не за 39 лет, а примерно за 15 лет. Таким образом, возможность использования технологии ботанической реабилитации радиоактивно загрязненных почв получила экспериментальное подтверждение на локальном участке Восточно-Уральского радиоактивного следа [1].

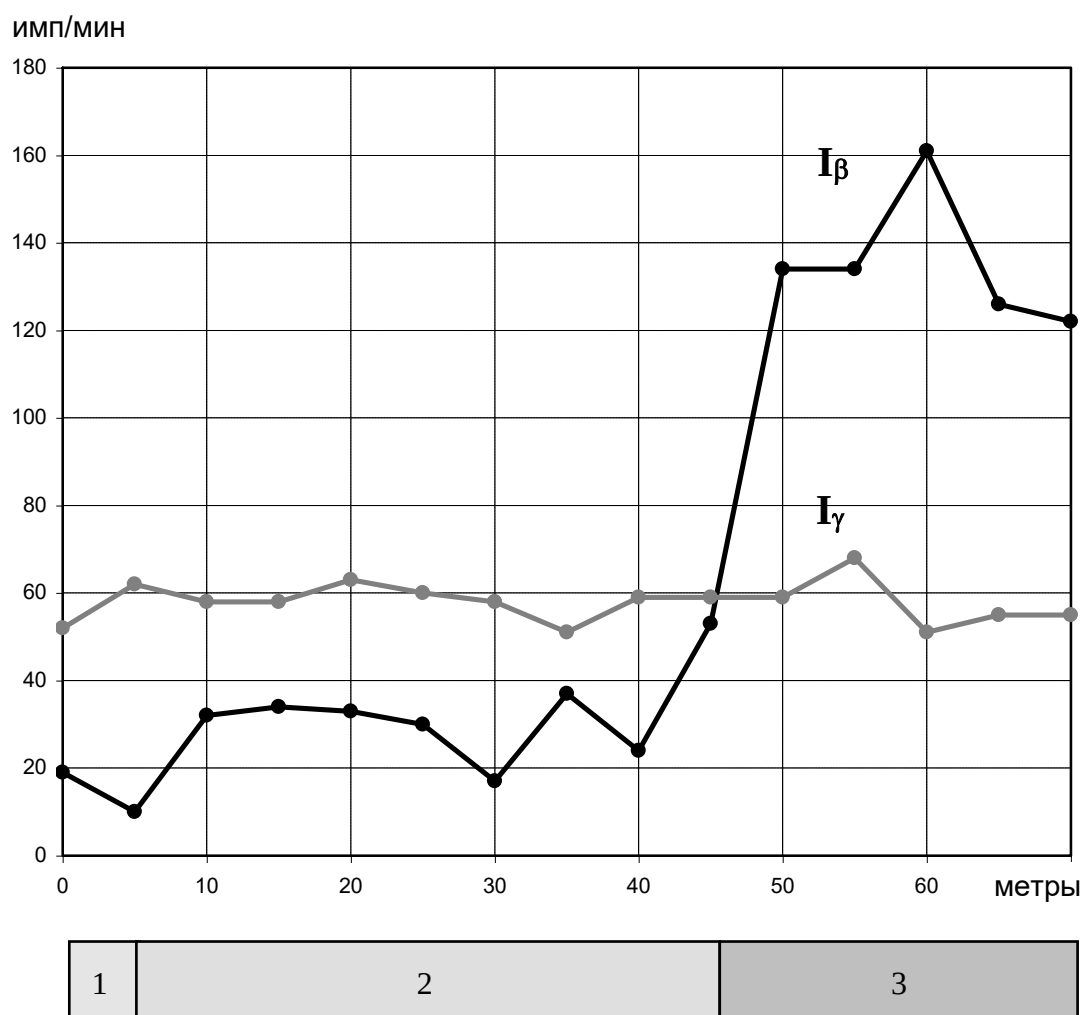


Рис. 4. Интенсивность β - и γ -излучения по съемочному профилю. Обозначения: 1- сенокос на рекультивированной почве, 2 - сенокос на целинной почве, 3 - лес.

2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

2.1. Изучение распределения радионуклида Cs^{137} в почвенном слое Чернобыльского следа

Задание

а) С помощью лабораторного гамма-спектрометра "Гамма-01С" зарегистрировать спектры гамма-излучения почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа с разной глубины почвенного слоя.

б) Произвести обработку полученных спектров и вычислить удельную активность радионуклида Cs^{137} в почвенных образцах.

в) Построить график вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном слое.

г) Сделать выводы о соответствии удельной активности Cs^{137} в почвенных образцах нормам радиационной безопасности и максимальной концентрации радиоактивного цезия в почвенном разрезе.

Материалы и оборудование

1. Лабораторный гамма-спектрометр "Гамма-01С".
2. Набор почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа с разной глубины почвенного слоя.
3. Эталон Cs^{137} с известной удельной активностью.
4. Набор образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).
5. Калькулятор, миллиметровка, карандаш, резинка, линейка.

Порядок выполнения работы

а) Лабораторный спектрометр подготовить к работе: прогреть в течение 10 минут, произвести градуировку энергетической шкалы с помощью образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).

б) Зарегистрировать спектр гамма-излучения эталонного образца Cs^{137} с экспозицией 10 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения эталона $S_{\text{эт}}$.

в) Зарегистрировать спектр фонового гамма-излучения с экспозицией 10 мин. Найти площадь S_{ϕ} , соответствующую энергетическому интервалу фотопика Cs^{137} на спектре фонового гамма-излучения эталона.

г) Взвесить почвенные образцы. Зарегистрировать спектры их гамма-излучения с экспозицией 10 мин (рис. 5). Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой почвенной пробы S_{ni} .

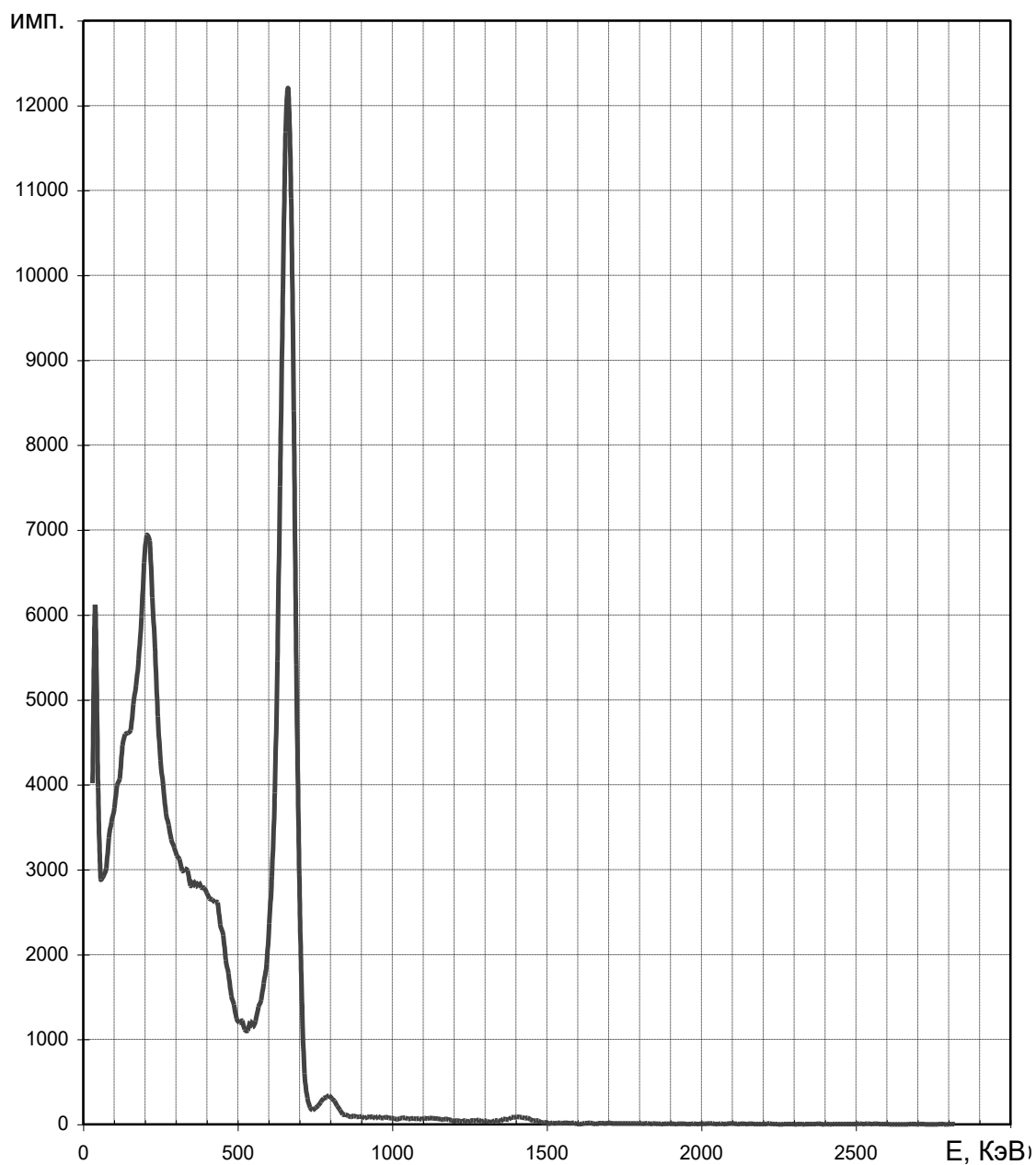


Рис. 5. Спектр гамма-излучения почвенной пробы локального участка Чернобыльского следа. Время измерения – 10 мин., масса – 100 г.

д) Вычисление удельной активности Cs^{137} в i -ом почвенном образце производится по формуле:

$$A_{ni} = A_{эм} \cdot \frac{S_{ni}}{S_{эм}} \cdot \frac{t_{эм}}{t_n} \cdot \frac{m_{эм}}{m_n}, \quad (21)$$

где $A_{эм}$ - удельная активность Cs^{137} в эталонном образце в $Bк/кг$; S_{ni} - площадь фотопика Cs^{137} на спектре γ -излучения i -ой почвенной пробы в $имп$; $S_{эм}$ - площадь фотопика Cs^{137} на спектре γ -излучения эталона в $имп$; $t_{эм}$ - время регистрации спектра эталонной пробы в $с$; t_n - время регистрации спектра почвенной пробы в $с$; $m_{эм}$ - масса эталонной пробы в $г$; m_n - масса почвенной пробы в $г$.

е) График вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном слое представить в виде гистограммы, образец которой приведен на рис. 6.

ж) Описать полученные результаты. Указать, находится ли Cs^{137} в корнеобитаемом почвенном слое, или он недоступен для корневого питания растений.

Контрольные вопросы

1. Какова основная цель изучения распределения радионуклида Cs^{137} в почвах Чернобыльского следа ?
2. Какова скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} в почвах?
3. Чем определяется скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} в почвах ?
4. Какие радионуклиды, кроме Cs^{137} , обнаружены Вами в почвенных образцах ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения измерений и последующей обработки данных.
3. График вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном разрезе.
4. Выводы.

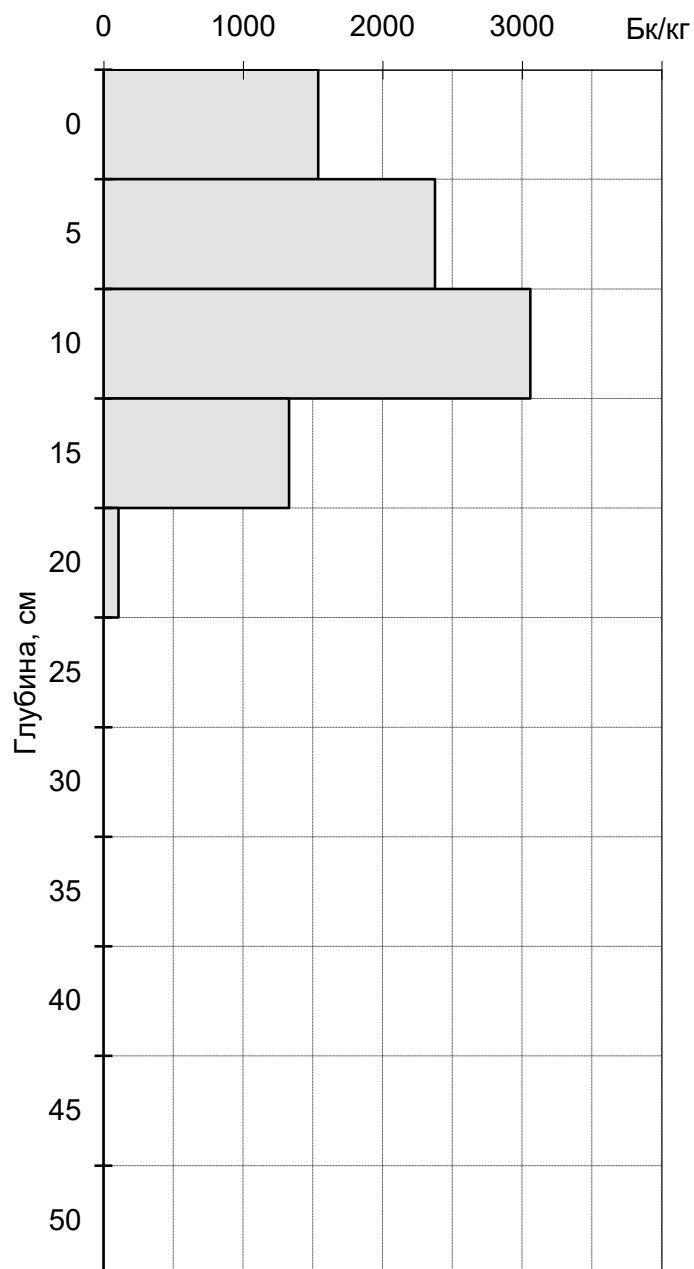


Рис. 6. Образец оформления графика вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном разрезе.

2.2. Определение факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения

Задание

а) С помощью лабораторного гамма-спектрометра "Гамма-01С" зарегистрировать спектры гамма-излучения растительных и почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа.

- б) Произвести обработку полученных спектров и вычислить удельную активность радионуклида Cs^{137} в растительных и почвенных образцах.
- в) Рассчитать факторы перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения.
- г) Сделать выводы.

Материалы и оборудование

1. Лабораторный гамма-спектрометр "Гамма-01С".
2. Эталон Cs^{137} с известной удельной активностью.
3. Набор образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).
4. Пробы растений *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
5. Пробы почв, соответствующие растениям *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
6. Калькулятор, карандаш, резинка.

Порядок выполнения работы

а) Лабораторный спектрометр подготовить к работе: прогреть в течение 10 минут, произвести градуировку энергетической шкалы с помощью образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).

б) Зарегистрировать спектр гамма-излучения эталонного образца Cs^{137} с экспозицией 10 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения эталона $S_{\text{эт}}$.

в) Зарегистрировать спектр фонового гамма-излучения с экспозицией 10 мин. Найти площадь $S_{\text{ф}}$, соответствующую энергетическому интервалу фотопика Cs^{137} на спектре фонового гамма-излучения эталона.

г) Взвесить подготовленные растительные образцы для *мышинного горошка* и *шлемника обыкновенного*. Зарегистрировать спектры их гамма-излучения с экспозицией 15 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой растительной пробы $S_{\text{рj}}$.

д) Взвесить почвенные образцы, соответствующие растениям *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*. Зарегистрировать спектры их гамма-излу-

чения с экспозицией 5 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой почвенной пробы S_{nj} .

е) По формуле (21) рассчитать удельную активность Cs^{137} в растительных и соответствующих им почвенных образцах.

ж) По соотношению (1) вычислить факторы перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.

з) Сделать заключение, относятся ли исследованные растения к гипераккумуляторам радиоактивного цезия или нет.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы реабилитации радиоактивно загрязненных территорий ? Каковы их недостатки и преимущества ?
2. Что такое фактор перехода радионуклида из почвы в растение ?
3. Какие растения-гипераккумуляторы радиоактивного цезия Вы можете назвать ?
4. Как можно оценить срок ботанической реабилитации почвы ?
5. Какие факторы влияют на срок ботанической реабилитации почвы ?
6. Что такое фактор ботанической реабилитации почвы ?
7. Как влияет фактор ботанической реабилитации на сроки снижения почвенной активности ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения измерений и последующей обработки данных.
3. Результаты расчета факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
4. Выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Ж.Н.* Ядерно-физические измерения параметров ботанической реабилитации радиоактивно загрязненных площадей: Диссертация на соискание ученой степени кандидата геол.- минерал. наук. – Екатеринбург, 1998. – 147 с.
2. *Александрова Ж.Н., Возжеников Г.С.* О возможности ботанической реабилитации загрязненных площадей Восточно-Уральского радиоактивного следа // Международная выставка-семинар "Уралэкология-95": Тез. докл. – Екатеринбург, 1995. – с.190-191.
3. *Антропогенная радионуклидная аномалия и растения* / Гродзинский Д.М., Коломиец К.Д., Кутлахмедов Ю.А. и др. – Киев: Лыбидь, 1991. – 156 с.
4. *Брукс Р.Р.* Биологические методы поисков полезных ископаемых: Пер. с англ. – М.: Недра, 1986. – 311 с.
5. *Поляков Ю.А.* Радиоэкология и дезактивация почв. – М.: Атомиздат, 1970. – 142 с.

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 2

Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комитету

С.А. Уиоров



**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Александрова Ж. Н.

Екатеринбург

2020



ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бельшев

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

**Часть 3
Определение радона в воде**

**Екатеринбург
2020**

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бelyшев

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 3
Определение радона в воде

Рецензент: Шапов В.А., старший научный сотрудник
Института геофизики УрО РАН, д-р геол.-мин. наук

Александрова Ж.Н., Бельшев Ю.В.

- А46 Лабораторный практикум по радиационной безопасности: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине "Радиационная безопасность" для студентов специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки» очной и заочной формы обучения; Часть 3. Определение радона в воде / Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бельшев; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2020. – 23 с.

В учебно-методическом пособии приводятся сведения о радиоактивном газе радоне, дан краткий обзор существующих способов его определения. Описан полевой эманометр «Радон» и порядок работы с ним. Пособие содержит руководство к выполнению лабораторной работы по определению концентрации радона в воде.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся специализациям «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» по специальности «Технология геологической разведки».

© Александрова Ж.Н., Бельшев Ю.В., 2018
© Уральский государственный горный
университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭМАНАЦИОННЫХ МЕТОДОВ	4
1.1 Свойства радона	4
1.2 Радон в воздухе зданий	6
1.3 Радон в питьевой воде	7
1.4 Способы определения радона	8
2. ПОЛЕВОЙ ЭМАНОМЕТР «РАДОН»	13
2.1 Основные технические данные и характеристики прибора	14
2.2 Устройство и принцип работы прибора	14
2.3 Подготовка прибора и измерительной установки к работе	15
2.4 Градуирование прибора	16
3. ПРОГРАММА ИЗМЕРЕНИЙ	18
4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	22
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	23

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭМАНАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

1.1 Свойства радона

После открытия радия, когда ученые познавали тайны радиоактивности, было установлено, что твердые вещества, находившиеся в близком соседстве с солями радия, становились радиоактивными. Однако, спустя несколько дней радиоактивность этих веществ исчезала бесследно. В 1902 году Дорн, изучавший это явление, пришел к выводу, что радий непрерывно испускает радиоактивное вещество, невесомые количества которого оседают на близлежащих предметах. Это вещество оказалось радиоактивным газом, который Резерфордом был назван эманацией радия. Слово "эманация" было заимствовано из латинского языка и означает "истечение".

Радиоактивные газы (эманации) - радон ${}^{222}\text{Rn}$ ($T_{1/2} = 3,82$ сут), торон ${}^{220}\text{Rn}$ (Tn, $T_{1/2} = 55,6$ с) и актинон ${}^{219}\text{Rn}$ (An, $T_{1/2} = 3,96$ с) входят в радиоактивные цепочки последовательно превращающихся *естественных* радионуклидов уранового ${}^{238}\text{U}$ ($T_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ лет), ториевого ${}^{232}\text{Th}$ ($T_{1/2} = 14 \cdot 10^9$ лет) и актиноуранового ${}^{235}\text{U}$ ($T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$ лет) рядов.

Радон – самый тяжелый из благородных газов. Он в 110 раз тяжелее водорода, в 55 раз тяжелее гелия. Не имеет ни запаха, ни вкуса, прозрачен и бесцветен.

Плотность радона при 0 °С равна 9,81 кг/м³, т.е. почти в 7,5 раз больше плотности воздуха. Однако пока эти сведения не проверены, так как чтобы получить один литр радона из солей радия, нужно около 500 кг радия. Если бы такой объем газа и был получен каким-либо образом, то, по словам Резерфорда, ученого, открывшего радон, "никакой сосуд не мог бы удержать его, так как количество тепла, испускаемое радоном, расплавило бы сосуд, в который его заключили".

Радон химически инертен и реагирует только с сильными фторирующими реагентами.

Радон образуется при распаде ${}^{226}\text{Ra}$ ($T_{1/2} = 1620$ лет), входящего в радиоактивное семейство ${}^{238}\text{U}$. Он является α -излучателем.

В результате радиоактивного распада ${}^{226}\text{Ra}$ образующийся радон попадает в кристаллическую решетку минералов. Процесс выделения радона из минералов и горных пород в поровое или трещинное простран-

ство получил название *эманирования*. Не все атомы радона могут выделиться в поровое пространство, поэтому для характеристики степени высвобождения радона из горных пород используется *коэффициент эманирования*:

$$\eta = \frac{Q_{\text{п}}}{Q_0} 100\% = \frac{C_{\text{п}} V_{\text{п}}}{C V} 100\% = \frac{C_{\text{п}}}{C} k_{\text{п}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где $Q_{\text{п}}$ - количество эманации, выделяемой в поровое пространство за некоторое время; Q_0 - полное количество эманации (включая «замурованную» часть в минеральных зернах), образующейся за тот же промежуток времени; $C = Q_0/V$ - общая концентрация эманации, находящейся в объеме V ; $V_{\text{п}}$ - объем пор; $k_{\text{п}} = V_{\text{п}}/V$ - коэффициент пористости породы.

Величина коэффициента эманирования зависит от характера породы, ее структуры и степени ее раздробленности. Чем меньше зерна породы, тем больше внешняя поверхность зерен, тем активнее идет процесс эманирования. Коэффициент эманирования может меняться от первых процентов (скальные породы) до 30-40 % (песчаники, угли) и даже 60 % (торфяники).

Попадая в поры горной породы эманации и в дальнейшем распространяются путем диффузии или конвективного переноса (по трещинам, разломам), образуя *газовый ореол рассеяния*. Растворенные в воде радиоактивные элементы и эманации могут мигрировать с подземными водами на значительные расстояния (до десятков километров), образуя *водный ореол рассеяния*.

Проводниками радона под землей являются региональные разломы, заложенные в допалеозойское время, и разломы, активизированные в мезо-кайнозойское время, с помощью которых радон появляется на поверхности земли и частично концентрируется в рыхлых отложениях.

Если в породе известна массовая доля P_U (%) урана, то концентрация $R_{\text{п}}$ в объеме порового пространства вычисляется по формуле:

$$C_{\text{Ra}}^{\text{пор}} = 3,4 \cdot 10^4 \frac{\eta}{k_{\text{п}}} \rho K_{\text{pp}} P_U, \quad (2)$$

где ρ - плотность горной породы (г/см^3); K_{pp} - коэффициент радиоактивного равновесия между радием и ураном.

$$K_{\text{pp}} = \frac{P_{\text{Ra}}}{P_U} \frac{1}{3,4 \cdot 10^{-7}}, \quad (3)$$

где P_{Ra} и P_U - содержания радия и урана соответственно.

Концентрация эманаций измеряется в долях удельной активности (Бк/л, Бк/м³ или Ки/л, Ки/м³) - количества ядерных превращений в секунду, происходящих в единице объема вещества.

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}, 1 \text{ эман} = 10^{-10} \text{ Ки/л} = 3,7 \text{ Бк/л}$$

При оценке концентрации T_n используется следующая формула:

$$C_{T_n}^{\text{пор}} = 2,6 \cdot 10^4 \frac{\eta}{k_{\Pi}} \rho P_{Th}. \quad (4)$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что распределение R_n между жидкой и газообразной фазами подчиняется закону Генри:

$$C_{\text{ж}} = \alpha(T) C_{\text{г}}, \quad (5)$$

где $C_{\text{ж}}$ - концентрация R_n в жидкости; $C_{\text{г}}$ - концентрация R_n в газе; $\alpha(T)$ - коэффициент растворимости (коэффициент Генри).

Установлена следующая эмпирическая зависимость растворимости радона в воде в зависимости от температуры:

$$\alpha(T) = 0,105 + 0,405 e^{-0,0502 \cdot T}. \quad (6)$$

Из формулы видно, что коэффициент α уменьшается с ростом температуры. При температурах 10, 20, 30, 40 °C он равен соответственно 0,35; 0,25; 0,20 и 0,16. При кипячении воды радон полностью удаляется.

В природе радона очень мало - его можно отнести к числу наименее распространенных на нашей планете химических элементов. Концентрация R_n в атмосфере оценивается цифрой $7 \cdot 10^{-17}$ % по весу. В земной коре его тоже очень мало, поскольку радон образуется из сверхредкого элемента - радия. Тем не менее, даже ничтожное присутствие радона можно обнаружить с помощью специальных приборов - эманометров.

1.2 Радон в воздухе зданий

Основным источником поступления радона в воздух помещений является геологическое пространство под зданием. Содержание радона в воздухе помещений зависит от его содержания в почве и подстилающих породах, их эманацирующей способности, климатических условий, конструкции зданий и системы их вентиляции, кратностью воздухообмена в помещении. Концентрации и потоки радона крайне неравномерны, они изменяются в очень широких пределах для различных регионов и видов зданий.

Свой вклад в поток радона, поступающий в помещение, создает и его выход из строительных конструкций - радон может генерироваться строительными материалами при достаточно большом содержании в них урана и тория. Генерируется он вследствие того, что при строительстве здания мог быть использован кирпич, изготовленный из глины, характеризующейся повышенной радиоактивностью.

При проектировании новых зданий жилищного и общественного назначения должно быть предусмотрено, чтобы объемная активность радона и торона и их дочерних продуктов распада в воздухе помещений не превышала **100 Бк/м³**.

В эксплуатируемых зданиях концентрация Rn^{222} и Rn^{220} и их дочерних продуктов распада в воздухе не должна превышать **200 Бк/м³**. При более высоких значениях объемной активности должны проводиться защитные мероприятия, направленные на снижение поступления радона в воздух помещений и улучшение вентиляции помещений.

Изотоп Rn^{222} (продукт распада ${}_{92}U^{238}$) дает примерно 50–55 % дозы облучения, которое ежегодно получает каждый житель Земли. Изотоп Rn^{220} (продукт распада ${}_{90}Th^{232}$) прибавляет к этому еще примерно 5–10 %. Однако исследования показали, что в отдельных местностях радоновое облучение во много раз и даже на несколько порядков может превышать средние величины.

1.3 Радон в питьевой воде

Каким образом радон попадает в питьевую воду? Он попадает в воду из окружающих пород (гранитов, базальтов и др.), с которыми соприкасаются водоносные слои. Поэтому концентрация радона в водах зависит от концентрации материнских элементов в горных породах, омываемых ею, коэффициента эманирования, пористости или трещиноватости горных пород и скорости движения воды (расхода потока). Рыхлые или трещиноватые породы характеризуются повышенными концентрациями радона (зоны тектонических нарушений, кора выветривания и т.д.).

Подземные воды трещинных массивов кислых кристаллических пород обычно отличаются наиболее высокой концентрацией радона, достигающей 500 Бк/л и выше. Значительно ниже концентрация радона в водах основных изверженных пород. Трещинные воды известняков, песчаников,

сланцев обычно имеют концентрацию радона в пределах 10-100 Бк/л. Однако, в отдельных случаях, и в этих породах могут встречаться повышенные концентрации радона. Подземные воды в горизонтах грунтовых вод, залегающих недалеко от поверхности, обычно имеют более низкую концентрацию радона, составляющую менее 50 Бк/л. В поверхностных водах концентрация радона, как правило, не превышает 2-5 Бк/л, главным образом, из-за того, что радон успевает распасться в течение существования воды в поверхностных условиях или уйти в атмосферу за счет аэрации.

В зависимости от геологических и гидрогеологических условий в различных районах земли создаются условия для формирования широкого спектра фоновых концентрации радона. Наряду с районами с пониженными фоновыми концентрациями радона в водах имеются территории с весьма высокими, “ураганными” содержаниями радона. Такие территории обнаружены в Бразилии, Индии, Канаде. В Иране известны родники с высокими концентрациями радона. Повышенными фоновыми концентрациями радона характеризуются скандинавские страны. Многочисленные зоны с высокой концентрацией радона в водах выявлены в США. В России выявлены зоны с концентрацией радона в воде в 300-400 Бк/л. Из-за разнообразия условий радононакопления в водах в разных странах приняты различные величины предельно допустимых концентраций радона, которые ограничивают использование вод с высоким содержанием радона. Так, в Финляндии предельно допустимые концентрации установлены на уровне 300 Бк/л, в Швеции - 300 Бк/л, в Ирландии - 200 Бк/л.

В России нормы радиационной безопасности устанавливают предельно допустимое содержание радона в воде в **60 Бк/л** при отсутствии в воде других радиоактивных веществ. До этого «Санитарные правила и нормы для централизованного водоснабжения» разрешали пользоваться водой с содержанием радона до 120 Бк/л.

1.4 Способы определения радона

Радон можно определить с помощью эманационных методов.

Под эманационным методом геофизической разведки понимают исследования распределения концентрации радиоактивных газов в горных породах, рудах, почве, атмосферном воздухе, воде в целях поисков и разведки месторождений радиоактивных руд, а также для решения некото-

рых геологических (картирование разломов, зон трещиноватости), инженерно-геологических (выявление пород с повышенной пористостью, отслеживание водных горизонтов) и экологических задач. Сравнительно недавно установлено аномальное поведение радона в подземных водах вблизи эпицентра землетрясения. Это открытие позволило создать метод прогноза землетрясений, который уже оправдал себя на практике.

В зависимости от природы эманаций различают радоновый, тороновый и актиноновый методы. Наибольшее распространение в полевых условиях получил радоновый метод эманационной съемки. Путем измерения концентраций Rn и Tn в почвенном воздухе и воде можно определять природу активного начала (тип радиоактивной аномалии) горных пород.

Эманационный метод представляет собой один из основных радиометрических методов геофизической разведки, что обуславливается его большой по сравнению с другими радиометрическими методами глубиной, так и его высокой чувствительностью.

Суть эманационных методов анализа заключается в следующем. Радиоактивные газы тем или иным способом извлекают из твердых или жидких веществ и переводят в ионизационную или сцинтилляционную камеру, чувствительную к α -частицам (радиоактивные эманации Rn , Tn , $Ап$ - это α -излучатели), которая предварительно градуируется с помощью жидкого радиевого стандартного образца (эталона). По ионизационному току или количеству импульсов определяют концентрацию эманации в камере и затем в исходной пробе почвенного воздуха или воды. Данные об активности Rn , Tn , $Ап$ используют для определения содержания долгоживущих материнских веществ - U (по Ra), Th и Ac .

Существует два наиболее распространенных способа анализа концентрации эманаций в водных пробах - *вакуумный* и *циркуляционный*.

При вакуумном способе (рис. 1, а) из сцинтилляционной камеры 1 объемом V_k и из осушителя 2 объемом V_{oc} через соединительные трубки 3 с зажимами $З_{1-2}$ откачивают воздух. Затем кран K_1 и зажимы в определенном порядке открывают, после чего атмосферный воздух, проходя через сосуд 4, обогащается растворенным в воде 5 радиоактивным газом, начинает поступать в эманационную камеру со скоростью около 100 пузырьков в минуту. Специальный сосуд (барботер) плотно закрыт резиновой пробкой 6 с винтовым зажимом, предотвращающей утечку эманации.

В замкнутой циркуляционной системе (рис. 1, б) эманация из сосуда с водой 4 (общий объем V_c , объем воды - $V_{\text{вод}}$) с помощью груши 7 объемом V_r через соединительные трубки 3 объемом V_t в течении некоторого времени прокачки $t_{\text{пр}}$ равномерно распределяется по всему *газовому* объему циркуляционной системы $V_{\text{сист}}$:

$$V_{\text{сист}} = V_k + V_{\text{ос}} + V_r + V_t + V_c - V_{\text{вод}} + \alpha V_{\text{вод}}, \quad (7)$$

или

$$V_{\text{сист}} = V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}}, \quad (8)$$

где $V_{\text{возд}}$ - объем воздуха в системе; $\alpha V_{\text{вод}}$ - объем эманации, растворенной в воде; α - коэффициент Генри.

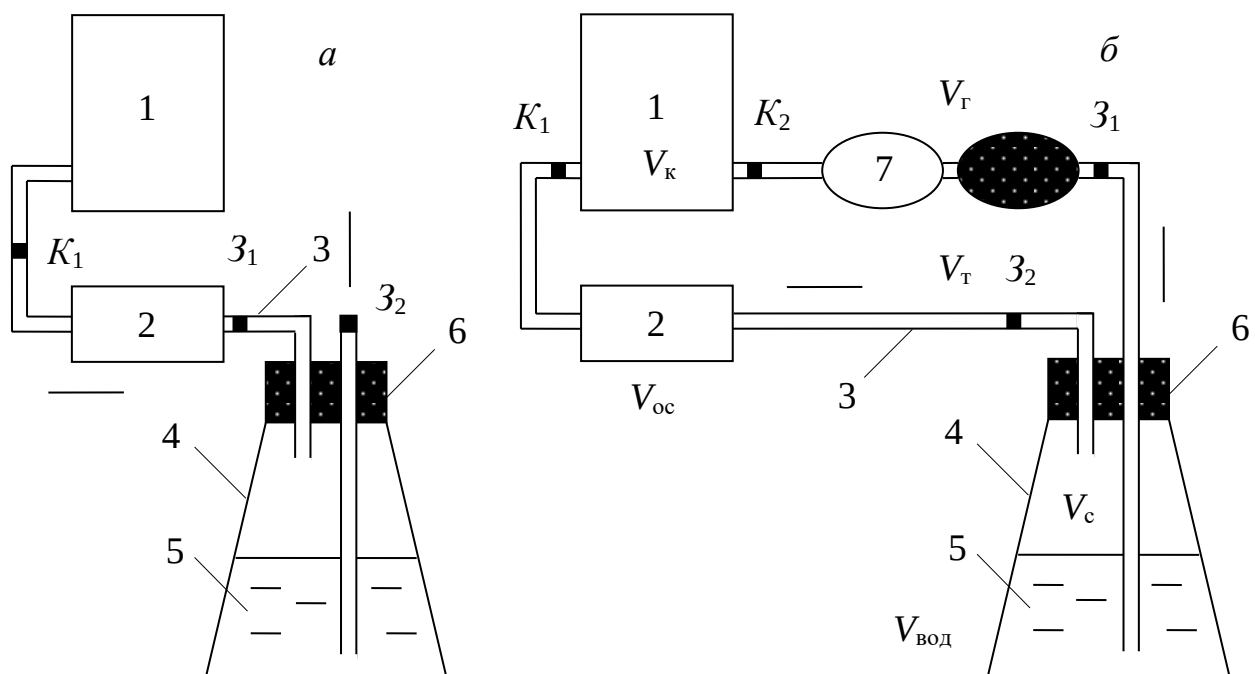


Рис. 1. Вакуумный (а) и циркуляционный (б) способы анализа. Стрелками показано направление движения воздуха

Имеет смысл сделать некоторые пояснения относительно объема эманации, растворенной в жидкости. Формулу (5) можно переписать так:

$$\frac{Q_{\text{ж}}}{\alpha V_{\text{ж}}} = \frac{Q_{\text{газ}}}{V_{\text{газ}}}, \quad (9)$$

где $Q_{\text{ж}}$, $Q_{\text{газ}}$ - количество эманации (Бк) в объемах $V_{\text{ж}}$ и $V_{\text{газ}}$.

Если бы мы перевели всю эманацию из жидкости в газ (что эквивалентно $Q_{\text{ж}} = Q_{\text{газ}}$), то объем $V_{\text{газ}}$, который она занимает в этом случае, со-

гласно (9) должен составить $\alpha V_{\text{вод}}$, что и отражено в соотношении (8).

После введения Rn в камеру и перекрытия зажимов начинает происходить накопление его дочерних продуктов распада (тоже α -излучателей), что приводит к увеличению интенсивности α -излучения I во времени (рис.2). Нарастание I зависит от продолжительности введения $t_{\text{пр}}$ эманации в камеру, от формы и размера камеры, типа детектора, поэтому наряду со значением I фиксируют интервал времени $t_{\text{пауз}}$ от момента прекращения прокачки системы до начала измерения скорости следования импульсов.

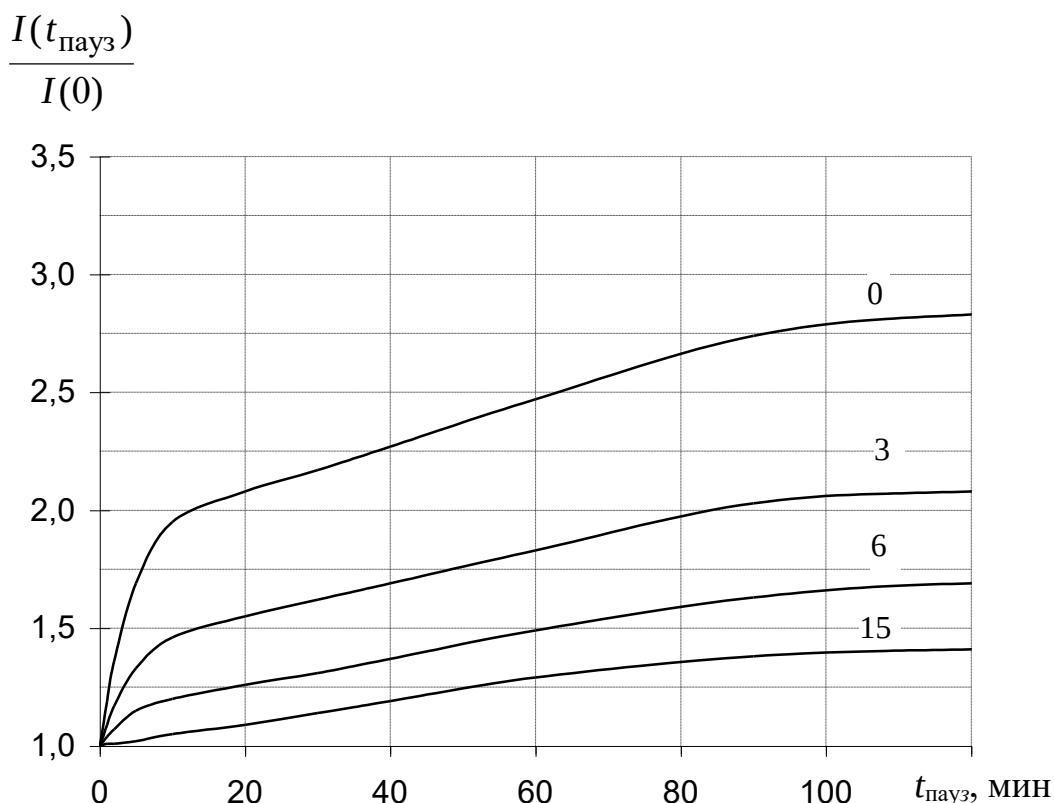


Рис. 2. Коэффициенты нарастания скорости счета импульсов в сцинтилляционной камере в зависимости от интервала $t_{\text{пауз}}$ и продолжительности прокачки системы $t_{\text{пр}}$ в минутах (шифр кривых)

Значение $t_{\text{пр}}$ выбирают одинаковым в процессе анализа проб и при градуировании аппаратуры. Для гидрохимических проб $t_{\text{пр}} = 3-6$ мин. Значение $t_{\text{пауз}}$ в анализах повышенной точности достигает нескольких часов, при изучении лито- и гидрохимических проб - от 3-10 мин до 3 ч.

Для анализа на Rn отбирают 0,2-0,5 л воды (в зависимости от объема барботера) и помещают ее в сосуд, включенный в циркуляционную систему. Желательно произвести эту операцию не позже 4-5 суток после мо-

мента отбора пробы, т.к. если вода не содержит солей Ra, то за этот интервал времени проба может потерять значительную долю активности.

Концентрация Rn в камере после прокачки системы, составляет

$$C_{Rn}^{возд} = \varepsilon I e^{-\lambda t}, \quad (10)$$

где I - скорость счета импульсов в превышении над фоном (имп/мин); ε - градуировочный коэффициент [эман/(имп/мин)]; t - время между отбором пробы и началом ее анализа; λ - постоянная распада Rn:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{3,82 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}. \quad (11)$$

Экспоненциальный множитель в формуле (10) выступает как поправка за распад эманации до начала проведения анализа. Если время t не превышает первых часов, то поправку можно не учитывать.

Количество Rn, циркулирующего в системе составляет

$$Q_{Rn}^{возд} = C_{Rn}^{возд} V_{сист} = \varepsilon I e^{-\lambda t} V_{сист}. \quad (12)$$

Поскольку из водной пробы был извлечен весь радон, то величина

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon I e^{-\lambda t} \frac{V_{сист}}{V_{вод}} = \varepsilon I e^{-\lambda t} \frac{(V_{возд} + \alpha V_{вод})}{V_{вод}} \quad (13)$$

представляет собой искомую концентрацию Rn в исследуемой пробе.

В случае, когда $V_{возд} \gg \alpha V_{вод}$ и можно пренебречь распадом Rn, формула (13) упрощается:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon I \frac{V_{сист}}{V_{вод}} \approx \varepsilon I \frac{V_{возд}}{V_{вод}}. \quad (14)$$

В полевых условиях содержание Rn в высокорadioактивных водах определяют γ -методом. Для этого водой заполняют стандартный сосуд объемом 8-12 л и в нем измеряют интенсивность γ -излучения. Расчет концентрации эманации ведут по формуле:

$$C_{Rn,\gamma}^{вод} = \varepsilon_{\gamma} I_{\gamma}, \quad (15)$$

где I_{γ} - интенсивность γ -излучения в превышении над естественным фоном (пА/кг или мкР/ч); ε_{γ} - градуировочный коэффициент, который при работе с радиометрами серии СРП-68 составляет около 300 Бк/л на 1 пА/кг (5,8 эман

на 1 мкР/ч).

Эманиационная съемка в полевых условиях заключается том, что в определенной точке съемочного профиля производится отбор проб почвенного воздуха с некоторой глубины. Почвенный воздух по соединительной системе с помощью ручного насоса закачивается в эманиационную камеру. После введения пробы воздуха в камеру, с помощью фотоэлектронного умножителя и счетного устройства импульсов определяется количество сцинтилляций, которое пропорционально концентрации R_n в камере. Сцинтилляционный метод применим для анализа проб воздуха, содержащих радон в концентрациях от нескольких десятых долей эмана и выше.

На рис. 3 приведена принципиальная схема эманиационных измерений на одной из точек съемочного профиля в полевых условиях.

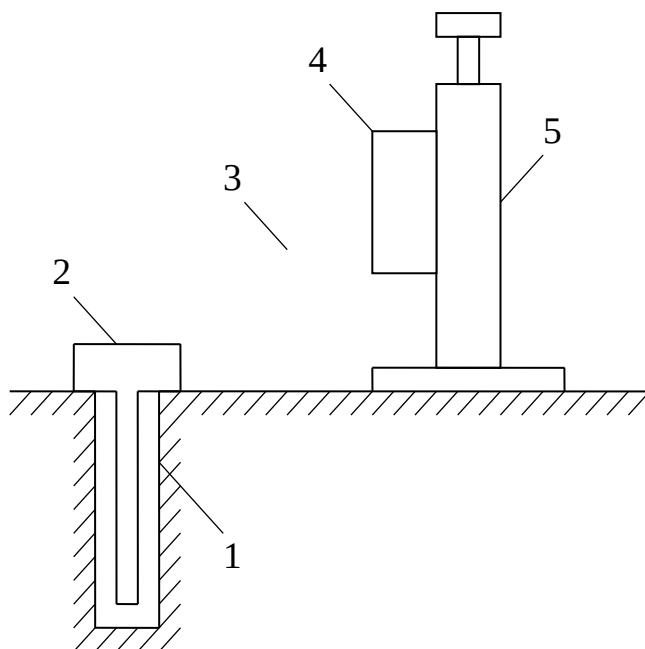


Рис. 3. Схема эманиационных измерений в полевых условиях. Обозначения: 1 – шпур; 2 – пробоотборник воздуха; 3 – соединительный шланг; 4 – эманиационная камера и измерительное устройство; 5 – держатель и ручной насос

2. ПОЛЕВОЙ ЭМАНОМЕТР «РАДОН»

Полевой сцинтилляционный эманометр «Радон» предназначен для определения концентрации R_n в почвенном воздухе при полевой эманиационной съемке и определения R_n в пробах воды. «Радон» может применяться и при дозиметрических измерениях. Эманометр в разных модифи-

кациях выпускался с конца 60-х до середины 80-х годов, когда ему на смену пришел более современный прибор РГА-01 «Глициния».

2.1 Основные технические данные и характеристики прибора

- Диапазон измерения скорости счета импульсов - от 0 до 5000 имп/с с поддиапазонами 50, 250, 1000 и 5000 имп/с.

- Чувствительность прибора после трехчасового накопления продуктов распада R_n при объеме камеры 0,5 л не менее 0,36 эман/(имп/с) при фоне в чистой камере не более 5 имп/мин.

- Прибор устойчиво работает в диапазоне температур 0-40 °С при относительной влажности до 80 %. Дополнительная погрешность прибора, вызванная изменением температуры, не более 10 %.

- Питание прибора осуществляется от шести элементов А-373.

- Дополнительная погрешность, вызванная изменением напряжения питания в пределах 8,1 до 9,9 при номинале 9,0 - не более 15 %.

- Основная погрешность измерений эманометра - не более 30 %.

2.2 Устройство и принцип работы прибора

Эманометр «Радон» состоит из следующих основных блоков: сцинтилляционной камеры, фотоэлектронного умножителя (ФЭУ), блока питания и стабилизатора напряжения, усилителя импульсов, порогового дискриминатора, интенсиметра α -излучения, электромеханического счетчика (ЭМС) импульсов с секундомером. В комплект эманометра входит также ручной насос для закачки почвенного воздуха, осушитель и соединительные трубки.

Сцинтилляционная камера представляет собой металлический стакан покрытый внутри слоем $ZnS(Ag)$ - веществом, фоточувствительным к ионизирующему воздействию α -частиц. При попадании α -частицы на слой сцинтиллятора возникает световой квант (вспышка света), который, попадая в фотоэлектронный умножитель, в результате фотоэффекта на катоде выбивает из него электрон. Под действием ускоряющего электрического поля напряжением ≈ 600 В фотоэлектрон в дальнейших столкновениях с *динодами* ФЭУ производит лавинообразное умножение заряда, снимаемого с анода в виде короткого (1-5 мкс) импульса напряжения. С выхода ФЭУ импульсы попадают на усилитель и далее - на пороговый дискриминатор, осуществля-

ющий их отбор по амплитуде. С выхода дискриминатора импульсы поступают на ЭМС и аналоговый интенсиметр со стрелочным индикатором, принцип работы которого близок для большинства радиометров.

На панели основного блока эманометра расположены: держатель ФЭУ со съемной сцинтилляционной камерой и металлическими кранами, стрелочный индикатор измерительного прибора (ИП), регулятор порога дискриминации, кнопка СБРОС, переключатель диапазонов измерений (50, 250, 1000, 5000 имп/с), переключатель РОД РАБОТ и разъем для подключения блока ЭМС. На отдельном блоке ЭМС расположены: секундомер (слева), стрелочный индикатор числа зарегистрированных импульсов, тумблер СТОП/ПУСК и переключатель масштабов $\times 1 / \times 2$.

Переключатель рода работ может находиться в следующих положениях: ВЫКЛ - прибор выключен, НБ - проверка напряжения питания батарей, НВ - проверка высокого напряжения питания ФЭУ. ИМП/СЕК - режим измерения скорости счета импульсов с помощью стрелочного индикатора, ЭМС - режим измерения скорости счета импульсов с помощью электромеханического счетчика. При относительно высоких скоростях следования импульсов (более 20 имп/с) используется режим измерения со стрелочным индикатором, при низких скоростях - режим ЭМС.

ВНИМАНИЕ! Категорически запрещается использовать режим ЭМС при скорости счета 30 имп/с и более - это может привести к выходу счетчика из строя!

2.3 Подготовка прибора и измерительной установки к работе

Подготовка прибора начинается с зарядки батарей в отсек питания и проверки напряжения питания с помощью переключателя рода работ (положение НБ). При правильной работе блока питания стрелка измерительного прибора должна находиться во второй половине шкалы.

ВНИМАНИЕ! Включение прибора в режим измерений возможно только с установленной эманационной или контрольной камерой! В противном случае может произойти засветка ФЭУ и выход его из строя.

Далее производится проверка высокого напряжения ФЭУ: при переключателе рода работ НВ стрелка ИП должна отклоняться не менее чем на

16 делений шкалы. Если этого не происходит, то необходимо подождать 3-5 минут пока не установится рабочий режим ($\approx 18-20$ делений).

С помощью контрольной камеры проверяется чувствительность прибора и правильность установки порога дискриминации. С этой целью на поддиапазоне не ниже 250 снимается зависимость скорости счета импульсов от положения порога дискриминации. В некотором диапазоне шкалы регулятора порога должно наблюдаться «плато» - незначительное изменение скорости счета. Регулятор порога устанавливается примерно в середину этого «плато». Если «плато» не наблюдается, то положение порога фиксируется исходя из паспортных значений чувствительности эманометра, измеренных с помощью контрольной камеры на разных диафрагмах.

Непосредственно перед началом измерений концентрации R_n необходимо проверить работоспособность эманационных камер и оценить их собственный фон. Камера считается пригодной к работе если фон не превышает 30-40 имп/мин. Дочерние продукты распада R_n , оседая на стенках сцинтилляционной камеры, могут вызвать ее радиационное загрязнение. Поэтому после измерений высокоактивных проб рекомендуется заменить камеру и не использовать ее до тех пор, пока фон не снизится до нормального уровня (за счет проветривания и распада радионуклидов).

Подготовка установки для измерения концентраций R_n в воде заключается в сборе циркуляционной системы (рис. 4.1, б). Перед подключением соединительных трубок к эманационной камере краны K_{1-2} должны быть обязательно закрыты во избежание попадания эманации в детектор до начала измерений. Следует также проверять герметичность системы в целом и отсутствие в ней утечек воздуха. Следует обратить внимание на направление подключения груши, в противном случае при прокачке вместо воздуха в камеру может попасть вода и вывести прибор из строя.

2.4 Градуирование прибора

Градуирование эманометра заключается в нахождении значения коэффициента ε . С этой целью 1-2 раза в месяц проводят измерения скорости счета импульсов на стандартных образцах (СО). В качестве СО используют помещенный в барботер раствор соли R_a массой m_{Ra} (г). Для удаления R_n сосуд с радиевым раствором продувают воздухом, плотно закрывают, момент герметизации фиксируют на этикетке СО. Время накоп-

ления Rn берут $t > 3$ суток.

Собирают циркуляционную систему (рис. 1, б), следя за тем, чтобы зажимы Z_{1-2} и краны K_{1-2} были закрыты. Далее измеряют фон камеры $I_{\text{ф}}$ (имп/мин) за время $t_{\text{изм}} = 3$ мин. После этого открывают зажимы Z_{1-2} , краны K_{1-2} и начинают прокачку воздуха в течении $t_{\text{пр}} = 3$ мин. Прокачку системы ведут в темпе, при котором в воде наблюдаются отдельные пузырьки воздуха, следующие друг за другом со скоростью около 300 в мин.

Затем камеру закрывают и в течении нескольких часов через каждые 3 мин фиксируют показания прибора, настроенного на заданную чувствительность (порогом дискриминации), и строят кривую нарастания I (за вычетом фона) во времени.

Градуировочный коэффициент ε в эман/(имп/мин) для момента времени $t_{\text{пауз}} = 3$ мин (значительная часть $T_{\text{п}}$ уже распадется) после прокачки воздуха вычисляют по следующей формуле:

$$\varepsilon = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{C_{\text{Rn}}^{\text{возд}}}{I(t_{\text{пауз}})}, \text{ или} \quad (16)$$

$$\varepsilon = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{m_{\text{Ra}} \cdot 10^{10}}{(V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}}) I(t_{\text{пауз}})}, \quad (17)$$

где $I(t_{\text{пауз}})$ - показания прибора, определяемые на графике для интервала времени $t_{\text{пауз}}$, принятого в процессе анализа проб.

Пример. Имеем эталон Ra массой $m_{\text{Ra}} = 8,55 \cdot 10^{-9}$ г и следующие режимы анализа: $t_{\text{пр}} = 3$ мин, $t_{\text{изм}} = 3$ мин, $t_{\text{пауз}} = 3$ мин. Параметры системы: $V_{\text{к}} = 0,5$, $V_{\text{ос}} = 0$, $V_{\text{г}} = 0,3$, $V_{\text{с}} = 0,5$, $V_{\text{т}} = 0,05$, $V_{\text{вод}} = 0,4$ (все в л), фон камеры $I_{\text{ф}} = 37$ имп/мин, температура $T_{\text{возд}} = 20$ °С. Эталон прокачен 72 ч назад, т.е. $t = 3$ сут.

Измеренная скорость счета импульсов на эталоне составила 1167 имп/с. После вычета фона $I(t_{\text{пауз}}) = 1167 - 37 = 1130$ имп/мин.

$$V_{\text{возд}} = V_{\text{к}} + V_{\text{ос}} + V_{\text{г}} + V_{\text{т}} + V_{\text{с}} - V_{\text{вод}} = 0,95 \text{ л.}$$

$$V_{\text{сист}} = V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}} = 0,95 + 0,2 \cdot 0,4 \approx 1 \text{ л.}$$

$$1 - \exp(-\lambda t) = 1 - \exp(-0,693 \cdot 3/3,82) = 0,42.$$

$$\varepsilon = 8,55 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{10} \cdot 0,42 / (1 \cdot 1130) = 0,032 \text{ эман/(имп/мин).}$$

При проведении градуирования аппаратуры особо тщательно следует следить за тем, чтобы раствор радия не попал внутрь эманационной ка-

меры. Последствия радиационного заражения эманометра крайне неприятны: необходимо полностью разобрать прибор, тщательно промыть каждую деталь. Зараженная камера не пригодна к дальнейшим измерениям.

3. ПРОГРАММА ИЗМЕРЕНИЙ

Задание:

1. Ознакомиться с элементами теории эманационных методов (раздел 1).
2. Ознакомиться с эманометром «Радон», его назначением и основными техническими характеристиками. Подготовить прибор и измерительную установку к работе (раздел 2).
4. Произвести градуировку эманометра в соответствии с описанием, приведенном в разделе 2.4 (выполняется строго под руководством преподавателя).
5. Отобрать пробы воды из разных источников и выполнить измерения концентраций Rn в соответствии с программой измерений (раздел 3).
6. Сделать выводы о соответствии нормам радиационной безопасности исследованных водных источников и возможной природе выявленных аномалий.
7. Ответить на контрольные вопросы (раздел 4).

Материалы, оборудование:

1. Эманометр «Радон» с контрольной камерой, комплект из 6 батарей питания к нему (А-373, «Орион»).
2. Набор сцинтилляционных эманационных камер объемом 0,5 л.
3. Эталонный водный раствор соли радия ($10^{-7} \div 10^{-9}$ г Ra).
4. Специальные сосуды для отбора водных проб (барботеры).
5. Соединительные резиновые трубки, груша для прокачки воздуха, стеклянные трубки, осушительная камера.
6. Калькулятор, журнал измерений, карандаш, резинка.

Отбор водных проб выполняется в следующем порядке:

1. Сосуды для отбора проб (барботеры) моются, желательно в речной или озерной воде, после чего сушатся. На барботеры наклеиваются этикетки из лейкопластыря для записи даты, времени и места отбора проб.

2. Отбор проб производится из водоемов, колодцев, родников, водопроводных кранов, скважин и других источников в объеме 0,3-0,35 л (сосуды емкостью 0,5 л) и 0,5-0,6 л (емкость 1 л). Из водоемов и колодцев отбираются пробы $V = 0,5-0,6$ л, из скважин и родников - $V = 0,3-0,35$ л.

3. Если вода набирается из крана, то струя воды должна бежать свободно, БЕЗ НАПОРА и пузырьков воздуха. Воду следует наливать аккуратно, так, чтобы она бежала по стенке сосуда и не плескалась на дне. Эти предосторожности гарантируют сохранность растворенного в воде Rn .

4. Сразу же после заполнения барботера водой (примерно до середины) его следует герметично закрыть, для чего зажимаются или перевязываются резиновые соединительные трубки. Пробка барботера плотно зажимается винтовым механизмом, причем следует контролировать силу зажима - стеклянные трубки внутри сосуда не должны расколоться.

5. На этикетке сосуда записывается время t_0 и место отбора пробы.

Подготовка прибора и измерительной установки к работе выполняется в соответствии с разделом 4.2.3, градуирование - по указанию преподавателя.

Выполнение измерений концентрации Rn производят так:

1. Собирают циркуляционную систему (рис. 1, б), следя за тем, чтобы зажимы Z_{1-2} и краны K_{1-2} были закрыты.

2. Измерят фон камеры I_f (имп/мин) за время $t_{изм} = 3$ мин. С этой целью переключатель рода работ устанавливают в положение ЭМС. В исходное состояние сбрасываются секундомер и ЭМС. Пересчетный коэффициент ЭМС устанавливают в положение $\times 2$ (регистрируется каждый второй импульс). Для начала измерений необходимо одновременно запустить секундомер и включить переключатель ПУСК счетчика импульсов. Далее следят за секундомером, так как счетчик автоматически не останавливается после истечения времени $t_{изм}$. По истечении заданной экспозиции переключатель переводят в положение СТОП.

3. Открывают зажимы Z_{1-2} , краны K_{1-2} и начинают прокачку воздуха в течении $t_{пр} = 3$ мин. Прокачку системы ведут в темпе, при котором в воде наблюдаются отдельные пузырьки воздуха, следующие друг за другом со скоростью около 300 в мин.

4. После прокачки воздуха краны K_{1-2} закрывают и выжидают некоторое время $t_{пауз} = 3$ мин, чтобы активность радона в камере немного увеличилась, а торона - значительно уменьшилась.

5. Записывают в журнал время начала анализа t_1 . Проводят измерения скорости счета импульсов I (имп/мин) в течении времени $t_{изм} = 3$ мин аналогично п.2.

6. Вычисляют концентрацию Rn в водной пробе по формуле:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon k (I - I_{\phi}) \frac{V_{сист}}{V_{вод}} \exp \left[-\frac{\ln 2}{3,82} (t_1 - t_0) \right], \quad (18)$$

где k - пересчетный коэффициент счетчика, для нашего случая $k = 2$.

В формуле (18) время отбора t_0 и начала анализа t_1 - в сутках. Если $t_1 - t_0 < 0,2$ сут, то вместо (18) используется более простая формула:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon k (I - I_{\phi}) \frac{V_{сист}}{V_{вод}}. \quad (19)$$

При вычислениях принять:

$$V_{сист} = V_{возд} + \alpha V_{вод}, \quad \alpha = 0.2;$$

$$V_{возд} = V_{к} + V_{ос} + V_{г} + V_{т} + V_{с} - V_{вод}.$$

$$V_{к} = 0,5 \text{ л}, V_{ос} = 0,2 \text{ л}, V_{г} = 0,3 \text{ л}, V_{т} = 0,05 \text{ л}, V_{с} = 0,5 \text{ или } 1,0 \text{ л}.$$

Объем воды $V_{вод}$ в барботере определяют по оцифрованной шкале.

В процессе измерений рекомендуется вести следующую форму лабораторного журнала:

Прибор № _____ Оператор _____
 $t_{пр} = \underline{\hspace{2cm}}$ $t_{пауз} = \underline{\hspace{2cm}}$ $t_{изм} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ $\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$ эман/(имп/мин)

	Место отбора пробы воды	t_0 , сут	t_1 , сут	I_{ϕ} , имп	I , имп	$I - I_{\phi}$, имп	$V_{вод}$, л	$V_{возд}$, л	$\frac{V_{сист}}{V_{вод}}$	C_{Rn} , эман
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Примечание. Если градуирование не проводится, то значение пересчетного коэффициента ε принимается равным 0,05 эман/(имп/с).



Рис. 4.4. Процесс измерения концентрации радона в водных пробах, отобранных в разных точках Верх-Сысертского участка

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сущность, цели и задачи эманационной съемки.
2. Радиоактивные газы и их краткая характеристика.
2. Глубинность эманационных методов (отдельно по R_n и T_n).
3. По какой формуле можно оценить концентрацию радона в поровом пространстве горной породы?
4. Единицы измерения концентрации эманаций и их соотношение.
5. Закон Генри. Зависимость коэффициента Генри от температуры.
5. Способы анализа концентрации эманаций в воздухе и в воде.
6. Полевой эманометр «Радон» и его краткая характеристика.
7. На каком физическом эффекте основан метод определения концентрации радиоактивных газов прибором «Радон»?
7. Устройство эманометра «Радон» и подготовка его к работе.
8. Порядок градуирования эманометра «Радон».
9. Порядок отбора и анализа содержания R_n в водных пробах.
10. Почему после ввода R_n в сцинтилляционную камеру скорость счета импульсов увеличивается с течением времени?
11. Если спустя несколько суток после отбора водной пробы ее α -активность не изменилась, то какой Вы можете сделать вывод?
12. Назовите физические предпосылки для раздельного определения концентраций радона, торона и актинона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Возжеников Г.С., Бельшев Ю.В.* Радиометрия и ядерная геофизика: Учебное пособие. - Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2011.
2. *Гонсалес А.Х., Андерс Ж.* Естественные и искусственные источники излучения. В кн.: Ядерная энергия в будущем. МАГАТЭ, 1989. Т. 31, № 2.
3. *Жуковский М. В.* Радон: измерение, дозы, оценка риска. - Екатеринбург: ИПЭ, 1997.
4. *Крисюк Э.М.* Радиационный фон помещений. М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. *Нефёдов В.Д.* и др. Радиохимия. – М: Высшая школа, 1985.
6. Радиация: Дозы, эффекты, риск. Пер. с англ. - М.: Мир, 1998.
7. *Смыслов А.А., Максимовский В.А., Харламов М.Г.* и др. Радон в земной коре и риск радоноопасности // Разведка и охрана недр. 1995. № 5.
8. *Титов В.К., Лучин И.А., Лашков Б.П.* Радон в почвах и зданиях - Л.: Рудгеофизика, 1991.
9. *Уткин В.И.* Газовое дыхание Земли // Соросовский образовательный журнал. – М., 1997. – № 1.
10. *Уткин В. И.* Радоновая проблема в экологии. // Соросовский образовательный журнал. – М., 2000. - том 6, № 3.

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна
Белышев Юрий Владимирович

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 3
Определение радона в воде

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

ФИЛОСОФИЯ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	7
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	8
4	Методические рекомендации по написанию эссе	10
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	13
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	13
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	15
	Заключение	18
	Список использованных источников	19

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить опiski, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии ¹.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)².

¹ Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

² Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласована с преподавателем и соответствовать теме занятия;
- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;
- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;
- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)
2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.
3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;
- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки). Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов.

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

Источники. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и

недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. *discussio* - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обуславливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным, выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточить внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное

обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства.

Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров

Автор: Железникова А.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Б1.О.02.02 ИСТОРИЯ РОССИИ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	6
ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	18
ПОДГОТОВКА К ДОКЛАДУ.....	22
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ.....	27
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	30
ПОДГОТОВКА ЭССЕ.....	31
ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ.....	34
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	36

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении – это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;
- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны – это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа – практические занятия;
2. внеаудиторная самостоятельная работа – подготовка к практическим занятиям, подготовка к устному опросу, участию в дискуссиях, решению практико-ориентированных задач и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине *«История России»* обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и к сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине *«История России»* являются:

- повторение материала лекций;

- самостоятельное изучение тем курса (в т. ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- подготовка к практическим (семинарским) занятиям (в т. ч. подготовка доклада, подготовка к выполнению практико-ориентированного задания);
- подготовка к тестированию;
- подготовка эссе;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории

- 1.История как наука. Сущность, формы, функции исторического знания.
- 2.Методы и источники изучения истории. Понятие и классификация исторического источника.
- 3.Концепции исторического процесса.
- 4.История России - неотъемлемая часть всемирной истории.
- 5.Историография отечественной истории.

Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян

- 1.Этногенез восточных славян.
- 2.Славяне: расселение, занятия, общественное устройство, верования.
- 3.Предпосылки образования государственности у восточных славян
- 4.Норманнская и антинорманнская теории.
5. Первые князья династии Рюриковичей.
6. Русь и Византия. Первые договоры.

Тема 3. Киевская Русь

Социально-экономический и общественно-политический строй Киевской Руси (конец X – первая треть XII вв.).

- 2.Формирование системы государственного управления. Князья Игорь, Ольга, Святослав.
3. Князь Владимир. Крещение Руси и его значение.
4. Ярослав Мудрый. «Русская правда» - первый свод законов Древнерусского государства. Владимир Мономах.

Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности

- 1.Предпосылки распада Киевской Руси и начала феодальной раздробленности.
2. Политическая раздробленность на Руси
 - а) Новгородская боярская республика.
 - б) Владимиро-Суздальская Русь. Юрий Долгорукий, Андрей Боголюбский, Всеволод Большое Гнездо.
 - в) Галицко-Волынская земля. Ростислав Мстиславич, Даниил Романович.
 - г) Киевская земля в период феодальной раздробленности.
3. Последствия раздробленности.
4. Завоевательные походы монголов и нашествие Батыя на Русь.
5. Борьба с немецко-шведской агрессией. Деятельность А.Невского
6. Золотоордынское влияние на развитие средневековой Руси: оценки историков.

Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)

1. Предпосылки и особенности процесса объединения русских земель.
2. Этапы политического объединения, их характеристика и содержание. Иван Калита, Дмитрий Донской.
3. Социально-экономическое развитие и формирование политических основ Российского государства при Иване III и Василии III.
4. Внутренняя и внешняя политика Ивана IV.
5. Культура Руси XIV – начала XVI вв.

Тема 6. Российское государство в XVII в.

1. Смутное время начала XVII в.
2. Развитие Российского государства при первых царях династии Романовых:
 - а) новые явления в социально-экономической жизни;
 - б) движение социального протеста;
 - в) государственно-общественное развитие;
 - г) реформы патриарха Никона и церковный раскол;
 - д) внешняя политика России в XVII в., присоединение новых территорий

Тема 7. Россия в XVIII в.

Реформы Петра I и начало российской модернизации

2. Внешняя политика Петра I. Рождение Российской империи.
3. «Эпоха дворцовых переворотов» (1725–1762 гг.).
4. Царствование Екатерины II:
 - а) социально-экономическое развитие России во 2-й половине XVIII в.;
 - б) «Просвещенный абсолютизм»: содержание, особенности, противоречия.
4. Российское государство в конце XVIII века. Павел I.
5. Внешняя политика России
6. Европеизация и секуляризация русской культуры: результаты и последствия.

Тема 8. Россия в XIX в.

1. Александр I и его преобразования. М.М. Сперанский.
2. Внешняя политика в первой четверти XIX в.
3. Внутренняя и внешняя политика императора Николая I.
4. Александр II. Отмена крепостного права и ее влияние на социально-экономическое развитие страны.
5. Либерально-буржуазные реформы 60–70-х гг. XIX в. и их последствия.
6. «Контрреформы» Александра III: корректировка реформаторского курса.
7. Общественно-политические движения (консервативный, либеральный, революционный лагерь).
8. Внешняя политика России во второй половине XIX в.

9. Культура и общественная жизнь России в XIX в.

Тема 11. Россия в XX в.

1. Проблемы российской модернизации на рубеже XIX –XX вв. Программа индустриализации С. Ю. Витте. Реформы П. А. Столыпина.
2. Революция 1905–1907 гг. в России. Становление многопартийности и парламентаризма в России.
3. Внешняя политика. Первая мировая война.
4. Февральская революция 1917 года. Октябрь 1917 года: приход к власти большевиков.
5. Гражданская война в России и первое десятилетие Советской власти
6. Новая экономическая политика: цели, направления, результаты.
7. Социально-экономические преобразования в СССР:
 - а) индустриализация страны: необходимость, источники, методы, итоги;
 - б) коллективизация сельского хозяйства;
 - в) формирование и упрочение административно-бюрократической системы.
8. Политическая система СССР в 1930-е годы. Завершение «культурной революции».
9. Образование СССР. Внешняя политика СССР в 1930-е гг.
10. СССР во Второй мировой войне
 - а) подготовка страны к войне, этапы войны;
 - б) крупнейшие сражения, партизанское движение, работа тыла;
 - в) СССР и союзники во Второй мировой войне;
 - г) итоги войны, цена Великой победы.
11. СССР в послевоенный период
12. Социально-экономическое и общественно-политическое развитие СССР в 1946–1953 гг.
13. Успехи и противоречия социально-экономического и внешне-политического развития страны под руководством Н. С. Хрущева
14. Советское общество в эпоху «застоя» в период руководства Л.И. Брежнева
15. СССР в середине 1980-1990 гг.
 - а) Экономические преобразования в стране. Политика «ускорения». «Перестройка» в СССР.
 - б) Концепция «Нового политического мышления» и ее претворение в жизнь.
 - в) Реформирование политической системы. Распад СССР.

Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.

1. Геополитические последствия распада СССР. Провозглашение суверенитета Российской Федерации.
2. Формирование новой государственности. Конституция 1993 г.
3. Социально-экономические преобразования. Рыночная модернизация страны.

4. Внешнеполитическая деятельность в условиях новой геополитической ситуации. Россия и мир на рубеже XX– XXI.

ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории

История
Исторический факт
Исторический источник
Интерпретация
Этнос
Менталитет
Государство
Цивилизация
Формация
Классы
Прогресс
Регресс
Общественно-экономическая формация
Геополитика

Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян

Великое переселение народов
Этногенез
Военная демократия
Язычество
Полюдь
Повоз
Погосты и уроки
Феодализм
Варяги
Верьвь
Вече
Племенной союз
Государство
Князь
Русь
Волхвы
Анты и венеды
Отроки
Смерды
Закупы
Рядовичи
Холопы

Тема 3. Киевская Русь

«Русская правда»

Вотчина

Боярская дума

Децентрализация

Уделы

Централизация

Поместье

Воевода

Ремесло

Феодализм

Феодальные отношения

Усложнение социальной структуры

Культура народная, культура религиозная

Фольклор

Храм

Икона фреска

Летописание

Эволюция государственности

Хазары, половцы, печенеги

Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности

Великий князь

Княжеский двор

Дружина

Междоусобные войны

Феодальная раздробленность

Феодальные центры

Боярская республика

Посадник

Тысяцкий

Сепаратизм

Последствия раздробленности

Держава Чингисхана

Золотая Орда

Монголо-татарское нашествие

Баскак

Выход

Подушная подать

Монголо-татарское иго

Ярлык

Проблема взаимовлияния

Вторжения с северо-запада

Ливонский орден

Рыцари

Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)

Централизация
Приказы
Поместье
Дворяне
Местничество
Кормление
Крепостное право
Боярская дума
Натуральное хозяйство
Судебник
Государев дворец
Государева казна
Государственные символы
«Москва – третий Рим»
Сословно-представительная монархия
Земский собор
Митрополит
Крепостное право
Венчание на царство
Избранная рада
Реформа
Приказы
Стрелецкое войско
Стоглав
Опричина
Губные избы
Династический кризис

Тема 6. Российское государство в XVII в.

Смутное время
Интервенция
Крестьянская война
Семибоярщина
Самозванство
Народное ополчение
Сословно-представительная монархия
Патриарх
«Бунташный век»
Тягло
Урочные и заповедные лета
Мануфактуры
Юридическое закрепощение крестьян
Личная зависимость

Внеэкономическая эксплуатация
Стрельцы
Казаки
Полки нового строя
Раскол в Русской православной церкви
Старообрядчество
Ярмарка
Абсолютная монархия

Тема 7. Россия в XVIII в.

Абсолютизм
Империя
Регулярная армия
Синод
Сенат
Министерства
Коллегии
«Великое посольство»
Подушная подать
Табель о рангах
Рекруты
Ассамблеи
Кунсткамера
Протекционизм
Меркантилизм
Государственная монополия
Дворцовые перевороты
Гвардия
Верховный Тайный совет
Кондиции
«Бироновщина»
Просвещенный абсолютизм
Уложенная комиссия
Жалованная грамота
Приписные крестьяне
Обер-прокурор
Господствующее сословие
Податные сословия
Крестьянская война

Тема 8. Россия в XIX в.

Либеральные реформы
Конституционализм
Негласный комитет
Государственный Совет

Отечественная война
Конституция
Монархия
Крестьянский вопрос
Либерализм
Аракчеевщина
Реакция
Консерватизм
Общественное движение
Декабристы
Западники
Славянофилы
Теория «официальной народности»
Восточный вопрос
Бюрократизация
Кодификация
Финансовая реформа Е.Ф. Канкрин
Буржуазия
Капитализм
Рабочий класс
Промышленный переворот
Крестьянская реформа
Выкупные платежи
Временно-обязанные крестьяне
Уставные грамоты
Крестьянская община
Народничество, радикализм
Рабочее движение
Марксизм
Социал-демократия
Контрреформы
Легитимность
Выкупная сделка
Мировой суд
Земство
Всесословная воинская повинность
Буржуазия, пролетариат
Индустриализация и модернизация
Союз трех императоров

Тема 9. Россия в XX веке.

Монополия
Промышленный подъем
Депрессия
Модернизация

Революция
Манифест
Конституционная монархия
Политическая партия
Государственная Дума
Прогрессивный блок
Революционные партии
Антанта
Тройственный союз
Аграрная реформа
Отруб, хутор
Советы
Большевики, меньшевики
Временное правительство
Республика
Двоевластие
Учредительное собрание
Первая Мировая война

Совет народных комиссаров
Красная Армия
Белое движение
Гражданская война
Сепаратный мирный договор
Иностранная интервенция
Мировая революция
Декреты
Военный коммунизм
Продразверстка
Авторитаризм
Тоталитаризм
Коминтерн
Новая экономическая политика
Продналог
Индустриализация
Коллективизация
Культурная революция
«Мюнхенский сговор»
Лига Наций
Коллективная безопасность
Вторая Мировая война
Пакт о ненападении

Государственный Комитет обороны, Ставка Верховного
главнокомандования
Эвакуация

Антигитлеровская коалиция
Второй фронт
Коренной перелом
Партизанское движение, подпольное движение
Сопротивление
Фашизм, японский милитаризм
Ленд-лиз
Капитуляция
ООН
НАТО, ОВД
Репрессии
Либерализация политического режима
Десталинизация
Денежная реформа
Мировая социалистическая система
«Оттепель»
ГУЛАГ
Реабилитация
«Холодная война»
Совхоз
Целина
Мелиорация
Спутник
Освоение космоса
Паритет
Правозащитное движение
Диссиденты
Развитой социализм
Герантократия
Разрядка
«Теневая экономика»
Концепция развитого социализма
Разрядка международной напряженности
Стабильность кадров
Реформа хозяйственного механизма
Экстенсивный путь развития
Страны социалистической ориентации
Перестройка
Гласность
«Новое политическое мышление»
Плюрализм
СНГ
Приватизация
Прибыль и рентабельность
Госприемка

«Шоковая терапия»
Ваучер
Распад СССР
Многопартийность
Возрождение парламентаризма
Рыночная экономика
Борьба с экстремизмом и терроризмом
Дефолт
Стабилизация
Финансовый кризис
Содружество Независимых государств

Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.

Правовое государство
Гражданское общество
Рыночная экономика
Дефолт
Вертикаль власти
Олигархи
Глобализация
Совет Федерации
Государственная Дума
Совет Европы
ВТО

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);
- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);
- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;
- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;
- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);
- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;
- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьёзный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не

механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять

изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя

пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА ДОКЛАДА

Одной из форм текущего контроля является доклад, который представляет собой продукт самостоятельной работы студента.

Доклад - это публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

Как правило, в основу доклада ложится анализ литературы по проблеме. Он должен носить характер краткого, но в то же время глубоко аргументированного устного сообщения. В нем студент должен, по возможности, полно осветить различные точки зрения на проблему, выразить собственное мнение, сделать критический анализ теоретического и практического материала.

Подготовка доклада является обязательной для обучающихся, если доклад указан в перечне форм текущего контроля успеваемости в рабочей программе дисциплины.

Доклад должен быть рассчитан на 7-10 минут.

Обычно доклад сопровождается представлением презентации.

Презентация (от англ. «presentation» - представление) - это набор цветных слайдов на определенную тему, который хранится в файле специального формата с расширением PP.

Целью презентации - донести до целевой аудитории полноценную информацию об объекте презентации, изложенной в докладе, в удобной форме.

Перечень примерных тем докладов с презентацией представлен в рабочей программе дисциплины, он выдается обучающимся заблаговременно вместе с методическими указаниями по подготовке. Темы могут распределяться студентами самостоятельно (по желанию), а также закрепляться преподавателем дисциплины.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления.

Для этого, остановитесь на теме, которая вызывает у Вас больший интерес; определите цель выступления; подумайте, достаточно ли вы знаете по выбранной теме или проблеме и сможете ли найти необходимый материал;

- осуществить сбор материала к выступлению.

Начинайте подготовку к докладу заранее; обращайтесь к справочникам, энциклопедиям, научной литературе по данной проблеме; записывайте необходимую информацию на отдельных листах или тетради;

- организовать работу с литературой.

При подборе литературы по интересующей теме определить конкретную цель поиска: что известно по данной теме? что хотелось бы узнать? для чего нужна эта информация? как ее можно использовать в практической работе?

- во время изучения литературы следует: записывать вопросы, которые возникают по мере ознакомления с источником, а также ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- обработать материал.

Учитывайте подготовку и интересы слушателей; излагайте правдивую информацию; все мысли должны быть взаимосвязаны между собой.

При подготовке доклада с презентацией особо необходимо обратить внимание на следующее:

- подготовка доклада начинается с изучения источников, рекомендованных к соответствующему разделу дисциплины, а также специальной литературы для докладчика, список которой можно получить у преподавателя;
- важно также ознакомиться с имеющимися по данной теме монографиями, учебными пособиями, научными информационными статьями, опубликованными в периодической печати.

Относительно небольшой объем текста доклада, лимит времени, отведенного для публичного выступления, обуславливает потребность в тщательном отборе материала, умелом выделении главных положений в содержании доклада, использовании наиболее доказательных фактов и убедительных примеров, исключении повторений и многословия.

Решить эти задачи помогает составление развернутого плана.

План доклада должен содержать следующие главные компоненты: краткое вступление, вопросы и их основные тезисы, заключение, список литературы.

После составления плана можно приступить к написанию текста. Во вступлении важно показать актуальность проблемы, ее практическую значимость. При изложении вопросов темы раскрываются ее основные положения. Материал содержания вопросов полезно располагать в таком порядке: тезис; доказательство тезиса; вывод и т. д.

Тезис - это главное основополагающее утверждение. Он обосновывается путем привлечения необходимых цитат, цифрового материала, ссылок на статьи. При изложении содержания вопросов особое внимание должно быть обращено на раскрытие причинно-следственных связей, логическую последовательность тезисов, а также на формулирование окончательных выводов. Выводы должны быть краткими, точными, достаточно аргументированными всем содержанием доклада.

В процессе подготовки доклада студент может получить консультацию у преподавателя, а в случае необходимости уточнить отдельные положения.

Выступление

При подготовке к докладу перед аудиторией необходимо выбрать способ выступления:

- устное изложение с опорой на конспект (опорой могут также служить заранее подготовленные слайды);
- чтение подготовленного текста.

Чтение заранее написанного текста значительно уменьшает влияние выступления на аудиторию. Запоминание написанного текста заметно сковывает выступающего и привязывает к заранее составленному плану, не давая возможности откликаться на реакцию аудитории.

Короткие фразы легче воспринимаются на слух, чем длинные.

Необходимо избегать сложных предложений, причастных и деепричастных оборотов. Излагая сложный вопрос, нужно постараться передать информацию по частям.

Слова в речи надо произносить четко и понятно, не надо говорить слишком быстро или, наоборот, растягивать слова. Надо произнести четко особенно ударную гласную, что оказывает наибольшее влияние на разборчивость речи.

Пауза в устной речи выполняет ту же роль, что знаки препинания в письменной. После сложных выводов или длинных предложений необходимо сделать паузу, чтобы слушатели могли вдуматься в сказанное или правильно понять сделанные выводы. Если выступающий хочет, чтобы его понимали, то не следует говорить без паузы дольше, чем пять с половиной секунд.

Особое место в выступлении занимает обращение к аудитории. Известно, что обращение к собеседнику по имени создает более доверительный контекст деловой беседы. При публичном выступлении также можно использовать подобные приемы. Так, косвенными обращениями могут служить такие выражения, как «Как Вам известно», «Уверен, что Вас это не оставит равнодушными». Выступающий показывает, что слушатели интересны ему, а это самый простой путь достижения взаимопонимания.

Во время выступления важно постоянно контролировать реакцию слушателей. Внимательность и наблюдательность в сочетании с опытом позволяют оратору уловить настроение публики. Возможно, рассмотрение некоторых вопросов придется сократить или вовсе отказаться от них.

После выступления нужно быть готовым к ответам на возникшие у аудитории вопросы.

Стоит обратить внимание на вербальные и невербальные составляющие общения. Небрежность в жестах недопустима. Жесты могут быть приглашающими, отрицающими, вопросительными, они могут подчеркнуть нюансы выступления.

Презентация

Презентация наглядно сопровождает выступление.

Этапы работы над презентацией могут быть следующими:

- осмыслите тему, выделите вопросы, которые должны быть освещены в рамках данной темы;
- составьте тезисы собранного материала. Подумайте, какая часть информации может быть подкреплена или полностью заменена изображениями, какую информацию можно представить в виде схем;
- подберите иллюстративный материал к презентации: фотографии, рисунки, фрагменты художественных и документальных фильмов, материалы кинохроники, разработайте необходимые схемы;
- подготовленный материал систематизируйте и «упакуйте» в отдельные блоки, которые будут состоять из собственно текста (небольшого по объему), схем, графиков, таблиц и т.д.;
- создайте слайды презентации в соответствии с необходимыми требованиями;
- просмотрите презентацию, оцените ее наглядность, доступность, соответствие языковым нормам.

Требования к оформлению презентации

Компьютерную презентацию, сопровождающую выступление докладчика, удобнее всего подготовить в программе MS Power Point.

Презентация как документ представляет собой последовательность сменяющих друг друга слайдов. Чаще всего демонстрация презентации проецируется на большом экране, реже – раздается собравшимся как печатный материал.

Количество слайдов должно быть пропорционально содержанию и продолжительности выступления (например, для 5-минутного выступления рекомендуется использовать не более 10 слайдов).

На первом слайде обязательно представляется тема выступления и сведения об авторах.

Следующие слайды можно подготовить, используя две различные стратегии их подготовки:

1-я стратегия: на слайды выносятся опорный конспект выступления и ключевые слова с тем, чтобы пользоваться ими как планом для выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- объем текста на слайде – не больше 7 строк;
- маркированный/нумерованный список содержит не более 7 элементов;
- отсутствуют знаки пунктуации в конце строк в маркированных и нумерованных списках;
- значимая информация выделяется с помощью цвета, кегля, эффектов анимации.

Особо внимательно необходимо проверить текст на отсутствие ошибок и опечаток. Основная ошибка при выборе данной стратегии состоит в том, что выступающие заменяют свою речь чтением текста со слайдов.

2-я стратегия: на слайды помещается фактический материал (таблицы, графики, фотографии и пр.), который является уместным и достаточным средством наглядности, помогает в раскрытии стержневой идеи выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- выбранные средства визуализации информации (таблицы, схемы, графики и т. д.) соответствуют содержанию;
- использованы иллюстрации хорошего качества (высокого разрешения), с четким изображением (как правило, никто из присутствующих не заинтересован вчитываться в текст на ваших слайдах и всматриваться в мелкие иллюстрации).

Максимальное количество графической информации на одном слайде – 2 рисунка (фотографии, схемы и т.д.) с текстовыми комментариями (не более 2 строк к каждому). Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.

Обычный слайд, без эффектов анимации, должен демонстрироваться на экране не менее 10 - 15 секунд. За меньшее время аудитория не успеет осознать содержание слайда.

Слайд с анимацией в среднем должен находиться на экране не меньше 40 – 60 секунд (без учета времени на случайно возникшее обсуждение). В связи с этим лучше настроить презентацию не на автоматический показ, а на смену слайдов самим докладчиком.

Особо тщательно необходимо отнестись к оформлению презентации. Для всех слайдов презентации по возможности необходимо использовать один и тот же шаблон оформления, кегль – для заголовков - не меньше 24 пунктов, для информации - не менее 18.

В презентациях не принято ставить переносы в словах.

Наилучшей цветовой гаммой для презентации являются контрастные цвета фона и текста (белый фон – черный текст; темно-синий фон – светло-желтый текст и т. д.).

Лучше не смешивать разные типы шрифтов в одной презентации.

Рекомендуется не злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже).

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными заданиями понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;

2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;

3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

Примером практико-ориентированного задания по дисциплине «История России» выступает **анализ исторического документа**.

Алгоритм анализа исторического документа:

1. Происхождение текста.

1.1. Кто написал этот текст?

1.2. Когда он был написан?

1.3. К какому виду источников он относится: письмо, дневник, официальный документ и т.п.?

2. Содержание текста.

Каково содержание текста? Сделайте обзор его структуры. Подчеркните наиболее важные слова, персоналии, события. Если вам не известны какие-то слова, поработайте со словарем.

3. Достоверна ли информация в тексте?

3.1. Свидетелем первой или второй очереди является автор текста? (Если автор присутствовал во время события, им описываемого, то он является первоочередным свидетелем).

3.2. Текст первичен или вторичен? (Первичный текст современен событию, вторичный текст берет информацию из различных первичных источников. Первичный текст может быть написан автором второй очереди, то есть созданным много позже самого события).

4. Раскройте значение источника и содержащейся в ней информации.

5. Дайте обобщающую оценку данному источнику.

- Когда, где и почему появился закон (сборник законов)?
- Кто автор законов?
- Чьи интересы защищает закон?
- Охарактеризуйте основные положения закона (ссылки на текст, цитирование).
- Сравните с предыдущими законами.
- Что изменилось после введения закона?
- Ваше отношение к этому законодательному акту (справедливость, необходимость и т.д.).

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

ПОДГОТОВКА ЭССЕ

Эссе - прозаическое сочинение небольшого объема и свободной композиции на частную тему, трактуемую субъективно и обычно неполно. (Словарь Ожегова)

Жанр эссе предполагает свободу творчества: позволяет автору в свободной форме излагать мысли, выражать свою точку зрения, субъективно оценивать, оригинально освещать материал; это размышление по поводу когда-то нами услышанного, прочитанного или пережитого, часто это разговор вслух, выражение эмоций и образность.

Уникальность этого жанра в том, что оно может быть написано на любую тему и в любом стиле. На первом плане эссе – личность автора, его мысли, чувства, отношение к миру. Однако необходимо найти оригинальную идею (даже на традиционном материале), нестандартный взгляд на какую-либо проблему. Для грамотного, интересного эссе необходимо соблюдение некоторых правил и рекомендаций.

Особенности эссе:

- - наличие конкретной темы или вопроса;
- - личностный характер восприятия проблемы и её осмысления;
- - небольшой объём;
- - свободная композиция;
- - непринуждённость повествования;
- - внутреннее смысловое единство;
- - афористичность, эмоциональность речи.

Эссе должно иметь следующую структуру:

1. Вступление (введение) определяет тему эссе и содержит определения основных встречающихся понятий.

2. Содержание (основная часть) - аргументированное изложение основных тезисов. Основная часть строится на основе аналитической работы, в том числе - на основе анализа фактов. Наиболее важные обществоведческие понятия, входящие в эссе, систематизируются, иллюстрируются примерами. Суждения, приведенные в эссе, должны быть доказательны.

3. Заключение - это окончательные выводы по теме, то, к чему пришел автор в результате рассуждений. Заключение суммирует основные идеи. Заключение может быть представлено в виде суммы суждений, которые оставляют поле для дальнейшей дискуссии.

Требования, предъявляемые к эссе:

1. Объем эссе не должен превышать 1–2 страниц.

2. Эссе должно восприниматься как единое целое, идея должна быть ясной и понятной.

3. Необходимо писать коротко и ясно. Эссе не должно содержать ничего лишнего, должно включать только ту информацию, которая необходима для раскрытия вашей позиции, идеи.

4. Эссе должно иметь грамотное композиционное построение, быть логичным, четким по структуре.

5. Эссе должно показывать, что его автор знает и осмысленно использует теоретические понятия, термины, обобщения, мировоззренческие идеи.

6. Эссе должно содержать убедительную аргументацию для доказательства заявленной по проблеме позиции. Структура любого доказательства включает по меньшей мере три составляющие: тезис, аргументы, вывод или оценочные суждения.

- Тезис — это сужение, которое надо доказать.
- Аргументы — это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса.
- Вывод — это мнение, основанное на анализе фактов.
- Оценочные суждения — это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах.

Приветствуется использование:

- Эпиграфа, который должен согласовываться с темой эссе (проблемой, заключенной в афоризме); дополнять, углублять лейтмотив (основную мысль), логику рассуждения вашего эссе. Пословиц, поговорок, афоризмов других авторов, также подкрепляющих вашу точку зрения, мнение, логику рассуждения.
- Мнений других мыслителей, ученых, общественных и политических деятелей.
- Риторические вопросы.
- Непринужденность изложения.

Подготовка и работа над написанием эссе:

- изучите теоретический материал;
- уясните особенности заявленной темы эссе;
- продумайте, в чем может заключаться актуальность заявленной темы;
- выделите ключевой тезис и определите свою позицию по отношению к нему;
- определите, какие теоретические понятия, научные теории, термины помогут вам раскрыть суть тезиса и собственной позиции;
- составьте тезисный план, сформулируйте возникшие у вас мысли и идеи;
- для каждого аргумента подберите примеры, факты, ситуации из жизни, личного опыта, литературных произведений;
- распределите подобранные аргументы в последовательности;
- придумайте вступление к рассуждению;
- изложите свою точку зрения в той последовательности, которую вы наметили.
- сформулируйте общий вывод работы.

При написании эссе:

- напишите эссе в черновом варианте, придерживаясь оптимальной структуры;
- проанализируйте содержание написанного;
- проверьте стиль и грамотность, композиционное построение эссе, логичность и последовательность изложенного;
- внесите необходимые изменения и напишите окончательный вариант.

Требования к оформлению:

- Титульный лист.
- Текст эссе.
- Формат листов-A4. Шрифт- Times New Roman, размер-14, расстояние между строк- интерлиньяж полуторный, абзацный отступ-1,25см., поля-30мм(слева), 20мм (снизу), 20мм (сверху), 20мм (справа). Страницы нумеруются снизу по центру. Титульный лист считается, но не нумеруется.

Критерии оценивания эссе:

1. Самостоятельное проведение анализа проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария
2. Четкость и лаконичность изложения сути проблемы
3. Материал излагается логически последовательно
4. Аргументированность собственной позиции
5. Наличие выводов
6. Владение навыками письменной речи

ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ

• *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе.

• *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С неизвестными терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала.

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу. Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы.

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к зачету по дисциплине «История России» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «История России».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на зачете особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на зачете (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к зачету на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Требования к оформлению контрольной работы	4
Содержание контрольной работы.....	4
Выполнение работы над ошибками.....	8
Критерии оценивания контрольной работы	9
Образец титульного листа	10

Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: повышение исходного уровня владения иностранным языком, достигнутого на предыдущей ступени образования, и достижение уровня иноязычной коммуникативной компетенции достаточного для общения в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах, а также для дальнейшего самообразования.

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:

общекультурные:

- способностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-6).

Для достижения указанной цели необходимо (задачи курса):

- владение иностранным языком как средством коммуникации в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах;
- развитие когнитивных и исследовательских умений с использованием ресурсов на иностранном языке;
- развитие информационной культуры;
- расширение кругозора и повышение общей гуманитарной культуры студентов;
- воспитание толерантности и уважения к духовным ценностям разных стран и народов.

Методические указания по выполнению контрольной работы предназначены для студентов очной и заочной формы обучения, обучающихся по специальности *21.05.03 Технология геологической разведки*.

Письменная контрольная работа является обязательной формой *промежуточной аттестации*. Она отражает степень освоения студентом учебного материала по дисциплине Б1.Б.1.03 Иностранный язык. А именно, в результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- особенности фонетического строя иностранного языка;
- лексические единицы социально-бытовой и академической тематики, основы терминосистемы соответствующего направления подготовки;
- основные правила грамматической системы иностранного языка;
- особенности построения устных высказываний и письменных текстов разных стилей речи;
- правила речевого этикета в соответствии с ситуациями межличностного и межкультурного общения в социально-бытовой, академической и деловой сферах;
- основную страноведческую информацию о странах изучаемого языка;
- лексико-грамматические явления иностранного языка профессиональной сферы для решения задач профессиональной деятельности;

Уметь:

- вести диалог/полилог и строить монологическое высказывание в пределах изученных тем;
- понимать на слух иноязычные тексты монологического и диалогического характера с различной степенью понимания в зависимости от коммуникативной задачи;
- читать аутентичные тексты прагматического, публицистического, художественного и научного характера с целью получения значимой информации;
- передавать основное содержание прослушанного/прочитанного текста;
- записывать тезисы устного сообщения, писать эссе по изученной тематике, составлять аннотации текстов, вести личную и деловую переписку;
- использовать компенсаторные умения в процессе общения на иностранном языке;

- пользоваться иностранным языком в устной и письменной формах, как средством профессионального общения;

Владеть:

- основными приёмами организации самостоятельной работы с языковым материалом с использованием учебной и справочной литературы, электронных ресурсов;

- навыками выполнения проектных заданий на иностранном языке в соответствии с уровнем языковой подготовки;

- умением применять полученные знания иностранного языка в своей будущей профессиональной деятельности.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «Иностранный язык (английский)» представлено три варианта контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется для студентов в соответствии с начальными буквами их фамилий в алфавитном порядке. Например, студенты, у которых фамилии начинаются с букв А, выполняют контрольную работу № 1 и т.д. (см. таблицу №1).

Таблица №1

<i>начальная буква фамилии студента</i>	<i>№ варианта контрольной работы</i>
А, Г, Ж, К, Н, Р, У, Ц, Щ	№1
Б, Д, З, Л, О, С, Ф, Ч, Э, Я	№2
В, Е, И, М, П, Т, Х, Ш, Ю	№3

Содержание контрольной работы

Контрольная работа проводится по теме 1. *Бытовая сфера общения (Я и моя семья)* и теме 2. *Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*, оборот *there+be*, имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

Название темы	Страницы учебников	
	<i>Агабекян И. П.</i>	<i>Журавлева Р.И.</i>
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435
Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов <i>to be</i> и <i>to have</i>	102-104	6-8
Оборот <i>there+be</i>	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

Вариант №1

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Michael _____ everyone he meets because he is very sociable and easygoing. He has five brothers and two sisters, so that probably helped him learn how to deal with people.

A. gets divorced; **B. gets along well with;** C. gets married;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Заполните пропуски местоимениями *some, any, no* или их производными.

Пример: A: Is **anything** the matter with Dawn? She looks upset.

B: She had an argument with her friend today.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неопределённые местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски личными местоимениями (*I, we, you, he, she, it, they, me, us, him, her, them*).

Пример: My teacher is very nice. I like – I like **him**.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «личные и притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках, обращая при этом внимание на использованные в предложениях маркеры.

Пример: Every morning George **eats** (to eat) cereals, and his wife only **drinks** (to drink) a cup of coffee.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Paul was tired when he got home. – **Was Paul tired when he got home? Yes, he was.**

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа

Вариант №2

Задание 1. Заполните пропуск, выбрав один вариант ответа.

Пример: A British university year is divided into three ____.

1) conferences; 2) sessions; **3) terms;** 4) periods;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите правильную форму глагола.

Пример: A: I have a Physics exam tomorrow.

B: Oh dear. Physics **is**/are a very difficult subject.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя существительное, функции и спряжение глаголов to be и to have».

Задание 3. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Continuous, Past Continuous или Future Continuous.

Пример: I **shall be studying** (study) Japanese online from 5 till 6 tomorrow evening.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 4. Составьте вопросы к словам, выделенным жирным шрифтом.

Пример: **The Petersons** have bought a dog. – **Who has bought a dog?**

The Petersons have bought **a dog**. – **What have the Petersons bought?**

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Задание 5. Подчеркните правильный вариант ответа.

Пример: A: You haven't seen my bag anywhere, haven't you/**have you?**

B: No. You didn't leave it in the car, **did you**/didn't you?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа

Вариант № 3

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: The University accepts around 2000 new ____ every year.

1) students; 2) teachers; 3) pupils; 4) groups;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Поставьте в предложения подходящие по смыслу фразы:

as red as a beet (свекла), as slow as a turtle, as sweet as honey, as busy as a bee, as clumsy as a bear (неуклюжий), as black as coal, as cold as ice, as slippery as an eel (изворотливый как угорь), as free as a bird, as smooth as silk (гладкий)

Пример: Your friend is so unemotional, he is **as cold as ice**.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя прилагательное и наречие».

Задание 3. Переведите следующие предложения на английский язык.

Пример: Это самая ценная картина в Русском музее. **This is the most valuable picture in Russian Museum.**

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «степени сравнения имени прилагательного и наречий».

Задание 4. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Perfect, Past Perfect или Future Perfect.

Пример: Sam **has lost** (lose) his keys. So he can't open the door.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Задайте вопросы к предложениям.

Пример: There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which book is Sue's?' 'The one on the table.'

b) 'Whose book is on the table?' 'Sue's.'

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Mein Bruder ... Arzt geworden

A. hat; B. ist; C. wird;

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Пассивный залог».

Задание 2. Вставьте подходящее вопросительное слово.

Пример: Was machen Sie am Wochenende?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски возвратными местоимениями в нужной форме.

Пример: Wo wohnen deine Eltern?

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках.

Пример: Kannst du mir bitte die Marmelade geben? (können)

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Sie wohnen in Berlin.

Ответ: Wo wohnen Sie? Wer wohnt in Berlin?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по

теме «Вопросительные предложения».

ФРАНЦУЗСКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях следующими предлогами: de, à, chez, dans, pour, depuis, vers, avec, devant. en.

Пример: Monsieur Dupont est en mission.

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Предлоги».

Задание 2. Заполните пропуски, выберите правильно указательное прилагательное:

Пример: Peux-tu me passer ces dictionnaires?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Указательные прилагательные».

Задание 3. Поставьте нужный артикль или предлог там, где это необходимо:

Пример: C'est la salle des études.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Употребление слитного артикля».

Задание 4. Выберите правильную форму глагола:

Пример: Tous les matins, il s'est levé à 7 heures depuis un an.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Présent».

Задание 5. Ответьте на следующие вопросы:

Пример: Où passez-vous vos vacances d'été? - Je les passe en Crimée.

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Личные местоимения le, la, les».

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Работа с оценкой «неудовлетворительно» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 1 балл. Максимум 44 балла.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

40-44 балла (90-100%) - оценка «отлично»;

31-39 балла (70-89%) - оценка «хорошо»;

22-30 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-21 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра иностранных языков и деловой коммуникации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

**по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация № 3

Технология и техника разведки месторождений полезных ископаемых

формы обучения: очная, заочная

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ТТР-18

Преподаватель: Петров Петр Петрович,
к.т.н, доцент

**Екатеринбург
2018**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по
комплексу



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация

Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых

форма обучения: **очная, заочная**

год набора: 2021

Автор: Суднева Е.М., ст. преподаватель

Одобрена на заседании кафедры

Геологии и защиты в ЧС

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Стороженко Л.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 10 от 24.04.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

факультета геологии и геофизики

(название факультета)

Председатель

(подпись)

д.г.-м.н., проф. Бондарев В.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 10 от 17.06.2021

(Дата)

Екатеринбург
2021

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 1

Практикум по теме: Здоровье и окружающая среда

В Уставе Всемирной организации здравоохранения говорится о высшем уровне здоровья как об одном из основных прав человека. Не менее важно право человека на информацию о тех факторах, которые определяют здоровье человека или являются факторами риска, то есть их воздействие может привести к развитию болезни.

Здоровье – это первая и важнейшая потребность человека, определяющая способность его к труду и обеспечивающая гармоническое развитие личности. Оно является важнейшей предпосылкой к познанию окружающего мира, к самоутверждению и счастью человека. Активная долгая жизнь – это важное слагаемое человеческого фактора.

Здоровье – такое состояние организма человека, когда функции всех его органов и систем уравновешены с внешней средой и отсутствуют какие-либо болезненные изменения.

Само понятие «здоровье» является условным и объективно устанавливается на основе антропометрических, клинических, физиологических и биохимических показателей.

По определению Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) "здоровье – это состояние физического, духовного и социального благополучия, а не только отсутствие болезней и физических дефектов".

Вообще, можно говорить о трех видах здоровья: о здоровье физическом, психическом и нравственном (социальном):

Физическое здоровье - это естественное состояние организма, обусловленное нормальным функционированием всех его органов и систем. Если хорошо работают все органы и системы, то и весь организм человека (система саморегулирующаяся) правильно функционирует и развивается.

Психическое здоровье зависит от состояния головного мозга, оно характеризуется уровнем и качеством мышления, развитием внимания и памяти, степенью эмоциональной устойчивости, развитием волевых качеств.

Нравственное здоровье определяется теми моральными принципами, которые являются основой социальной жизни человека, т.е. жизни в определенном человеческом обществе. Отличительными признаками нравственного здоровья человека являются, прежде всего, сознательное отношение к труду, овладение сокровищами культуры, активное неприятие нравов и привычек, противоречащих нормальному образу жизни. Физически и психически здоровый человек может быть нравственным уродом, если он пренебрегает нормами морали. Поэтому социальное здоровье считается высшей мерой человеческого здоровья.

Нравственно здоровым людям присущ ряд общечеловеческих качеств, которые и делают их настоящими гражданами.

Целостность человеческой личности проявляется, прежде всего, во взаимосвязи и взаимодействии психических и физических сил организма. Состояние здоровья определяется функцией физиологических систем организма с учётом их возрастных и половых факторов, а также зависит от географических и климатических условий.

На основе этих критериев даётся формальное заключение о состоянии здоровья при наборе в армию, приёме на работу и в учебные заведения. Состояние здоровья не исключает уже имеющегося в организме, но ещё не обнаруженного болезнетворного начала; оно не исключает также колебаний в самочувствии человека. Следовательно, хотя понятие «здоровье» и противопоставлено понятию «болезнь», но может быть связано с ним многочисленными переходными состояниями

Динамические наблюдения и периодические обследования могут констатировать границы здоровья и болезни в стартовых условиях, когда явная патология отсутствует.

Отсюда возникают понятия об объективном и субъективном здоровье, когда, с одной стороны, при плохом самочувствии отсутствуют объективные подтверждающие его данные, с другой – когда эти данные отличаются, а самочувствие остаётся до определённого времени хорошим.

Отсюда также возникает понятие «практически здоровый человек» – состояние, при котором объективно имеются патологические изменения, не отражающиеся на жизненном восприятии и работоспособности человека.

В понятие здоровья вкладываются не только абсолютные качественные, но и количественные признаки, т.к. существует понятие степени здоровья.

Степень здоровья – широта адаптивных возможностей организма, определяемая социальной средой, физической тренировкой, перенесёнными заболеваниями, трудовым навыком и т.д.

Важную роль в понятии здоровья играют и социальные факторы, т.к. в него входят и социальная полноценность человека. Однако социальный фактор не следует считать абсолютным, потому что социальная полноценность и общественная значимость человека далеко не всегда являются тождественными понятиями.

Индивидуальное здоровье не является точно детерминируемым, что связано с большой широтой индивидуальных колебаний важнейших показателей жизнедеятельности организма, а также с многообразием факторов, влияющих на него.

Здоровье населения – статистическое понятие, характеризующееся комплексом демографических показателей: рождаемость, смертность, детская смертность, уровень физического развития, заболеваемость, средняя продолжительность жизни и др.

Здоровье населения обеспечивает условия для роста производительности труда, улучшает качественные характеристики воспроизводства населения и трудовых ресурсов. В то же время имеет место и обратное влияние – прогресс в области экономики, науки и культуры способствует улучшению здоровья населения и страны.

Большое значение для сохранения жизни и здоровья населения имеет повышение качества оказания медицинской помощи. В этих целях проводится укрупнение и развитие больниц и поликлиник, совершенствование профилактических форм работы.

Одной из важных форм профилактики является диспансеризация населения. Это активный метод систематического наблюдения за состоянием здоровья как практически здорового населения, так и больных, страдающих длительно протекающими хроническими заболеваниями, составляющий основу профилактического направления отечественного здравоохранения.

Одним из важнейших приобретенных по наследству свойств здорового организма является постоянство внутренней среды. Это понятие ввел французский ученый Клод Бернар (1813 – 1878), считавший постоянство внутренней среды условием свободной и независимой жизни человека. Внутренняя среда образовалась в процессе эволюции. Она определяется в первую очередь составом и свойствами крови и лимфы.

Постоянство внутренней среды – замечательное свойство организма, которое в какой-то мере освободило его от физических и химических влияний внешней среды. Однако это постоянство – оно называется гомеостазом – имеет свои границы, определяемые наследственностью. А потому, наследственность является одним из важнейших факторов здоровья.

Организм человека приспособлен к определенным физическим (температура, влажность, атмосферное давление), химическим (состав воздуха, воды, пищи), биологическим (разнообразные живые существа) показателям окружающей среды.

Если человек длительно находится в условиях, значительно отличающихся от тех, к которым он приспособлен, нарушается постоянство внутренней среды организма, что может повлиять на здоровье и нормальную жизнь.

В наш век человек, как и все живые организмы, подвержен внешним воздействиям, которые приводят к изменениям наследственных свойств. Эти изменения называются мутационными (мутациями). Особенно возросло количество мутаций за последнее время. Отклонения от

определенных, привычных свойств окружающей среды можно отнести к факторам риска заболевания. Итак, заболеваемость и смертность связаны, прежде всего, с условиями среды и образом жизни людей.

Здоровье и окружающая среда.

Немаловажное значение оказывает на здоровье и состояние окружающей среды. Каждый из нас имеет право знать обо всех экологических изменениях, происходящих и в местности, где он живет, и во всей стране. Мы должны знать все о пище, которую употребляем, о состоянии воды, которую пьем, а медики обязаны объяснить опасность жизни в зонах, зараженных радиацией.

Вмешательство человека в регулирование природных процессов не всегда приносит желаемые положительные результаты. Нарушение хотя бы одного из природных компонентов приводит, в силу существующих между ними взаимосвязей, к перестройке сложившейся структуры природно-территориальных компонентов. Загрязнение поверхности суши, гидросферы, атмосферы и Мирового океана, в свою очередь, сказывается на состоянии здоровья людей, эффект "озоновой дыры" влияет на образование злокачественных опухолей, загрязнение атмосферы на состояние дыхательных путей, а загрязнение вод – на пищеварение, резко ухудшает общее состояние здоровья человечества, снижает продолжительность жизни.

В настоящее время хозяйственная деятельность человека все чаще становится основным источником загрязнения биосферы. В природную среду во все больших количествах попадают газообразные, жидкие и твердые отходы производств. Различные химические вещества, находящиеся в отходах, попадая в почву, воздух или воду, переходят по экологическим звеньям из одной цепи в другую, попадая, в конце концов, в организм человека.

На земном шаре практически невозможно найти место, где бы не присутствовали в той или иной концентрации загрязняющие вещества. Даже во льдах Антарктиды, где нет никаких промышленных производств, а люди живут только на небольших научных станциях, ученые обнаружили различные токсичные (ядовитые) вещества современных производств. Они заносятся сюда потоками атмосферы с других континентов.

Вещества, загрязняющие природную среду, очень разнообразны. В зависимости от своей природы, концентрации, времени действия на организм человека они могут вызвать различные неблагоприятные последствия. Кратковременное воздействие небольших концентраций таких веществ может вызвать головокружение, тошноту, першение в горле, кашель. Попадание в организм человека больших концентраций

токсических веществ может привести к потере сознания, острому отравлению и даже смерти. Примером подобного действия могут являться смоги, образующиеся в крупных городах в безветренную погоду, или аварийные выбросы токсичных веществ промышленными предприятиями в атмосферу.

Реакции организма на загрязнения зависят от индивидуальных особенностей: возраста, пола, состояния здоровья. Как правило, более уязвимы дети, пожилые и престарелые, больные люди.

Кроме химических загрязнителей в природной среде встречаются и биологические, вызывающие у человека различные заболевания. Это болезнетворные микроорганизмы, вирусы, гельминты, простейшие. Они могут находиться в атмосфере, воде, почве, в теле других живых организмов, в том числе и в самом человеке.

Специфика среды обитания человека заключается в сложнейшем переплетении социальных и природных факторов. На заре человеческой истории природные факторы играли решающую роль в эволюции человека. На современного человека воздействие природных факторов в значительной степени нейтрализуется социальными факторами. В новых природных и производственных условиях человек в настоящее время нередко испытывает влияние весьма необычных, а иногда чрезмерных и жестких факторов среды, к которым эволюционно он еще не готов.

Человек, как и другие виды живых организмов, способен адаптироваться, то есть приспособливаться к условиям окружающей среды. Адаптацию человека к новым природным и производственным условиям можно охарактеризовать как совокупность социально-биологических свойств и особенностей, необходимых для устойчивого существования организма в конкретной экологической среде.

В настоящее время значительная часть болезней человека связана с ухудшением экологической обстановки в нашей среде обитания: загрязнением атмосферы, воды и почвы, недоброкачественными продуктами питания, возрастанием шума.

Приспосабливаясь к неблагоприятным экологическим условиям, организм человека испытывает состояние напряжения, утомления. Напряжение – мобилизация всех механизмов, обеспечивающих определенную деятельность организма человека. В зависимости от величины нагрузки, степени подготовки организма, его функционально-структурных и энергетических ресурсов снижается возможность функционирования организма на заданном уровне, то есть наступает утомление.

Кроме этого, необходимо учитывать еще объективный фактор воздействия на здоровье – наследственность. Это присущее всем организмам свойство повторять в ряду поколений одинаковые признаки и особенности развития,

способность передавать от одного поколения к другому материальные структуры клетки, содержащие программы развития из них новых особей.

Влияют на наше здоровье и биологические ритмы. Одной из важнейших особенностей процессов, протекающих в живом организме, является их ритмический характер.

В настоящее время установлено, что свыше трехсот процессов, протекающих в организме человека, подчинены суточному ритму.

Наследственные болезни, вызванные плохой экологической обстановкой:

Влияние солей тяжелых металлов на наследственность.

Тяжелые металлы – высокотоксичные вещества, долго сохраняющие свои ядовитые свойства. По данным Всемирной Организацией Здравоохранения, они уже сейчас занимают второе место по степени опасности, уступая пестицидам и значительно опережая такие широко известные загрязнители, как двуокись углерода и серы. В прогнозе же они должны стать самыми опасными, более опасными, чем отходы АЭС (второе место) и твердые отходы (третье место).

Отравление солями тяжелых металлов начинается еще до рождения человека. Соли тяжелых металлов проходят через плаценту, которая вместо того, чтобы оберегать плод, день за днем его отравляет. Нередко концентрация вредных веществ у плода даже выше, чем у матери. Младенцы появляются на свет с пороками развития мочеполовой системы, до 25 процентов малышей – с отклонениями от нормы при формировании почек. Зачатки внутренних органов появляются уже на пятой неделе беременности и с этого момента испытывают на себе влияние солей тяжелых металлов, а поскольку они влияют и на организм матери, выводя из строя почки, печень, нервную систему, не стоит удивляться, что сейчас практически не встретишь нормальных физиологических родов, а малыши приходят в эту жизнь с недостатком веса, с физическими и психическими пороками развития.

И с каждым годом жизни соли тяжелых металлов, растворенные в воде, прибавляют им болезней или усугубляют врожденные заболевания, прежде всего органов пищеварения и почек. Нередко у одного ребенка страдают 4-6 систем в организме. Мочекаменная и желчекаменная болезни – своего рода индикатор неблагополучия, а они теперь встречаются даже у дошколят. Есть и другие тревожные сигналы. Так, превышение уровня свинца приводит к снижению интеллекта. Психологическое обследование показало, что таких детей у нас до 12 процентов.

Какие же мероприятия должны обеспечить сегодня охрану здоровья человека и среды его обитания от вредного влияния техногенных металлов? Можно обозначить два основных пути: санитарно-технический – уменьшение содержания металлов в объектах внешней среды до

предельно допустимых (безопасных) уровней путем внедрения архитектурно-планировочных, технологических, технических и других мероприятий; гигиенический – научная разработка допустимых уровней содержания их во внешней среде, требований и рекомендаций в сочетании с постоянным контролем состояния и качества этой среды.

Профилактика хронических интоксикаций металлами и их соединениями должна обеспечиваться прежде всего их заменой, где это возможно, на безвредные или менее токсичные вещества. В случаях же, когда не представляется реальным исключить их применение, необходима разработка таких технологических схем и конструкций, которые бы резко ограничивали возможность загрязнения ими воздуха производственных помещений и наружной атмосферы. В отношении транспорта, являющегося, как об этом было сказано выше, одним из значительных источников выброса свинца в атмосферу, следует повсеместно внедрять экологически чистое горючее. Весьма радикальным средством является создание безотходных или малоотходных технологий.

Наряду с указанными выше мероприятиями необходимо постоянное осуществление эффективного контроля над уровнем содержания металлов в организме. С этой целью при медицинском обследовании работающих и населения в случаях их контакта с техногенными металлами должно проводиться определение их в биологических средах организма крови, моче, волосах.

Краткая характеристика экологической обстановки в России

Из всех предприятий России, выбрасывающих вредные вещества в атмосферу и водоемы – 33% дают предприятия металлургии, 29% – энергетические объекты, 7% – химические, 8% – угольной промышленности. Более половины выбросов приходится на транспорт. Особенно тяжелая обстановка складывается в городах, где велика концентрация населения. В России определены 55 городов, в которых уровень загрязнения очень велик. Ежегодно в нашей стране улавливается и обезвреживается лишь около 76 % общего количества вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу. Значительно хуже дело обстоит с очисткой сточных вод: 82% сбрасываемых вод не подвергается очистке. Реки Волга, Дон, Енисей, Лена, Кубань, Печора загрязнены органикой, соединениями азота, тяжелыми металлами, фенолами, нефтепродуктами. В настоящее время свыше 70 миллионов человек дышат воздухом, насыщенным опасными для здоровья веществами, в пять и более раз превышающими предельно допустимые концентрации (ПДК). В окружающую среду человеком введено около 4 миллионов химических соединений, из которых лишь немногие изучены на токсическое воздействие.

В России имеется около 30 тысяч предприятий и объектов, использующих радиоактивные вещества и изделия на их основе.

Большой урон экосистемам на территории России нанесен ядерными испытаниями. На полигонах Новой Земли произвели 118 поверхностных и подземных ядерных взрывов – их последствия выяснены не до конца.

Санитарно-эпидемиологическая обстановка в РФ

XX век породил неоправданный оптимизм в отношении того, что с инфекционными болезнями в скором времени будет покончено. Однако события последних десятилетий показали, что в мире резко активизировались такие инфекции, как туберкулёз, малярия, которые становятся основной причиной смертности; как в России, так и в других странах вновь заявляет о себе дифтерия.

Эпидемиологическая ситуация, сложившаяся в последние годы, остаётся напряжённой. Ежегодно в РФ регистрируется от 33 до 44 миллионов случаев инфекционных заболеваний.

Одной из самых актуальных медицинских и социально-экономических проблем остаётся грипп и ОРВИ.

В РФ (в отличие от ведущих стран мира) до настоящего времени отсутствует производство отечественной вакцины против краснухи. В этих условиях краснуха остаётся неуправляемой инфекцией с возникновением каждые 10 - 12 лет эпидемий. Во время эпидемий краснуха может стать причиной уродств более чем у 2% детей, родившихся живыми.

Динамика заболеваемости почти по всей группе кишечных инфекций в истекшем году имела тенденцию к снижению. Стабилизировалась заболеваемость сальмонеллёзом, острой кишечной инфекцией неустановленной этиологии, ротавирусным инфекционным кампилобактериозом. Однако ежегодно в стране регистрируется до 100 вспышек кишечных инфекций пищевого и водного характера.

Серьёзной проблемой здравоохранения продолжают оставаться вирусные гепатиты, наносящие ущерб как здоровью населения, так и экономике страны.

Особенно тяжёлое положение складывается по социально обусловленным заболеваниям. Стремительность нарастания масштабов пандемии заболевания, вызываемого вирусом иммунодефицита человека (ВИЧ-инфекции), в мире, отсутствие надёжных средств профилактики и лечения позволяет отнести эту проблему к одной из самых острых. Состояние здоровья детей, проживающих в городах и населённых пунктах с высоким уровнем загрязнения атмосферного воздуха (Подольск, Ярославль, Воскресенск, Новокузнецк, Салават, Пермь, Казань, Мончегорск) характеризуется значительным снижением неспецифической сопротивляемости организма к развитию инфекционных и других заболеваний.

Проблема многих населенных пунктов – наличие многочисленных мобильных и стационарных источников шума. Более 30% жителей городов РФ подвержены действию сверхнормативных уровней шума и вибрации.

Безопасность и качество пищевых продуктов и продовольственного сырья является одним из основных факторов, определяющих здоровье населения и сохранение его генофонда. Более 5% продукции не отвечает гигиеническим требованиям по содержанию антибиотиков, что влияет также на аллергизацию населения, прежде всего детей.

Негативное влияние на состояние здоровья оказывают также неблагоприятные условия труда, повышающие риск появления профессиональной патологии.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ДОКЛАДА:

Здоровье населения России.

Здоровье населения Свердловской области.

Здоровье жителей города Екатеринбурга.

План:

1. Месторасположение населенного пункта
2. Демография
3. Состояние техносферной, природной, социальной среды области (города)
4. Здравоохранение (заболеваемость взрослых и детей)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 2

«О классификации чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера» от 21 мая 2007 года № 304 г. Москва.

Во исполнение Федерального закона «О защите населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера» Правительство Российской Федерации постановляет:

1. Установить, что чрезвычайные ситуации природного и техногенного характера подразделяются на:
 - а) чрезвычайную ситуацию локального характера
 - б) чрезвычайную ситуацию муниципального характера
 - в) чрезвычайную ситуацию межмуниципального характера
 - г) чрезвычайную ситуацию регионального характера
 - д) чрезвычайную ситуацию межрегионального характера
 - е) чрезвычайную ситуацию федерального характера

Задание: выбрать чрезвычайную ситуацию техногенного, природного или биолого-социального характера, данные внести в таблицу № 1. Код ЧС смотреть в приложении № 1.

Таблица № 1

Формы статистического учета данных о чрезвычайных ситуациях.
Техногенные чрезвычайные ситуации (форма № 7/ЧС)

№ п/п Наименование показателей Показатели

- 1 Классификация ЧС
- 2 Код ЧС
- 3 Дата возникновения ЧС
Дата ликвидации ЧС
- 4 Время возникновения ЧС:
московское (час, мин.)
местное (час, мин.)
- 5 Место: страна
субъект Федерации
город
населенный пункт
- 6 Общая площадь зоны ЧС (кв.км.)
- 7 Объект экономики (наименование)
отрасль
министерство (ведомство)
форма собственности
- 8 Номер лицензии, дата и кем выдана
Дата утверждения декларации, кем утверждена
Номер страхового документа, дата, кем выдан
- 9 Метеоданные: температура (град)
направление и скорость ветра (м/с)
влажность (%)
осадки (вид, количество)
- 10 Причины возникновения ЧС
- 11 Поражающие факторы источника ЧС
- 12 Основные характеристики ЧС
- 13 Мероприятия по ликвидации ЧС:

аварийно-спасательные работы (перечень/длительность, час)

аварийно-восстановительные работы (перечень/длительность час)

- 14 Силы и средства, задействованные в ликвидации ЧС:

личный состав РСЧС наименование/количество чел.

техника наименование/количество ед.

материальные ресурсы перечень/количество

израсходованных)

15 Работы по организации защиты населения:

инженерная защита:

укрытие в защитных сооружениях различных типов, (чел.)

радиационно-химическая защита:

выдано средств индивидуальной защиты (чел.)

медицинская защита:

население которому была оказана медицинская помощь (чел.)

госпитализировано (чел.)

в т.ч. детей до 14 лет, (чел.)

эвакуационные мероприятия:

всего эвакуировано из зоны ЧС, (чел.)

в том числе:

автомобильным транс-ом (чел.)

железнодорожным транс-ом (чел.)

авиационным транс-ом (чел.)

морским (речным) транс-ом (чел.)

транспортные средства эвакуации, кол-во единиц, по видам

расчетное время на проведение эвакуации (час, мин.)

районы размещения эвакуируемого населения

16 Состояние зданий и сооружений, ед.:

разрушено всего

повреждено всего

уничтожено всего

17 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. (млн.) руб.)

18 Потери, чел. пострадавшие/пораженные/погибшие

население:

дети до 14 лет

взрослые от 14 до 60 лет

старше 60 лет

промперсонал

личный состав сил РСЧС

19 Дополнительная текстовая информация

20 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 20 ____ г. _____

(фамилия, И.О. № телефона и
телефона

и подпись исполнителя)
руководителя)

(фамилия, И., О., №

и подпись

Природные чрезвычайные ситуации (форма № 8/ЧС)

№ п/п Наименование показателей Показатели

1 Классификация ЧС

2 Код ЧС

3 Дата возникновения ЧС

Дата ликвидации ЧС

4 Время возникновения ЧС:

московское (час, мин.)

- местное (час, мин.)
- 5 Место: страна
- субъект Федерации
- город
- населенный пункт
- 6 Общая площадь зоны ЧС (кв.км.)
- 7 Метеоданные: температура (град)
- направление и скорость ветра (м/с)
- влажность (%)
- осадки (вид, количество)
- 8 Причины возникновения ЧС
- 9 Поражающие факторы источника ЧС
- 10 Основные характеристики ЧС
- 11 Мероприятия по ликвидации ЧС:
- аварийно-спасательные работы (перечень/длительность, час)
- аварийно-восстановительные работы (перечень/длительность час)
- 12 Силы и средства, задействованные в ликвидации ЧС:
- личный состав РСЧС (наименование/количество чел.)
- техника (наименование/количество ед.)
- расход материальных ресурсов (перечень/количество израсходованных)
- 13 Работы по организации защиты населения:
- инженерная защита:
- укрытие в защитных сооружениях различных типов, (чел.)
- радиационно-химическая защита:
- выдано средств индивидуальной защиты чел.)

медицинская защита:

население которому была оказана меди-цинская помощь (чел.)

госпитализировано (чел.)

в т.ч. детей до 14 лет, (чел.)

эвакуационные мероприятия:

всего эвакуировано из зоны ЧС, (чел.)

в том числе:

автомобильным транспортом (чел.)

железнодорожным транспортом (чел.)

авиационным транспортом (чел.)

морским (речным) транспортом (чел.)

транспортные средства эвакуации, кол-во единиц, по видам

расчетное время на проведение эвакуации (час, мин.)

районы размещения эвакуируемого населения

14 Состояние зданий и сооружений, ед.:

разрушено всего

повреждено всего

уничтожено огнем всего

15 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. (млн.) руб.)

16 Потери, чел. пострадавшие/пораженные/погибшие

население:

дети до 14 лет

взрослые от 14 до 60 лет

старше 60 лет

промперсонал

личный состав сил РСЧС

17 Сельскохозяйственные животные:

погибло (тыс. голов)

эвакуировано из опасных зон (тыс. голов)

вынужденный забой (тыс. голов)

18 Уничтожено сельскохозяйственных угодий (тыс.га)

19 Дополнительная текстовая информация

20 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 200 _____ г.

(фамилия, И. О., № телефона и
и подпись исполнителя)

(фамилия, И. О., № телефона
и подпись руководителя)

Биолого-социальные чрезвычайные ситуации (форма № 9 ЧС)

№ п/п	Наименование показателей	Показатели

1	Классификация ЧС	

2	Код ЧС	

3	Дата возникновения ЧС	

	Дата ликвидации ЧС	

4	Место, страна	

	субъект Федерации	

	город	

	населенный пункт	

5	Общая площадь зоны ЧС (кв. км.)	

6 Метеоданные: температура (град)

направление и скорость ветра (м/с)

влажность (%)

осадки (вид, количество)

7 Причины возникновения ЧС

8 Вид бактериального средства, возбудитель

9 Основные характеристики ЧС:

9.1 эпидемия:

выявлено заболевших (чел.)

в том числе детей до 14 лет

госпитализировано (чел.)

в том числе детей до 14 лет

умерло (чел.)

в том числе детей до 14 лет

9.2 эпизоотия:

всего по учету (тыс.голов)

выявлено заболевших (тыс. голов)

из них погибло (тыс. голов)

9.3 эпифитотия:

всего по учету (тыс. га)

потери всего (тыс. га)

10 Мероприятия по ликвидации ЧС:

10.1 противоэпидемические:

эвакуировано из опасных зон (чел.)

организована обсервация

- введен карантин
- 10.2 противозэпизоотические:
- эвакуировано из опасных зон (тыс. голов)
- оказана ветеринарная помощь (тыс. голов)
- 10.3 противозэпифитотические:
- обработано зараженных с/х культур (мест скопления вредителей) (тыс. га)
- 11 Силы и средства, участвовавшие в ликвидации ЧС:
- личный состав РСЧС наименование/количество чел.)
- техника (наименование количество ед.)
- расход материальных ресурсов (перечень/количество израсходованных)
- 12 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. млн.) руб.)
- 13 Дополнительная текстовая информация
- 14 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 200 _____ г.

(фамилия, И., О., № телефона и
и подпись исполнителя)

(фамилия, И., О., № телефона
и подпись руководителя)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 3

Решения ситуационных задач по теме ДЕСМУРГИЯ с демонстрацией практических навыков (Фото или видео-сопровождение)

1. Наложить повязки на следующие части тела:

на голову, на глаз, на грудную клетку, на палец, на руку

1. Наложить жгут при артериальном кровотечении

Десмургия (греч. «desmos» – связь, повязка «ergon» – дело) — учение о повязках, их правильном применении и наложении при различных повреждениях и заболеваниях.

Цели наложения повязок — удерживать перевязочный материал на: поверхности тела (укрепляющие повязки), если нужно – с давлением на подлежащие ткани (давящие повязки); иммобилизовать какую-нибудь часть тела (неподвижные повязки) или создавать возможность тяги за конечность, голову и т. д. (вытягивающие повязки). Особый вид повязок — повязки с пленкообразующими веществами.

Термином «*повязка*» обозначают также ту или иную заготовку из перевязочного материала с лекарственными веществами или без них, накладываемую на рану или на какой-нибудь участок тела с лечебной или профилактической целью.

Процесс наложения повязки называется *перевязкой*.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ОБРАБОТКИ РАНЫ И НАЛОЖЕНИЯ ПОВЯЗКИ

Первая и доврачебная помощь при ранении включает обработку раны и наложения асептической повязки. *Асептика* – это мера, препятствующая проникновению микробов в рану. Правильно наложенная на рану повязка является одной из таких мер.

Перед наложением асептической повязки следует остановить кровотечение. После этого удаляют грязь с кожи, лучше всего это сделать салфеткой, смоченной водой или перекисью водорода. Кожу вокруг раны обрабатывают антисептическим раствором – йодином, йодонатом, хлоргексидином. Следует удалить свободно лежащие на ране инородные тела (осколки стёкол, обрывки одежды, щепки) пинцетом.

Нельзя промывать рану, вытирать её, засыпать порошком, накладывать мази и вату на рану, погружать выпавшие внутренние органы, вправлять костные отломки! При выступающих из раны инородных телах (кости, внутренние органы, осколки ранящего снаряда или предмета) перед тем как накладывать асептическую повязку следует обложить рану ватно-марлевым валиком, чтобы при транспортировке или при бинтовании инородные тела не проникли глубже в рану. После этих мер на рану накладывают сухую стерильную марлевую салфетку и производят бинтование.

Если рана находится на конечностях, то после наложения бинта лучше произвести иммобилизацию конечности способами, описанными ниже.

Необходимым мероприятием при ранении являются обезболивание: 2 таблетки анальгина по 0,5 г, введение внутримышечно 1 %-го раствора промедола, 50 %-го раствора анальгина. Такое обезболивание проводят при любых ранениях, кроме ранений брюшных полостей без явных признаков проникающего ранения.

При бинтовании следует придерживаться следующих правил:

- уложить пациента (в некоторых случаях нетяжёлого ранения – усадить).

Расположиться лицом к пострадавшему, чтобы наблюдать за его реакцией и изменениями в состоянии;

- бинтовать следует от периферии к центру, снизу вверх и слева направо, против часовой стрелки, за исключением наложения нескольких видов повязок: Дезо на левую руку, повязка на левый глаз, на правую молочную железу;

- первый тур бинтования всегда закрепляющий, каждый последующий тур должен прикрывать предыдущий на две трети;

- бинтовать следует двумя руками, при этом правой рукой вы разматываете бинт, раскатывая его по бинтуемой поверхности, а левой расправляете его ходы;

- бинтуемой области тела следует придать такое положение, в котором она останется после бинтования, туры бинтования надо накладывать равномерно, без давления и перегибов.

МЯГКИЕ ПОВЯЗКИ

Мягкие повязки очень разнообразны. В зависимости от вида перевязочного материала и способа фиксации его к телу различают *клеевые, косыночные, пращевидные, контурные, бинтовые и сетчато-трубчатые повязки*.

Клеевые повязки. Накладывают для защиты раны (чаще послеоперационной) от воздействия внешней среды. При этих повязках перевязочный материал фиксируют к коже вокруг раны при помощи различных клеев – клеола, коллодия, лейкопластыря. Их иногда называют наклейкой (рис. 1).

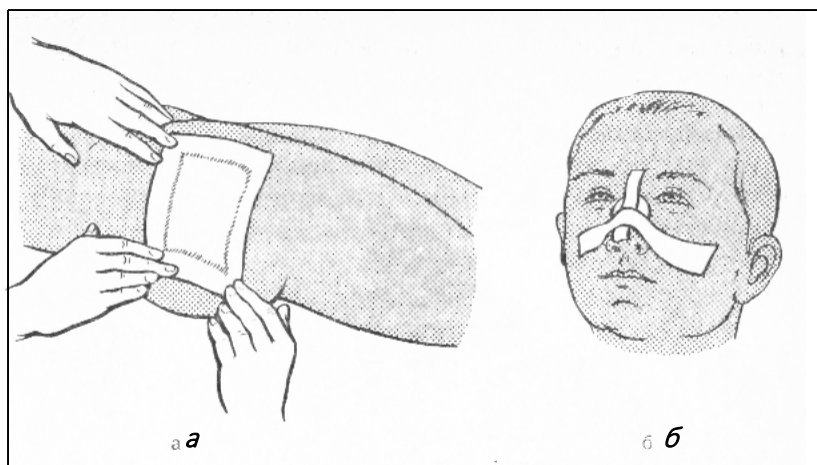


Рис. 1 Клеевые повязки:

а – клеоловая наклейка; *б* – лейкопластырная наклейка

Техника наложения клеоловой повязки. Рану закрывают несколькими слоями марли. Вокруг перевязочного материала на кожу неширокой полосой наносят слой клеола. Марлевую салфетку размером несколько большим, чем площадь перевязочного материала, в натянутом состоянии прикладывают к нанесенному слою клеола и удерживают так некоторое время. Салфетка прочно приклеивается к коже и надежно фиксирует перевязочный материал.

После снятия наклейки клеол с кожи легко удаляют тампоном, смоченным эфиром.

Техника наложения коллодиевой повязки. Коллодий (летучая жидкость, состоящая из смеси эфира, спирта и нитроцеллюлозы) тупфером наносят поверх натянутой фиксирующей салфетки, которую удерживают до тех пор, пока она прочно не приклеится к коже. Коллодий при высыхании несколько стягивает кожу, вызывая у больного неприятные ощущения. Снимается коллодиевая повязка с помощью эфира.

Техника наложения лейкопластырной повязки. Надежно фиксировать перевязочный материал можно с помощью лейкопластыря, который представляет собой полоску ткани, покрытую с одной стороны специальным клеем. Лейкопластырь выпускают в виде катушек. Клеевая сторона лейкопластыря стерильна и может накладываться непосредственно на рану. Полоски лейкопластыря накладывают поверх перевязочного материала и приклеивают с обеих сторон к коже. Лейкопластырные повязки удобны в случаях, когда необходимо сблизить края раны.

Проникающие ранения грудной клетки при оказании первой помощи должны быть закрыты окклюзионной повязкой. Лейкопластырь очень

удобен для этих целей. Полоски лейкопластыря должны быть значительно длиннее раны. Накладывание каждой полоски на рану сопровождают сближением краев раны. Начиная с нижнего угла раны последовательно закрывают ее на всем протяжении с таким расчетом, чтобы каждая последующая полоска перекрывала предыдущую на $\frac{1}{3}$ ее ширины (черепицеобразная повязка). Необходимо помнить, что длительное удержание лейкопластыря на коже вызывает раздражение, образование пузырей, мацерацию.

Лейкопластырь используют при наложении повязок с вытяжением при лечении переломов.

Для закрытия небольших ран, ссадин удобен бактерицидный пластырь, выпускаемый в специальной упаковке. В центре клеющей поверхности пластыря имеется пористый материал, пропитанный антисептическим веществом. В бактерицидном пластыре имеются мельчайшие поры, что предупреждает мацерацию кожи и не нарушает процесс заживления.

Косыночные повязки. Данный вид повязок накладывают с помощью куска ткани, вырезанного или сложенного в виде прямоугольного треугольника – косынки. Закрепление косыночной повязки осуществляется путем связывания углов косынки между собой или фиксацией их английской булавкой (рис. 2).

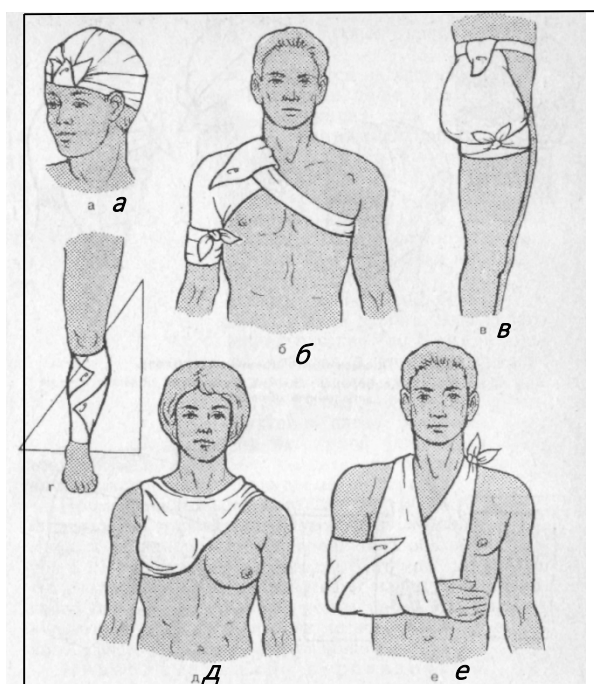


Рис. 2. Косыночные повязки:

а – на голову; *б* – на плечо и плечевой сустав (из двух косыночек); *в* – на ягодицу и область тазобедренного сустава (из двух косыночек); *г* – на голень; *д* – на молочную железу;

е – для фиксации верхней конечности

Выпускаемая промышленностью стандартная косынка для оказания первой помощи имеет размер 135х100х100 см, будучи прессованной в виде кубика размером 5х3х3 см.

Косынка (или несколько косыночек) позволяет наложить надежную повязку на любую область тела.

Наиболее часто косыночная повязка используется для подвешивания руки. Предплечье укладывают на середину косынки так, чтобы кисть находилась у самого края косынки (основания). Один конец косынки, находящийся сзади предплечья, проводят поверх здорового плеча, второй – поверх больного плеча, и связывают их между собой так, чтобы заключенное

в косынку предплечье было согнуто под прямым углом. Третий конец с некоторым натяжением обводят вокруг плеча и фиксируют его булавкой с передней части косынки.

Працевидные повязки. Для наложения працевидной повязки необходимы широкий бинт или полоска хлопчатобумажной ткани длиной 75 – 80 см. Полоску с обоих концов разрезают продольно так, чтобы центральная ее часть осталась неразрезанной на длину, необходимую для закрытия зоны повреждения. Неразрезанную часть накладывают в поперечном направлении на нужную область, надрезанные концы перекрещивают и связывают нижние с нижними, а верхние с верхними концами. Наиболее часто працевидные повязки накладывают на разные части головы (рис. 3).

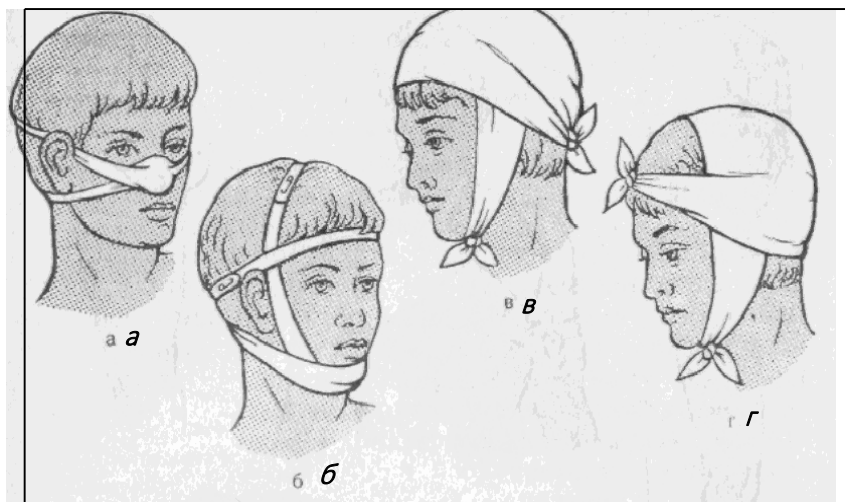


Рис. 3. Працевидные повязки на голову:

а – на нос; *б* – на подбородок; *в* – на теменную область; *г* – на затылочную область

Контурные повязки. Создаются из хлопчатобумажной ткани по контуру части тела, чаще имеют определенное назначение (поддержание или

укрепление части тела), но могут применяться для обычных целей, когда нет специального перевязочного материала. Закрепляют контурные повязки с помощью пришивных тесемок (рис. 4). К контурным повязкам относят бандаж и суспензорий – матерчатые повязки, сшитые по размеру больного. Бандаж применяют для укрепления брюшной стенки или прикрытия имеющихся в ней дефектов (грыж).

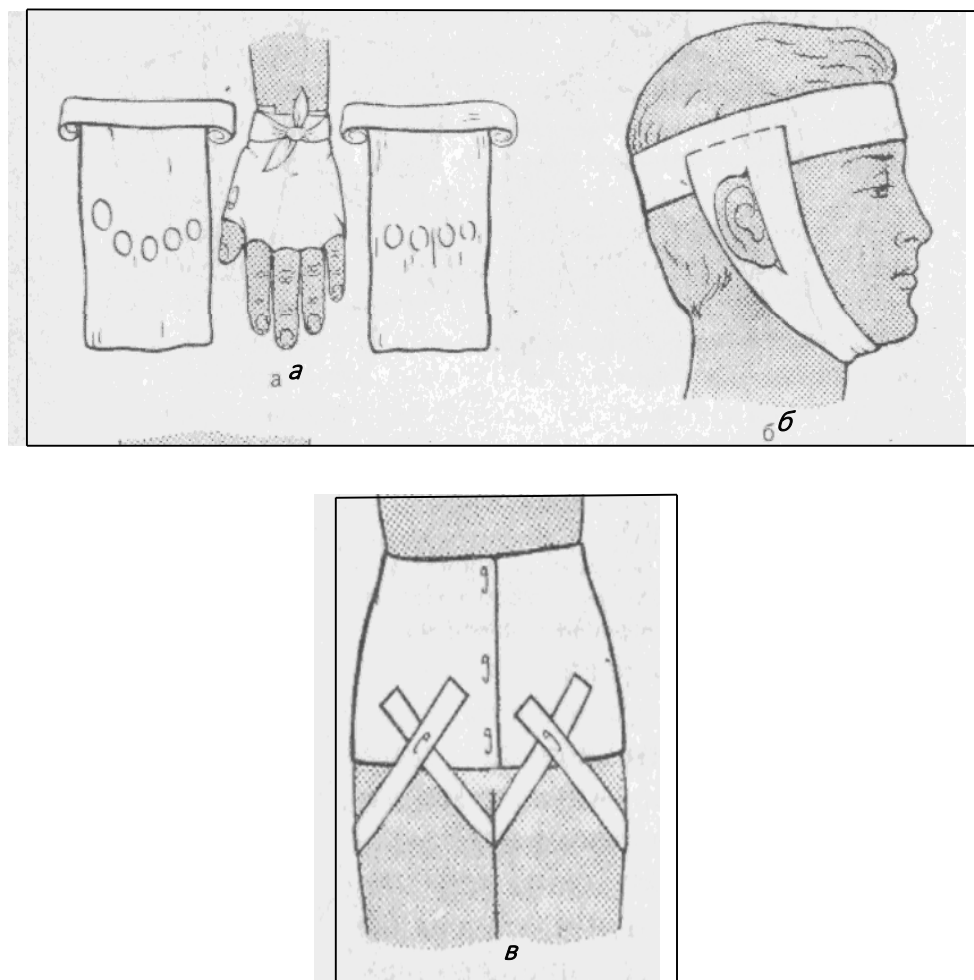


Рис. 4. Контурные повязки:

а – на кисть; *б* – на область уха и нижней челюсти; *в* – импровизированный бандаж

Бинтовые повязки. Бинт – узкая длиной в 5 – 7 м полоска марли, скатанная в виде рулона. Выпускаются бинты различной ширины:

- узкие (до 5 см) используются для наложения повязок на пальцы;
- средние (7 – 10 см) – на предплечье, кисть, голову, шею, голень, стопу;
- широкие (15 – 20 см) – на грудь, живот, бедро, таз, плечевой сустав и плечо.

Марлевый бинт легко принимает форму бинтуемой части тела. Бинтовая повязка позволяет создать равномерное давление на ткани и функциональный покой органу.

Промышленные стандартные бинты выпускаются стерильными, герметично завернутыми в вощеную бумагу, и не стерильными, упакованными обычной бумагой в пачки. При необходимости бинт можно приготовить из куска марли: ее разрезают на полосы одинаковой ширины, их сшивают между собой и скатывают в плотный валик. Узкий бинт легко сделать из широкого, разрезав скатку острым ножом.

Индивидуальный перевязочный пакет. Это готовый к употреблению специальный стерильный перевязочный материал, которым можно закрыть рану практически в любых условиях. Перевязочный пакет состоит из скатки бинта, к свободному концу которого пришта ватно-марлевая подушечка (компресс). Второй компресс нанизан на бинт и свободно перемещается по нему в любую сторону. Компрессы пропитаны каким-либо антисептическим веществом или в пакете имеется ампула с антисептическим средством. Весь перевязочный материал и булавка для закрепления повязки заключены в стерильную пергаментную бумагу и в прорезиненный мешочек, внутренняя

поверхность которого также стерильна. Такая упаковка обеспечивает длительную стерильность его содержимого даже в неблагоприятных условиях (влага, пыль и др.).

Основное правило при использовании пакета – не касаться руками той стороны компрессов, которая будет наложена на рану. Пакет берут в левую руку, правой рукой резким движением обрывают надрезанный край прорезиненного мешочка и извлекают пергаментный конверт. Осторожно развернув бумагу, левой рукой берут конец бинта с пришитой к нему ватно-марлевой подушечкой за сторону, обозначенную цветными нитками, правой – скатку бинта и руки быстро разводят в стороны. При этом между руками натягивают отрезок бинта с расположенными на нем компрессами. Компрессы помещают на рану и накладывают бинтовую повязку. При сквозном ранении один компресс накладывают на входное, второй – на выходное отверстие. Конец бинта закрепляют булавкой.

Правило наложения бинтовых повязок. Перед наложением повязки больному нужно придать наиболее удобное положение, при котором он может находиться в расслабленном состоянии, боли при этом не должны усиливаться. Накладывание повязки удобнее, если бинтуемая часть тела находится на уровне груди бинтующего.

Бинтуемой части тела, особенно конечности, придается такое положение, в котором она будет находиться после наложения повязки. Так, повязка, наложенная на коленный сустав в согнутом положении больному, которому можно ходить, будет вызывать боли, затруднит передвижение, а повязка, наложенная на локтевой сустав в разогнутом положении, сделает невозможным ношение руки на перевязи и т. д.

Повязки, длительно фиксирующие сустав в неподвижном состоянии, могут привести к развитию тугоподвижности, а иногда и полной неподвижности сустава, анкилозу. Поэтому при накладывании повязок конечностям придают наиболее выгодное физиологическое положение, позволяющее после снятия повязки легко ликвидировать полуподвижность или обеспечить удовлетворительную функцию конечности. На нижнюю конечность повязки накладывают при слегка согнутом коленном суставе и согнутой под прямым углом стопе. Повязки на плечо, предплечье и кисть следует накладывать при согнутом под прямым углом локтевом суставе, разогнутом лучезапястном суставе и несколько согнутых пальцах кисти.

Накладывая повязку, необходимо следить за реакцией больного, за выражением его лица и не причинять ему своими движениями новых болевых ощущений. Если повязка беспокоит больного, надо ее исправить – ослабить или изменить положение туров бинта.

Бинтовать следует двумя руками, осуществляя попеременно то одной, то другой рукой вращение скатки бинта вокруг бинтуемой части тела, свободной рукой расправляя туры бинта. Бинт необходимо разворачивать слева направо, головка бинта при этом будет как бы скатываться с тура бинта. Каждый накладываемый тур должен закрывать $1/2$ или $2/3$ ширины предыдущего.

Придерживаясь этих правил и используя разработанные типовые способы наложения бинтовых повязок, удастся всегда хорошо закрыть рану, прочно фиксировать повязку без лишнего расходования перевязочного материала. Повязка не должна вызывать нарушения кровообращения в конечности, которое проявляется побледнением кожи ниже повязки,

цианозом, чувством онемения, появлением пульсирующих болей. Такую повязку надо немедленно исправить или снять и наложить заново. Конец бинта можно зафиксировать, завязав узел или при помощи булавки. Узел и булавку следует располагать над здоровой частью тела.

Основные типы бинтовых повязок (рис. 5).

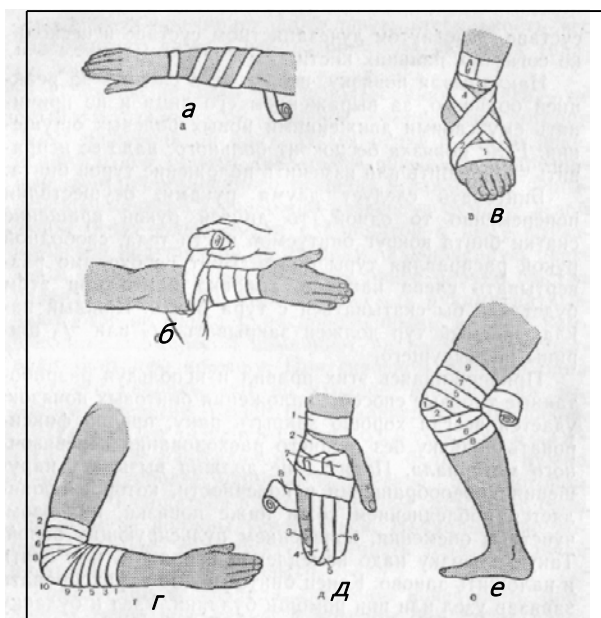


Рис. 5. Основные типы бинтовых повязок:

а — ползучая; *б* — спиральная с перегибом; *в* — восьмиобразная; *г* — сходящаяся;

д — возвращающаяся; *е* — расходящаяся.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Наиболее простой по технике выполнения является *циркулярная* (круговая) повязка, при которой все туры бинта ложатся на одно и то же место, полностью прикрывая все предыдущие. Такие повязки накладывают на лоб, шею, лучезапястный сустав, нижнюю треть голени, живот.

Спиральная повязка применяется при необходимости забинтовать значительную часть тела. Такую повязку обычно накладывают снизу вверх. Начинают повязку наложением 2 – 3 циркулярных туров, затем туры бинта направляют несколько косо вверх с таким расчетом, чтобы каждый следующий тур закрывал $\frac{2}{3}$ ширины предыдущего. Спиральная повязка легко выполняется на участках с одинаковой толщиной, однако при разной толщине (голень, предплечье) добиться плотного прилегания невозможно: бинт пузырится, вследствие чего повязка становится непрочной. Для этих случаев существует прием, называемый *перегибом*. В месте, где начинается более широкая часть конечности, большим пальцем свободной руки прижимают нижний край последнего тура, бинт переворачивают, при этом его верхний край становится нижним. Перегиб повторяют несколько раз в каждом туре и тем круче, чем резче выражено различие диаметров бинтуемой конечности. В дальнейшем вновь накладывают спиральные туры. Заканчивают повязку наложением нескольких циркулярных туров.

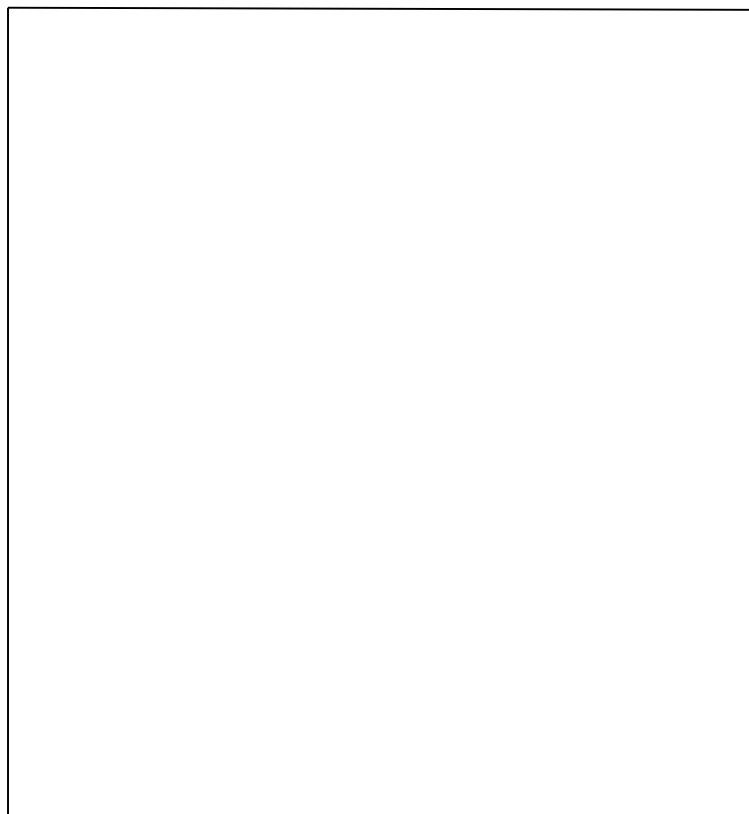
Перед наложением спиральной повязки, применяющейся с целью удержания перевязочного материала, смоченного мазью, эмульсией и др. лекарствами, для быстрого закрепления его накладывают *ползучую* (винтовую) повязку. Туры этой повязки не соприкасаются друг с другом и они могут быть быстро доведены до нижнего края перевязочного материала, после чего накладывается обычная спиральная повязка.

Восьмиобразная повязка удобна при бинтовании частей тела с неправильной и сложной формой голеностопного, плечевого, тазобедренного суставов, кисти, затылочной области и др. При этой повязке туры бинта накладывают в виде восьмерки.

Разновидностями восьмиобразной повязки являются колосовидная повязка, при которой места перекрещивания туров постепенно смещаются вверх или вниз по одной линии, сходящаяся или расходящаяся повязка, когда туры бинта, образующие восьмерку, приближаются друг к другу или расходятся.

Возвращающаяся повязка позволяет прочно фиксировать перевязочный материал на голове, культе конечности, стопе, кисти. При такой повязке туры бинта накладывают в перпендикулярных плоскостях, что достигают перегибом бинта под углом 90^0 и фиксированием области перегиба циркулярными или спиральными турами.

Сетчато-трубчатые повязки. Отечественной промышленностью выпускается новый вид перевязочного материала – сетчато-трубчатые эластичные бинты. Они предназначены для фиксации перевязочного материала и лекарственных средств практически на любых участках тела (рис. 6).



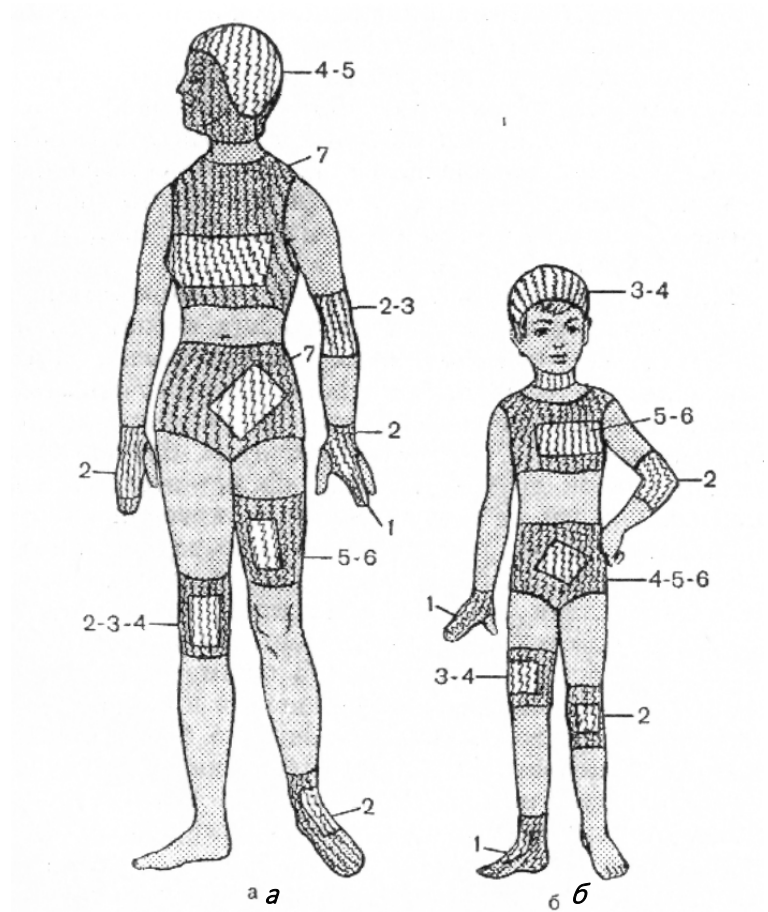


Рис. 6. Основные использования сетчато-трубчатых бинтов.

Цифрами обозначены номера бинтов, применяемых у взрослых (а) и детей (б).

Техника наложения мягких повязок на отдельные области тела

Повязки на голову и шею (рис. 7). Всю волосистую часть головы можно надежно закрыть с помощью простой бинтовой повязки – *чепца*. Отрезок узкого бинта длиной до 1 м средней его частью накладывают на теменную область, а концы впереди ушных раковин опускают вниз и удерживают в натянутом состоянии. На голову через лобную и затылочную области накладывают два циркулярных тура.

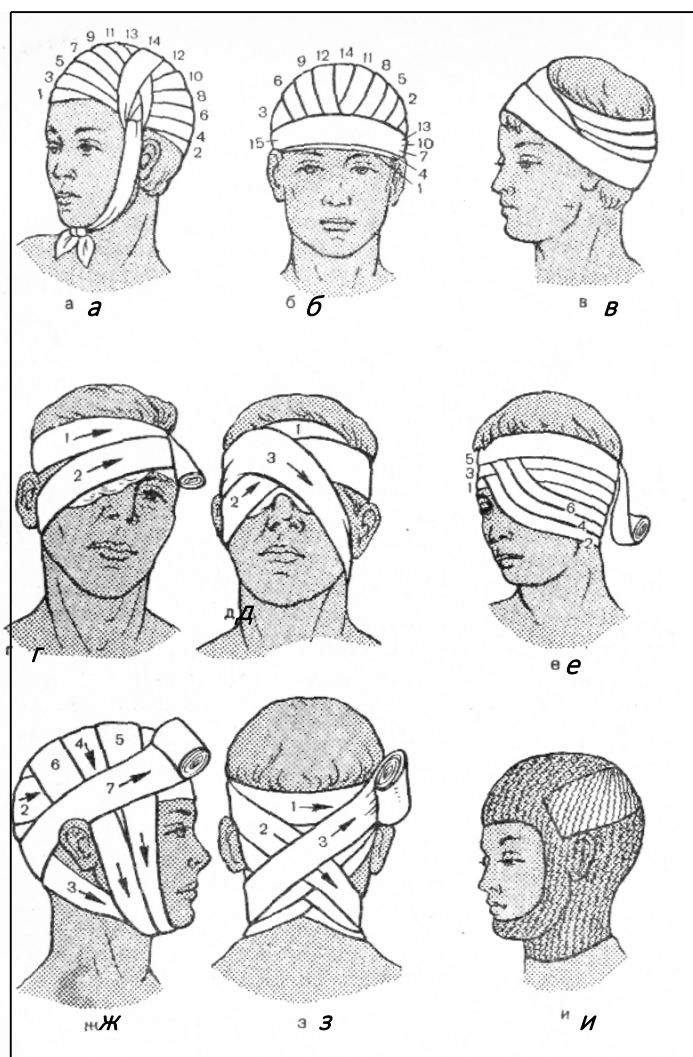


Рис. 7. Повязки на голову и на шею:

а –чепец; *б* –возвращающаяся повязка – «шапка Гиппократ»; *в* –на ухо и затылочную область – «Неаполитанская шапочка»; *г* –на глаз; *д* –на оба глаза; *е* –на глаз, ухо и затылочную область; *ж* –на нижнюю челюсть и свод черепа – «уздечка»;

з –на затылочную область и шею; *и* –сетчато-трубчатая повязка на волосистую часть головы и шею.

Третий тур доводят до бинта завязки, обводят вокруг него и через затылочную область ведут к противоположному концу бинта завязки. Здесь вновь бинт обводят вокруг завязки и накладывают следующий тур через лобно-теменную область, закрыв при этом на $\frac{2}{3}$ циркулярный тур.

Перекидывая бинт каждый раз через завязку, последовательно по типу сходящейся повязки закрывают весь свод черепа. Конец бинта привязывают к одному из концов бинта-завязки, а концы последнего связывают между собой под подбородком с некоторым натяжением.

Свод черепа можно закрыть возвращающейся повязкой, называемой *шапочкой*. Закрепив бинт двумя циркулярными турами, делают перегиб бинта в области лба и ведут его косо спереди назад до затылка, где вновь делают перегиб, и циркулярным туром закрепляют оба перегиба. Повторяя эти действия, закрывают весь свод черепа по типу сходящейся повязки. Заканчивают повязку наложением нескольких циркулярных туров. Повязка удерживается непрочно, поэтому применяется ограниченно. Более надежна повязка-шапочка, накладываемая двумя бинтами, когда каждый тур, идущий спереди назад, создаваемый одним бинтом, укрепляется циркулярными турами второго бинта.

Повязка на глаз начинается наложением циркулярного тура через лобную и затылочную области. Второй тур в затылочной области опускают ближе к шее и выводят под ухом на лицо, закрывая скуловую кость, глаз и частично переносицу, а затем выводят на лоб. Третий тур –циркулярный, закрепляющий. Следующий тур – вновь косой, закрывающий первый косой на половину его ширины, затем – опять закрепляющий. Постепенно смещая, косой тур вверх, полностью закрывают глаз. Завершают повязку циркулярным закрепляющим туром. При бинтовании левого глаза туры бинта ведут справа налево, а при бинтовании правого – слева направо. Повязка на оба глаза начинается так же, как при бинтовании правого глаза, т. е. туры идут из-под правой ушной раковины над глазом к левой половине лба, следующие два тура закрывают левый глаз. Бинт ведут из правой теменной

область сверху вниз через лоб над глазом под левую ушную раковину, и далее в затылочную область осуществляют циркулярный тур. Следующие туры вновь проводят под правым глазом и т. д.

Повязка на ухо начинается с наложения циркулярного тура через лобную и затылочную области. Последующие туры на большой стороне постепенно смещаются вниз, закрывая ухо и сосцевидный отросток. Повязку завершают наложением нескольких циркулярных туров.

Повязка на затылочную область и шею представляет собой восьмиобразную повязку. Начинают повязку с двух циркулярных туров вокруг головы, затем от левого уха бинт ведут косо вниз на затылочную область и под правым углом нижней челюсти на переднюю поверхность шеи и далее из-под челюсти вверх через затылочную область над правым ухом на лоб и т. д. Постепенно смещая место перекрестка косых туров, закрывают всю затылочную область. При необходимости закрыть шею к восьмиобразной повязке добавляют циркулярные туры вокруг шеи.

Повязку на нижнюю челюсть называют *уздечкой*.

Бинт закрепляют циркулярным туром через лобную и затылочную области, второй тур ведут через затылочную область косо вниз и под углом нижней челюсти переходят в вертикальные циркулярные туры впереди ушных раковин, закрывая теменную, височную области и нижнюю челюсть. Закрыв нижнюю челюсть, бинт из-под челюсти выводят на затылочную область и закрепляют повязку несколькими горизонтальными турами через лоб и затылок.

Сетчато-трубчатым бинтом перевязочный материал может быть надежно закреплен на любой части головы и лица.

Широко используются для закрытия ран и укрепления перевязочного материала на голове и лице пращевидные, косыночные и контурные повязки (см. рис. 7).

Повязки на грудную клетку (рис. 8). Наиболее часто используется *спиральная повязка*. Середину отрезка бинта длиной до 1,5 м накладывают через надплечье. Поверх висячего бинта на грудную клетку накладывают широким бинтом спиральную повязку снизу вверх до подмышечных впадин. Висящие концы бинта-завязки несколько натягивают, смещают к средней линии и, перекинув через другое надплечье, связывают между собой спереди над повязкой. Бинт-завязка прочно фиксирует спиральную повязку, делает ее неподвижной. Возможно применение двух бинтов-завязок.

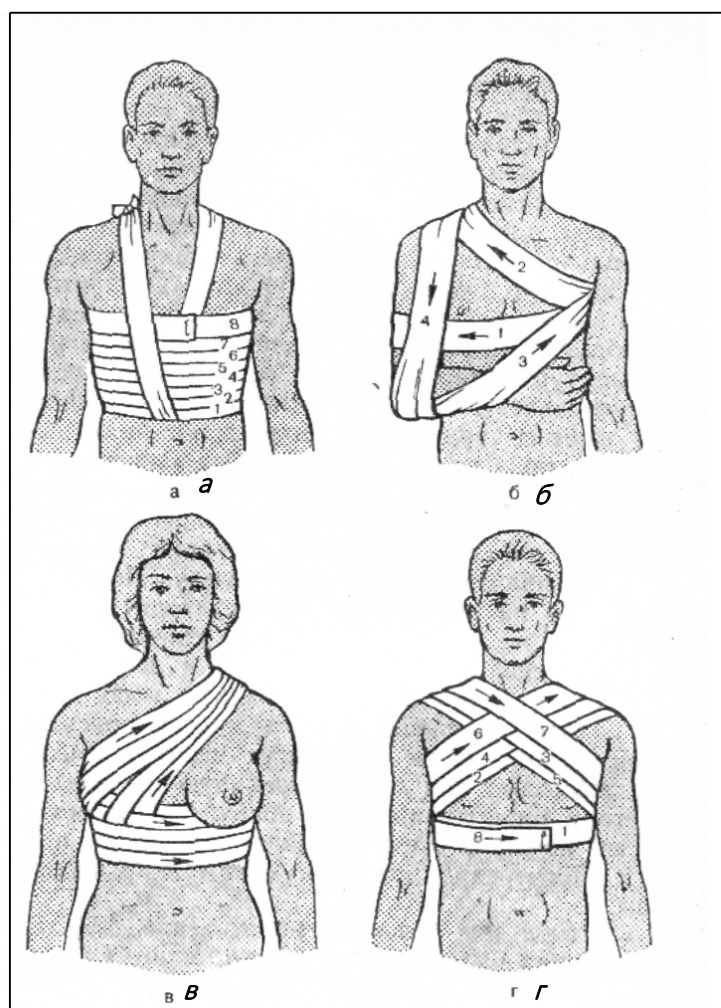


Рис. 8. Повязки на грудную клетку:

а – спиральная; *б* – повязка Дезо; *в* – на молочную железу; *г* – крестообразная на верхнюю часть грудной клетки.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Повязка, фиксирующая плечевой пояс и руку к грудной клетке, – *повязка Дезо* – применяется при оказании первой медицинской помощи при переломе ключицы, плеча, после вправления вывиха плеча, удаления молочной железы. Бинтуемую руку сгибают под прямым углом в плечевом суставе, в подмышечную впадину закладывают валик из ваты величиной с кулак. Двумя циркулярными турами, которые начинают из подмышечной

впадины другой руки и ведут по передней поверхности груди, фиксируют плечо к грудной клетке. Из подмышечной впадины бинт направляют косо вверх и, перекинув через больное надплечье, опускают вертикально вниз под локоть и, охватывая предплечье снизу, приводят в подмышечную впадину. Сзади бинт ведут косо вверх, перекидывают через больное надплечье и опускают вертикально вниз впереди плеча под локоть и далее косо вверх поперек груди в подмышечную впадину выводят на переднюю поверхность грудной клетки. Этим заканчивается первый цикл туров повязки. Их повторяют несколько раз до полной фиксации плеча и предплечья. При повязке Дезо туры бинта никогда не проходят через здоровое надплечье, а косые туры на передней и задней поверхностях образуют правильные треугольники.

Повязки на молочную железу применяют с различными целями – с целью поддержания и сдавливания. Поддерживающая молочную железу повязка применяется при воспалительных процессах и после операций. Повязка на правую молочную железу выполняется в обычном направлении слева направо, на левую – справа налево. Молочную железу максимально отводят вверх и удерживают в этом положении до завершения наложения повязки. Бинт фиксируют циркулярными турами под железой, следующий тур проводят под железой косо вверх через надплечье здоровой стороны, далее косо вниз в подмышечную впадину и под больной железой переходят в циркулярный тур. Следующий тур вновь косой, но накладываемый несколько выше предыдущего, что приводит к подниманию железы. Смещая последовательно и косые и циркулярные туры вверх, удастся максимально поднять молочную железу. При необходимости сдавления молочной железы туры бинта продолжают накладывать до тех пор, пока вся железа не будет

закрыта повязкой. При этом туры накладывают с натяжением, подкладывают под эти туры несколько слоев марли.

Повязка на обе молочные железы начинается аналогично повязке на правую железу. После наложения туров на правую железу переходят к той же манипуляции на левой железе. Циркулярный тур проводят под левой молочной железой к левой подмышечной ямке, сзади бинт направляют косо вверх и через правое надплечье на переднюю поверхность грудной клетки, далее его ведут через промежуток между железами под левую молочную железу, переводя его в циркулярный тур вокруг спины, который является началом нового цикла туров, на правую железу. Поочередно повторяя циклы, закрывают обе железы.

Повязки на живот и таз (рис. 9). Верхняя и средняя части живота надежно могут быть закрыты спиральной повязкой, которая не смещается. Для предупреждения смещения циркулярной повязки, накладываемой на нижнюю половину живота, ее фиксируют к бедру. Накладывают спиральную повязку сверху вниз, последний тур со спины ведут через зону подвздошной кости, направляют вниз на переднюю поверхность бедра и выполняют циркулярный тур вокруг него, далее бинт направляют косо вверх по передней поверхности живота до верхней границы повязки, где выполняется несколько циркулярных туров. Далее следует еще один тур, фиксирующий повязку к бедру: его ведут по спине косо сверху вниз до подвздошной кости, а затем через паховую область на бедро. Закрепляют бинт циркулярным туром, переводят его на переднюю брюшную стенку, где завершают повязку наложением нескольких спиральных туров.

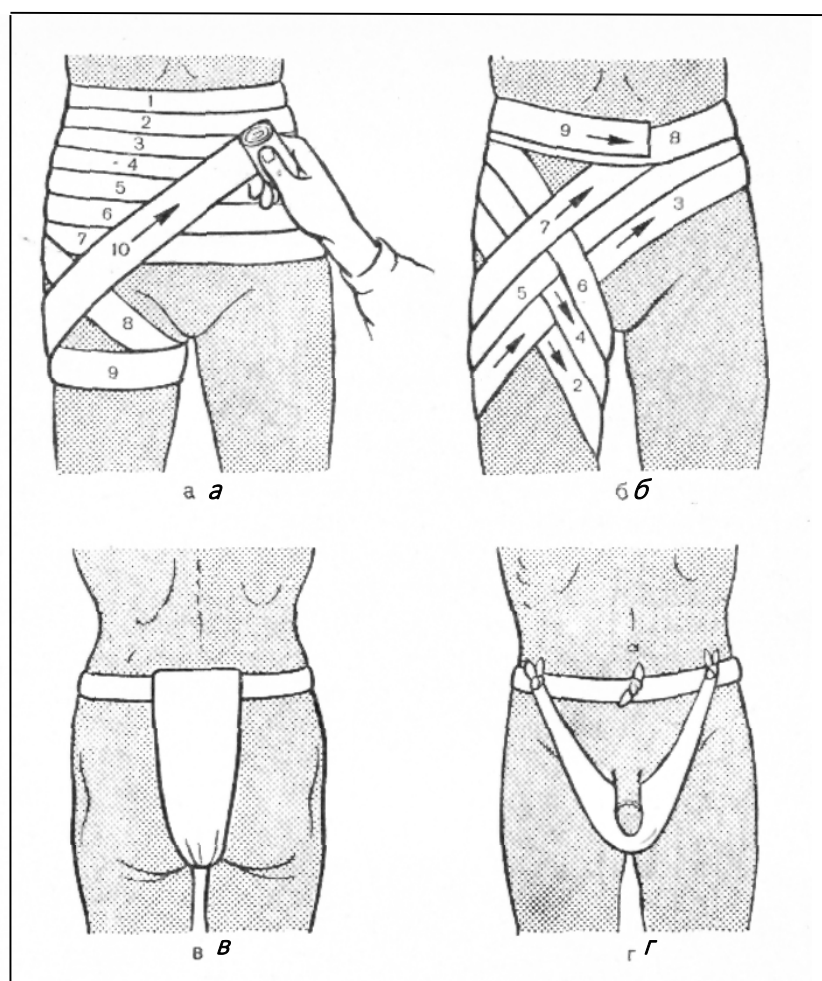


Рис. 9. Повязки на живот, таз и промежность:

а – спиральная с фиксацией к бедру; *б* – на нижнюю половину живота и паховую область;

в – Т-образная на промежность; *г* – суспензорий.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Повязка на паховую область (см. рис. 9). Наиболее удобно закрыть паховую область колосовидной повязкой. Бинт закрепляют циркулярным туром на животе. Если необходимо закрыть правую область, ведут бинт слева направо, а левую – справа налево. Следующий тур – косой: тотчас после перехода в поясничную область его направляют косо вниз над крестцом, ягодицей и по большому вертелу, выводят на переднюю поверхность бедра и

далее бинт накладывают косо вниз, снаружи внутрь, обводят бедро сзади на переднюю поверхность к лонному сочленению и далее через подвздошную кость противоположной стороны на поясницу. Затем накладывают необходимое число туров по ходу первого косого тура с некоторым его смещением. Создавая колосовидную повязку, косые туры можно сочетать с циркулярными, что позволяет надежно закрыть нижние отделы живота, ягодицу, паховую область и верхнюю треть бедра. Заканчивают повязку циркулярными турами на животе.

Повязка на верхнюю конечность. Верхняя конечность имеет сложную конфигурацию, поэтому повязки на нее очень разнообразны и каждая из них включает в себя комбинацию различных типов повязок.

На палец можно наложить два вида повязок. *Спиральная повязка на палец* (рис. 10, а) накладывается узким бинтом. Несколькими круговыми турами бинт фиксируют в области запястья. При бинтовании правой кисти туры накладывают слева направо, левой – справа налево. От запястья бинт проводят косо по тыльной поверхности кисти к основанию пальца. Далее накладывают два винтовых нисходящих тура до ногтевой фаланги, а затем – спиральную восходящую повязку до основания пальца. Бинт выводят через межпальцевый промежуток на тыл кисти к запястью, где и фиксируют его циркулярным туром. Последовательно переходя на другие пальцы, можно наложить повязку на все пальцы – *перчатку*.

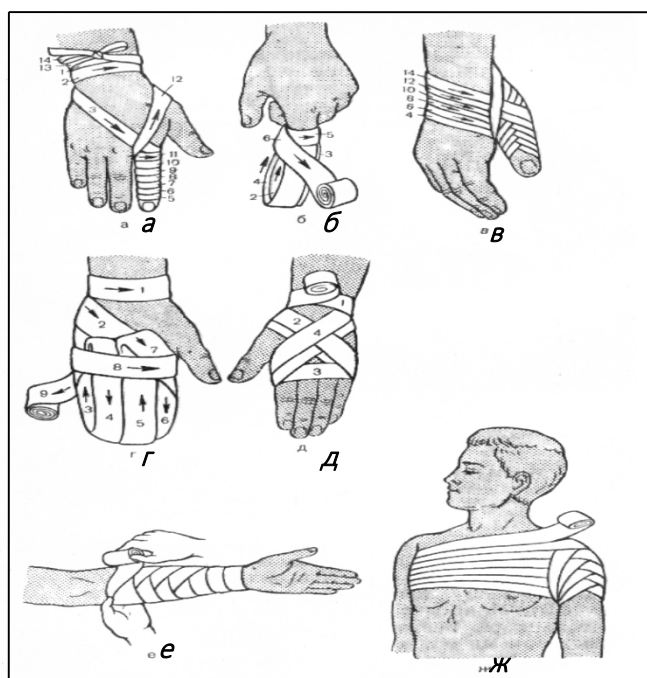


Рис. 10. Повязка на верхнюю конечность:

- а* – спиральная на палец; *б* – возвращающаяся на палец; *в* – колосовидная на 1 палец;
г – возвращающаяся на пальцы и кисть – «варежка»; *д* – на кисть и лучезапястный сустав;
е – спиральная над предплечье; *ж* – колосовидная на плечевой сустав.

Возвращающаяся повязка на палец (см. рис. 10, б). Вначале накладывают несколько слоев бинта попеременно – то на тыльную, то на ладонную поверхность пальца, которые фиксируют круговым туром у основания, а затем винтовым – до ногтевой фаланги. Окончательно формируют повязку наложением спиральных восходящих туров. Фиксируют бинт завязыванием его у основания пальца. Аналогичную повязку можно наложить на все пальцы и кисть – повязка «варежка».

Колосовидная повязка на 1 палец начинается с фиксации бинта на запястье, затем бинт ведут косо через тыльную поверхность кисти и большого пальца к ногтевой фаланге, обводят вокруг пальца и возвращают через тыл кисти к лучезапястному суставу. В дальнейшем эти восьмиобразные туры

повторяют несколько раз, последовательно смещая перекрест бинтов на пальце к его основанию (рис. 10, в). Фиксируют бинт на запястье.

Повязка на кисть и лучезапястный сустав (рис. 10, д) представляет собой комбинацию круговой и восьмиобразной повязок. Наложив несколько круговых туров на область лучезапястного сустава, бинт через тыл кисти проводят через первый межпальцевый промежуток на ладонную поверхность кисти и накладывают несколько круговых туров на кисть. Бинт возвращают через тыл кисти на предплечье. Восьмиобразные туры повторяют несколько раз с переплетом их на тыле кисти. Бинт фиксируют круговыми турами в области лучезапястного сустава. Предплечье надежно можно закрыть спиральной повязкой (рис. 10, е).

Повязку на область локтевого сустава накладывают при сгибании руки в локтевом суставе под углом в 90°. Бинт несколькими круговыми турами фиксируют на плече тотчас выше сустава, а затем выполняют сходящуюся восьмиобразную повязку с перекрестом туров в зоне локтевой ямки. Последние туры закрывают локтевой отросток. Фиксируют бинт круговым туром на плече.

Колосовидная повязка на область плечевого сустава (рис. 10, ж). На плечо ближе к подмышечной впадине накладывают 3 круговых тура. Из подмышечной впадины начинают четвертый тур, ведут его косо вверх по наружной поверхности плеча на спину и далее вокруг груди до начала этого тура. Пятый тур бинта ведут через область плечевого сустава, несколько прикрыв предыдущий тур, косо вниз вокруг плеча и через подмышечную впадину на переднюю поверхность плечевого сустава, который переходит в

следующий тур, аналогичный четвертому. Последовательно смещая туры бинта, полностью закрывают область сустава.

Повязки на нижнюю конечность. На стопе отдельно бинтуют только *1 палец*. Повязка на 1 палец стопы начинается с закрепления бинта несколькими круговыми турами на уровне лодыжек (рис. 11, *а*). Следующий тур проводят по тылу стопы и 1 пальца, закрывая его полностью. Бинт накладывают на палец спиральной восходящей повязкой до его основания, после чего бинт выводят через межпальцевый промежуток на тыл стопы и фиксируют циркулярным туром на голени.

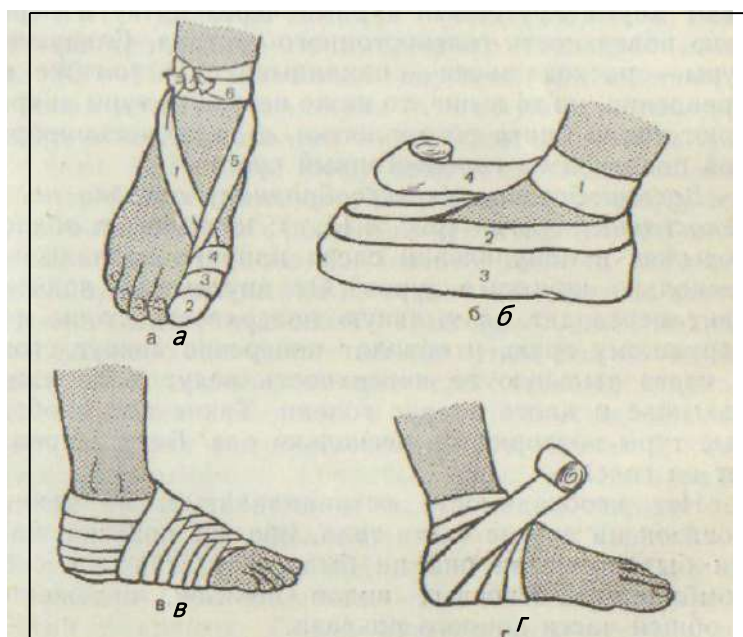


Рис. 11. Повязки на нижнюю конечность:

а – спиральная повязка на 1 палец; *б* – возвращающаяся повязка на всю стопу;

в – сходящаяся повязка на пятку; *г* – восьмиобразная повязка на тыл стопы и пятку.

Возвращающаяся повязка на дистальные отделы стопы. Закрепив бинт несколькими круговыми турами на голени, его выводят на тыльную

поверхность стопы, перекидывают через пальцы и закрывают подошвенную поверхность стопы, где бинт перегибают и возвращают на тыльную поверхность. Несколькими возвращающимися турами закрывают весь дистальный отдел стопы, после чего закрепляют эти туры восходящей спиральной повязкой. Бинт закрепляют круговыми турами на голени.

Повязка на всю стопу (рис. 11, б). Бинт круговыми турами закрепляют на голени, после чего укрывают боковые поверхности стопы циркулярными турами (без натяжения) через пятку и пальцы. Эти туры фиксируют восходящей спиральной повязкой от пальцев до голени.

Черепашью повязку на пятку (рис. 11, в) начинают двумя круговыми турами через пятку и переднюю поверхность голеностопного сустава. Следующие туры – расходящиеся – накладывают в том же направлении, но то выше, то ниже его. Эти туры закрепляют ходом бинта вокруг пятки, а далее восьмиобразной повязкой на голеностопный сустав.

Восьмиобразная (крестообразная) повязка на голеностопный сустав (рис. 11, г): на голень в области лодыжек в направлении слева направо накладывают несколько круговых туров. От внутренней лодыжки бинт переводят на тыльную поверхность стопы к ее наружному краю, обводят поперечно вокруг стопы и через тыльную ее поверхность ведут к наружной лодыжке и далее вокруг голени. Такие восьмиобразные туры повторяются несколько раз. Бинт закрепляют на голени.

Нет необходимости останавливаться на технике повязок на другие части тела, ибо все повязки, какими бы сложными они ни были, представляют собой комбинацию основных видов повязок, изложенных в общей части данного раздела.

ТВЕРДЫЕ ПОВЯЗКИ

Твердые повязки применяют при необходимости создания неподвижности какой-либо части тела (иммобилизующие повязки) или с целью исправления (коррекции) неправильного её положения (корректирующие повязки). При накладывании твердых повязок с лечебной целью чаще используют быстротвердеющие материалы: гипс, пластмассу, клей, крахмал. Иммобилизующие повязки, накладываемые на период транспортировки пострадавшего в медицинское учреждение, выполняют с помощью шин, сделанных из исходно твердых материалов – дерева, металла, пластмассы.

Транспортная иммобилизация – это обеспечение неподвижности какой-либо части тела пострадавшего до момента доставки его в лечебное учреждение. Благодаря созданию неподвижности резко уменьшаются боли, что является основным моментом в профилактике шока. Кроме того, иммобилизация предупреждает смещение отломков и тем самым уменьшает угрозу возможного ранения острыми краями отломков частей сосудов, нервов, мышц, удерживает отломки костей в соприкосновении друг с другом, что значительно облегчает дальнейшее лечение переломов.

Иммобилизацию можно проводить с помощью подручных средств (палки, лыжи и др.), путем аутоиммобилизации – прибинтовывание руки к туловищу пострадавшего, ноги к здоровой ноге или с применением специальных транспортных шин.

Основные правила проведения транспортной иммобилизации:

— шину накладывают на месте происшествия, прямо на одежду и обувь пострадавшего;

— пострадавшему обязательно дают обезболивающие средства: 2 таблетки анальгина по 0,5 г, внутримышечно 50 %-й раствор анальгина или 2 %-й раствор промедола;

— если на одежде присутствуют следы крови, то перед наложением шины следует разрезать одежду в этом месте, осмотреть рану, остановить кровотечение и наложить асептическую повязку;

— перед наложением шины осторожно придают конечности функционально выгодное положение. Руку сгибают в локте под углом 90° , в подмышечную область кладут валик, обеспечивающий отведение плеча на 5° . Если повреждена нога, под колено помещают валик, обеспечивающий сгибание в тазобедренном и коленном суставах под углом 5° , стопу устанавливают под углом 90° ;

— шина обязательно должна захватывать 2 соседних от места перелома сустава при переломах предплечья и голени и три сустава – при переломах бедра и плеча;

— прибинтовать шину следует надежно, но при этом надо следить, чтобы бинты и средства иммобилизации не вдавливались в кожу;

— все действия, в том числе перекладывание пострадавшего, выполняются, не причиняя ему лишних страданий.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 4

Задание: выбрать четыре объекта и осуществить обследование и предписание.

Акт обследования объекта и предписание

Образец

Акт-предписание N _____

(наименование проверяемой организации
или индивидуального предпринимателя и
вышестоящей организации)

(должность, Ф.И.О. представителя
юридического лица или представителя
индивидуального предпринимателя)

Мною, государственным инспектором по энергетическому надзору
Управления государственного энергетического надзора _____ комиссией в
составе: _____

(фамилия, имя, отчество, должность)

на основании распоряжения (приказа) органа государственного
энергетического надзора

_____ от _____ 20__ г N _____

в присутствии _____

(должность, фамилия, имя, отчество)

в период с _____ по _____ 200__ г. проведена
проверка

(вид проверки)

(наименование проверяемой организации)

по теме _____

Краткая характеристика установленного оборудования, характеристика сетей:

В результате проведенной проверки установлено:

1. _____
2. _____
3. _____

Предписание

В порядке государственного энергетического надзора предлагается выполнить следующие мероприятия по устранению выявленных нарушений:

_____Срок
исполнения _____

Выводы:

1. _____
2. _____

Информацию о выполнении настоящего акта-предписания представлять

(Куда, кому, срок и порядок представления)

Инспектор
(старший группы, председатель комиссии,
члены комиссии)

(личный штамп) _____
(подпись) (Ф.И.О.)

При проверке присутствовали:

(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

Акт-предписание (_____ экз.) для исполнения получил:

(руководитель) (подпись) (Ф.И.О.)

проверяемой организации)
Рег. N _____

Акт обследования объекта

г. _____ « ____ »
_____ 201__ года.

В _____ связи с _____

комиссией в составе:

Председатель _____ комиссии

Члены _____ комиссии

_____,
(далее – «Комиссия»), в присутствие собственника объекта, проведен его
обследование, а именно следующих помещений, расположенных по адресу

_____:

_____, находящиеся на
балансе _____, на предмет
фактического установления следующего факта

_____.
В результате осмотра комиссией, установлено следующее.

_____.

Подписи:

Председатель

КОМИССИИ

Члены

КОМИССИИ

_____.

Особое

мнение

_____.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ»**

Специальность
21.05.03 Технология геологической разведки

Авторы: Гребенкин С.М., Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Екатеринбург
2020

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1. РАСЧЕТ ПОТРЕБНОГО ВОЗДУХООБМЕНА

Цель практического занятия — закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Человек и среда обитания: воздействия негативных факторов окружающей среды на человека», и формирование практических навыков расчета воздухообмена в производственных помещениях необходимого для очистки воздуха от вредных веществ: для удаления вредных веществ (выделяющихся вредных газов, паров и пыли); для удаления излишних водяных паров; для удаления избыточного тепла.

Общие сведения. Среда обитания — это окружающая человека среда, осуществляющая через совокупность факторов (физических, биологических, химических и социальных) прямое или косвенное воздействие на жизнедеятельность человека, его здоровье, трудоспособность и потомство. В жизненном цикле человек и окружающая среда обитания непрерывно взаимодействуют и образуют постоянно действующую систему «человек — среда обитания», в которой человек реализует свои физиологические и социальные потребности. В составе окружающей среды выделяют природную, техногенную, производственную и бытовую среду. Каждая среда может представлять опасность для человека. В данной работе рассматривается расчет потребного воздухообмена (L м³/ч), для очистки воздуха от вредных газов и паров и для удаления избыточного тепла с помощью механической общеобменной вентиляции.

Задание. В помещении объемом V работают n человек со средней производительностью a каждый. Они производят покраску и шпаклевку изделий нитро- (на основе ацетона) красками, эмалями и шпаклевками, для чего используется ручное и механизированное оборудование. В этом же помещении производится пайка N контактов припоем ПОС-60. Источники тепловыделения

– оборудование мощностью $P_{ном}$ и осветительная сеть мощностью $P_{осв}$ из люминесцентных ламп. Расчеты вести для холодного периода года. Помещение имеет K окон направленных на север размерами $2,5 \times 1,75$ м с двойным остеклением и деревянными рамами. Категория работ – III (тяжелая).

Рассчитать потребный воздухообмен и определить кратность воздухообмена для: 1) испарений растворителей и лаков; 2) при пайке припоем ПОС-60; 3) удаления выделяемой людьми углекислоты; 4) удаления избыточного тепла.

Методика и порядок расчета воздухообмена для очистки воздуха.

Потребный воздухообмен определяется по формуле

$$L = \frac{G \times 1000}{x_n - x_v}, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.1)$$

где L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; G , $\text{г}/\text{ч}$ – количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения; x_v , $\text{мг}/\text{м}^3$ – предельно допустимая концентрация вредности в воздухе рабочей зоны помещения, согласно ГОСТ 12.1.005-88 [1]; x_n , $\text{мг}/\text{м}^3$ – максимально возможная концентрация той же вредности в воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338- 03) **4**.

Применяется также понятие кратности воздухообмена (n), которая показывает сколько раз в течение одного часа воздух полностью сменяется в помещении. Значение n **4** может быть достигнуто естественным воздухообменом без устройства механической вентиляции.

Кратность воздухообмена определяется по формуле

$$n = \frac{L}{V_n}, \text{ ч}^{-1}, \quad (1.2)$$

где n , $\text{раз}/\text{ч}$ – кратность воздухообмена; L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; V_n – внутренний объем помещения, м^3 .

Согласно СП 2.2.1.1312-03, кратность воздухообмена $n > 10$ недопустима.

Так как x_n определяется по табл. 1.1 прил.1, а x_v по табл. 1.2 прил.1, то для расчета потребного воздухообмена необходимо в каждом случае определять

количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения.

Таблица 1.0

Исходные данные для расчёта потребного воздухообмена

№ вар.	a , м ² /ч	Материал	n чел.	V м ³	N шт/час	Местность	$P_{\text{ном.}}$ кВт	$P_{\text{осв.}}$ кВт	m окон
1	2	Бесцветный	1	100	40	Сельские населенные пункты	10	0,5	2
2	1,5	аэролак, окраска кистью	2	200	35		20	0,5	3
3	1		3	300	400		30	1	4
4	2		4	400	45		40	1	5
5	3	Цветной	1	500	305	Малые города	200	1	6
6	4	аэролак, окраска механизир.	1	600	48		150	1,5	6
7	3,5		1	700	450	Большие города	200	1	6
8	5		1	800	480		100	2	8
9	0,2	Шпаклевка	3	80	325		10	0,5	2
10	0,3	кистью	4	200	420	Сельские населенные пункты	20	1	4
11	1,5	Шпаклевка	1	200	250		30	1	3
12	1	механизир,	2	300	450		40	1,5	4
13	0,8	Бесцветный	1	150	300	Малые города	50	0,6	2
14	1	аэролак, окраска	2	150	48		60	0,8	3
15	1,2		1	120	335		70	1	2
16	0,7	кистью	2	200	400	Большие города	80	1,2	4
17	2	Цветной	1	200	280		90	0,6	4
18	2,5	аэролак, окраска механизир.	2	400	480		100	0,8	6
19	2,2		1	400	290	Сельские населенные пункты	150	1,2	8
20	1,8		2	600	300		200	1,5	8
21	0,3	Шпаклевка	1	80	200		250	0,5	I
22	0,4	кистью	2	100	250	Малые города	300	0,6	2
23	1	Шпаклевка	1	150	242		60	1	2
24	1	механизир.	2	400	440	Большие города	80	1	3
25	1,5	Шпаклевка	1	100	270		100	1,2	4
26	2	кистью	3	200	180		150	0,5	6

Рассмотрим отдельные характерные случаи выделения вредных веществ в воздух помещения и определения потребного воздухообмена.

1.1. Определение воздухообмена при испарении растворителей и лаков

Испарение растворителей и лаков обычно происходит при покраске различных изделий. Количество летучих растворителей, выделяющихся в воздухе помещений можно определить по следующей формуле

$$G = \frac{a \times A \times m \times n}{100}, \text{ г/ч}, \quad (1.3)$$

где a , м²/ч – средняя производительность по покраске одного рабочего (при ручной покраске кистью – 12 м²/ч, пульверизатором – 50 м²/ч); A , г/м² – расход лакокрасочных материалов; m , % – процент летучих растворителей, содержащихся в лакокрасочных материалах; n – число рабочих, одновременно занятых на покраске.

Численные значения величин A и m определяются по табл. 1.3 прил. 1.

Пример. Определить количество выделяющихся в воздух помещения летучих растворителей.

Решение:

По табл. 3 прил. 1 для цветного аэролака при окраске распылением находим, что $A = 180$ г/м², $m = 75$ %, тогда $G = 50 \cdot 180 \cdot 75 \cdot 2 / 100 = 13500$ г/ч. Далее определяем потребный воздухообмен в помещении по формуле (1.3). Находим для ацетона из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1, что $x_v = 200$ мг/м³, $x_n = 0,35$ мг/м³, тогда $L = 13500 \cdot 1000 / (200 - 0,35) = 67500$ м³/ч.

Ответ: $L = 67500$ м³/ч.

1.2. Определение потребного воздухообмена при пайке электронных схем

Пайка осуществляется свинцово-оловянным припоем ПОС-60, который

содержит $C = 0,4$ доли объема свинца и 60 % олова. Наиболее ядовиты аэрозоли (пары) свинца.

В процессе пайки из припоя испаряется до $B = 0,1$ % свинца, а на 1 пайку расходуется 10 мг припоя. При числе паяк – N , количество выделяемых паров свинца определяется по формуле

$$G = C \times B \times N, \text{ мг/ч}, \quad (1.4)$$

где G , г/ч – количество выделяемых паров свинца; C – содержание свинца; B – % свинца; N – число паяк.

Пример. В помещении объемом $V_{\text{п}} = 1050 \text{ м}^3$ три человека осуществляют пайку припоем ПОС-40 с производительностью по 100 контактов в час. Найти требуемую кратность воздухообмена.

Решение:

По формуле (1.4) определяем количество аэрозолей свинца, выделяемых в воздух: $G = 0,6 \cdot 0,001 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 3 = 1,8 \text{ мг/ч}$. Далее определяем потребный воздухообмен по формуле (1.1). Находим из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1 для свинца и его соединений $x_{\text{в}} = 0,01 \text{ мг/м}^3$; $x_{\text{н}} = 0,001 \text{ мг/м}^3$. Тогда $L = 1,8 / (0,01 - 0,001) = 200,0 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Ответ: $L = 185,5 \text{ м}^3/\text{ч}$.

1.3. Определение воздухообмена в жилых и общественных помещениях

В жилых и общественных помещениях постоянным вредным выделением является выдыхаемая людьми углекислота (CO_2). Определение потребного воздухообмена производится по количеству углекислоты, выделяемой человеком и по допустимой концентрации её.

Количество углекислоты в зависимости от возраста человека и выполняемой работы, а также допустимые концентрации углекислоты для различных помещений приведены в табл. 1.4 и 1.5 прил. 1.

Содержание углекислоты в атмосферном воздухе можно определить по химическому составу воздуха. Однако, учитывая повышенное содержание углекислоты в атмосфере населенных пунктов, следует принимать при расчете содержания CO_2 следующие значения: для сельских населенных пунктов – $0,33 \text{ л/м}^3$, для малых городов (до 300 тыс. жителей) – $0,4 \text{ л/м}^3$, для больших городов (свыше 300 тыс. жителей) – $0,5 \text{ л/м}^3$.

Пример. Определить требуемую кратность воздухообмена в помещении, где работают 3 человека.

Решение:

По табл. 1.4 прил.1 определяем количество CO_2 , выделяемой одним человеком $g = 23 \text{ л/ч}$. По табл. 1.5 прил. 1 определяем допустимую концентрацию CO_2 . Тогда $x_{\text{в}} = 1 \text{ л/м}^3$ и содержание CO_2 в наружном воздухе для больших городов $x_{\text{н}} = 0,5 \text{ л/м}^3$. Определяем требуемый воздухообмен по формуле (1.1) $L = 23 \cdot 3 / (1 - 0,5) = 138 \text{ м}^3/\text{ч}$. Ответ: $L = 138 \text{ м}^3/\text{ч}$.

1.4. Определение требуемого воздухообмена при выделении газов (паров) через неплотности аппаратуры, находящейся под давлением

Производственная аппаратура, работающая под давлением, как правило, не является вполне герметичной. Степень герметичности аппаратуры уменьшается по мере ее износа. Считая, что просачивание газов через неплотности подчиняется тем же законам, что и истечение через небольшие отверстия, и, предполагая, что истечение происходит адиабатически, количество газов, просочившихся через неплотности, можно определить по формуле

$$G = k \times c \times \sqrt{\frac{M}{T}}, \text{ кг/ч,} \quad (1.5)$$

где k – коэффициент, учитывающий повышение утечки от износа оборудования

($k = 1-2$); c – коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате; v – внутренний объем аппаратуры и трубопроводов, находящихся под давлением, м^3 ; M – молекулярный вес газов, находящихся в аппаратуре; T – абсолютная температура газов в аппаратуре, К.

Таблица 1.2

Коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате

Давление p , атм	до 2	2	7	17	41	161
c	0,121	0,166	0,182	0,189	0,25	0,29

Пример. Система, состоящая из аппаратов и трубопроводов, заполнена сероводородом. Рабочее давление в аппаратуре $p_a = 3$ атм, а в проводящих трубопроводах $p_{\text{тр}} = 4$ атм. Внутренний объем аппаратуры $v_a = 5 \text{ м}^3$, объем трубопроводов, $v_{\text{тр}} = 1,2 \text{ м}^3$. Температура газа в аппаратуре – $t_a = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, в трубопроводе – $t_{\text{тр}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Определить потребный воздухообмен в помещении.

Решение:

Определяем величины утечек сероводорода (H_2S) из аппаратуры и трубопроводов. Принимаем $k = 1,5$; $c = 0,169$ (по табл. 1.2); $M = 34$, для H_2S ; Утечка газа из аппаратуры составляет:

$$G_a = 1,5 \times 0,169 \times \sqrt{\frac{34}{393}} = 0,372$$

Утечка газа из трубопроводов составляет:

$$G_{\text{тр}} = 1,5 \times 0,172 \times 1,2 = 0,104$$

$$G = G_a + G_{\text{тр}} = 0,372 + 0,104 = 0,476, \text{кг/ч}$$

Используя данные табл. 1.1 прил. 1, находим, что для сероводорода $x_v = 10 \text{ мг/м}^3$; $x_n = 0,008 \text{ мг/м}^3$. Потребный воздухообмен равен

$$L = \frac{4761000}{(10 - 0,008)} = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$$

Ответ: $L = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$

Вывод: В воздухе помещения одновременно могут выделяться несколько вредных веществ. По действию на организм человека они могут быть однонаправленными и разнонаправленными. Для однонаправленных веществ расчетные значения требуемого воздухообмена суммируются, а для разнонаправленных веществ выбирается наибольшее значение требуемого воздухообмена.

Пример. Для первой вредности в воздухе рабочей зоны – вредных (токсичны) веществ в рассмотренных примерах все относятся к веществам разнонаправленного действия, поэтому принимаем к дальнейшему расчету максимальное из полученных значений, т. е. $L = 67500 \text{ м}^3/\text{ч}$ (требуемый воздухообмен для паров растворителей при окраске).

Для проверки соответствия требованиям устройства вентиляции определим кратность воздухообмена $n = 67500/4800 = 14,1 \text{ ч}^{-1}$. Данное значение превышает установленную величину – 10 ч^{-1} , поэтому необходимо принять дополнительное решение по устройству вентиляции в помещении. Например, таким решением может быть исключение распространения от двух мест окраски растворителей по всему помещению за счет применения местной вытяжной вентиляции.

Расчет объема воздуха удаляемого местной вентиляцией определяется по формуле

$$L_{\text{МВ}} = F \times v \times 3600, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.6)$$

где F – площадь сечения всасывающих отверстий, м^2 ; v – скорость воздуха в сечении вытяжной вентиляции, $\text{м}/\text{с}$. Рекомендуется принимать значение скорости в интервале $0,8-1,5 \text{ м}/\text{с}$.

Таким образом, требуемый воздухообмен для оставшихся вредных веществ принимаем для выделений сероводорода: $L = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Проверка:

$$n = 47638, 1/4800 = 9,9 \text{ ч}^{-1}.$$

1.5. Расчёт потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла

Расчет потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла производится по формуле

$$L = \frac{Q_{\text{изб}}}{\gamma_B \times c \Delta t}, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.7)$$

где L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; $Q_{\text{изб}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – избыточное тепло; $\gamma_B = 1,206 \text{ кг}/\text{м}^3$ – удельная масса приточного воздуха; $c_B = 0,24 \text{ ккал}/\text{кг} \cdot \text{град}$ – теплоемкость воздуха;

$$\Delta t = t_{\text{вых}} - t_{\text{пр}}, \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.8)$$

где $t_{\text{вых}}$, $^\circ\text{C}$ – температура удаляемого воздуха; $t_{\text{пр}}$, $^\circ\text{C}$ – температура приточного воздуха.

Величина Δt при расчетах выбирается в зависимости от теплонапряженности воздуха – Q_n : при $Q_n \leq 20 \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}$ $\Delta t = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$; при $Q_n > 20 \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}$ $\Delta t = 8 \text{ } ^\circ\text{C}$;

$$Q_n = \frac{Q_{\text{изб}}}{V_n}, \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}, \quad (1.9)$$

где V_n , м^3 – внутренний объем помещения.

Таким образом, для определения потребного воздухообмена необходимо определить количество избыточного тепла по формуле

$$Q_{\text{изб}} = Q_{\text{об}} + Q_{\text{осв}} + Q_{\text{л}} + Q_{\text{р}} - Q_{\text{отд}}, \text{ ккал}/\text{ч}, \quad (1.10)$$

где $Q_{\text{об}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое оборудованием; $Q_{\text{осв}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое системой освещения; $Q_{\text{л}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое людьми в помещении; $Q_{\text{р}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, вносимое за счет солнечной радиации; $Q_{\text{отд}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – теплоотдача естественным путем.

Определяем количество тепла, выделяемого оборудованием

$$Q_{об} = 860 \times P_{об} \times y_1, \text{ ккал/ч} \quad (1.11)$$

где Y_1 – коэффициент перехода тепла в помещение, зависящий от вида оборудования; $P_{об}$, кВт – мощность, потребляемая оборудованием;

$$P_{об} = P_{ном} \times y_2 \times y_3 \times y_4, \text{ кВт}, \quad (1.12)$$

где $P_{ном}$, кВт – номинальная (установленная) мощность электрооборудования помещения; Y_2 – коэффициент использования установленной мощности, учитывающий превышение номинальной мощности над фактически необходимой; Y_3 – коэффициент загрузки, т.е. отношение величины среднего потребления мощности (во времени) к максимально необходимой; Y_4 – коэффициент одновременности работы оборудования.

При ориентировочных расчетах произведение всех четырех коэффициентов можно принимать равным:

$$y_1 \times y_2 \times y_3 \times y_4 = 0,25 \quad (1.13)$$

Определяем количество тепла, выделяемого системой освещения

$$Q_{осв} = 860 \times P_{осв} \times \alpha \beta \times \cos(\varphi), \quad (1.14)$$

где α – коэф. перевода электрической энергии в тепловую для лампы накаливания $\alpha = 0,92 - 0,97$, люминесцентной лампы $\alpha = 0,46 - 0,48$; β – коэффициент одновременности работы (при работе всех светильников $\beta = 1$); $\cos(\varphi) = 0,7 - 0,8$ – коэффициент мощности; $P_{осв}$, кВт – мощность осветительной установки.

Определяем количество тепла, выделяемого находящимися в помещении людьми

$$Q_{л} = N \times q_{л}, \quad (1.15)$$

где N – количество людей в помещении; $q_{л}$, ккал/ч – тепловыделения одного человека табл. 1.6 прил. 1.

Определяем количество тепла, вносимого за счет солнечной радиации

$$Q_p = K \times S \times q_{ост}, \quad (1.16)$$

где K – количество окон; S , м² – площадь одного окна; $q_{ост}$, ккал/ч – солнечная

радиация через остекленную поверхность табл. 1.7 прил. 1.

Определяем теплоотдачу, происходящую естественным путем. Если нет дополнительных условий, то можно считать ориентировочно, что $Q_{отд} = Q_p$ для холодного и переходного периодов года (среднесуточная температура наружного воздуха ниже +10 °С). Для теплого периода года (среднесуточная температура воздуха выше +10 °С) принимаем $Q_{отд} = 0$.

Общий вывод: Среди полученных расчетных значений требуемого воздухообмена для вредных веществ и удаления избыточного тепла выбирается наибольшее значение требуемого воздухообмена.

**Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в атмосферном
воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338-03)**

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м ³	ПДКс.с., мг/м ³	Агрегатн состояние
Азота диоксид	0,085	0,04	п
Азота оксид	0,6	0,06	п
Акролеин	0,03	0,03	п
Амилацетат	0,10	0,10	п
Аммиак	0,2	0,04	п
Ацетон	0,35	0,35	п
Бензин (углеводороды)	5,0	1,5	п
Бензол	1,5	0,1	п
Бутан	200	-	п
Бутилацетат	0,1	0,1	п
Винилацетат	0,15	0,15	п
Дихлорэтан	3,0	1,0	п
Ксилол	0,2	0,2	п
Марганец и его соединения	0,01	0,001	а
Метилацетат	0,07	0,07	п
Мышьяк и его неорг. соединения	-	0,003	а
Озон	0,16	0,03	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	0,15	0,05	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	0,5	0,15	а
Ртут хлорид (сулема)	-	0,0003	а
Сажа	0,15	0,05	а
Свинец и его соединения	0,001	0,0003	а
Сернистый ангидрид	0,5	0,15	п
Серная кислота	0,3	0,1	а

Продолжение табл. 1.1

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м ³	ПДКс.с., мг/м ³	Агрегатн состояние
Сероводород	0,008	-	п
Сероуглерод	0,03	0,005	п
Спирт бутиловый	0,16	-	п
Спирт изобутиловый	0,1	0,1	п
Спирт метиловый	1,0	0,5	п
Спирт этиловый	5	5	п
Стирол	0,04	0,002	п
Толуол	0,6	0,6	п
Углерода оксид	5,0	3,0	п
Фенол	0,01	0,003	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,02	0,005	п
Хлор	0,1	0,03	п
Хлористый водород	0,2	0,2	п
Этилацетат	0,1	0,1	п

Примечание: п – пары и/или газы; а – аэрозоль

**Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в воздухе рабочей
зоны (ГОСТ 12.1.005-88)**

Наименование вредных веществ	ПДК., мг/м ³	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Азота диоксид	2,0	3	п
Азота оксиды	5,0	3	п
Акролеин	0,2	2	п
Амилацетат	100	4	п
Аммиак	20	4	п
Ацетон	200	4	п
Бензин (углеводороды)	100	4	п
Бензол	15/5	2	п
Бутан	300	4	п
Бутилацетат	200	4	п
Винилацетат	10,0	4	п
Дихлорэтан	10,0	2	п
Ксилол	50,0	3	п
Марганец и его соединения (от 2-30 %)	0,1	2	а
Метилацетат	100	4	п
Мышьяк и его неорг. соединения	0,04/0,01	2	а
Озон	0,1	1	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	1,5	4	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	4,0	4	а
Ртут хлорид (сулема)	0,2/0,05	1	а
Сажа	4,0	3	а
Свинец и его соединения	0,01/0,005	1	а
Серная кислота	1,0	2	а
Сернистый ангидрид	10	3	п
Сероводород	10,0	3	п

Продолжение табл. 1.2

Наименование вредных веществ	ПДК, мг/м ³	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Сероуглерод	1,0	3	п
Спирт бутиловый	10,0	3	п
Спирт изобутиловый	10,0	3	п
Спирт метиловый	5,0	3	п
Спирт этиловый	1000	4	п
Стирол	30/10	3	п
Толуол	50	3	п
Углерода оксид	20	4	п
Фенол	0,3	2	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,5/0,1	2	п
Хлор	1,0	2	п
Хлористый водород	5,0	1	п
Этилацетат	200	4	п

Примечание: значение в числителе – максимально разовые; в знаменателе – среднесменные

Таблица 1.3

Расходы лакокрасочных материалов на один слой покрытия изделий и содержание в них летучих растворителей

Наименование лакокрасочных материалов/способ нанесения краски	Расход лакокрасочных материалов, A , г/м ²	Содержание летучей части, m , %
Нитролаки и краски		
Бесцветный аэролак /кистью	200	92
Цветные аэролаки/распыление пульверизатором	180	75
Нитрошпаклевка /кистью	100-180	10-35
Нитроклей /кистью	160	80-85
Масляные лаки и эмали		
Окраска распылением	60-90	35

Таблица 1.4

Количество углекислоты, выделяемой человеком при разной работе

Возраст человека и характер работы	Количество CO ₂	
	в л/ч	в г/ч
Взрослые:		
при физической работе	45	68
при легкой работе (в учреждениях)	23	35
в состоянии покоя	23	35
Дети до 12 лет	12	18

Таблица 1.5

Предельно-допустимые концентрации углекислоты

Наименование помещений	Количество CO ₂	
	в л/ч	в г/кг
Для постоянного пребывания людей (жилые ком.)	1	1,5
Для пребывания детей и больных	0,7	1
Для учреждений	1,25	1,75
Для кратковременного пребывания людей	2	3

Таблица 1.6

Количество тепловыделений одним человеком при различной работе

Категория тяжести работы		Количество тепловыделений $q_{\text{л}}$, ккал/ч в зависимости от окружающей температуры воздуха			
		15 °C	20 °C	25 °C	30 °C
Легкая	I	100	70	50	30
Средней тяжести	II-а	100	70	60	30
Средней тяжести	II-б	110	80	70	35
Тяжелая	III	110	80	80	35

Таблица 1.7

Солнечная радиация через остекленную поверхность

	Солнечная радиация, $q_{\text{ост}}$, ккал/ч от стороны света и широты, град.														
	ЮГ			ЮГО-ВОСТОК ЮГО-ЗАПАД				ВОСТОК ЗАПАД				СЕВЕР, СЕВЕР. ВОСТОК СЕВЕРО- ЗАПАД			
	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65
Окна с двойным остеклени- ем и дере- вянными рамами	125	125	145	85	110	125	145	125	125	145	145	65	65	65	60
Окна с двойным остеклени- ем и метал- лическими рамами	160	160	180	110	140	160	180	160	160	180	180	80	80	80	70
Фо- нарь с двойным остекление м и метал- лическими переплет.	130	160	170	110	140	170	170	160	160	180	180	85	85	85	70

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин П.А. Справочник по технике безопасности. – М.: Энергоиздат, 1982. – 342 с.
2. Каменев П.Н. Отопление и вентиляция. Часть II. Вентиляция. – М.: Издательство литературы по строительству, 1966. – 289 с.
3. ГОСТ 12.1.005-88 ССБТ. Санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны.
4. ГН2.1.6.1338-03. Предельно допустимые концентрации (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. ОЦЕНКА РИСКА

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Основы теории безопасности: системный анализ безопасности», и формирование практических навыков расчета индивидуального и группового (социального) риска в конкретных ситуациях.

Общие сведения. Опасность – одно из центральных понятий безопасности жизнедеятельности (БЖД).

Опасность хранят все системы, имеющие энергию, химически или биологически активные компоненты, а также характеристики (параметры), несоответствующие условиям жизнедеятельности человека. Можно сказать, что опасность – это риск неблагоприятного воздействия.

Практика свидетельствует, что абсолютная безопасность недостижима. Стремление к абсолютной безопасности часто вступает в антагонистические противоречия с законами техносферы.

В сентябре 1990 г. в г. Кельне состоялся первый Всемирный конгресс по безопасности жизнедеятельности человека как научной дисциплине. Девиз конгресса: «Жизнь в безопасности». Участники конгресса постоянно оперировали понятием «риск».

Возможны следующие определения риска:

1. Это количественная оценка опасности, вероятность реализации опасности;
2. При наличии статистических данных, это частота реализации опасностей.

Различают опасности реальные и потенциальные. В качестве аксиомы принимаются, что любая деятельность человека потенциально опасна. Реализация потенциальной опасности происходит через ПРИЧИНЫ и приводит к НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫМ ПОСЛЕДСТВИЯМ.

Сейчас перед специалистами ставится задача – не исключение до нуля безопасности (что в принципе невозможно). А достижение заранее заданной величины риска реализации опасности. При этом сопоставлять затраты и получаемую от снижения риска выгоду. Во многих западных странах для более объективной оценки риска и получаемых при этом затрат и выгод, вводят финансовую меру человеческой жизни. Заметим, что такой подход имеет противников, их довод – человеческая жизнь свята, бесценна и какие-то финансовые оценки недопустимы. Тем не менее, по зарубежным исследованиям, человеческая жизнь оценивается, что позволяет более объективно рассчитывать ставки страховых тарифов при страховании и обосновывать суммы выплат.

Поскольку абсолютная безопасность (нулевой риск) невозможна, современный мир пришел к концепции приемлемого (допустимого) риска.

Суть концепции заключается в стремлении к такой безопасности, которую принимает общество в данное время. При этом учитывается уровень технического развития, экономические, социальные, политические и др. возможности. Приемлемый риск – это компромисс между уровнем безопасности и возможностями ее достижения. Это можно рассмотреть в следующей ситуации. После крупной аварии на Чернобыльской АЭС, правительство СССР решило повысить надежность всех ядерных реакторов. Средства были взяты из госбюджета и, следовательно, уменьшилось финансирование социальных программ здравоохранения, образования и культуры, что в свою очередь привело к увеличению социально-экономического риска. Поэтому следует всесторонне оценивать ситуацию и находить компромисс – между затратами и величиной риска.

Переход к «риску» дает дополнительные возможности повышения безопасности техносферы. К техническим, организационным, административным добавляются и экономические методы управления риском (страхование, денежные компенсации ущерба, платежи за риск и

др.). Есть здравый смысл в том, чтобы законодательно ввести квоты за риск. При этом возникает проблема расчета риска: статистический, вероятностный, моделирование, экспертных оценок, социологических опросов и др. Все эти методы дают приблизительную оценку, поэтому целесообразно создавать базы и банки данных по рискам в условиях предприятий, регионов и т.д.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с общими сведениями. Записать определения.
2. Выполнить практические задачи.

Практические задачи

Задача 1. В таблице 2.0 приведен ряд профессий по степени индивидуального риска фатального исхода в год. Используя данные табл.1 методом экспертных оценок охарактеризуйте вашу настоящую деятельность и условия вашей будущей работы.

Таблица 2.0

Классификация профессиональной безопасности

Категория	Условия профессиональной деятельности	Риск смерти (на человека в год)	Профессия
1	Безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$	Текстильщики, обувщики, работники лесной промышленности, бумажного производства и др.
2	Относительно безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$ до $1 \cdot 10^{-3}$	Шахтеры, металлурги, судостроители и др.
3	Опасные	$1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-2}$	Рыболовство, верхолазы, трактористы и др.
4	Особо опасные	больше $1 \cdot 10^{-2}$	Летчики-испытатели, летчики реактивных самолетов.

После обсуждения письменно сформулируйте свою оценку.

Для решения следующих задач используйте формулу определения индивидуального риска

$$P = \frac{h}{H}, \quad (2.1)$$

где P – индивидуальный риск (травмы, гибели, болезни и пр.); h – количество реализации опасности с нежелательными последствиями за определенный период времени (день, год и т.д.); H – общее число участников (людей, приборов и пр.), на которых распространяется опасность.

Пример решения задачи по формуле (2.1).

Пример. Задача 1. Ежегодно неестественной смертью гибнет 250 тыс. человек. Определить индивидуальный риск гибели жителя страны при населении в 150 млн. человек.

Решение.

$$P_{ж} = 2,5 \cdot 10^5 / 1,5 \cdot 10^8 = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Или будет 0,0017. Иначе можно сказать, что ежегодно примерно 17 человек 10000 погибает неестественной смертью. Если пофантазировать и предположить, что срок биологической жизни человека равен 1000 лет, то по нашим данным оказывается, что уже через 588 лет (1:0,0017) вероятность гибели человека неестественной смертью близка к 1 (или 100%).

Примечание. Здесь и в задачах №2,3 данные приближены к России.

Задача 2. Опасность гибели человека на производстве реализуется в год 7 тыс. раз. Определить индивидуальный риск погибших на производстве при условии, что всего работающих 60 млн. человек. Сравните полученный результат с вашей экспертной оценкой из задачи 1.

Задача 3. Определить риск погибших в дорожно-транспортном происшествии (ДТП), если известно, что ежегодно гибнет в ДТП 40 тыс. человек при населении 150 млн. человек.

Задача 4. Используя данные индивидуального риска фатального

исхода в год для населения США (данных по России нет), определите свой индивидуальный риск фатального исхода на конкретный год. При этом можно субъективно менять коэффициенты и набор опасностей.

Таблица 2.1

Индивидуальный иск гибели в год

Причина	Риск	Причина	Риск
Автомобильный транспорт	$3 \cdot 10^{-4}$	Воздушный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$
Падения	$9 \cdot 10^{-5}$	Падающие предметы	$6 \cdot 10^{-6}$
Пожар и ожог	$4 \cdot 10^{-5}$	Электрический ток	$6 \cdot 10^{-6}$
Утопление	$3 \cdot 10^{-5}$	Железная дорога	$4 \cdot 10^{-6}$
Отравление	$2 \cdot 10^{-5}$	Молния	$5 \cdot 10^{-7}$
Огнестрельное оружие	$1 \cdot 10^{-5}$	Все прочие	$4 \cdot 10^{-5}$
Станочное оборудование	$1 \cdot 10^{-5}$	Ядерная энергетика	$2 \cdot 10^{-10}$
Водный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$	(пренебрегаемо мал. риск)	

Риск общий для американца: $P_{\text{общ}} = 6 \cdot 10^{-4}$

Сравнить полученный результат с результатом примера решения.

Задачи на риск гибели неестественной смертью в России и с риском гибели в год для американца ($P_{\text{общ}}$).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русак О.Н. Труд без опасности. Л. «Лениздат», 1986, 191 с.
2. Береговой Г.Т. и др. Безопасность космических полетов. М., «Машиностроение», 1977, 320 с.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МИКРОКЛИМАТА РАБОЧЕЙ ЗОНЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Цель практического занятия : закрепление теоретических знаний, полученных при изучении раздела “Гелиофизические и метеорологические фактора: микроклимат производственных помещений”, и формирование практических навыков расчета метеорологических условий в производственном помещении и гигиенической оценки параметров микроклимата.

Общие сведения:

Одним из основных условий эффективной производственной деятельности человека является обеспечение нормальных метеорологических условий в помещениях. Параметры микроклимата оказывают существенное влияние на терморегуляцию организма человека и могут привести к переохлаждению или перегреву тела

Микроклимат производственных помещений - это климат внутренней среды этих помещений, определяемый действующими на организм человека факторами: сочетанием температуры воздуха, относительной влажности, скорости движения воздуха, интенсивности теплового облучения, температуры поверхности ограждающих конструкций (стены, пол, потолок, технологическое оборудование и т.д)

Под рабочей зоной понимается пространство высотой до 2м над уровнем пола или площадки, на которых находятся места постоянного или временного пребывания рабочих.

Причиной ряда заболеваний является местное и общее охлаждение. Переохлаждение организма ведет к простудным заболеваниям: ангине, катару верхних дыхательных путей, пневмонии. Установлено, что при

переохлаждении ног и туловища возникает спазм сосудов слизистых оболочек дыхательного тракта.

Перегревание возникает при избыточном накоплении тепла в организме, которое возникает при действии повышенных температур. Основными признаками перегревания являются повышение температуры тела до 38°С и более, обильное потоотделение, слабость, головная боль, учащение дыхания и пульса, изменение артериального давления и состав крови, шум в ушах, искажение цветового восприятия

Тепловой удар – это быстрое повышение температуры тела 40°С и выше. В этом случае падает артериальное давление, потоотделение прекращается, человек теряет сознание.

Организм человека обладает свойством терморегуляции – поддержание температуры тела в определенных границах (36,1...37,2°С) Терморегуляция обеспечивает равновесие между количеством тепла, непрерывно образующегося в организме человека в процессе обмена веществ, теплопродукцией и излишком тепла, непрерывно выделяемого в окружающую среду, - теплоотдачей, т.е сохраняет тепловой баланс организма человека. Количество выделившейся теплоты меняется от 8Вт до 50 Вт.

Теплопродукция. Тепло вырабатывается всем организмом, но в наибольшей степени в мышцах и печени. В процессе работы в организме происходят различные биохимические процессы, связанные с деятельностью мышечного аппарата и нервной системы. Энергозатраты человека, выполняющего различную работу, могут быть классифицированы на категории.

Разграничение работ по категориям осуществляется на основе интенсивности общих энергозатрат организма: легкие физические работы, средние физические работы, тяжелые физические работы.

К категории 1а относятся работы с интенсивностью энергозатрат до 139 Вт, выполняемые сидя и сопровождающиеся незначительным физическим напряжением.

К категории 1б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 140...174 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой и сопровождающиеся некоторым физическим напряжением (в полиграфической промышленности, на часовом, швейном производствах, в сфере управления)

К категории 2а относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233...232 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой, перемещением мелких изделий или предметов в положении стоя или сидя и требующие определенного физического напряжения.

К категории 2б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233...290 Вт, связанные с ходьбой, перемещением и переноской тяжестей до 10 кг и сопровождающиеся умеренным физическим напряжением.

К категории 3 относятся работы с интенсивностью энергозатрат более 290 Вт, связанные с постоянными передвижениями, перемещением и переноской значительных (свыше 10 кг) тяжестей и требующие больших физических усилий.

Теплоотдача. Количество тепла, отдаваемого организмом человека, зависит от температуры, относительной влажности и скорости движения воздуха. Теплоотдача осуществляется путем радиации, конвекции, испарения пота и дыхания. Для человека, находящегося в состоянии покоя и одетого в обычную комнатную одежду, соотношение составляющих теплоотдачи имеет следующие распределения, % радиацией – 45, конвекцией – 30, испарением и дыханием – 25.

Основное значение имеет регулирование теплоотдачи, так как она является наиболее изменчивой и управляемой. Комфортные тепло ощущения у человека возникают при наличии теплового баланса организма, а также при условии его некоторого нарушения. Это обеспечивается тем, что в организме человека имеется некоторый резерв тепла, который используется им в случае охлаждения. Этот потенциальный запас тепла составляет в среднем 8360 кДж и находится главным образом во внешних слоях тканей организма на глубине 2-3

см от кожи. При известном уменьшении запаса тепла у человека появляются субъективно ощущения «прохлады», которые, если охлаждение продолжается, сменяются ощущениями «холодно», «очень холодно»

Действующими нормативными документами, регламентирующими метеорологические условия производственной среды, являются ГОСТ 12.1.005-88 «ССБТ. Общие санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны» и СанПиН 2.2.4.548-96 «Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений» Этими документами установлены влажности и скорости движения воздуха в рабочей зоне производственных помещений с учетом избытков явного тепла, тяжести выполняемой работы и сезонов года.

В соответствии с вышеуказанным стандартом теплым периодом года считается сезон, характеризующийся среднесуточной температурой наружного воздуха $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Допустимыми считаются такие параметры микроклимата, которые при длительном воздействии могут вызывать напряжения реакции терморегуляции человека, но к нарушению состояния здоровья не приводят.

Оптимальными являются такие микроклиматические параметры, которые не вызывают напряжения реакций терморегуляции и обеспечивают высокую работоспособность человека.

Расчет показателей микроклимата базируются на опытных данных о давлении, температуре и скорости движения воздуха на рабочем месте полученных при замерах на нем с помощью соответствующих приборов

Показатели микроклимата вычисляются в следующей последовательности:

1. Атмосферное давление B , Па, на рабочем месте, измеренное с помощью барометра-анероида БАММ-1

$$B = B_{\text{п}} + B_{\text{ш}} + B_{\text{т}} + B_{\text{д}}, \quad (3.1)$$

где В— исправленное значение замеренного давления, Па; Вп – отсчет по прибору, Па; Вш – шкаловая поправка; Вт – температурная поправка, равная произведению температуры прибора на удельную температуру поправки прибора; Вд – добавочная поправка, Па.



Рис. 3.1 Барометр-анероид «БААМ-1»

Барометр-анероид «БААМ-1» измеряет атмосферное давление в наземных условиях в диапазоне температур от 0 до +40 С° и при относительной влажности воздуха более 80%

2. Температура воздушной среды измеряется с помощью ртутных или спиртовых термометров, а также с помощью термографов, обеспечивающих непрерывную запись температуры на ленте за определенный период времени. Температуру воздушной среды можно измерить также с помощью психрометров и термометров

3. Влажность воздуха – абсолютная и относительная определяется с помощью психрометров. Психрометр состоит из сухого и влажного термометров. Резервуар влажного термометра покрыт тканью, которая опущена в мензурку с водой. Испаряясь, вода охлаждает влажный термометр, поэтому его показания всегда ниже показания сухого.

Психрометры бывают типа Августа (Рис 3.2) и переносными, типа Ассмана (Рис 3.3). Психрометр Ассмана является более совершенным и точным прибором по сравнению с психрометром Августа. Принцип его устройства тот же, но термометры заключены в металлическую оправу, шарики термометра находятся в двойных металлических гильзах, а в головке прибора помещается вентилятор с постоянно скоростью 4 м/с.

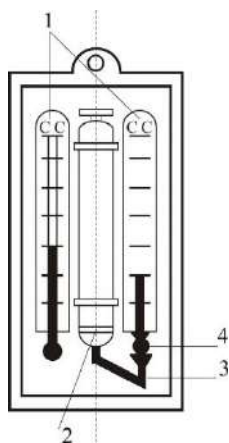


Рис. 3.2 Психрометры Августа

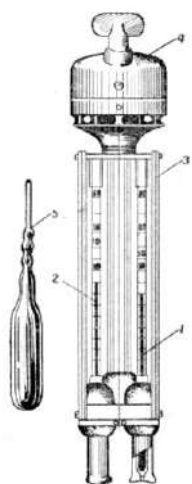


Рис. 3.3 Психрометр Ассмана

Влажность воздуха может быть рассчитана: 1) по давлению водяного пара, находящегося в воздухе или 2) по плотности водяного пара

При первом способе сначала определяется давление водяного пара, находящегося в воздухе при данной температуре

$$P_{\text{в.н}} = P_{\text{н.в}} - c(T_{\text{с}} - T_{\text{в}})B \quad (3.2)$$

где $P_{\text{н.в}}$ — давление насыщенного водяного пара при температуре $t_{\text{в}}$, зафиксированной влажным термометром, $P_{\text{в.н}}$ — коэффициент психрометра, зависящий от скорости движения воздуха около шарика мокрого термометра (при скорости движения воздуха до 4 м/с принимают $c = 0.00074$, свыше 4 м/с — 0,00066) $t_{\text{с}}$ и $t_{\text{в}}$ — температура сухого и влажного термометра, B —

барометрическое давление воздуха в момент измерения температур психрометром, Па

Определив парциальное давление водяного пара, находят относительную влажность воздуха

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\%, \quad (3.3)$$

где $p_{н.с}$ – давление насыщенного водяного пара при температуре t_c , зафиксированной влажным термометром,

При расчете влажности воздуха по плотности водяного пара определяются:

а) абсолютная влажность воздуха (масса водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре)

$$F = \frac{(1000 \cdot p_{н.с})}{(461,5(273 + t_c))}, \quad (3.4)$$

где 461,5 – удельная газовая постоянная водяного пара Дж/(кг *К);

б) максимальная абсолютная влажность воздуха

$$A_{\max} = \frac{1000 \cdot p_{н.с}}{461,5 \cdot (273 + t_c)}, \quad (3.5)$$

в) относительная влажность воздуха φ

$$\varphi = \frac{A}{A_{\max}} \cdot 100, \quad (3.6)$$

Таблица 3.0

Давление насыщенного водяного пара Р, Па при температуре воздуха

t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па
0	611	10	1228	20	2328	30	4242
1	657	11	1312	21	2486	31	4493
2	705	12	1403	22	2644	32	4754
3	759	13	1497	23	2809	33	5030
4	813	14	1599	24	2894	34	5320
5	872	15	1705	25	3168	35	5624
6	935	16	1817	26	3361	36	5941

7	1001	17	1937	27	3565	37	6275
8	1073	18	2064	28	3780	38	6625
9	1148	19	2197	29	4005	39	6991

Значение относительной влажности φ , найденного описанными способами, может быть проверено по данным психометрической таблицы

4. Скорость движения воздуха измеряется с помощью крыльчатых или чашечных анемометров (Рис 3.4). Крыльчатый анемометр принимается для измерения скорости воздуха до 10 м/с, а чашечный – до 30м/с. Принцип действия анемометров обоих типов основан на том, что частоты вращения крыльчатки тем больше, чем больше скорость движения воздуха. Вращение крыльчатки передается на счетный механизм. Разница в показаниях до и после измерения, деленная на время наблюдения, показывает число делений в 1 с. Специальный тарифовочный паспорт, предлагаемый к каждому прибору позволяет по вычисленной величине делений определить скорость движения воздуха.



Рис 3.4 Чашечный анемометр

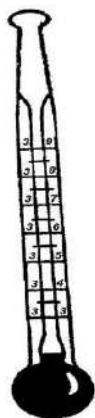


Рис. 3.5 Кататермометр

Скорость движения воздуха в интервале величин от 0.1 до 0.5 м/с можно определить с помощью кататермометра (Рис.3.5). Шаровой кататермометр представляет собой стартовый термометр с двумя резервуарами: шаровым внизу и цилиндрическим вверху. Шкала кататермометра имеет давление от 31 до 41 градуса. Для работы с этим прибором его предварительно нагревают на водяной бане, затем вытирают насухо и помещают в исследуемое место. По величине падения столба спирта в единицу времени на кататермометре при его охлаждении судят о скорости движения воздуха. Для измерения малых скоростей (от 0.03 до 5 м/с) при температуре в производственных помещениях не ниже 10С применяется термоанемометр. Это электрический прибор на полупроводниках, принцип его действия основан на измерении величины сопротивления датчика при изменении температуры и скорости движения воздуха.

Таблица 3.1

Значения относительной влажности

$t_c, ^\circ\text{C}$	Разность показаний сухого и влажного термометров $t_c - t_b, ^\circ\text{C}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Относительная влажность $\varphi, \%$									
0	100	81	63	45	28	11				

1	100	83	65	48	32	16				
2	100	84	68	51	35	20				
3	100	84	69	54	39	24	10			
4	100	85	70	56	42	28	14			
5	100	86	72	58	45	32	19	6		
6	100	86	73	60	47	35	23	10		
7	100	87	74	61	49	37	26	14		
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7	
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11	
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5

Продолжение табл. 3.1

11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41

28	100	93	85	78	71	65	59	52	48	42
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

Скорость движения воздуха V , м/с , при замере ее анемометром АСО-3 подсчитывается по формуле

$$V = an + b, \quad (3.7)$$

где n число делений в 1 с; $n = \frac{n_k - n_n}{t_{\text{зам}}}$; n_n и n_k – начальный и конечный отсчеты по анемометру; $t_{\text{зам}}$ – продолжительность замера по прибору.

При выполнении настоящего практического занятия рекомендуется использовать формулу:

$$V = 0,45n + 0,01$$

5. Гигиеническая оценка результатов расчета параметров микроклимата: производится по санитарным нормам, приведенным в ГОСТ 12.1.005-88.

Таблица 3.2

Оптимальные нормы температуры, относительно влажности и скорости движения воздуха по рабочей зоне производственных помещений

Период Года	Категория Работ	Температура, °C	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха м/с не более
Холодный (температура наружного воздуха ниже +10°C)	Легкая – 1	22-24	40-60	0,1
	Легкая – 1б	21-23	40-60	0,1
	Средней	18-20	40-60	0,2
	тяжести – Па	17-19	40-60	0,2
	Средней	16-18	40-60	0,3
	тяжести – Пб Тяжелая – III			

Теплый (температура наружного воздуха +10°C и выше)	Легкая – 1а	23-25	40-60	0,1
	Легкая – 1б	22-24	40-60	0,2
	Средней	21-23	40-60	0,3
	тяжести – Па	20-22	40-60	0,3
	Средней	18-20	40-60	0,4
	тяжести – Пб			
	Тяжелая - III			

Пример расчета:

Исходные данные: $B_n = 87937$ Па, $B_{ш} = -50$ Па, $t_c = 22$ °C, $t_b = 16$ °C,

$\Delta t = -\frac{10\text{Па}}{^\circ\text{C}}$, $B_d = +100$ Па, $n_n = 6000$, $t_{\text{зам}} = 200$ с, период года – теплый.

Решение:

1. Атмосферное давление на рабочем месте (при температурной поправке)

$$B_t = t_c * \Delta t = 22(-10) = -220 \text{ Па}$$

$$B = B_n + B_{ш} + B_t + B_d = 87837 - 50 - 220 + 110 = 87667 \text{ Па.}$$

2. Скорость движения воздуха по исходным данным, полученным при помощи анемометра АСО-3. При числе давлений в 1с

$$n = \frac{n_k - n_n}{t_{\text{зам}}} = 6040 - \frac{6000}{200} = 0,2 \text{ дел/с}$$

Скорость движения воздуха составляет;

$$V = 0,45n + 0,01 = 0,45 * 0,2 + 0,01 = 0,10 \text{ м/с}$$

3. Относительная влажность воздуха по давлению водяного пара. При давлении насыщенного водяного пара при температуре сухого термометра $P_{н.с} = 2644$ Па и температуре влажного термометра $P_{н.в} = 1817$ Па и парциальном давлении водяного пара в воздухе:

$$P_{в.п} = P_{н.в} - C(t_c - t_b) * B = 1817 - 0,00074 * (22 - 16) * 87837 = 1427 \text{ Па}$$

относительная влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{P_{в.п}}{P_{н.с}} 100 = \frac{1427}{2644} 100 = 54\%$$

3б. Относительная влажность воздуха по плотности (массе) водяного пара. При абсолютной влажности воздуха:

$$A = \frac{1000 * P_{в.п}}{461,5(273 + t_c)} = \frac{1000 * 1527}{461,5(273 + 22)} = 10,48 \text{ г/м}^3$$

И максимальной влажности воздуха:

$$A_{max} = \frac{1000 * P_{н.с}}{461,5(273 + t_c)} = \frac{1000 * 2644}{461,5(273 + 22)} = 19,42 \text{ г/м}^3 \text{ относительная влажность}$$

воздуха равна:

$$\varphi = \frac{A}{A_{max}} 100 = \frac{10,48}{19,42} 100 = 54\%$$

3в. Правильность произведенных подсчетов φ подтверждают данные таблицы. При разности показаний сухого и влажного термометров $T_c - T_v = 22 - 16 = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$ относительная влажность воздуха φ равна 54%

Варианты заданий

Для выполнения задания даются следующие показатели: отсчет по барометру Вп Температура воздуха по сухому (T_c) и влажному (T_v) термометрам психрометра, начальный (N_n) и конечный (N_k) отсчеты по анемометру, продолжительность замера скорости движения воздуха $T_{зам}$, период года (холодный, теплый) Для отсчета скорости движения воздуха использовать формулу

$$V = 0,45n + 0,01$$

Интенсивность теплового излучения на рабочем месте полагать равной 50 Вт/м^2 . Числовые значения исходных данных приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Числовые значения поправок к барометру

вариант	Вв, Па	Вш, Па	$\Delta t, \text{Па/}^\circ\text{C}$	Вб, Па	Тс, $^\circ\text{C}$	Тв, $^\circ\text{C}$	Nн	Nк	Т зам, $^\circ\text{C}$	Период года
1	110146	-100	-10	+100	23	18	6000	6246	140	Холодный
2	105752	-100	-10	+100	22	16	6107	6138	155	То же
3	97989	+75	-10	+100	18	13	6357	6407	160	То же
4	90498	+25	-10	+100	17	11	6841	6909	170	То же
5	94232	+150	-10	+100	16	11	6944	7051	200	То же
6	103379	-50	-10	+100	24	17	6107	6387	150	Теплый
7	107509	-100	-10	+100	23	17	6305	6696	187	То же
8	89371	0	-10	+100	22	15	6421	6501	190	То же
9	94263	+150	-10	+100	20	15	6725	6830	175	То же
10	96946	+100	-10	+100	19	12	6100	6176	11	То же

Порядок выполнения работы

1. Расчет и оформление практической работы провести в соответствии с примером расчета. Варианты заданий определяются пр-ем.
2. Результаты расчетов микроклимата на рабочем месте в производственном помещении занести в таблицу.

Таблица 3.4

Пример заполнения таблицы

Температура воздуха		Относительная влажность %		Скорость движения воздуха	
Фактически данная	Оптимальна я по нормам	Фактически рассчитанна я	Оптимальна я по нормам	Фактически рассчитанна я	Оптимальна я по нормам

3. На основании полученных результатов определить категорию работ, в соответствии с периодом года.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под микроклиматом производственных помещений?
2. Опишите характер действия климатических факторов на организм человека.
3. В чем состоит нормирование воздействий климатических факторов на человека?
4. Как определяют давление, температуру, относительную влажность и скорость движения воздуха?
5. Назовите способы и средства нормализации микроклимата на рабочих местах.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЙ И БОРЬБА С ИЗБЫТОЧНЫМ ТЕПЛОМ В ШАХТАХ

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Комфортные условия жизнедеятельности», и овладение методикой расчета тепловыделений в выработки глубоких шахт и выбора технических решений по борьбе с избыточным теплом.

Общие сведения. Климатические условия в подземных выработках, особенно в глубоких шахтах, как правило, отличаются от климатических условий на земной поверхности. Микроклимат горных выработок (т. е. действующее в них на организм человека сочетание температуры, влажности, скорости движения воздуха, его давления и температуры окружающих поверхностей) в значительной степени зависит от теплообменных процессов, происходящих на пути движения воздуха. Под воздействием этих процессов температура шахтного воздуха в выработках существенно повышается с увеличением глубины ведения горных работ.

Нагревание воздуха, движущегося по горным выработкам, происходит в результате:

- теплообмена между потоком шахтного воздуха и окружающим выработки массивом горных пород, т. е. охлаждения пород;
- естественного адиабатического сжатия воздуха при движении его вниз по вертикальным и наклонным выработкам;
- изменения содержания влаги в воздухе;
- теплообмена между воздухом и подземной водой, текущей по выработкам;
- окисления угля, угольной пыли, сульфидных руд, крепежного леса и некоторых других веществ;
- охлаждения отбитых и транспортируемых масс угля и породы;
- работы горных машин и механизмов;
- выделения тепла осветительными установками, электрическими кабелями, трубопроводами сжатого воздуха, телом человека, а также действия других второстепенных факторов.
- Вызванное перечисленными факторами приращение температуры шахтного воздуха ($^{\circ}\text{C} = \text{K}$), может быть определено из выражения

$$\Delta t = \frac{\sum Q_i}{c_p \rho V}, \quad (4.1)$$

где $\sum Q_i$ - суммарное количество теплоты, идущее на нагревание воздуха, кДж/ч; C_p - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К); ρ - плотность воздуха, кг/м³; V - объемный расход воздуха, м³/ч.

Шахтный воздух уже при температуре свыше 25 °С оказывает отрицательное тепловое воздействие на физиологию и гигиену труда подземных рабочих. При задержке отдачи телом человека накопившегося в нем тепла возникает перегрев организма, осложняющий протекание жизненных процессов. Чрезмерный перегрев организма вызывает ухудшение самочувствия человека, приводит к серьезным заболеваниям (в наиболее тяжелых случаях - к

тепловому удару, или стрессу, или даже к смерти), увеличивает вероятность травматизма, снижает производительность труда.

Изменение температуры воздуха (и других параметров микроклимата) в подземных выработках оказывает влияние также на физико-механические свойства горных пород и на безопасное состояние сооружений и выработок.

Расчет выделения теплоты в выработки глубоких шахт ведется по следующим зависимостям.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород. Количество теплоты $Q_{\text{охл}}$, кДж/ч, выделяющееся вследствие охлаждения окружающих выработку горных пород, описывается уравнением Ньютона для конвективного теплообмена

$$Q_{\text{охл}} = K_{\tau} P l (t_{\text{п}} - t_{\text{в}}), \quad (4.2)$$

где K_{τ} - коэффициент нестационарного теплообмена между массивом горных пород и воздухом, кДж/(м²·ч·К) (рассчитывается по формуле, приводимой ниже); P и l - периметр и длина выработки, м; $t_{\text{п}}$ - естественная температура неохлажденных пород на данной глубине, (°С = К, расчет приводится ниже); $t_{\text{в}} = t_{\text{пб}}$ - допустимая температура воздуха в выработке, °С (принимается согласно Правилам безопасности).

Коэффициент K_{τ} , кДж/(м²·ч·К) определяется по формуле

$$K_{\tau} = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_{\text{э}}}} \cdot \left[\frac{1}{2R_{\text{э}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi a \tau \left(1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_{\text{э}}}\right)}} \right], \quad (4.5)$$

где λ - коэффициент теплопроводности породы, кДж/(м·ч·К) (принимается по табл. 3.1); α_0 - суммарный коэффициент теплоотдачи от стен шахтной выработки к воздуху, кДж/(м²·ч·К) (расчет ниже); $R_{\text{э}}$ - эквивалентный радиус выработки, м: $R_{\text{э}} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0.564\sqrt{S}$, a - коэффициент температуропроводности

породы, м²/ч: $\alpha = \frac{\lambda}{c_{\text{п}} \cdot \rho_{\text{п}}}$ (принимается по табл. 3.1); $c_{\text{п}}$ - удельная теплоемкость породы, кДж/(кг·К) (принимается по табл. 3.1); $\rho_{\text{п}}$ - плотность породы, кг/м³ (принимается по табл. 3.1); τ - расчетное время процесса теплообмена, ч (например, при длительности процесса теплообмена 4 года значение $\tau = 4 \cdot 365 \cdot 24 = 35040$ ч).

Таблица 4.0

Тепловая характеристика пород

Порода	ρ , кг/м ³	$c_{\text{п}}$, кДж/(кг·К)	λ , кДж/(м·ч·К)	a , м ² /ч
Песчаник (Центральный Донбасс)	2475	0,854	9,211	0,00436
Глинистые и песчанистые сланцы (там же)	2450	0,904	6,363	0,00287
Уголь (там же)	1225	1,184	1,051	0,00073
Бурый уголь (Челябинский бассейн)	1210	1,130	0,913	0,00067
Каменный уголь (Карагандинский бассейн)	1275	1,055	0,963	0,00072
Углистый сланец	1765	1,021	3,006	0,00167
Глинистый сланец	2433	0,992	3,354	0,00139
Змеевик	2690	0,950	5,694	0,00223
Гранит	2722	0,917	7,972	0,00319
Серный колчедан (Дегтярское месторождение)	4620	0,908	15,010	0,00358
Медный колчедан (там же)	4716	0,862	15,165	0,00373

Суммарный коэффициент теплоотдачи с поверхности горной выработки α_0 , кДж/(м²·ч·К), находится их выражения

$$\alpha_0 = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{н}},$$

где $\alpha_{\text{к}}$ - конвективный коэффициент теплоотдачи от стен выработки к воздуху, кДж/(м²·ч·К)

$$\alpha_k = 2,9 \cdot 4,1868 \frac{V^{0,8}}{D_3^{0,2}} = 12,14 \frac{V^{0,8}}{D_3^{0,2}}$$

где v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; D_3 - эквивалентный диаметр выработки, м: $D_3 = \frac{4S}{\pi}$; $\alpha_{и}$ - коэффициент, учитывающий испарения влаги с мокрых стен выработки, кДж/(м²·ч·К)

$$\alpha_{и} = 1,3\beta \cdot r,$$

где β - коэффициент массоотдачи (коэффициент испарения), кг/(м²·ч·К), принимается равным 0,01 - для стволов, 0,15 - для капитальных выработок, 0,03 - для лав; r - теплота парообразования воды, принимается $r = 2256$ кДж/кг.

Температура горных пород в массиве $t_{п}$, °С, на заданной глубине H , м, от земной поверхности определяется по формулам:

$$t_{п} = h \cdot t_{н} + \frac{H-H_0}{\Gamma_{ст}} \quad \text{или} \quad t_{п} = h \cdot t_{н} + (H - H_0)\delta, \quad (4.6)$$

где $t_{п}$ - температура пород нейтрального слоя (зоны с постоянной температурой пород) в данной местности; принимается примерно равной среднегодовой температуре воздуха на земной поверхности в данном районе, °С; $t_{н} = 8,5; 2,5; 2,5; 3,0$ °С для условий соответственно Донбасса, Кузбасса, Караганды и Мосбасса; H_0 - глубина (толщина) нейтрального слоя, м: $H_0 = 20-40$ м; $\Gamma_{ст}$ - геотермическая ступень данного района, м/°С: в среднем $\Gamma_{ст}$ составляет для угольных месторождений 30–40 м/°С, рудных 50-140 м/°С, нефтяных 15-20 м/°С; δ - геотермический градиент, °С/м.

2. Тепловыделение при сжатии воздуха. Количество теплоты $Q_{сж}$, кДж/ч, выделяющееся при движении воздуха вниз по вертикальным и наклонным выработкам, определяется выражением

$$Q_{сж} = 9,81 \cdot \rho \frac{V_{в} \cdot H}{1000} = 0,00981 \cdot \rho \cdot V_{в} \cdot H, \quad (4.7)$$

где ρ - плотность воздуха, кг/м³; $V_{в}$ - количество воздуха, проходящего по выработке (объемный часовой расход воздуха), м³/ч: $V_{в} = 3600 \cdot v \cdot S$;

v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; S - площадь поперечного сечения выработки, м²; H - глубина расположения выработки, м; для наклонной выработки

$$H = l_n \cdot \sin \psi, \quad (4.8)$$

где l_n - длина наклонной выработки; ψ - угол наклона выработки, град.

3. Тепловыделение при окислительных процессах. Количество теплоты $Q_{ок}$, кДж/ч, образующееся при окислении угля, угленосных сланцев, сульфидных руд и древесины, подсчитывается по формуле А. Ф. Воропаева

$$Q_{ок} = q_{ок} \cdot V^{0.8} \cdot P \cdot l, \quad (4.9)$$

где $q_{ок}$ - тепловыделение в результате окислительных процессов, приведенное к скорости движения воздуха в выработке, $V = 1$ м/с, кДж/(м²·ч); $q_{ок}$ можно принимать равным 12-21 кДж/(м²·ч).

4. Тепловыделение от местных источников. К местным источникам теплоты относят электродвигатели, трансформаторы, светильники, электрические кабели, трубопроводы сжатого воздуха, пневматические двигатели, другие тепловыделяющие машины, механизмы и устройства, а также работы, производимые с применением бетона на участке выработки или в призабойной зоне, когда тепло выделяется при его отвердении.

Расчетные формулы для определения количества теплоты от местных источников имеют следующий вид:

4.1. Тепловыделение при работе *электродвигателей* горных машин и освещения $Q_{эд}$, кДж/ч

$$Q_{эд} = \frac{3600 \cdot N_{потр} \cdot k_3}{\eta_э}, \quad (4.10)$$

где $N_{потр}$ - потребляемая мощность электродвигателей и осветительных установок, кВт; k_3 - коэффициент загрузки оборудования во времени: $k_3 = 0,8$; $\eta_э$ - к. п. д. электродвигателя: $\eta_э = 0,95$.

4.2. Тепловыделение в выработку (ствол, уклон, бремсберг и др.) при эксплуатации *лебедок* $Q_{л}$, кДж/ч:

- при подъеме груза лебедкой $Q_{лп} = 3600 \cdot N_{л} \cdot k_3(1 - \eta_m)$;

- при спуске груза лебедкой $Q_{лс} = 3600 \cdot N_{л} \cdot k_3$.

где $N_{л}$ - установленная мощность электродвигателя лебедки, кВт; η_m - механический к. п. д.: $\eta_m = 0,8$.

4.3. Тепловыделение при работе *трансформатора* $Q_{тр}$, кДж/ч

$$Q_{тр} = 3600 \cdot N_{тр} \cdot p_{тр}, \quad (4.11)$$

где $N_{тр}$ - мощность трансформатора, кВт; $p_{тр}$ - тепловые потери трансформатора: $p_{тр} = 0,04 \div 0,05$.

4.4. Тепловыделение при затвердевании монолитной *бетонной крепи* $Q_б$, кДж/ч

$$Q_б = q_б \cdot P \cdot l_{ц}, \quad (4.12)$$

где $q_б$ - удельное выделение теплоты при отвердевании бетона, кДж/(м²·ч); принимается $q_б = 200 \div 400$ кДж/(м²·ч); P - периметр выработки, м; $l_{ц}$ - длина участка бетонирования, контактирующего с вентиляционной струей за один цикл проходки, м.

4.5. Тепловыделение при *взрыве ВВ*. В выработке большого сечения при использовании более 100 кг ВВ тепловыделение при взрыве $Q_{взр}$, кДж/ч, рассчитывается по формуле

$$Q_{взр} = 0,8 \cdot q_{взр} \cdot m_з, \quad (4.13)$$

где $q_{взр}$ - удельное тепловыделение при взрыве 1 кг ВВ, кДж/кг; $m_з$ - масса заряда, кг.

Таблица 4.1

Рекомендуемые значения $q_{взр}$ для применяемых ВВ

Аммонит ПЖВ-20	3360		Аммонит АП-5ЖВ	3780

Угленит Э-6	2570		Аммонит скальный №1	5400
Победит ВП-4	3810		Аммонит № 6 ЖВ	4290
Аммонит АП-4ЖВ	3560		Игданит	3790

4.6. Тепловыделение при работе шахтных **вентиляторов** происходит в результате работы электродвигателя, внутренних потерь энергии в вентиляторе и аэродинамического сжатия воздуха. Количество теплоты $Q_{\text{вент}}$, кДж/ч, поступающее в выработку при работе вентилятора, выражается формулой

$$Q_{\text{вент}} = 3600 \cdot V_{\text{вс}} \frac{h_{\text{в}}}{1000 \eta_{\text{вв}}} = 3,6 \cdot V_{\text{вс}} \frac{h_{\text{в}}}{\eta_{\text{вв}}}, \quad (4.14)$$

где $V_{\text{вс}}$ - количество воздуха, проходящего по выработке (секундный расход), м³/с; $h_{\text{в}}$ - депрессия выработки, Па;

$$h_{\text{в}} = \alpha_{\text{в}} \cdot P \cdot l \frac{v^2}{S}, \quad (4.15)$$

где $\alpha_{\text{в}}$ - коэффициент аэродинамического сопротивления трения выработки, Н·с²/м⁴ = Па· с²/м²; P , l , S - периметр, длина и площадь поперечного сечения выработки, м, м, м²; v - средняя скорость движения воздуха по выработке, м/с;

$$\eta_{\text{вв}} = \eta_{\text{в}} \cdot \eta_{\text{дв}} \cdot \eta_{\text{п}}, \quad (4.16)$$

$\eta_{\text{в}} = 0,6 \div 0,8$; $\eta_{\text{дв}} = 0,85 \div 0,95$ и $\eta_{\text{п}}$ - к. п. д. соответственно вентиляторной установки, вентилятора, двигателя и редукторной ($\eta_{\text{п}} = 1$) или ременной ($\eta_{\text{п}} = 0,9 \div 0,95$) передач.

Подставляя (4.15) в (4.16) и учитывая, что

$$V_{\text{вс}} = v \cdot S \text{ м}^3/\text{с}, \quad (4.17)$$

получим (кДж/ч)

$$Q_{\text{вент}} = 3,6 \cdot \alpha_{\text{в}} \cdot P \cdot l \frac{v^3}{\eta_{\text{вв}}}. \quad (4.18)$$

4.7. Тепловыделение при работе **людей** $Q_{\text{л}}$, кДж/ч

$$Q_{\text{л}} = q_{\text{л}} \cdot n_{\text{л}}, \quad (4.19)$$

где $q_{\text{л}}$ - количество теплоты, выделяемое работающим человеком, кДж/ч·чел
 $q_{\text{л}} = 1050 \div 2500$ кДж/ч·чел.; $n_{\text{л}}$ - число одновременно работающих людей в выработке.

5. Общее тепловыделение в выработку $Q_{\text{общ}}$, кДж/ч, находится суммированием всех частных выделений теплоты

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (4.20)$$

Способы искусственного охлаждения шахтного воздуха

Целью искусственного охлаждения шахтного воздуха является отвод определенного («излишнего») количества теплоты от него при помощи охлаждающего вещества. Тепло от воздуха можно отвести путем соприкосновения последнего с какой-либо холодной поверхностью или путем смешения его с газообразной струей, имеющей температуру ниже температуры воздуха.

Борьба с избыточным выделением теплоты в горные выработки ведется по нескольким направлениям:

- предохранение воздуха от нагревания при его движении к местам потребления;
- охлаждение воздуха без применения специальных холодильных машин;
- охлаждение воздуха с применением холодильных машин (кондиционирование).

Способы предупреждения нагревания шахтного воздуха включают в себя следующее:

- увеличение количества подаваемого в выработки воздуха путем повышения мощности вентиляторных установок, увеличения скорости движения воздуха, расширения сечений воздухоподающих выработок;

- замена машин с электроприводам машинами с пневматическим приводом;
- тепло- и гидроизоляция стен выработок;
- теплоизоляция и тщательное уплотнение воздухоподающих трубопроводов;
- предупреждение возникновения интенсивных окислительных процессов;
- сокращение пути движения воздуха к местам потребления путем выбора соответствующей схемы проветривания, проведения дополнительных выработок и скважин;
- подача воздуха к местам потребления по специально пройденным выработкам, где скорость движения воздуха может быть существенно увеличена;
- замена восходящего проветривания очистных выработок нисходящим проветриванием (при соблюдении соответствующих требований ПБ).

Для предотвращения нагревания воздуха без применения холодильных машин используются следующие способы:

- осушение воздуха сорбентами, т. е. веществами, способными поглощать влагу из воздуха (например, хлористым кальцием);
- охлаждение воздуха льдом;
- охлаждение воздуха жидким воздухом, при испарении которого поглощается значительное количество теплоты;
- охлаждение воздуха сжатым воздухом (например, от пневмокондиционеров);
- охлаждение воздуха водой: путем непосредственного соприкосновения охлаждающей воды с воздухом либо через поверхность труб, где воздух охлаждается в специальных теплообменниках;

- пропускание воздуха через тепловыравнивающие каналы путем подвода воздуха к стволу по горизонтальным выработкам, пройденным на глубине среднегодовой температуры.

Наиболее эффективным является искусственное охлаждение воздуха в системах кондиционирования: в компрессорных и абсорбционных холодильных установках. Холодильные установки бывают передвижные и стационарные. Передвижные установки предназначены для охлаждения воздуха в тупиковых выработках или в отдаленных очистных забоях. Стационарные установки располагаются как на земной поверхности, так и в подземных условиях.

Хладопроизводительность (холодильная мощность) отечественных шахтных холодильных агрегатов и кондиционеров составляет:

- передвижных кондиционеров ВК-230 - 230 кВт, КПШ-3 – 105 кВт, КПШ-40 - 47 кВт, КПШ-40П с пневмоприводом - 52 кВт;
- турбокомпрессионных холодильных машин ШХТМ-1300 - 1500 кВт, ХТМФ-235М-2000 - 2325 кВт, ХТМФ-248-4000 - 4650 кВт;
- поршневой холодильной машины МФ-220-1РШ - 255 кВт;
- абсорбционной холодильной машины АБХА-2500-2В – 2800 кВт.

Для стационарной работы на поверхности используются машины ХТМФ-235-2000, ХТМФ-248-4000, АБХА-2500-2В, а машины ШХТМ-1300 и МФ-220-1РШ устанавливаются на глубоких горизонтах.

Охлаждение шахтного воздуха с применением холодильных машин становится необходимым, когда общее тепловыделение в выработку $Q_{\text{общ}}$ превышает тепловыделение в нее, допускаемое Правилами безопасности, $Q_{\text{пб}}$, т. е. при условии

$$Q_{\text{общ}} > Q_{\text{пб}}.$$

Поскольку эти количества теплоты описываются формулами:

$$Q_{\text{общ}} = c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{теп}} \cdot (t_{\text{пб}} - t_{\text{н}}) \text{ и } Q_{\text{пб}} = c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{в}} \cdot (t_{\text{пб}} - t_{\text{н}}),$$

то критерий необходимости кондиционирования воздуха в выработке может быть записан в виде соотношения

$$V_{\text{теп}} > V_{\text{в}},$$

где $V_{\text{теп}}$ - количество воздуха, которое необходимо подать в выработку по тепловому фактору без охлаждения воздуха, м³/ч;

$$V_{\text{теп}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{c_p \cdot \rho \cdot \Delta t}, \quad (4.21)$$

где c_p - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К)
 $c_p = 0,241 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 4,1868 \text{ кДж/ккал} = 1,009 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; ρ - плотность воздуха, кг/м³; Δt - перепад температур между выходящим (отработанным) и входящим (свежим) воздухом, проходящим по выработке, К (°С):

для стволов $\Delta t = t_{\text{в}} - t_{\text{н}}$, для подземных выработок $\Delta t = t_{\text{п}} - t_{\text{в}}$.

При необходимости кондиционирования воздуха следует выбрать тип кондиционера, рассчитать потребное количество кондиционеров и проверить правильность их установки.

Требуемая хладопроизводительность кондиционера $N_{\text{к}}$, кВт, находится по формуле

$$N_{\text{к}}' = \frac{c_h \cdot \rho \cdot V_d (t_{\text{н}} - t_{\text{пб}})}{3600} \quad (4.22)$$

К установке принимают кондиционер хладопроизводительностью

$$N_{\text{к}} \geq N_{\text{к}}'$$

При установке кондиционера в выработку (обычно одного) температура смеси за кондиционером $t_{\text{см}}$, °С (=К), определяется соотношением

$$t_{\text{см}} = t_{\text{п}} - 3600 \frac{N_{\text{к}}}{c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{в}}} \quad (4.23)$$

Достаточность установки кондиционера проверяется по условию

$$t_{\text{см}} < t_{\text{в}}$$

Если $t_{\text{см}} > t_{\text{в}}$, то необходимо установить более мощный кондиционер.

Пример расчета. Исходные данные:

выработка - ствол шахты,

$$\lambda = 9,21 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{К}),$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 38,5 \text{ м}^2,$$

$$a = \frac{\lambda}{c_{\pi} \cdot \rho_{\pi}} = 0,00477 \text{ м}^2/\text{ч},$$

$$r_3 = 3,5 \text{ м},$$

$$v = 2 \text{ м/с},$$

$$d = d_3 = 7 \text{ м},$$

$$\tau = 7 \text{ лет} = 7 \cdot 365 \cdot 24 = 61320 \text{ ч},$$

$$P = \pi \cdot d = 22 \text{ м},$$

$$t_{\text{н}} = 8,5 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$l = H = 1200 \text{ м},$$

$$t_{\text{в}} = t_{\text{пб}} = 24 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$\alpha = 0^{\circ},$$

$$N_{\text{потр}} = 100 \text{ кВт},$$

$$H_0 = 20 \text{ м},$$

$$N_{\pi} = 90 \text{ кВт},$$

$$\delta = \frac{1}{\Gamma_{\text{ст}}} = 0,035 \text{ м/}^{\circ}\text{C},$$

$$\alpha_6 = 0,0040 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4 =$$

$$= 0,0392 \text{ Па} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2,$$

порода - песчаник,

$$N_{\text{тр}} = 100 \text{ кВт},$$

$$\rho_{\pi} = 2400 \text{ кг/м}^3,$$

$$n = 7 \text{ человек.}$$

$$c_{\pi} = 0,858 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

Для обеспечения возможности выполнения расчета тепловыделений по приведенным выше формулам принимаем дополнительно следующие данные (параметры):

$$\beta = 0,01 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К}),$$

$$P_{\text{тр}} = 0,05,$$

$$r = 2256 \text{ кДж/кг},$$

$$q_6 = 200 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч}),$$

$$\rho = 1,25 \text{ кг/м}^3,$$

$$l_{\pi} = 5 \text{ м},$$

$$q_{\text{ок}} = 16 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч}),$$

$$q_{\pi} = 2000 \text{ кДж}/(\text{ч} \cdot \text{чел}),$$

$$\kappa_3 = 0,8,$$

$$\eta_{\text{ву}} = \eta_{\text{у}} \cdot \eta_{\text{дв}} \cdot \eta_{\pi} = 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,56,$$

$$\eta_{\text{дв}} = 0,95,$$

$$c_p = 1,009 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Подсчитываем количества теплоты, выделяющиеся в выработку.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород

$$\alpha_k = 12.4 \cdot \frac{V^{0.8}}{d_s^{0.2}} = 12.4 \cdot \frac{2^{0.8}}{7^{0.2}} = 14.32, \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$\alpha_n = 1.3 \cdot \beta \cdot r = 1.3 \cdot 0.001 \cdot 2256 = 29.33, \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$\alpha_0 = \alpha_k + \alpha_n = 14.32 + 29.33 = 43.65, \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$K_\tau = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_s}} \cdot \left[\frac{1}{2R_s} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau} \left(1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_s} \right)} \right] =$$
$$\frac{9.211}{1 + \frac{9.211}{2 \cdot 43.65 \cdot 3.5}} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 3.5} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0.00447 \cdot 61320} \left(1 + \frac{9.211}{2 \cdot 43.65 \cdot 3.5} \right)} \right] = 1.57,$$
$$\text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$t_n = t_H + (H - H_0)\delta = 8.5 + (1200 - 20)0.035 = 50 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{\text{охл}} = K_\tau \cdot P \cdot l(t_n - t_b) = 1.57 \cdot 22 \cdot 1200(50 - 24) = 107764 \text{ кДж}/\text{ч}.$$

2. Тепловыделение при сжатии шахтного воздуха

$$V_{\text{и}} = 3600 \cdot v \cdot S = 3600 \cdot 2 \cdot 38.5 = 277200 \text{ м}^3/\text{ч};$$

$$Q_{\text{сж}} = 0.00981 \cdot \rho \cdot V_{\text{в}} \cdot H = 0.00981 \cdot 1.25 \cdot 277200 \cdot 1200 = 4078998$$
$$\text{ кДж}/\text{ч}.$$

3. Тепловыделение при окислительных процессах

$$Q_{\text{ок}} = q_{\text{ок}} \cdot V^{0.8} \cdot P \cdot l = 16 \cdot 2^{0.8} \cdot 22 \cdot 1200 = 735441 \text{ кДж}/\text{ч}.$$

4. Тепловыделение от местных источников:

- при работе электродвигателей горных машин и освещения

$$Q_{\text{эд}} = \frac{3600 \cdot N_{\text{потр}} \cdot K_s}{\eta_{\text{дв}}} = \frac{3600 \cdot 100 \cdot 0.8}{0.95} = 303158 \text{ кДж}/\text{ч};$$

- при спуске груза лебедкой

$$Q_{\text{лс}} = 3600 \cdot N_{\text{н}} \cdot K_s = 3600 \cdot 90 \cdot 0.8 = 259200 \text{ кДж}/\text{ч};$$

- при работе трансформатора

$$Q_{\text{тр}} = 3600 \cdot N_{\text{тр}} \cdot P_{\text{тр}} = 3600 \cdot 100 \cdot 0.5 = 18000 \text{ кДж}/\text{ч};$$

- при работе шахтных вентиляторов

$$Q_{\text{ВЕН}} = 3,6 \cdot \alpha_{\text{В}} \cdot P \cdot l \frac{V^3}{\eta_{\text{ВУ}}} = 3,6 \cdot 0,0392 \cdot 22 \cdot 1200 \frac{2^3}{0,565} = 52751 \text{ кДж/ч};$$

- при затвердевании монолитной бетонной крепи

$$Q_{\text{б}} = q_{\text{б}} \cdot P \cdot l_{\text{ц}} = 200 \cdot 22 \cdot 5 = 22000 \text{ кДж/ч};$$

- при работе людей

$$Q_{\text{Л}} = q_{\text{Л}} \cdot n_{\text{Л}} = 2000 \cdot 7 = 14000 \text{ кДж/ч}.$$

5. Общее тепловыделение в ствол

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{\text{охл}} + Q_{\text{сж}} + Q_{\text{ок}} + Q_{\text{зд}} + Q_{\text{лс}} + Q_{\text{тр}} + Q_{\text{ВЕН}} + Q_{\text{б}} + Q_{\text{Л}} = \\ 1077648 + 4078998 + 735441 + 303158 + 259200 + 18000 + 52751 + \\ 22000 + 14000 = 6561196 \text{ кДж/ч}.$$

Находим количество воздуха, необходимое для проветривания выработки по тепловому фактору без охлаждения воздуха

$$V_{\text{теп}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{C_p \cdot \rho \cdot (t_{\text{нб}} - t_{\text{Н}})} = \frac{6561196}{1,009 \cdot 1,25 \cdot (24 - 8,5)} = 335611 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Проверяем условие достаточности расхода воздуха по тепловому фактору $V_{\text{теп}} < V_{\text{В}}$.

В рассматриваемом случае это условие не выполняется, так как

$$V_{\text{теп}} = 335611 < V_{\text{В}} = 277200$$

Следовательно, требуется искусственное охлаждение воздуха при помощи холодильных машин.

Определяем требуемую холодопроизводительность холодильной машины

$$N_{\text{к}} = \frac{C_p \cdot \rho \cdot V_{\text{В}} (t_{\text{п}} - t_{\text{нб}})}{3600} = \frac{1,009 \cdot 1,25 \cdot 277200 (50 - 24)}{3600} = 2525 \text{ кВт}.$$

Принимаем $N_{\text{к}} = 2550 \text{ кВт}$. Температура смеси теплого и охлажденного воздуха за кондиционером составит

$$t_{\text{см}} = t_{\text{п}} - \frac{3600 \cdot N_{\text{к}}}{c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{В}}} = 50 - \frac{3600 \cdot 2550}{1,009 \cdot 1,25 \cdot 277200} = 23,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

что удовлетворяет требованиям ПБ.

Варианты заданий

Перечень вариантов заданий к расчету тепловыделений в горные выработки приведен в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Исходные данные для расчетов тепловыделений

	Величины	Номер варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Выработка	Штрек		Уклон		Квершлаг		Бремберг		Ствол	
2	$S, \text{ м}^2$	8	10	7	6	12	14	10	12	44,2	33,2
3	$P, \text{ м}$	11,8	13,2	11,0	10,2	14,4	15,6	13,2	14,4	23,6	20,4
4	$L, \text{ м}$	900	1000	300	500	700	600	1000	900	1100	1200
5	$\alpha, ^\circ$	6	8	40	50	10	8	15	20	90	90
6	$H, \text{ м}$	800	900	600	700	1000	800	1200	1500	1100	1200

Продолжение табл. 4.2

7	$H_0, \text{ м}$	20	21	22	23	24	25	30	35	28	30
8	$\Gamma_{\text{ст}}, \text{ м/}^\circ\text{С}$	30	25	26	27	31	29	32	28	34	27
9	Порода	Бурый уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Песчаник	Песчаник	Каменный уголь	Каменный уголь	Глинистый и песчаный сланец	Песчаник
10	$V, \text{ м/с}$	0,5	0,75	1,0	1,5	1,0	2,0	1,5	2,0	1,0	0,5
11	$\tau, \text{ м/с}$	3	2	6	8	5	9	10	7	6	4
12	$t_{\text{н}}, ^\circ\text{С}$	8,5	2,5	3,0	2,5	7,5	8,3	7,9	4,2	8,0	7,5
13	$t_{\text{в}} = t_{\text{пб}}, ^\circ\text{С}$	24	23	20	25	23	25	24	26	24	23
14	$N_{\text{потр}}, \text{ кВт}$	70	60	50	40	100	90	50	50	100	100
15	$N_{\text{л}}, \text{ кВт}$	-	-	50	50	-	-	-	-	-	100

16	$N_{\text{тр}}$, кВт	5	10	-	-	5	5	5	5	10	10
17	$\alpha_{\text{в}}$, Па·с ² /м ²	0,017	0,019	0,018	0,016	0,015	0,014	0,013	0,020	0,049	0,049
18	$n_{\text{л}}$, чел.	7	6	3	3	6	5	6	6	5	8

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте климатические условия в горных выработках глубоких шахт.
2. Как осуществляется теплоотдача тела человека в окружающую среду?
3. Какой микроклимат в выработках глубоких шахт считается допустимым?
4. Перечислите виды (формы) нагревания воздуха, движущегося по горным выработкам.
5. Как выполняется тепловое кондиционирование воздуха в горных выработках?

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. ЦВЕТА СИГНАЛЬНЫЕ И ЗНАКИ БЕЗОПАСНОСТИ

Цель работы – привить практические навыки в применении сигнальных цветов и знаков безопасности; изучить назначение, характеристики и порядок применения сигнальных цветов и знаков безопасности.

Теоретические положения.

Для предупреждения многих несчастных случаев на производстве и в быту эффективным средством является цветовое оформление машин, приборов, помещений и рациональное применение сигнальных цветов и знаков безопасности, которые устанавливает ГОСТ Р 12.4.026–01 [1].

Различают прямое психологическое воздействие цвета на человека, вызывающее, например, чувство радости или печали, создающее впечатление легкости или тяжести какого-либо предмета, удаленности или близости его, и вторичное воздействие, связанное с ассоциациями. Например, красный, оранжевый и желтый цвета ассоциируются с огнем, солнцем, т. е. теплом. Такие цвета создают впечатление тепла и называются теплыми цветами. Белый, голубой, зеленый и некоторые другие цвета ассоциируются с холодом и называются холодными цветами.

Сигнальные цвета применяются для окраски поверхностей конструкций, приспособлений и элементов производственного оборудования, которые могут служить источником опасности для работающих.

ГОСТом установлены красный, желтый, зеленый и синий сигнальные цвета. Для усиления контраста сигнальных цветов они применяются на фоне контрастных цветов. Контрастные цвета применяются также для выполнения символов и поясняющих надписей.

Красный сигнальный цвет применяется: для запрещающих знаков; надписей и символов на знаках пожарной безопасности, обозначений от-

ключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных; внутренних поверхностей открывающихся кожухов и корпусов, ограждающих движущиеся элементы механизмов и машин и их крышек; рукояток кранов аварийного сброса давления; корпусов масляных выключателей, находящихся в рабочем состоянии под напряжением, и обозначения пожарной техники.

Желтый сигнальный цвет используется: для предупреждающих знаков элементов строительных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм (низкие балки, выступы и перепады в полости пола, малозаметные ступени, пандусы), мест, в которых существует опасность падения, сужений проездов, колонн, стоянок и опор производственного оборудования (открытые движущиеся части оборудования); кромок штампов, прессов, ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, и т. п. элементов внутрицехового и междцехового транспорта, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, кабин и ограждений кранов, боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек и постоянных и временных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных и временных ограждений лестниц, перекрытий строящихся зданий; балконов и других мест, где возможно падение с высоты, емкостей, содержащих вещества с опасными и вредными свойствами, на которые предупреждающую окраску наносят в виде полосы шириной 50–100 мм в зависимости от размещения емкости; границ подходов к эвакуационным или запасным выходам.

Зеленый сигнальный цвет применяется для предписывающих знаков дверей и светового табло эвакуационных или запасных выходов, сигнальных ламп.

Синий сигнальный цвет используется для указательных знаков. Символ на знаках безопасности – это простое, всем понятное изображение характера опасности, мер предосторожности, инструктивных указаний или информации

по безопасности. Знаки должны быть установлены в местах, пребывание в которых связано с возможной опасностью для работающих, а также на производственном оборудовании, являющемся источником такой опасности. Знаки безопасности, устанавливаемые на воротах и входных дверях помещений, обозначают, что зона их действия – все помещение. При необходимости ограничения зоны действия знака приводятся соответствующие указания с вышеуказанным ГОСТом. Они контрастно выделяются на окружающем их фоне и находятся в поле зрения людей, для которых предназначены. На местах и участках, являющихся временно опасными, устанавливаются переносные знаки и временные ограждения, окрашенные в сигнальный цвет. Всего предусмотрено четыре группы знаков безопасности:

- 1 запрещающий (в виде круга);
- 2 предупреждающий (в виде треугольника);
- 3 предписывающий (в виде квадрата);
- 4 указательный (в виде вертикального прямоугольника).

Для более полного усвоения формы символов на знаках и мест их установки следует дополнительно изучить раздел 3 ГОСТ Р 12.4.026-01 [1]. Для этого ниже дается необходимая выдержка из данного ГОСТа.

Стандарт не распространяется:

- на цвета, применяемые для световой сигнализации всех видов транспорта, транспортных средств и дорожного движения;
- цвета, знаки и маркировочные щитки баллонов, трубопроводов, емкостей для хранения и транспортирования газов и жидкостей;
- дорожные знаки и разметку, путевые и сигнальные знаки железных дорог, знаки для обеспечения безопасности движения всех видов транспорта (кроме знаков безопасности для подъемно-транспортных механизмов, внутризаводского, пассажирского и общественного транспорта);
- знаки и маркировку опасных грузов, грузовых единиц, требующих специальных условий транспортирования и хранения;

- знаки для электротехники.

Назначение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки состоит в обеспечении однозначного понимания определенных требований, касающихся безопасности, сохранения жизни и здоровья людей, снижения материального ущерба без применения слов или с их минимальным количеством.

Сигнальные цвета, знаки безопасности и сигнальную разметку следует применять для привлечения внимания людей, находящихся на производственных, общественных объектах и в иных местах, к опасности, опасной ситуации, предостережения в целях избегания опасности, сообщения о возможном исходе в случае пренебрежения опасностью, предписания или требования определенных действий, а также для сообщения необходимой информации.

Применение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки на производственных, общественных объектах и в иных местах не заменяет необходимости проведения организационных и технических мероприятий по обеспечению условий безопасности, использования средств индивидуальной и коллективной защиты, обучения и инструктажа по технике безопасности.

Размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах должна проводить организация-изготовитель. При необходимости дополнительное размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах, находящихся в эксплуатации, проводит эксплуатирующая их организация.

Графические символы и поясняющие надписи на знаках безопасности отраслевого назначения, не предусмотренные настоящим стандартом, необходимо устанавливать в отраслевых стандартах, нормах, правилах с соблюдением требований настоящего стандарта.

Назначение и правила применения сигнальных цветов.

Стандарт устанавливает следующие сигнальные цвета: красный, желтый, зеленый, синий. Для усиления зрительного восприятия цветографических изображений знаков безопасности и сигнальной разметки сигнальные цвета следует применять в сочетании с контрастными цветами – белым или черным. Контрастные цвета необходимо использовать для выполнения графических символов и поясняющих надписей.

Сигнальные цвета необходимо применять:

- для обозначения поверхностей, конструкций (или элементов конструкций), приспособлений, узлов и элементов оборудования, машин, механизмов и т. п., которые могут служить источниками опасности для людей, поверхности ограждений и других защитных устройств, систем блокировок и т. п.;
- обозначения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов;
- знаков безопасности, сигнальной разметки, планов эвакуации и других визуальных средств обеспечения безопасности;
- светящихся (световых) средств безопасности (сигнальные лампы, табло и др.);
- обозначения пути эвакуации.

Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и соответствующие им контрастные цвета установлены в табл. 5.0.

Красный сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения отключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных;
- внутренних поверхностей крышек (дверец) шкафов с открытыми токоведущими элементами оборудования, машин, механизмов и т. п. (если оборудование, машины, механизмы имеют красный цвет, то внутренние поверхности крышек (дверец) должны быть окрашены лакокрасочными

материалами желтого сигнального цвета);

- рукояток кранов аварийного сброса давления;
- корпусов масляных выключателей, находящихся в рабочем состоянии под напряжением;

- обозначения различных видов пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов, требующих оперативного опознавания (пожарные машины, наземные части гидрант-колонок, огнетушители, баллоны, устройства ручного пуска систем (установок) пожарной автоматики, средств оповещения, телефоны прямой связи с пожарной охраной, насосы, пожарные стенды, бочки для воды, ящики для песка, а также ведра, лопаты, топоры и т. п.);

- окантовки пожарных щитов белого цвета для крепления пожарного инструмента и огнетушителей. Ширина окантовки – 30–100 мм (допускается выполнять окантовку пожарных щитов в виде чередующихся наклонных под углом 45–60° полос красного сигнального и белого контрастного цветов);

- орнаментовки элементов строительных конструкций (стены, колонны) в виде отрезка горизонтально расположенной полосы для обозначения мест нахождения огнетушителя, установки пожаротушения с ручным пуском, кнопки пожарной сигнализации и т. п. Ширина полос – 150–300 мм. Полосы должны располагаться в верхней части стен и колонн на высоте, удобной для зрительного восприятия с рабочих мест, проходов и т. п. В состав орнаментовки, как правило, следует включать знак пожарной безопасности с соответствующим графическим символом средства противопожарной защиты;

- сигнальных ламп и табло с информацией, извещающей о нарушении технологического процесса или нарушении условий безопасности:

 - «Тревога», «Неисправность» и др.;

- обозначения захватных устройств промышленных установок и промышленных роботов;

Таблица 5.0

**Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и
соответствующие им контрастные цвета**

Сигнальный цвет	Смысловое значение	Область применения	Контрастный цвет
Красный	Непосредственная опасность Аварийная или опасная ситуация Пожарная техника, средства противопо- ж. защиты, их элементы	Запрещение опасного поведения или действия. Обозначение непо- средственной опасности Сообщение об аварийном отключении или аварийном состоянии оборудования (технологического процесса) Обозначение и определение мест нахождения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов	Белый
Желтый	Возможная опас- ность	Обозначение возможной опасно- сти, опасной ситуации. Преду- преждение о возможной опасно- сти	Черный
Зеленый	Безопасность, безопасные усло- вия	Сообщение о нормальной работе оборудования, нормальном со- стоянии технологического про- цесса	Белый
	Помощь, спасение	Обозначение пути эвакуации, аптек, кабинетов, средств по оказанию первой медицинской помощи	
Синий	Предписание во избежание опасно- сти	Требование обязательных дейст- вий в целях обеспечения безо- пасности	Белый
	Указание	Разрешение определенных дей- ствий	

- обозначения временных ограждений или элементов временных ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, территорий, ям, котлованов, временных ограждений мест химического, бактериологического и радиационного загрязнения, а также ограждений других мест, зон, участков, вход на которые временно запрещен.

Поверхность временных ограждений должна быть целиком окрашена красным сигнальным цветом или иметь чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы красного сигнального и белого контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос красного и белого цветов от 1:1 до 1,5:1,0;

- запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности.

Не допускается использовать красный сигнальный цвет:

- для обозначения стационарно устанавливаемых средств противопожарной защиты (их элементов), не требующих оперативного опознавания (пожарные извещатели, пожарные трубопроводы, оросители установок пожаротушения и т. п.);

- на пути эвакуации во избежание путаницы и замешательства (кроме запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности).

Желтый сигнальный цвет следует применять:

- а) для обозначения элементов строительных и иных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм работающими: низких балок, выступов и перепадов в плоскости пола, малозаметных ступеней, пандусов, мест, в которых существует опасность падения (кромки погрузочных платформ, грузовых поддонов, неогражденных площадок, люков, проемов и т. д.), сужений проездов, малозаметных распорок, узлов, колонн, стоек и опор в местах интенсивного движения внутризаводского транспорта и т. д.;

- б) обозначения узлов и элементов оборудования, машин и механизмов, неосторожное обращение с которыми представляет опасность для людей:

открытых движущихся узлов, кромок оградительных устройств, не полностью закрывающих движущиеся элементы (шлифовальные круги, фрезы, зубчатые колеса, приводные ремни, цепи и т. п.), ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, а также постоянно подвешенных к потолку или стенам технологической арматуры и механизмов, выступающих в рабочее пространство;

в) обозначения опасных при эксплуатации элементов транспортных средств, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, площадок грузоподъемников, бамперов и боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек, поворотных платформ и боковых поверхностей стрел экскаваторов, захватов и площадок автопогрузчиков, рабочих органов сельскохозяйственных машин, элементов грузоподъемных кранов, обойм грузовых крюков и др.;

г) подвижных монтажных устройств, их элементов и элементов грузозахватных приспособлений, подвижных частей кантователей, траверс, подъемников, подвижных частей монтажных вышек и лестниц;

д) внутренних поверхностей крышек, дверей, кожухов и других ограждений, закрывающих места расположения движущихся узлов и элементов оборудования, машин, механизмов, требующих периодического доступа для контроля, ремонта, регулировки и т. п.

Если указанные узлы и элементы закрыты съёмными ограждениями, то окрашиванию лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета подлежат сами движущиеся узлы, элементы и (или) поверхности смежных с ними неподвижных деталей, закрываемые ограждениями;

е) постоянных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, территорий: у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных ограждений лестниц, балконов, перекрытий и других мест, в которых возможно падение с высоты.

Поверхность ограждения должна быть целиком окрашена

лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом $45\text{--}60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

ж) обозначения емкостей и технологического оборудования, содержащих опасные или вредные вещества.

Поверхность емкости должна быть целиком окрашена лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом $45\text{--}60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 50–300 мм в зависимости от размера емкости при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

з) обозначения площадей, которые должны быть всегда свободными на случай эвакуации (площадки у эвакуационных выходов и подходы к ним, возле мест подачи пожарной тревоги, возле мест подхода к средствам противопожарной защиты, средствам оповещения, пунктам оказания первой медицинской помощи, пожарным лестницам и др.).

Границы этих площадей должны быть обозначены сплошными линиями желтого сигнального цвета, а сами площади – чередующимися наклонными под углом $45\text{--}60^\circ$ полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина линий и полос – 50 – 100 мм;

и) предупреждающих знаков безопасности.

На поверхность объектов и элементов, перечисленных в а) и в), допускается наносить чередующиеся наклонные под углом $45\text{--}60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 50– 300 мм в зависимости от размера объекта и расстояния, с которого должно быть видно предупреждение.

Если оборудование, машины и механизмы окрашены лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета, то перечисления б) и д), их узлы и

элементы должны быть обозначены чередующимися наклонными под углом 45–60° полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм в зависимости от размера узла (элемента) оборудования при соотношении ширины полос желтого и черного цветов от 1:1 до 1,5:1,0.

Для строительно-дорожных машин и подъемно-транспортного оборудования, которые могут находиться на проезжей части, допускается применять предупреждающую окраску в виде чередующихся красных и белых полос.

Синий сигнальный цвет следует применять:

- для окрашивания светящихся (световых) сигнальных индикаторов и других сигнальных устройств указательного или разрешающего назначения;
- предписывающих и указательных знаков безопасности.

Зеленый сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения безопасности (безопасных мест, зон безопасного состояния);
- сигнальных ламп, извещающих о нормальном режиме работы оборудования, нормальном состоянии технологических процессов и т. п.;
- обозначения пути эвакуации;
- эвакуационных знаков безопасности и знаков безопасности медицинского и санитарного назначения.

Характеристики сигнальных и контрастных цветов.

Знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в поле зрения людей, для которых они предназначены.

Знаки безопасности должны быть расположены таким образом, чтобы они были хорошо видны, не отвлекали внимания и не создавали неудобств при выполнении людьми своей профессиональной или иной деятельности, не загромождали проход, проезд, не препятствовали перемещению грузов.

Знаки безопасности, размещенные на воротах и на (над) входных(ми) дверях(ми) помещений, означают, что зона действия этих знаков

распространяется на всю территорию и площадь за воротами и дверями.

Размещение знаков безопасности на воротах и дверях следует выполнять таким образом, чтобы зрительное восприятие знака не зависело от положения ворот или дверей (открыто, закрыто). Эвакуационные знаки безопасности Е 22 «Выход» и Е 23 «Запасный выход» должны размещаться только над дверями, ведущими к выходу.

Знаки безопасности, установленные у въезда (входа) на объект (участок), означают, что их действие распространяется на объект (участок) в целом.

При необходимости ограничить зону действия знака безопасности соответствующее указание следует приводить в поясняющей надписи на дополнительном знаке.

Знаки безопасности, изготовленные на основе несветящихся материалов, следует применять в условиях хорошего и достаточного освещения.

Знаки безопасности с внешним или внутренним освещением следует применять в условиях отсутствия или недостаточного освещения.

Световозвращающие знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в местах, где отсутствует освещение или имеется низкий уровень фоновое освещение (менее 20 лк по СНиП 23-05-95): при проведении работ с использованием индивидуальных источников света, фонарей (например, в туннелях, шахтах и т. п.), а также для обеспечения безопасности при проведении работ на дорогах, автомобильных трассах, в аэропортах и т. п.

Фотолюминесцентные знаки безопасности следует применять там, где возможно аварийное отключение источников света, а также в качестве элементов фотолюминесцентных эвакуационных систем для обеспечения самостоятельного выхода людей из опасных зон в случае возникновения аварий, пожара или других чрезвычайных ситуаций.

Для возбуждения фотолюминесцентного свечения знаков безопасности необходимо наличие в помещении, где они установлены, искусственного или естественного освещения.

Освещенность поверхности фотолюминесцентных знаков безопасности источниками света должна быть не менее 25 лк.

Основные и дополнительные знаки безопасности.

Основные знаки безопасности необходимо разделять на следующие группы: запрещающие знаки; предупреждающие знаки; знаки пожарной безопасности; предписывающие знаки; эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения; указательные знаки.

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности должны соответствовать приведенным в табл. 5.1

Таблица 5.1

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности

Группа	Геометрическая форма <*>	Сигнальный цвет	Смысловое значение
Запрещающие знаки	Круг с поперечной полосой	Красный	Запрещение опасного поведения или действия
Предупреждающие знаки	Треугольник	Желтый	Предупреждение о возможной опасности. Осторожность. Внимание
Предписывающие знаки	Круг	Синий	Предписание обязательных действий во избежание опасности
Знаки пожарной безопасности <*>	Квадрат или прямоугольник	Красный	Обозначение и указание мест нахождения средств противопожарной защиты, их элементов
Эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения	Квадрат или прямоугольник	Зеленый	Обозначение направления движения при эвакуации. Спасение, первая помощь при авариях или пожарах. Надпись, информация для обеспечения безопасности
Указательные знаки	Квадрат или прямоугольник	Синий	Разрешение. Указание. Надпись или информация

Примечание: <*> Рисунки не приводятся. <*> К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: Р 01 «Запрещается курить», Р 02 «Запрещается пользоваться открытым огнем», Р 04 «Запрещается тушить водой», Р 12 «Запрещается загромождать проходы (или) складировать» (табл. 5.2);

- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества», W 02 «Взрывоопасно», W 11

Запрещающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 01		Запрещается курить	Использовать, когда курение может стать причиной пожара. На дверях и стенах помещений, участках, где имеются горючие и легковоспламеняющиеся вещества, или в помещениях, где курить запрещается
Р 02		Запрещается пользоваться открытым огнем и курить	Использовать, когда открытый огонь и курение могут стать причиной пожара. На входных дверях, стенах помещений, участках, рабочих местах, емкостях, производственной таре
Р 03		Проход запрещен	У входа в опасные зоны, помещения, участки и др.
Р 04		Запрещается тушить водой	В местах расположения электрооборудования, складах и других местах, где нельзя применять воду при тушении горения или пожара
Р 05		Запрещается использовать в качестве питьевой воды	На техническом водопроводе и емкостях с технической водой, непригодной для питья и бытовых нужд
Р 06		Доступ постоянным запрещен	На дверях помещений, у входа на объекты, участки и т. п. для обозначения запрета на вход (проход) в опасные зоны или для обозначения служебного входа (прохода)

Продолжение таблицы 5.2

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 07		Запрещается движение средств напольного транспорта	В местах, где запрещается применять средства напольного транспорта (например, погрузчики или напольные транспортеры)
Р 08		Запрещается прикасаться. Опасно	На оборудовании (узлах оборудования), дверцах, щитах или других поверхностях, прикосновение к которым опасно
Р 09		Запрещается прикасаться. Корпус под напряжением	На поверхности корпусов, щитов и т. п., где есть возможность поражения электрическим током
Р 10		Не включать!	На пультах управления и включения оборудования или механизмов при ремонтных и пусконаладочных работах
Р 11		Запрещается работа (присутствие) людей со стимуляторами сердечной деятельности	В местах и на оборудовании, где запрещено работать или находиться людям с вживленными стимуляторами сердечной деятельности
Р 12		Запрещается загромождать проходы и (или) складировать	На пути эвакуации, у выходов, в местах размещения средств противопожарной защиты, аптек первой медицинской помощи и других местах
Р 13		Запрещается подъем (спуск) людей по шахтному стволу (запрещается транспортировка пассажиров)	На дверях грузовых лифтов и других подъемных механизмов

Продолжение табл. 5.2

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 14		Запрещается вход (проход) с животными	На воротах и дверях зданий, сооружений, помещений, объектов, территорий и т. п., где не должны находиться животные, где запрещен вход (проход) вместе с животными
Р 16		Запрещается работа (присутствие) людей, имеющих металлические имплантаты	На местах, участках и оборудовании, где запрещено работать или находиться людям с вживленными металлическими имплантатами
Р 17		Запрещается разбрызгивать воду	На местах и участках, где запрещено разбрызгивать воду
Р 18		Запрещается пользоваться мобильным (сотовым) телефоном или переносной радиацией	На дверях помещений, у входа на объекты, где запрещено пользоваться средствами связи, имеющими собственные радиочастотные электромагнитные поля
Р 21		Запрещение (прочие опасности или опасные действия)	Применять для обозначения опасности, не предусмотренной настоящим стандартом. Знак необходимо использовать вместе с поясняющей надписью или с дополнительным знаком безопасности с поясняющей надписью
Р 27		Запрещается иметь при (на) себе металлические предметы (часы и т. п.)	При входе на объекты, на рабочих местах, оборудовании, приборах и т. п. Область применения знака может быть расширена
Р 30		Запрещается принимать пищу	На местах и участках работ с вредными для здоровья веществами, а также в местах, где прием пищи запрещен. Область применения знака может быть расширена

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 32		Запрещается подходить к элементам оборудования с маховыми движениями большой амплитуды	На оборудовании и рабочих местах по обслуживанию оборудования с элементами, выполняющими маховые движения большой амплитуды
Р 33		Запрещается брать руками. Сыпучая масса (непрочная упаковка)	На производственной таре, в складах и иных местах, где используют сыпучие материалы
Р 34		Запрещается пользоваться лифтом для подъема (спуска) людей	На дверях грузовых лифтов и других подъемных механизмах. Знак входит в состав группового знака безопасности «При пожаре лифтом не пользоваться, выходить по лестнице»

Таблица 5.3

Предупреждающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 01		Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества	Использовать для привлечения внимания к помещениям с легковоспламеняющимися веществами. На входных дверях, дверцах шкафов, емкостях и т. д.

Продолжение табл.5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 02		Взрывоопасно	Использовать для привлечения внимания к взрыво- опасным веществам, а так- же к помещениям и участ- кам. На входных дверях, стенах помещений, дверцах шкафов и т. д.
W 03		Опасно. Ядовитые ве- щества	В местах хранения, выделения, производства и применения ядовитых веществ
W 04		Опасно. Едкие и корро- зионные вещества	В местах хранения, выде- ления, производства и применения едких и корро- зионных веществ
W 05		Опасно. Радиоактивные вещества или ионизи- рующее излучение	На дверях помещений, дверцах шкафов и в других местах, где находятся и применяются радиоактивные вещества или имеется ионизирующее излучение. Допускается применять знак радиационной опасно- сти по ГОСТ 17925
W 06		Опасно. Возможно падение груза	Вблизи опасных зон, где используется подъемно-транспортное оборудование
W 07		Внимание. Автопогруз- чик	В помещениях и на участках, где проводятся погрузочно-разгрузочные работы

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 08		Опасность поражения электрическим током	На опорах линий электропередачи, электрооборудовании и приборах, дверцах силовых щитков, на электротехнических панелях и шкафах, а также на ограждениях токоведущих частей оборудования, механизмов, приборов
W 09		Внимание. Опасность (прочие опасности)	Применять для привлечения внимания к прочим видам опасности, не обозначенной настоящим стандартом. Знак необходимо использовать вместе с дополнительным знаком безопасности с поясняющей надписью
W 10		Опасно. Лазерное излучение	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где имеется лазерное излучение
W 11		Пожароопасно. Окислитель	На дверях помещений, дверцах шкафов для привлечения внимания на наличие окислителя

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 12		Внимание. Электромагнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют электромагнитные поля
W 13		Внимание. Магнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют магнитные поля
W 14		Осторожно. Мало- заметное препятствие	В местах, где имеются мало- заметные препятствия, о которые можно споткнуться
W 15		Осторожно. Возможность падения с высоты	Перед входом на опасные участки и в местах, где возможно падение с высоты
W 16		Осторожно. Биологическая опасность (инфекционные вещества)	В местах хранения, производства или применения вредных для здоровья биологических веществ
W 17		Осторожно. Холод	На дверцах холодильников и морозильных камер, компрессорных агрегатах и других холодильных аппаратах
W 18		Осторожно. Вредные для здоровья аллергические (раздражающие) вещества	В местах хранения, произ- водства или применения вредных для здоровья аллергических (раздражающих) веществ

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 19		Газовый баллон	На газовых баллонах, складах и участках хранения и применения сжатых или сжиженных газов. Цвет баллона черный или белый, выбирается по ГОСТ 19433
W 20		Осторожно. Аккумуляторные батареи	В помещениях и на участках изготовления, хранения и применения аккумуляторных батарей
W 22		Осторожно. Режущие валы	На участках работ и оборудовании, имеющем незащищенные режущие валы
W 23		Внимание. Опасность зажима	На дверцах турникетов и шлагбаумах
W 24		Осторожно. Возможно опрокидывание	На дорогах, рампах, складах, участках, где возможно опрокидывание внутризаводского транспорта
W 25		Внимание. Автоматическое включение (запуск) оборудования	На рабочих местах, оборудовании или отдельных узлах оборудования с автоматическим включением
W 26		Осторожно. Горячая поверхность	На рабочих местах и оборудовании, имеющем нагретые поверхности

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 27		Осторожно. Возможно травмирование рук	На оборудовании, узлах оборудования, крышках и дверцах, где возможно получить травму рук
W 28		Осторожно. Скользко	На территории и участках, где имеются скользкие места
29		Осторожно. Возможно затягивание между вращающимися элементами	На рабочих местах и оборудовании, имеющем вращающиеся элементы, например на валковых мельницах
W 30		Осторожно. Сужение проезда (прохода)	На территориях, участках, в цехах и складах, где имеются сужения прохода (проезда) или присутствуют выступающие конструкции, затрудняющие проход (проезд)

Таблица 5.4

Предписывающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 01		Работать в защитных очках	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов зрения

Продолжение табл. 5.4

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 02		Работать в защитной каске (шлеме)	На рабочих местах и участках, где требуется защита головы
М 03		Работать в защитных наушниках	На рабочих местах и участках с повышенным уровнем шума
М 04		Работать в средствах индивидуальной защиты органов дыхания	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов дыхания
М 05		Работать в защитной обуви	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной защиты
М 06		Работать в защитных перчатках	На рабочих местах и участках работ, где требуется защита рук от воздействия вредных или агрессивных сред, защита от возможного поражения электрическим током
М07		Работать в защитной одежде	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной защиты
М 08		Работать в защитном щитке	На рабочих местах и участках, где необходима защита лица и органов зрения

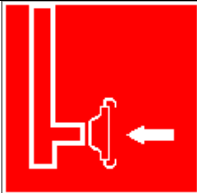
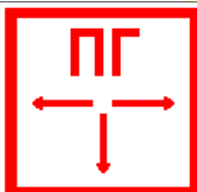
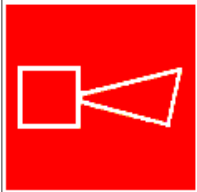
Продолжение табл. 5.4

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 09		Работать в предохранительном (страховочном) поясе	На рабочих местах и участках, где для безопасной работы требуется применение предохранительных (страховочных) поясов
М 10		Проход здесь	На территориях и участках, где разрешается проход
М 11		Общий предписывающий знак (прочие предписания)	Для предписаний, не обозначенных настоящим стандартом. Знак необходимо применять вместе с поясняющей надписью на дополнительном знаке безопасности
М 12		Переходить по надземному переходу	На участках и территориях, где установлены надземные переходы
М 13		Отключить штепсельную вилку	На рабочих местах и оборудовании, где требуется отключение от электросети при наладке или остановке электрооборудования и в других случаях
М 14		Отключить перед работой	На рабочих местах и оборудовании при проведении ремонтных или пусконаладочных работ
М 15		Курить здесь	Используется для обозначения места курения на производственных объектах

Знаки пожарной безопасности

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
F 01-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими знаками пожарной безопасности для указания направления движения к месту нахождения (размещения) средства противопожарной защиты
F 01-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими знаками пожарной безопасности для указания направления движения к месту нахождения (размещения) средства противопожарной защиты
F 02		Пожарный кран	В местах нахождения комплекта пожарного крана с пожарным рукавом и стволом
F 03		Пожарная лестница	В местах нахождения пожарной лестницы
F 04		Огнетушитель	В местах размещения огнетушителя
F 05		Телефон для использования при пожаре	В местах размещения телефона, по которому можно вызвать пожарную охрану

Продолжение табл. 5.5

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
F 06		Место размещения нескольких средств противопожарной защиты	В местах одновременного нахождения (размещения) нескольких средств противопожарной защиты
F 07		Пожарный водосточник	В местах нахождения пожарного водоема или пирса для пожарных машин
F 08		Пожарный сухотрубный стояк	В местах нахождения пожарного сухотрубного стояка
F 09		Пожарный гидрант	У мест нахождения подземных пожарных гидрантов. На знаке должны быть цифры, обозначающие расстояние от знака до гидранта в метрах
F 10		Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики	В местах ручного пуска установок пожарной сигнализации, пожаротушения и (или) систем противодымной защиты. В местах (пунктах) подачи сигнала пожарной тревоги
F 11		Звуковой оповещатель пожарной тревоги	В местах нахождения звукового оповещателя или совместно со знаком F 10 «Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики»

К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: Р 01 «Запрещается курить», Р 02 «Запрещается пользоваться открытым огнем», Р 04 «Запрещается тушить водой», Р 12 «Запрещается загромождать проходы и (или) складировать»;
- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества», W 02 «Взрывоопасно», W 11 «Пожароопасно. Окислитель»;
- эвакуационные знаки;

Таблица 5.6

Эвакуационные знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 01-01		Выход здесь (левосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с левой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 01-02		Выход здесь (правосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с правой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 02-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения

Продолжение табл.5.6

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 02-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения
Е 03		Направление к эвакуационному выходу на- право	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 04		Направление к эвакуационному выходу налево	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 05		Направление к эвакуационному выходу направо вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 06		Направление к эвакуационному выходу нале- во вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 07		Направление к эвакуационному выходу на- право вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 08		Направление к эвакуационному выходу налево вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 09		Указатель двери эвакуационного выхода	Над дверями эвакуационных выходов

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 10		Указатель двери эвакуационного выхода (левосторонний)	Над дверями эвакуационных выходов
Е 11		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или подвешивается к потолку
Е 12		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или подвешивается к потолку
Е 13		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 14		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 15		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 16		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 17		Для доступа вскрыть здесь	На дверях, стенах помещений и в других местах, где для доступа в помещение или выхода необходимо вскрыть определенную конструкцию, например разбить стеклянную панель

Продолжение табл. 5.6.

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 18		Открывать движением от себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
Е 19		Открывать движением на себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
Е 20		Для открывания сдви- нуть	На дверях помещений для обозначения действий по открыванию сдвижных две- рей
Е 21		Пункт (место) сбора	На дверях, стенах помеще- ний и в других местах для обозначения заранее преду- смотренных пунктов (мест) сбора людей в случае воз- никновения пожара, аварии или другой чрезвычайной ситуации
Е 22		Указатель выхода	Над дверями эвакуацион- ного выхода или в составе комбинированных знаков безопасности для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 23		Указатель запасного выхода	Над дверями запасного выхода

Эвакуационные знаки следует устанавливать в положениях, соответствующих направлению движения к эвакуационному выходу.

Изображение графического символа фигуры человека в дверном проеме на эвакуационных знаках Е 01-01 и Е 01-02 смыслового значения

«Выход здесь» должно совпадать с направлением движения к эвакуационному выходу».

Таблица 5.7

Знаки медицинского и санитарного назначения

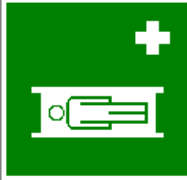
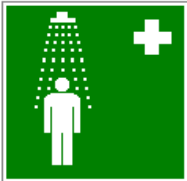
Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
ЕС 01		Аптечка первой медицинской помощи	На стенах, дверях помещений для обозначения мест размещения аптечек первой медицинской помощи
ЕС 02		Средства выноса (эвакуации) пораженных	На дверях и стенах помещений в местах размещения средств выноса (эвакуации) пораженных
ЕС 03		Пункт приема гигиенических процедур (душевые)	На дверях и стенах помещений в местах расположения душевых и т. п.
ЕС 04		Пункт обработки глаз	На дверях и стенах помещений в местах расположения пункта обработки глаз
ЕС 05		Медицинский кабинет	На дверях медицинских кабинетов
ЕС 06		Телефон связи с медицинским пунктом (скорой медицинской помощью)	В местах установки телефонов

Таблица 5.8.

Указательные знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
D 01		Пункт(место) приема пищи	На дверях комнат приема пищи, буфетах, столовых, бытовых помещениях и в других местах, где разрешается прием пищи
D 02		Питьевая вода	На дверях бытовых помещений и в местах расположения кранов с водой, пригодной для питья и бытовых нужд (туалеты, душевые, пункты приема пищи и т. д.)
D 03		Место курения	Используется для обозначения места курения на общественных объектах

Порядок выполнения работы

1. Изучить выдержку из ГОСТ Р 12.4.026–01.

2. Проверить усвоение материала, ответив на контрольные вопросы:

В какой цвет окрашено поле предупреждающего знака?

Какой размер имеет сторона треугольника предупреждающего знака № 4, наносимого на тару и оборудование?

Какой цвет имеет символическое изображение на запрещающем знаке?

Какую форму имеет предписывающий знак?

Какую форму имеет запрещающий знак?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 45 м. Какой размер должен иметь внешний диаметр круга запрещающего знака, мм?

Какой цвет имеют символические изображения или поясняющие надписи, наносимые на указательные знаки?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 60 м. Какие размеры

(стороны прямоугольника) должен иметь указательный знак, мм?

Какой цвет имеет квадрат, помещенный внутри указательного знака?

Какой размер имеет внешний диаметр круга запрещающего знака № 5, наносимого на производственное оборудование и тару?

3. Составить отчет. Отчет должен включать:

- цель практической работы;
- ответы на вопросы задания;
- зарисовку формы знаков (запрещающего, предупреждающего,

предписывающего, указательного) с указанием цвета поля, символов, надписей.

4. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 12.4.026–01. Цвета сигнальные, знаки безопасности и разметка сигнальная. Назначение, правила применения. Общие технические требования и рекомендации. Методы испытания [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-поисковой системы «Техэксперт».

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

РАССЛЕДОВАНИЕ И УЧЕТ НЕСЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Цель задания - ознакомиться с понятием и причинами возникновения несчастных случаев, порядком их расследования и учет на производстве, также с методами анализа травматизма.

Порядок выполнения задания:

- а) изучить и законспектировать общие сведения по пункту 1;
- б) изучить методы анализа и рассчитать по вариантам показатели травматизма по пункту 2 (см контр. вопросы к пунктам 1 и 2);
- в) изучить «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях» и законспектировать ответы на контрольные вопросы к пункту 3.

Общие сведения о несчастных случаях.

Несчастливым случаем на производстве называют случай воздействия на работающего опасного производственного фактора при выполнении работающим трудовых обязанностей или заданий руководителя работы [1].

Повреждение здоровья в результате несчастного случая называют **травмой**. Травма, полученная работающим на производстве, называется **производственной**.

Опасным называют производственный фактор, воздействие которого при определенных условиях на работающего приводит к травме или другому внезапному ухудшению здоровья.

Вредным называют производственный фактор, воздействие которого на работающего приводит к заболеваниям или снижению его трудоспособности. В зависимости от уровня и продолжительности воздействия вредный производственный фактор может стать опасным.

Опасные и вредные производственные факторы (ОВПФ) по природе

действия подразделяют на 4 группы: физические, химические, биологические и психофизиологические.

Производственные травмы в зависимости от характера воздействующих факторов подразделяются на:

- а) механические повреждения (ушибы, ранения, вывихи, переломы, сотрясения мозга);
- б) поражение электрическим током (электроудар, электротравма);
- в) термические повреждения (ожоги пламенем, нагретыми частями оборудования, горячей водой и пр.);
- г) химические повреждения (ожоги, острые отравления);
- д) комбинированные повреждения (сочетание нескольких опасных факторов).

Производственные травмы по тяжести подразделяются на 6 категорий:

- микротравма (после оказания помощи можно продолжать работу).
- легкая травма (потеря трудоспособности на 1 или несколько дней).
- травма средней тяжести (многодневная потеря трудоспособности);
- тяжелая травма (когда требуется длительное лечение);
- травма, приводящая к инвалидности (частичная или полная утрата трудоспособности);
- смертельная травма.

Причины возникновения производственных травм:

- организационные (нарушение технологического процесса и требований техники безопасности (ТБ), неправильная организация рабочего места и режима труда);
- технические (техническое несовершенство оборудования, неисправность механизмов, отсутствие или не использование защитных средств);
- санитарно-гигиенические (несоответствие условий труда требованиям КЗоТ, системе стандартов по безопасности труда (ССБТ), санитарным нормам(СН), строительным нормам и правилам (СНиП) и др.

- психофизиологические (неудовлетворительное состояние здоровья, переутомление, стресс, опьянение и др.).

Методы анализа показателей травматизма

Разработке мероприятий по улучшению условий труда предшествует необходимый этап - исследование и анализ причин травматизма. Для анализа состояния производственного травматизма применяют методы: статистический, экономический, монографический и топографический.

Статистический метод позволяет количественно оценить повторяемость несчастных случаев по ряду относительных коэффициентов. В результате сравнения полученных коэффициентов за отчетный период с предшествующим периодом можно оценить эффективность профилактических мер. Обычно при этом методе анализа несчастные случаи группируются по однородным признакам: профессиям, видам работ, возрасту, стажу работ, причинам, вызвавшим травму. Простота и наглядность являются несомненным достоинством этого метода. Однако у него есть и недостаток - он не выявляет опасные производственные факторы. Среди основных показателей травматизма, используемых при статистическом методе анализа, являются:

а) коэффициент частоты травматизма - число пострадавших при несчастных случаях за отчетный период на 1000 работающих, определяется по формуле:

$$K_{\text{ч}} = T_x \cdot \frac{1000}{P_c},$$

где $K_{\text{ч}}$ - коэффициент частоты травматизма; T - число учтенных травм с потерей трудоспособности; P_c - среднесписочное число работающих за отчетный период.

б) коэффициент тяжести травматизма - число человеко-дней нетрудоспособности, которое приходится на один несчастный случай и определяется по формуле:

$$K_{\text{т}} = \frac{Д}{T},$$

где $K_{\text{т}}$ - коэффициент тяжести травматизма; $Д$ - общее количество дней

нетрудоспособности за отчетный период; Т - количество учтенных травм.

в) коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев

- показывает через сколько рабочих дней в среднем повторяются несчастные случаи и определяется по формуле:

$$B = 22,5 \cdot \frac{12}{T},$$

где В - календарная повторяемость несчастных случаев; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

г) коэффициент средней повторяемости - показывает на сколько человекоднев приходится один несчастный случай, определяется по формуле:

$$B_{\text{ср}} = 22,5 \cdot 12 \cdot \frac{P_{\text{с}}}{T},$$

где В_{ср} - коэффициент средней повторяемости несчастных случаев; Р_с - среднесписочное число работающих за отчетный период; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

д) коэффициент опасности работ - характеризуется тяжестью и частотой несчастных случаев, определяется по формуле:

$$O_p = K_T \cdot T_x \cdot \frac{100}{P_{\text{с}} \cdot M \cdot 22,5},$$

где О_р - коэффициент опасности работ; К_т - коэффициент тяжести травматизма ; Т - количество учтенных несчастных случаев; Р_с - среднесписочное число работающих; М - число месяцев в отчетном периоде.

Таблица 5.0

Исходные данные для расчета показателей травматизма

Показатели	Варианты									
										0
Отчетный период, мес. (М)				2				2		

Число несчастных случаев (Т)				0				1		
Число дней нетрудоспособности (Д)	80	00	80	20	00	50	70	20	60	00
Среднесписочное число работающих (Рс)	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Экономический метод анализа производственного травматизма позволяет оценить эффективность финансовых затрат на профилактику травматизма с расходами на организационные и технические мероприятия. Для более полной и глубокой характеристики травматизма экономический метод часто используют в сочетании с монографическим методом.

Монографический метод анализа травматизма состоит в углубленном и всестороннем изучении отдельного производства, цеха или участка. Он включает описание технологического процесса, оборудования и особенностей технологического регламента, описание опасных зон на рабочих местах, также санитарно-гигиенические условия труда. При этом обращается внимание на наличие защитных приспособлений, ограждений и травмоопасных ситуаций

Монографический метод анализа травматизма характеризуется полнотой, но трудоемок. Этот метод позволяет выявить потенциальную опасность не только в действующих производствах, но и на этапе проектирования, тем самым исключить причины травматизма.

Топографический метод анализа травматизма проводится по месту происшествия. При этом все несчастные случаи условными знаками наносятся на план производственного участка или схему механизма в тех местах, где они произошли. В результате этого выявляются опасные зоны, требующие соответствующих защитных мер и особого внимания.

Контрольные вопросы к пунктам 1 и 2

1. Что такое несчастный случай?

2. Что такое опасный производственный фактор?
3. Что такое вредный производственный фактор?
4. На какие группы подразделяются опасные и вредные производственные факторы?
5. Какие различают разновидности производственных травм?
6. Какие выделяют категории производственных травм?
7. Каковы основные причины возникновения производственных травм?
8. Какие существуют методы анализа производственного травматизма ?
9. В чем заключается статистический метод анализа производственного травматизма?
10. Как определяется коэффициент частоты травматизма?
11. Как определяется коэффициент тяжести травматизма?
12. Как определяется коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев?
13. Как определяется коэффициент средней повторяемости несчастных случаев?
14. Как определяется коэффициент опасности работ?
15. В чем заключается экономический метод анализа производственного травматизма?
16. В чем заключается монографический метод анализа производственного травматизма?
17. В чем заключается топографический метод анализа производственного травматизма?

Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях

Расследование и учет несчастных случаев на производстве проводят в соответствии с “Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях”, утвержденного

Постановлением Министерства труда и социального развития Российской Федерации от 24 октября 2002г. №73, а также статьями 227-231 Трудового кодекса РФ (ТК РФ).

Несчастный случай на производстве - это случай, происшедший с работающим вследствие воздействия опасного производственного фактора (для застрахованного – это страховой случай).

Несчастные случаи в зависимости от причин, места и времени происшествия делятся на две группы: несчастные случаи, связанные с работой и несчастные случаи, не связанные с работой (бытовые травмы).

Несчастные случаи, не связанные с производством, но происшедшие на производстве - это несчастные случаи, происшедшие при изготовлении предметов в личных целях, самовольном использовании транспорта предприятия, участии в спортивных мероприятиях на территории предприятия, при хищении имущества предприятия.

Бытовые несчастные случаи - это несчастные случаи, происшедшие в быту (дома) или при нахождении на предприятии вне рабочего времени.

Расследование несчастных случаев на производстве выполняется в соответствии с Трудовым кодексом РФ и «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях», утверждённым постановлением Минтруда России № 73 от 24 октября 2002 года. Этим же постановлением утверждены формы документов, необходимых для расследования и учёта несчастных случаев на производстве.

Расследование несчастного случая может быть достаточно сложным процессом, поскольку интересы пострадавшего и работодателя часто не совпадают.

Действие нормативных актов по расследованию и учёту несчастных случаев на производстве распространяется на:

- работодателей - физических лиц, вступивших в трудовые отношения с работниками;
- уполномоченных работодателем лиц (представители работодателя);

- физических лиц, осуществляющих руководство организацией (руководители организации);
- физических лиц, состоящих в трудовых отношениях с работодателем;
- других лиц, участвующих с ведома работодателя в его производственной деятельности своим личным трудом, правоотношения которых не предполагают заключения трудовых договоров.

Расследованию подлежат травмы, в том числе причиненные другими лицами, включая:

- тепловой удар, ожог, обморожение;
- утопление; поражение электрическим током или молнией;
- укусы, нанесенные животными и насекомыми;
- повреждения, полученные в результате взрывов, аварий и т.п.

Расследованию и учёту подлежат несчастные случаи происшедшие:

- при исполнении трудовых обязанностей, в том числе во время командировки, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций;
- на территории организации, в течение рабочего времени, в том числе во время следования на работу и с работы, а также в течение времени, необходимого для приведения в порядок рабочего места;
- при следовании на работу или с работы на транспортном средстве работодателя, а также на личном транспортном средстве при использовании его в производственных целях;
- во время служебных поездок на общественном транспорте, а также при следовании по заданию работодателя к месту выполнения работ и обратно, в том числе пешком;
- при следовании к месту служебной командировки и обратно;
- при следовании на транспортном средстве в качестве сменщика во время междусменного отдыха;
- во время междусменного отдыха при работе вахтовым методом;
- при привлечении к участию в ликвидации последствий

чрезвычайных ситуаций.

Работники организации обязаны незамедлительно извещать руководство о каждом происшедшем несчастном случае, об ухудшении состояния своего здоровья в связи с проявлениями признаков острого заболевания.

О каждом страховом случае работодатель в течение суток обязан сообщить страховщику (фонд социального страхования).

О групповом несчастном случае (пострадало два и более человек), тяжёлом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом, работодатель в течение суток обязан направить извещение соответственно:

1) о несчастном случае, происшедшем в организации:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту происшествия несчастного случая;
- в федеральный орган исполнительной власти по ведомственной принадлежности;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в организацию, направившую работника, с которым произошел несчастный случай;
- в территориальные объединения организаций профсоюзов;
- в территориальный орган государственного надзора, если несчастный случай произошел в организации (объекте), подконтрольной этому органу;
- страховщику.

2) о несчастном случае, происшедшем у работодателя - физического лица:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту нахождения работодателя - физического лица;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в территориальный орган государственного надзора, если

несчастный случай произошел на объекте, подконтрольном этому органу;

- страховщику.

О групповых несчастных случаях, тяжелых несчастных случаях и несчастных случаях со смертельным исходом также информируется Федеральная инспекция труда Минтруда России.

Если указанные несчастные случаи, произошли в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты, то соответствующим образом информируются специально уполномоченные органы государственного надзора.

Для расследования несчастного случая на производстве в организации работодатель незамедлительно создает комиссию в составе не менее трех человек. Во всех случаях состав комиссии должен состоять из нечетного числа членов.

В состав комиссии включаются специалист по охране труда организации, представители работодателя, представители профсоюзного органа (коллектива), уполномоченный (доверенный) по охране труда. Комиссию возглавляет работодатель или уполномоченный им представитель. Состав комиссии утверждается приказом работодателя. Руководитель, непосредственно отвечающий за безопасность труда на участке, где произошел несчастный случай, в состав комиссии не включается.

В расследовании несчастного случая на производстве у работодателя - физического лица принимают участие указанный работодатель или уполномоченный его представитель, доверенное лицо пострадавшего, специалист по охране труда, который может привлекаться к расследованию несчастного случая и на договорной основе.

Несчастный случай на производстве, происшедший с лицом, направленным для выполнения работ к другому работодателю, расследуется комиссией, образованной работодателем, у которого произошел несчастный случай. В состав данной комиссии входит уполномоченный представитель работодателя, направившего это лицо.

Несчастные случаи, происшедшие на территории организации с работниками сторонних организаций при исполнении ими задания направившего их работодателя, расследуются комиссией, формируемой этим работодателем.

Несчастные случаи, происшедшие с работниками при выполнении работы по совместительству, расследуются комиссией, формируемой работодателем, у которого фактически производилась работа по совместительству.

Расследование несчастных случаев со студентами, проходящими производственную практику (выполняющими работу под руководством работодателя), проводится комиссиями, формируемыми и возглавляемыми этим работодателем. В состав комиссии включаются представители образовательного учреждения.

Для расследования группового несчастного случая, тяжёлого несчастного случая и несчастного случая со смертельным исходом в комиссию дополнительно включаются:

- государственный инспектор труда, представители органа исполнительной власти субъекта РФ или органа местного самоуправления (по согласованию), представитель территориального объединения профсоюзов. Возглавляет комиссию государственный инспектор труда;
- по требованию пострадавшего (или его родственников) в расследовании несчастного случая может принимать участие его доверенное лицо;
- в случае острого отравления или радиационного воздействия, превысившего установленные нормы, в состав комиссии включается также представитель территориального центра государственного санитарно-эпидемиологического надзора;
- при несчастном случае, происшедшем в организациях на объектах, подконтрольных территориальным органам Федерального горного и промышленного надзора России, состав комиссии утверждается руководителем

соответствующего территориального органа и возглавляет комиссию представитель этого органа;

- при групповом несчастном случае с числом погибших 5 и более человек в состав комиссии включаются также представители Федеральной инспекции труда, федерального органа исполнительной власти по ведомственной принадлежности и общероссийского объединения профсоюзов. Председателем комиссии является главный государственный инспектор труда по субъекту Российской Федерации, а на объектах, подконтрольных территориальному органу Федерального горного и промышленного надзора России, - руководитель этого территориального органа.

При крупных авариях с человеческими жертвами 15 и более человек расследование проводится комиссией, назначаемой Правительством России.

Расследование несчастных случаев (в том числе групповых), в результате которых пострадавшие получили повреждения, отнесенные в соответствии с установленными квалифицирующими признаками к категории легких, проводится в течение трех дней.

Расследование иных несчастных случаев проводится в течение 15 дней. В некоторых случаях председатель комиссии может продлить срок расследования, но не более чем на 15 дней. Несчастные случаи, о которых не было своевременно сообщено работодателю или в результате которых нетрудоспособность наступила не сразу, расследуются по заявлению пострадавшего в течение месяца.

Тяжелые несчастные случаи и несчастные случаи со смертельным исходом, происшедшие с лицами, выполнявшими работу на основе договора гражданско-правового характера, расследуются в установленном порядке государственными инспекторами труда на основании заявления пострадавшего (доверенного лица, членов его семьи).

В ходе расследования несчастного случая комиссия производит осмотр места происшествия, выявляет и опрашивает очевидцев несчастного случая и должностных лиц, знакомится с действующими в организации нормативными и

распорядительными документами, по возможности получает объяснения от пострадавшего.

Расследуются в установленном порядке и по решению комиссии могут квалифицироваться как не связанные с производством:

- смерть вследствие общего заболевания или самоубийства;
- смерть или иное повреждение здоровья, единственной причиной которых явилось алкогольное, наркотическое или иное токсическое опьянение (отравление) работника;
- несчастный случай, происшедший при совершении пострадавшим действий, квалифицированных правоохрнительными органами как уголовное правонарушение.

При поступлении жалобы пострадавшего, выявлении сокрытого несчастного случая, установления нарушений порядка расследования и в некоторых иных случаях, государственный инспектор труда, независимо от срока давности несчастного случая, проводит дополнительное расследование.

Несчастные случаи, квалифицированные, как несчастные случаи на производстве, подлежат оформлению актом о несчастном случае на производстве по форме Н-1*.

Акт формы Н-1 составляется комиссией в двух экземплярах. При несчастном случае на производстве с застрахованным работником составляется дополнительный экземпляр акта формы Н-1.

При групповом несчастном случае на производстве акты формы Н-1 составляются на каждого пострадавшего отдельно.

В случае установления факта грубой неосторожности застрахованного работника, содействовавшей возникновению или увеличению размера вреда, причиненного его здоровью, в акте расследования указывается степень его вины в процентах, с учетом заключения профсоюзного или иного уполномоченного застрахованным представительного органа данной организации (не более 25%).

По результатам расследования каждого группового несчастного случая,

тяжелого несчастного случая или несчастного случая со смертельным исходом составляется соответствующий акт в двух экземплярах.

Работодатель в трехдневный срок после завершения расследования несчастного случая на производстве обязан выдать пострадавшему один экземпляр утвержденного им и заверенного печатью акта формы Н-1. Вторые экземпляры акта с копиями материалов расследования хранятся в течение 45 лет работодателем.

При страховых случаях третий экземпляр утвержденного и заверенного печатью акта формы Н-1 работодатель направляет страховщику.

Каждый оформленный в установленном порядке несчастный случай на производстве регистрируются работодателем в журнале регистрации несчастных случаев на производстве и включаются в годовую форму федерального государственного статистического наблюдения за травматизмом на производстве.

В случае ликвидации организации или прекращения работодателем - физическим лицом предпринимательской деятельности оригиналы актов о расследовании несчастных случаев на производстве подлежат передаче на хранение правопреемнику, а при его отсутствии - соответствующему государственному органу.

Государственный надзор и контроль за соблюдением установленного порядка расследования, оформления и учета несчастных случаев на производстве осуществляется органами Федеральной инспекции труда.

Контрольные вопросы к пункту 3

1. Какие несчастные случаи считаются связанными с производством и подлежат расследованию и учету?
2. На кого распространяется действие Положения о порядке расследования и учета несчастных случаев?
3. Как должен действовать работодатель при возникновении несчастного случая на предприятии?
4. Что необходимо сделать сразу же после свершения несчастного

случая на производстве?

5. Куда должен сообщить работодатель и в какие сроки о групповом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом?

6. Кто несет ответственность за организацию и своевременное расследование и учета несчастных случаев?

7. Кто входит в комиссию по расследованию несчастных случаев, каковы ее обязанности?

8. В какие сроки должно быть проведено расследование несчастного случая?

9. Какие несчастные случаи квалифицируются как не связанные с производством?

10. Что делают при установлении грубой неосторожности пострадавшего?

11. В какие сроки и комиссией какого состава расследуются групповые несчастные случаи или со смертельным исходом?

12. Какие условия должен обеспечить работодатель для работы комиссии, проводящей расследование несчастного случая?

13. Каким документом оформляются несчастные случаи на производстве?

14. Какой организацией учитывается акт о несчастном случае?

15. В какие сроки и куда должны быть отправлены материалы расследования групповых несчастных случаев?

16. Какие организации и должностные лица разбирают разногласия при оформлении актов по форме Н - 1 ?

17. Каковы полномочия государственного инспектора по охране труда в случае нарушения порядка расследования несчастного случая?

форма Н-1

Один экземпляр направляется
пострадавшему или его
доверенному лицу

УТВЕРЖДАЮ

(подпись, фамилия, инициалы
работодателя
(его представителя))
"___" _____ 200__ г.

Печать

АКТ N _____
О НЕСЧАСТНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

1. Дата и время несчастного случая _____

(число, месяц, год и время происшествия
несчастного случая,

количество полных часов от начала работы)

2. Организация (работодатель), работником которой является
(являлся) пострадавший _____

(наименование, место нахождения,
юридический адрес, ведомственная
и отраслевая

принадлежность (ОКОНХ основного вида деятельности);
фамилия, инициалы работодателя -

физического лица)

Наименование структурного подразделения _____

3. Организация, направившая работника _____

(наименование, место нахождения, юридический адрес,
отраслевая принадлежность)

4. Лица, проводившие расследование несчастного случая:

(фамилия, инициалы, должности и место работы)

5. Сведения о пострадавшем:

фамилия, имя, отчество _____

пол (мужской, женский) _____

дата рождения _____

профессиональный статус _____

профессия (должность) _____

стаж работы, при выполнении которой произошел несчастный случай

_____,
(число полных лет и месяцев)

в том числе в данной организации _____

(число полных лет и месяцев)

6. Сведения о проведении инструктажей и обучения по охране труда

Вводный инструктаж _____

(число, месяц, год)

Инструктаж на рабочем месте (первичный, повторный, внеплановый,

(нужное подчеркнуть)

целевой)

по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____

(число, месяц, год)

Стажировка: с "___" _____ 200_ г. по "___" _____ 200_ г.

(если не проводилась - указать)

Обучение по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай: с "___" _____ 200_ г. по "___" _____ 200_ г.

(если не проводилось - указать)

Проверка знаний по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____

(число, месяц, год, N протокола)

7. Краткая характеристика места (объекта), где произошел несчастный случай

(краткое описание места происшествия с указанием опасных и (или) вредных производственных факторов со ссылкой на сведения, содержащиеся в протоколе осмотра места несчастного случая)

Оборудование, использование которого привело к несчастному случаю

(наименование, тип, марка, год выпуска, организация - изготовитель)

8. Обстоятельства несчастного случая

(краткое изложение обстоятельств, предшествовавших несчастному случаю, описание событий и действий пострадавшего и других лиц, связанных с несчастным случаем, и другие сведения, установленные в ходе расследования)

8.1. Вид происшествия _____

8.2. Характер полученных повреждений и орган, подвергшийся повреждению, медицинское заключение о тяжести повреждения здоровья _____

8.3. Нахождение пострадавшего в состоянии алкогольного или наркотического опьянения _____

(нет, да - указать состояние и степень опьянения в соответствии с заключением по результатам освидетельствования, проведенного в установленном порядке)

8.4. Очевидцы несчастного случая _____

(фамилия, инициалы, постоянное место жительства,

домашний телефон) _____	
9. Причины несчастного случая _____ (указать основную и сопутствующие причины	
несчастного случая со ссылками на нарушенные требования законодательных и иных	
нормативных правовых актов, локальных нормативных актов)	

10. Лица, допустившие нарушение требований охраны труда:	
(фамилия, инициалы, должность (профессия) с указанием требований законодательных,	
иных нормативных правовых и локальных нормативных актов, предусматривающих их	
ответственность за нарушения, явившиеся причинами несчастного случая, указанными в п. 9	
настоящего акта; при установлении факта грубой неосторожности пострадавшего указать	
степень его вины в процентах)	
Организация (работодатель), работниками которой являются данные лица	
(наименование, адрес)	
11. Мероприятия по устранению причин несчастного случая, сроки	

Подписи лиц, проводивших расследование несчастного случая _____ (фамилии, инициалы, дата)	

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 12.0.002 - 80. Термины и определения.
2. Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях
3. И.М.Чижевский, Г.Б.Куликов, Ю.А.Сидорин. Охран труда в полиграфии. М., 1988.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7. СРЕДСТВА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ОРГАНОВ ДЫХАНИЯ

Цель работы – ознакомиться со средствами защиты органов дыхания и получить практические навыки их использования.

Теоретические положения

Средства индивидуальной защиты (СИЗ) предназначены для защиты человека от попадания внутрь организма, на кожные покровы и повседневную одежду радиоактивных веществ (РВ), отравляющих веществ (ОВ) и бактериальных средств (БС).

По принципу применения средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства защиты повседневного применения (промышленные СИЗ);
- средства защиты эпизодического применения (СИЗ для аварийных работ и пострадавших в очагах ЧС).

По объектам защиты средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства защиты органов дыхания;
- средства защиты кожи.

По принципу действия средства индивидуальной защиты делятся:

- на фильтрующие (принцип фильтрации состоит в том, что воздух, необходимый для поддержания жизнедеятельности организма человека, очищается от вредных примесей при прохождении через средство защиты);
- изолирующие (средства защиты изолирующего типа полностью изолируют организм человека от окружающей среды с помощью материалов, непроницаемых для воздуха и вредных примесей).

По способу подачи воздуха различают средства индивидуальной

защиты делятся:

- с принудительной подачей воздуха;
- самовсасывающие.

По кратности использования средства индивидуальной защиты

- на СИЗ многократного использования;
- СИЗ однократного использования.

По способу изготовления средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства, изготовленные промышленностью;
- простейшие средства, изготовленные из подручных материалов.

Кроме средств индивидуальной защиты существуют медицинские средства защиты [1].

Средства защиты органов дыхания.

Фильтрующий противогаз.

Фильтрующий противогаз предназначен для защиты органов дыхания, глаз, кожи лица от воздействия ОВ, РВ, БС, (АХОВ), а также различных вредных примесей, присутствующих в воздухе.

В настоящее время имеются фильтрующие гражданские противогазы различной модификации и промышленные противогазы.

Для защиты населения наибольшее распространение получили фильтрующие противогазы: для взрослого населения – ГП-5 (ГП-5М), ГП-7 (ГП-7В); для детей – ПДФ-Ш, ПДФ-Д, ПДФ-2Ш, ПДФ-2Д, КЗД.

Гражданский противогаз (ГП-5). В состав комплекта входят два основных элемента: фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5 и лицевая часть ШМ-62у. Шлем-маска имеет 5 ростов (0, 1, 2, 3, 4). Кроме того, противогаз комплектуется сумкой, наружными утеплительными манжетами (НМУ-1) и коробкой с незапотевающими пленками (рис. 9.1) [2]. У него нет соединительной трубки.

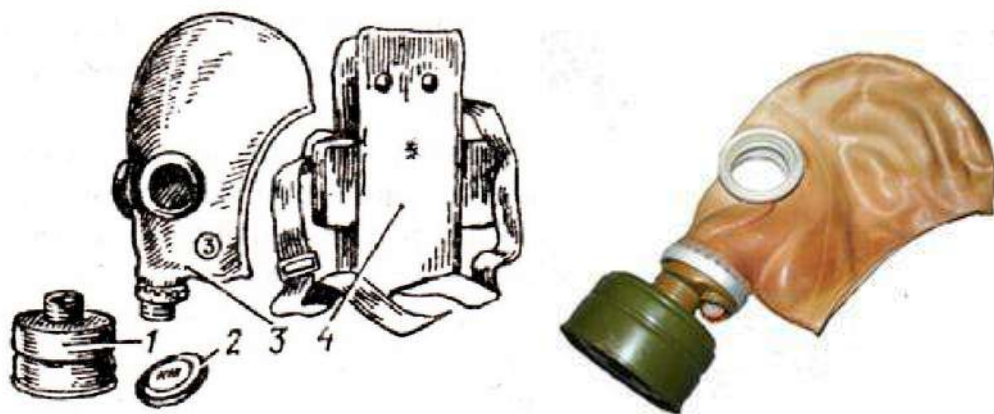


Рис. 7.1 Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-5):

1 – фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5; 2 - коробка с незапотевающими пленками; 3 – лицевая часть ШМ-62у; 4 – сумка

Внутри фильтрующе-поглощающей коробки ГП-5 расположены противоаэрозольный фильтр и шихта. Лицевая часть ШМ-62у представляет собой шлем-маску, изготовленную на основе резины из натурального или синтетического каучука. В шлем-маску вмонтированы очковый узел и клапанная коробка. Клапанная коробка имеет один вдыхательный и два выдыхательных клапана и служит для распределения потоков воздуха. Незапотевающие пленки изготавливаются из целлюлозы и бывают односторонние (НП) и двусторонние (НПН). Они устанавливаются с внутренней стороны стекол противогаза желатиновым покрытием к глазам и фиксируются прижимными кольцами. Желатин равномерно впитывает конденсированную влагу, тем самым сохраняя прозрачность пленки.

Комплект из 6 пленок упакован в металлическую коробку. Утеплительные манжеты используются только зимой при температуре ниже – 10 °С. Манжета надевается на обойму очков с внешней стороны. Пространство между стеклами манжет и очков предохраняет очки шлем- маски от замерзания.

Гражданский противогаз (ГП-5М). В комплект противогаза входит шлем-маска (ШМ-66Му) с мембранной коробкой для переговорного устройства. В лицевой части сделаны сквозные вырезы для ушных раковин, что обеспечивает нормальную слышимость.

Подгонка противогаза начинается с определения требуемого роста лицевой части. Рост лицевой части типа ШМ-62у, ШМ-66Му определяется по величине вертикального обхвата головы путем ее измерения по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляют до 0,5 см. До 63 см берут нулевой рост, от 63,5 до 65,5 см – первый, от 66 до 68 см – второй, от 68,5 до 70,5 см – третий, от 71 см и более – четвертый.

Перед применением противогаз следует проверить на исправность и герметичность. Осматривая лицевую часть, следует определить ее целостность, обратив внимание на стекла очкового узла. После этого нужно проверить клапанную коробку, состояние клапанов. Они не должны быть покороблены, засорены или порваны. На фильтрующе-поглощающей коробке не должно быть вмятин, проколов, в горловине – повреждений. Обращается внимание на то, чтобы в коробке не пересыпались зерна поглотителя.

Наиболее совершенными в настоящее время являются противогазы ГП-7 и ГП-7В. Их основными отличиями являются: более совершенная конструкция и форма шлем-маски, обеспечивающая возможность безопасного приема воды, жидких лекарств, других жидкостей в зараженной зоне без снятия маски. Наличие в комплекте фильтрующе-поглощающих коробок обеспечивает защиту от конкретных видов твердых химических веществ (ТХВ), а также увеличенные сроки работоспособности. Ростовка лицевой части предусматривает три размера. Как и другие типы противогазов, они состоят из фильтрующе-поглощающей коробки и лицевой части.

Гражданский противогаз (ГП-7). В комплект противогаза входят фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к, лицевая часть в виде маски МП, сумка, защитный трикотажный чехол, коробка с незапотевающими пленками, утеплительные манжеты. Его масса в комплекте без сумки – около 900 г (фильтрующе-поглощающая коробка – 250 г, лицевая часть – 600 г).

Фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к по конструкции аналогична коробке ГП-5, но с улучшенными характеристиками, уменьшено ее сопротивление, что облегчает дыхание. Лицевая часть МГП представляет собой маску объемного типа с «независимым» обтюратором, с наголовником (предназначен для закрепления лицевой части) в виде резиновой пластины с пятью лямками (лобная, две височные, две щечные), с очковым узлом, переговорным устройством (мембраной), узлами клапана вдоха и выдоха, прижимными кольцами для закрепления незапотевающих пленок (рис. 9.2) [2]. «Независимый» обтюратор представляет собой полосу тонкой резины и служит для создания надежной герметизации лицевой части на голове. При этом механическое воздействие лицевой части на голову очень незначительно. На каждой лямке с интервалом в 1 см нанесены упоры ступенчатого типа, которые предназначены для надежного закрепления их в пряжках. У каждого упора имеется цифра, указывающая его порядковый номер. Это позволяет точно фиксировать нужное положение лямок при подгонке маски. Нумерация цифр идет от свободного конца лямки к затылочной пластине. Гидрофобный трикотажный чехол надевается на фильтрующе-поглощающую коробку и предохраняет ее от заражения, снега, пыли и влаги.

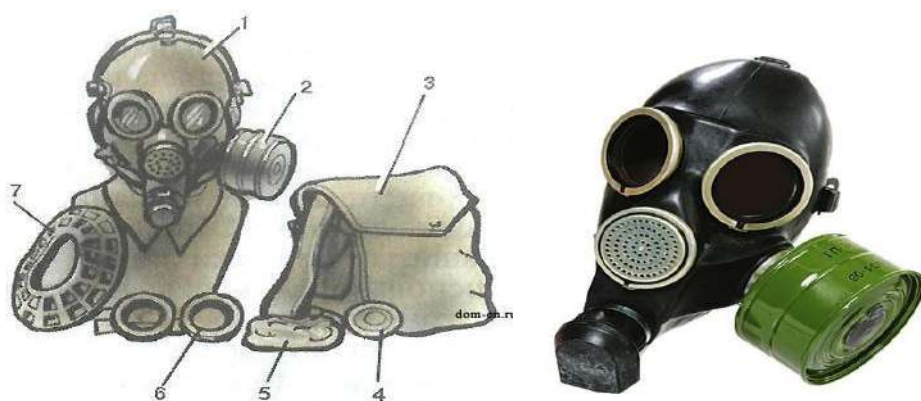


Рис. 7.2. Противогаз ГП-7:

1 – лицевая часть; 2 – фильтрующе-поглощающая коробка; 3 – сумка; 4 – коробка с незапотевающими пленками; 5 – трикотажный чехол; 6 – утеплительные манжеты

Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-7, ГП-7В, ГП-7ВМ) – это одна из самых последних и совершенных моделей противогазов для населения. В реальных условиях они обеспечивают высокую защиту от паров отравляющих веществ нервнопаралитического действия (типа зарин, зоман и др.), общедовитого действия (хлорциан, синильная кислота и др.), радиоактивных веществ (радионуклидов йода и его органических соединений (типа йодистый метил и др.)); от капель отравляющих веществ кожно-нарывного действия (иприт и др.), бактериальных, аварийных химически опасных веществ (АХОВ). ГП-7 имеет малое сопротивление дыханию, обеспечивает надежную герметизацию и небольшое давление лицевой части на голову. Благодаря этому им могут пользоваться люди старше 60 лет и больные с легочными и сердечно-сосудистыми заболеваниями. Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы.

Правила определения размера противогаза.

Для определения размера противогаза нужно знать горизонтальный и вертикальный обхват головы. Горизонтальный обхват измеряется по замкнутой линии, которая проходит спереди по надбровным дугам, сбоку чуть выше (на 2–3 см) ушной раковины и сзади по наиболее выступающей части головы. А вертикальный обхват можно определить посредством измерения длины вертикальной линии, проходящей через подбородок, щеки и макушку. Полученные измерения следует округлить так, чтобы последняя цифра была 0 или 5. Затем нужно сложить оба результата и посмотреть, какой размер противогаза вам нужен [3]:

- менее 1190 мм – первый размер;
- от 1195 до 1210 мм – второй размер;
- от 1215 до 1235 мм – третий размер;
- от 1240 до 1260 мм – четвертый размер;
- от 1265 до 1285 мм – пятый размер;

- от 1290 до 1310 мм – шестой размер.

Надевается противогаз после сигнала «Химическая тревога» по команде «Газы», либо по своей инициативе. Вынув противогаз из специальной сумки, следует взять шлем-маску за его нижнюю часть так, чтобы большие пальцы рук находились снаружи, а остальные были внутри. Далее нужно приложить нижнюю часть шлема-маски под подбородок и натянуть его на голову резким движением рук вверх.

Учитывая то, что операции, которые описаны выше, придется проводить вслепую, нужно достаточно долго тренироваться. Хотя все зависит от человека и степени его обучаемости. Хорошо попрактиковавшись, можно приблизиться к армейским нормативам на надевание противогаза – около 7–10 с. Наличие у противогаза переговорного устройства (мембрана) обеспечивает четкое понимание передаваемой речи, значительно облегчает пользование средствами связи (телефон, радио).

Гражданские противогазы ГП-7В, ГП-7ВМ, УЗС-ВК, КЗД-6, фильтр ДОТ, фильтр ВК, ДПГ-3 (рис. 7.3). ГП-7В отличается от ГП-7 тем, что в нем лицевая часть МПП-В имеет устройство для приема воды, представляющее собой резиновую трубку с мундштуком и ниппелем.

ГП-7ВМ отличается от ГП-7В тем, что маска М-80 имеет очковый узел в виде трапециевидных изогнутых стекол, обеспечивающих возможность работы с оптическими приборами.

Гражданский фильтрующий противогаз ГП-7 обеспечивает защиту органов дыхания, глаз и кожи лица человека от вредных веществ и примесей, находящихся в воздухе. Это проверенная временем и надежная модель противогаза для гражданского населения.





Рис. 7.3. Гражданские противогазы:

a – ГП-7(В, ВМ); *б* – УЗС-ВК; *в* – ПДФ-2; *г* – КЗД-6; *д* – фильтр ДОТ; *е* – фильтр ВК; *ж* – ДПГ-3;

Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы. Горизонтальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей спереди по надбровным дугам, сбоку на 2–3 см выше края ушной раковины и сзади через наиболее выступающую точку головы. Вертикальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляются с точностью до 5 мм. По сумме двух измерений устанавливают нужный типоразмер (табл. 7.0). [4].

Правильно подобранная шлем-маска (маска) должна плотно прилегать к лицу и исключать возможность проникновения наружного воздуха в органы дыхания, минуя фильтрующе-поглощающую коробку.

Таблица 7.0

Типоразмеры противогазов

Рост лицевой части		1		2		3		
Положение упоров лямок	ГП-7, ГП-7В	4-8-8	3-7-8	3-7-8	3-6-7	3-6-7	3-5-6	3-4-5
	ГП-7ВМ	4-8-6	3-7-6	3-7-6	3-6-5	3-6-5	3-5-4	3-4-3
Сумма горизонтального и вертикального обхвата головы		До 1185	1190–1210	121–1235	1240–1260	1265–1285	1290–1310	1310 и более

Примечание. Положение лямок наголовника устанавливают при подгонке противогаза.

Противогаз УЗС-ВК – аварийно-спасательное средство многоразового действия, применяется для защиты органов дыхания человека от вредных веществ, может использоваться во всех климатических зонах.

Противогаз ПДФ-2 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и лица детей (старше 1,5 года) от отравляющих веществ (ОВ), опасных биологических веществ (ОБВ), радиоактивной пыли (РП).

Камера защитная детская (КЗД-6) предназначена для защиты детей в возрасте до 1,5 года от отравляющих веществ, радиоактивной пыли и бактериальных средств. Детская защитная камера похожа на обычную сумку, поэтому переносить ребенка в ней очень удобно.

Дополнительный патрон (ДПГ-3) предназначен для использования в комплекте с ГП-7, ГП-7В и детскими противогазами, для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека от сильнодействующих ядовитых веществ: аммиака, диметиламина, нитробензола.

Фильтр ДОТ соответствует новым ГОСТам, гармонизированным с европейскими стандартами EN141, EN143. Он значительно эффективнее по сравнению с противогазовыми коробками, выпускаемыми по старым ГОСТа, за счет уникальных поглотителей от отравляющих веществ, опасных биологических веществ, радиоактивной пыли, сильнодействующих ядовитых веществ.

Фильтр ВК предназначен для очистки вдыхаемого воздуха от органических газов и паров с температурой кипения выше 65 °С (циклогексан, бензол, ксилол, толуол, бензин, керосин, галоидоорганические соединения (хлорпикрин, хлорацетофенон и т. п.), нитросоединения бензола).

Промышленные противогазы. Существует несколько марок промышленных фильтрующих противогазов, которые являются индивидуальным средством защиты органов дыхания и зрения рабочих различных отраслей промышленности, сельского хозяйства от воздействия

вредных веществ (газы, пары, пыль, дым и туман), присутствующих в воздухе.

Запрещается применять промышленные противогазы при недостатке кислорода в воздухе (менее 18 %), например при работах в емкостях, цистернах, колодцах и других изолированных помещениях.

Не допускается применение промышленных противогазов для защиты от низкокипящих жидкостей, плохо сорбирующихся органических веществ, например метана, этилена, ацетилен. Не рекомендуется работать в таких противогазах, если состав газов и паров вредных веществ неизвестен (Рис. 7.4).



ППФМ-92

ПФМГ-96

ПФСГ-98

ППФ-95

Рис. 7.4. Промышленные противогазы

Противогазы ППФМ-92, ПФМГ-96, ПФСГ-98 предназначены для защиты органов дыхания, глаз и лица человека от вредных газо- и паров- разных веществ и аэрозолей, присутствующих в воздухе рабочей зоны. ППФ-95 предназначены для защиты органов дыхания, зрения и лица рабо- чих различных отраслей промышленности и сельского хозяйства от воз- действия вредных газов, паров, пыли, дыма и тумана, присутствующих в воздухе. Фильтрующие противогазы надежны в атмосфере, содержащей не менее 18 % кислорода.

Промышленный противогаз состоит из снаряженной коробки, лицевой части (шлем-маски) с соединительной трубкой и сумки. Фильтрующая коробка служит для очистки воздуха, вдыхаемого человеком, от ядовитых веществ и вредных примесей. В зависимости от состава этих примесей она может содержать один или несколько специальных поглотителей или сочетание поглотителя с аэрозольным фильтром. При этом коробки строго специализированы по составу поглотителей, а поэтому отличаются друг от

друга окраской и маркировкой. Шлем-маски промышленных противогазов изготавливаются пяти ростов – 0, 1, 2, 3, 4. Чтобы подобрать шлем-маску, надо мягкой сантиметровой линейкой произвести два измерения головы. Вначале определить длину круговой линии, проходящей по подбородку, щекам и через высшую точку головы (макушку). Затем измерить длину полуокружности, проходящей от отверстия одного уха к отверстию другого по лбу через надбровные дуги. Результаты двух обмеров суммируют и находят требуемый рост шлем-маски.

При сумме до 93 см размер нулевой, от 93 до 95 см – первый, от 95 до 99 см – второй, от 99 до 103 см – третий, от 103 и выше – четвертый [4].

Противогазы комплектуют коробками двух размеров (большая и малая) и трех типов: без аэрозольного фильтра, с аэрозольным фильтром (на коробке белая вертикальная полоса), без аэрозольного фильтра с уменьшенным сопротивлением дыханию (имеет индекс 8 в маркировке). В зависимости от вида вредного вещества выпускают коробки следующих марок: А, В, Г, Е, КД, СО, М (табл. 9.2) [5].

Коробки марок А, В, Г, Е, КД изготавливаются как с аэрозольными фильтрами, так и без них; коробка БКФ – только с аэрозольными фильтрами; коробки СО и М – без аэрозольных фильтров. Белая вертикальная полоса на коробке означает, что она оснащена аэрозольным фильтром.

Таблица 7.1

Характеристика промышленных противогазов

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
А	Коричневая	Пары органических соединений (бензин, керосин, ацетон, бензол, толуол, ксилол, сероуглерод, спирты, эфиры, галоидоорганические соединения, нитросоединения бензола и его гомологи, тетроэтилсвинец, фосфор- и хлорорганические ядохимикаты)

Продолжение табл. 7.1

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
В	Желтая	Кислые газы и пары (диоксида серы, гидрид серы, хлор, циан гидрида, окислы азота, хлориды водорода, фосген), фосфор- и хлорорганические ядохимикаты
Г	Черн о- желта я	Пары ртути и ртутьорганические ядохимикаты на основе этилмеркурхлорида
Е	Черная	Гидрид мышьяка и гидрид фосфора
К	Зеленая	Аммиак, а также пыль, дым, туман
КД	Серая, с бе- лой поло- сой	Аммиак и сероводород
БКФ	Защитная, с белой полосой	Кислые газы и пары, пары органических веществ, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пыль, дым, туман
СО	Белая	Оксид углерода
М	Красная	Оксид углерода в присутствии паров органических ве- ществ, кислые газы, аммиак, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пары органических соединений (бензин, киро- син, ацетон, бензол, ксилол, сероуглерод, толуол, спирты, эфиры, анилин, соединения бензола и его гомологи)
П-2У	Красная с белой поло- сой	Пары карбониллов никеля и железа, оксид углерода и со- путствующие аэрозоли
Б	Синяя	Бороводороды: диборан, пентаборан, этилентаборан, ди- этилдекаборан и их аэрозоли
УМ	Защитная	Пары и аэрозоли гептила, амил, самин, нитромеланж, амидол
ГФ	Голубая	Газообразный гексафторид урана, фтор, фтористый водо- род, радиоактивные аэрозоли

Пользование противогазом. Подобрать шлем-маску, ее обязательно примеряют. Новую лицевую часть предварительно необходимо протереть снаружи и внутри чистой тряпочкой или тампоном ваты, смоченным в воде, а клапаны выдоха продуть. Шлем-маску, бывшую в употреблении, следует отсоединить от коробки, протереть двухпроцентным раствором формалина или промыть водой с мылом и просушить.

При сборке противогаза шлем-маску берут в левую руку за клапанную коробку, а правой рукой ввинчивают до отказа фильтрующе-поглощающую коробку навинтованной горловиной в патрубок клапанной коробки шлем-маски.

При переводе противогаза в «боевое» положение необходимо:

- снять головной убор и зажать его между коленями или положить рядом;
- убрать волосы со лба и висков, женщинам следует гладко
- зачесать волосы назад, заколки и украшения снять (их попадание под обтюратор приведет к нарушению герметичности);
- вынуть шлем-маску из сумки, взять ее обеими руками за утолщенные края у нижней части так, чтобы большие пальцы рук были с наружной стороны, а остальные – внутри. Подвести шлем-маску к подбородку и резким движением рук вверх и назад натянуть ее на голову так, чтобы не было складок, а очки приšliсь против глаз (ГП-5, ГП-5М);
- для правильного надевания ГП-7 надо взять лицевую часть обеими руками за щечные лямки так, чтобы большие пальцы захватывали их изнутри. Задержать дыхание, закрыть глаза. Затем зафиксировать подбородок в нижнем углублении обтюратора и движением рук вверх и назад натянуть наголовник на голову и подтянуть до упора щечные лямки;
- сделать полный выдох (для удаления зараженного воздуха из-под шлем-маски, если он туда попал в момент надевания), открыть глаза и возобновить дыхание;
- надеть головной убор, застегнуть сумку и закрепить ее на туловище.

Дополнительные патроны

В результате развития химической и нефтехимической промышленности в производстве увеличено применение химических веществ. Многие из них по своим свойствам вредны для здоровья людей. Их называют сильнодействующими ядовитыми веществами (СДЯВ).

С целью расширения возможностей гражданских противогазов по защите от СДЯВ для них введены дополнительные патроны (ДПГ-1 и ДПГ-3).

ДПГ-1 в комплекте с противогазом защищает от двуокиси азота, метила хлористого, окиси углерода и окиси этилена. ДПГ-3 в комплекте с противогазом защищает от аммиака, хлора, диметиламина, нитробензола, сероводорода, сероуглерода, синильной кислоты, тетраэтилсвинца, фенола, фурфурола, хлористого водорода.

Внутри патрона ДПГ-1 два слоя шихты – специальный поглотитель и гопкалит. В ДПГ-3 только один слой поглотителя. Чтобы защитить шихту от увлажнения при хранении, горловины должны быть постоянно закрытыми: наружная – с навинченным колпачком с прокладкой, внутренняя – с ввернутой заглушкой [6].

Изолирующие противогазы. Изолирующие противогазы (ИП) являются специальными средствами защиты органов дыхания, глаз и кожи лица от любых вредных примесей, находящихся в воздухе независимо от их свойств и концентраций. Они используются также в тех случаях, когда невозможно применение фильтрующих противогазов, например при наличии в воздухе очень высоких концентраций отравляющих веществ или любой вредной примеси, кислорода менее 16 %, а также при работе под водой на небольшой глубине. Виды противогазов представлены на Рис. 7.5.



Рис. 9.5. Изолирующие противогазы

Изолирующие противогазы используют в случае, когда фильтрующие противогазы не обеспечивают должной степени защиты, или когда в воздухе недостаточно кислорода. Источником кислорода в таком противогазе служит патрон, снаряженный специальным веществом. Для нужд населения выпускают ИП-4М, ИП-4МК, ИП-5, ИП-6, ИП-7, ПДА- 3М.

Действие изолирующих противогазов основано на использовании химически связанного кислорода. Они имеют замкнутую маятниковую схему дыхания: выдыхаемый воздух попадает в регенеративный патрон, вещество которое содержится в нем поглощает углекислый газ и влагу, а взамен выделяет необходимый для дыхания кислород. Затем дыхательная смесь попадает в дыхательный мешок. При вдохе газовая смесь из дыхательного мешка снова проходит через регенеративный патрон, дополнительно очищается и поступает для дыхания. Материалы, из которых изготовлены противогазы, не оказывают отрицательного воздействия на организм. Применение незапотевающих пленок, а при отрицательных температурах и утеплительных манжет сохраняет прозрачность стекол в течение всего времени работы в противогазе при любой физической нагрузке. Гарантируется высокая эксплуатационная безопасность.

ИП-4М, ИП-4МК используют при авариях, стихийных бедствиях. ИП-5, ИП-6 предназначены для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека в непригодной для дыхания атмосфере независимо от состава и концентрации вредных веществ в воздухе, а также при недостатке или отсутствии кислорода. Портативный дыхательный аппарат (ПДА-3М) предназначен для экстренной защиты органов дыхания, зрения и кожи лица человека в непригодной для дыхания атмосфере при эвакуации из опасной зоны, выполнении аварийных работ, а также в ожидании помощи [5].

По принципу действия изолирующие противогазы делятся на две группы: ИП-5); КИП-8).

- противогазы на основе химически связанного кислорода (ИП-4,

- противогазы на основе сжатого кислорода или воздуха (КИП-7, Исходя из принципа защитного действия, основанного на полной изоляции органов дыхания от окружающей среды, время пребывания в изолирующем противогазе зависит не от физико-химических свойств ОВ,РВ, БС и их концентраций, а от запаса кислорода и характера выполняемой работы.

Противогазы шланговые изолирующие предназначены для защиты органов дыхания, глаз и кожи человека от любых вредных примесей в воздухе независимо от их концентрации, а также для работы в условиях недостатка кислорода в воздухе рабочей зоны. Комплекуются возду-хоподводящим шлангом длиной 10 или 20 м на барабане или в сумке.

Респираторы.

Респираторы представляют собой облегченное средство защиты органов дыхания от вредных газов, паров, аэрозолей и пыли (рис. 7.6).

Респираторы делятся на два типа. Первый – это респираторы, у которых полумаска и фильтрующий элемент одновременно служат и лицевой частью. Второй – это респираторы, которые очищают вдыхаемый воздух в фильтрующих патронах, присоединяемых к полумаске.



Рис. 7.6. Респираторы:

а – «Кама»; б – «Снежок»; в – У-2к; г – РП-КМ; д – Ф-62Ш; е – «Ас-тра 2»;
ж – РПГ-67; з – РУ-6 Ом

Респираторы по назначению делят на следующие виды [5]:

противоаэрозольные – для защиты органов дыхания от пыли, дыма, тумана, содержащих токсичные, бактериальные и другие опасные элементы, за счет пропускания вдыхаемого воздуха через фильтр из специального материала (респираторы «Лепесток», «Кама», «Снежок-П», У-2к, «Астра-2», Ф-62ш, РПА-1 и др.). Для фильтров в таких респираторах используют материалы типа ФП (фильтр Петрянова), обладающие высокой эластичностью, механической прочностью, большой пылеемкостью, стойкостью к химическим агрессивным веществам и прекрасными фильтрующими свойствами;

противогазовые – для защиты от паров и газов за счет фильтрования вдыхаемого воздуха через фильтрыпатроны различных марок, различающихся составом адсорбирующего материала. При этом фильтр-патрон каждой марки защищает от газов только определенного вида (РПГ-67);

универсальные – одновременно защищают от аэрозолей и отдельных видов газов и паров. Респираторы имеют противоаэрозольный фильтр и сменные противогазовые патроны разных марок (РУ-60м) или противогазовые фильтры из ионообменного волокнистого материала («Снежок-ГП», «Лепесток-Г»).

По конструктивному оформлению различают респираторы двух типов:

фильтрующие маски – их фильтрующий элемент одновременно служит лицевой частью;

патронные – самостоятельно выполненные лицевая часть и фильтрующий элемент.

По характеру вентилирования подмасочного пространства респираторы делят на бесклапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух проходит через фильтрующий элемент) и клапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух движется по различным каналам благодаря системе клапанов вдоха и выдоха).

В зависимости от срока службы различают респираторы одноразового (типа «Лепесток», «Кама», У-2к и т. п.) и многоразового пользования, в которых предусмотрена возможность замены фильтров или их многократная регенерация (Ф-62ш, «Астра-2», РУ-60м и др.).

Респираторы ШБ-1, «Лепесток-5», «Лепесток-40» и «Лепесток-200» одинаковы и представляют собой сплошную легкую полумаску-фильтр из материала ФПП (фильтрующее полотно Петрянова). В нерабочем состоянии респиратор имеет вид круга. Каркасность его в рабочем состоянии обеспечивают пластмассовая распорка и алюминиевая пластина. Плотное прилегание респиратора к лицу достигается при помощи резинового шнура, вшитого в периметр круга, а также благодаря электростатическому заряду материала ФПП, который образует полосу обтюрации. На голове респиратор крепят четырьмя шнурами.

Противоаэрозольные респираторы. В качестве фильтров в респираторах используют тонковолокнистые фильтровальные материалы. Наибольшее распространение получили полимерные фильтровальные материалы типа ФП (фильтр Петрянова) благодаря их хорошей эластичности, большой пылеемкости, а главное, высоким фильтрующим свойствам. Важной отличительной особенностью материалов ФП, изготовленных из перхлорвинила и других полимеров, обладающих изоляционными свойствами, является то, что они несут электростатические заряды, которые резко повышают эффективность улавливания аэрозолей и пыли.

Респиратор противопылевой У-2К (в гражданской обороне Р-2) обеспечивает защиту органов дыхания от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, радиоактивной и другой пыли, от некоторых бактериальных средств, дустов и порошкообразных удобрений, не выделяющих токсичные газы и пары. Использовать респиратор целесообразно при кратковременных работах небольшой интенсивности и запыленности воздуха. Не рекомендуется применять, когда в атмосфере сильная влага.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, наружный фильтр которой изготовлен из полиуретанового поропласта зеленого цвета, а внутренняя его часть – из тонкой воздухонепроницаемой полиэтиленовой пленки, в которую вмонтированы два клапана вдоха (рис. 9.7). Клапан выдоха размещен в передней части полумаски и защищен экраном. Между поропластом и полиэтиленовой пленкой расположен второй фильтрующий слой из материала ФП. Для плотного прилегания респиратора к лицу в области переносицы имеется носовой зажим – фигурная алюминиевая пластина. Респиратор крепится при помощи регулируемого оголовья.



Рис. 7.7. Респираторы У-2К (Р-2)

Респираторы У-2К изготавливаются трех ростов, которые обозначаются на внутренней подбородочной части полумаски. Определение роста производится путем измерения высоты лица человека, т. е. расстояния между точкой наибольшего углубления переносицы и самой нижней точкой подбородка. При величине измерения от 99 до 109 мм берут первый рост, от 109 до 119 мм – второй, от 119 и выше – третий.

Принцип действия респиратора основан на том, что при вдохе воздух последовательно проходит через фильтрующий полиуретановый слой маски, где очищается от грубодисперсной пыли, а затем через фильтрующий полимерный материал (ФП), в котором происходит очистка воздуха от тонкодисперсной пыли. После очистки вдыхаемый воздух через клапаны вдоха попадает в подмасочное пространство и в органы дыхания.

При выдохе воздух из подмасочного пространства выходит через клапан выдоха наружу.

Чтобы подогнать респиратор У-2К (Р-2), нужно:

- вынуть его из полиэтиленового мешочка и проверить его исправность, надеть полумаску на лицо так, чтобы подбородок и нос разместились внутри нее, одна нерастягивающаяся тесьма оголовья располагалась бы на теменной части головы, а другая – на затылочной;
- с помощью пряжек, имеющих на тесемках, отрегулировать их длину (для чего следует снять полумаску) таким образом, чтобы надетая полумаска плотно прилегала к лицу;
- на подогнанной надетой полумаске прижать концы носового зажима к носу.

Для проверки плотности прилегания респиратора к лицу необходимо плотно закрыть отверстия предохранительного экрана клапана выдоха ладонью и сделать легкий выдох. Если при этом по линии прилегания полумаски к лицу воздух не выходит, а лишь несколько раздувает респиратор, значит, он надет герметично. Если воздух проходит в области носа, то надо плотнее прижать концы носового зажима.

После снятия респиратора необходимо удалить пыль с наружной части полумаски с помощью щетки или вытряхиванием. Внутреннюю поверхность необходимо протереть и просушить, после чего респиратор необходимо вложить в полиэтиленовый пакет, который закрывается кольцом. Противоаэрозольный респиратор Ф-62Ш (однопатронный) – это средство индивидуальной защиты органов дыхания человека от различных видов промышленных пылей, он не защищает от газов, паров вредных веществ, аэрозолей органических соединений. Предназначен для защиты от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, табачной пыли, пыли порошкообразных удобрений и интоксикантов, а также других видов пыли, не выделяющих токсичных газов. Широко применяется шахтерами. Респиратор противоаэрозольный ФА-2002

предназначен для защиты лица, глаз, органов дыхания от аэрозолей различной природы (пыль, дым, туман) при их суммарной концентрации не более 15 ПДК и при концентрации кислорода не менее 17 % (Рис. 7.8).



Ф-62Ш

ФА-2002

Рис. 7.8. Респираторы противоаэрозольные Ф-62Ш и ФА-2002

Универсальные респираторы

Газопылезащитные респираторы занимают как бы промежуточное положение между респираторами противопылевыми и противогазами. Они легче, проще и удобнее в использовании, чем противогаз. Однако защищают только органы дыхания при концентрации вредных веществ не более 10–15 ПДК. Глаза, лицо остаются открытыми. Вместе с тем такие респираторы во многих случаях довольно надежно предохраняют человека в газовой и пылегазовой среде.

Респиратор газопылезащитный РУ-60М (рис. 7.9) защищает органы дыхания от воздействия вредных веществ, присутствующих в воздухе одновременно в виде паров, газов и аэрозолей (пыли, дыма, тумана).



Рис. 7.9. Респиратор газопылезащитный (РУ-60М)

Запрещается применять эти респираторы для защиты от высокотоксичных веществ типа синильной кислоты, мышьяковистого, фосфористого, цианистого

водорода, тетраэтилсвинца, низкомолекулярных углеводородов (метан, этан), а также от веществ, которые в парогазообразном состоянии могут проникнуть в организм через неповрежденную

кожу. Респиратор РУ-60М состоит из резиновой полумаски, обтюратора, поглощающих патронов (марки А, В, КД, Г), пластмассовых манжет с клапанами вдоха, клапана выдоха с предохранительным экраном и оголовья. С этими респираторами разрешается работать в средах, где концентрация пыли не более 100 мг/м³.

Противогазовые респираторы. Респиратор противогазовый (РПГ-67) – это средство индивидуальной защиты, применяется на предприятиях химической, металлургической и в других отраслях производства при концентрациях вредных веществ, не превышающих 10–15 ПДК.

Газодымозащитный комплект. Статистика показывает, что пожары с большим количеством человеческих жертв чаще всего встречаются в гостиницах, театрах, универсамах, ресторанах, вечерних клубах, учебных заведениях, на предприятиях, использующих легковоспламеняющиеся материалы.

Помещения быстро заполняются окисью углерода и другими токсическими газами. Люди гибнут от отравлений. Чтобы защитить органы дыхания и глаза от ядовитых газов, а голову человека от огня при выходе из горящего помещения, создан специальный газодымозащитный комплект (Рис. 9.10).



Рис. 9.10 Газодымозащитный комплект

Газодымозащитный комплект (ГДЗК) состоит из огнестойкого капюшона с прозрачной смотровой пленкой. В нижней части расположена эластичная манжета.

Внутри капюшона находится резиновая полумаска, в которой закреплен фильтрующе-сорбирующий патрон с клапаном вдоха. ГДЗК имеет регулируемое оголовье. При надевании следует широко растянуть эластичную манжету и накинуть капюшон на голову так, чтобы

манжета плотно облегла шею, при этом длинные волосы заправляются под капюшон. Очки можно не снимать. ГДЗК обеспечивает защиту от окиси углерода и цианистого водорода не менее 15 мин. Сопротивление при вдохе при 30 л/мин – не более 149 Па (15 мм вод. ст). Масса 800 г. Комплект хранится в картонной коробке в пакете из трехслойной полиэтиленовой пленки.

Капюшон «Феникс» предназначен для самостоятельной эвакуации из мест возможного отравления химически опасными и вредными веществами. Защищает от продуктов горения, аэрозолей, паров и газов, опасных химических веществ, образующихся при аварийных ситуациях (Рис. 9.11).

Самоспасатели СИП-1, СПИ-20, СПФ, «Экстремал ПРО» (Рис. 9.11) предназначены для индивидуальной защиты органов дыхания и зрения человека от вредного воздействия непригодной для дыхания, токсичной и задымленной газовой среды. Применяются при экстренной эвакуации людей в случае террористических актов, а также с мест пожара в общественных зданиях, на транспорте, из жилых домов и т. п.

а

б

в

г



Рис. 9.11. Самоспасатели.



а – СИП-1; б – СПИ-20; в – СПФ; г – капюшон «Феникс»; д – «Экстремал ПРО».

Самоспасатель противопожарный СИП-1 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и головы при самостоятельной эвакуации из помещений (гостиниц, высотных зданий, вагонов) во время пожара или при других аварийных ситуациях, от любых вредных веществ независимо от их концентрации и при недостатке кислорода в воздухе.

Порядок выполнения работы

1. Записать название и цель работы.
2. Законспектировать виды и назначение противогазов в виде табл. 7.3.

Таблица 7.3

Виды и назначение противогазов

Наименование и марка	Назначение, вид веществ, от которых защищает	Комплектация	Примечание*
Фильтрующие противогазы			
Гражданские			
ГП-5			
...			
... Т. Д.			

*В примечании указать, для каких возрастных групп предназначен, особенности марки и т. п.

3. Указать правила пользования противогазами.
4. Измерить при помощи гибкого сантиметра лицевую часть головы и подобрать для себя размер противогаза ГП-5 (ГП-7) по росту.

5. Измерить при помощи гибкого сантиметра высоту своего лица и подобрать размер респиратора У-2К.
6. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безопасность жизнедеятельности : учеб. для вузов / С. В. Белов [и др.] ; под общ. ред. С. В. Белова. – М.: Высш. шк., 2009. – 616 с.
2. Безопасность жизнедеятельности. Безопасность в чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера : учеб. пособие для вузов / В. А. Акимов [и др.]. – М. : Высш. шк., 2008. – 592 с.
3. Безопасность жизнедеятельности. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов / Я. Д. Вишняков [и др.]. – М. : Академия, 2008. – 304 с.
4. Емельянов В. М., Коханов В. Н., Некрасов П. А. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов. – М. : Академический проект : Трикста, 2005. – 480 с.
5. Вознесенский В. В. Средства защиты органов дыхания и кожи. Противогазы, респираторы и защитная одежда, основы их эксплуатации : учеб. пособие. – М. : Воен. знания, 2010. – 80 с.
6. Семенов С. Н., Лысенко В. П. Проведение занятий по гражданской обороне : метод. пособие. – М. : Высш. шк., 1990. – 96 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. ИНЖЕНЕРНАЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЗАЩИТА. ВИДЫ ЗАЩИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ И ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ В НИХ

Наименование работы: Действия населения при ЧС военного характера.

Цель: изучить действия населения при ЧС военного характера при угрозе применения радиационного, химического или биологического оружия, определить применяемые средства индивидуальной защиты, обосновать выбор защитных сооружений.

Время: 4 часа

Материально-техническое обеспечение: инструкционная карта, ручка, противогаз, респиратор, ватно-марлевая повязка

Методика выполнения

Задание:

1. Изучить индивидуальные средства защиты населения.
2. Изучить виды укрытий и правила поведения в убежищах и укрытиях.
3. Изучить применение СИЗ при угрозе применения химического и биологического оружия.
4. Отчет о работе оформить в виде плана-конспекта.
5. Заполнить таблицу.

№	ЧС	Опасность	Поражающие факторы	Основные средства защиты

Ядерное оружие – самое страшное оружие современности. Поражение людей при его применении зависит от того, где они находились в момент ядерного взрыва. Наиболее эффективным средством защиты от всех поражающих факторов ядерного оружия являются убежища (укрытия). Находясь в убежищах (укрытиях), необходимо постоянно держать в готовности к немедленному использованию средства индивидуальной защиты. Средства индивидуальной защиты подразделяют на средства индивидуальной защиты

органов дыхания (СИЗОД), средства индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), средства индивидуальной защиты кожи (СИЗК). К средствам защиты органов дыхания человека относятся противогазы (фильтрующие (рис.8.1.) и изолирующие (рис.2.)) и респираторы (рис.3.), а также простейшие средства защиты – противопыльные тканевые маски (ПТМ-1) (рис.4.) и ватно-марлевые повязки (рис.5.), изготавливаемые обычно силами самого населения.

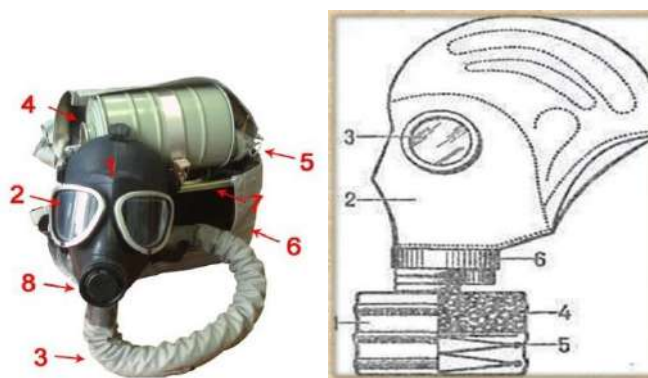


Рис. 8.1 Фильтрующий противогаз

1-фильтрующе-поглощающая коробка; 2-лицевая часть противогаза; 3-очковой узел; 4-шихга (обеспечивает поглощение паров и газов, и токсичных в-в); 5-ПАФ (противоаэрозольный фильтр); 6-клапанная коробка.



Рис.8.2. Изолирующий противогаз

1-лицевая часть, 2-очковый узел, 3-соединительная трубка, 4-регенераторный патрон, 5-пусковое устройство патрона, 6-дыхательный мешок, 7-каркас, 8-устройство для переговоров.

Порядок надевания противогаза:

1. По команде «Газы!» задержите дыхание, не вдыхая воздух.
2. Закрыть глаза.
3. Достать противогаз из противогазной сумки, левой рукой доставая противогаз, а правой держа сумку снизу.
4. Вынуть пробку-заглушку из противогазной коробки.

5. Перед надеванием противогаза расположить большие пальцы рук снаружи, а остальные внутри.

6. Приложить нижнюю часть шлем-маски на подбородок.

7. Резко натянуть противогаз на голову снизу-вверх.

8. Выдохнуть.

9. Необходимо, чтобы после не образовалось складок, очковый узел должен быть расположен на уровне глаз.

10. Перевести сумку на бок.

Снятие:

1. По команде «Отбой!» брать за фильтровальную коробку и, потянув сверху-вниз, снять его.

2. Убрать противогаз в противогазную сумку.

3. Застегнуть пуговицы.

Таблица 8.0

Подбор размера противогаза

Обхват головы	Размер противогаза
До 63	0
63,5-65,5	1
66-68	2
68,5-70,5	3
71 и более	4

В качестве защиты органов дыхания от радиоактивной пыли и различных вредных аэрозолей могут быть использованы респираторы. Они просты в применении, малогабаритны и рассчитаны на массовое применение. Широко используются при выполнении работ, связанных с пылеобразованием.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, снабженную двумя клапанами вдоха, клапаном выхода (с предохранительным экраном), оголовьем, состоящим из эластичных растягивающихся (и не растягивающихся) тесемок, и носовым зажимом. Работать в нем можно до 12 ч

Респираторы Р-2 изготавливаются трех ростов -1,2 и 3-го, которые обозначаются внутренней подбородочной части полумаски.

Простейшими средствами защиты органов дыхания человека от радиоактивной пыли и биологических средств (при действиях во вторичном облаке) являются противопыльная тканевая маска ПТМ-1 (рис.8.3).

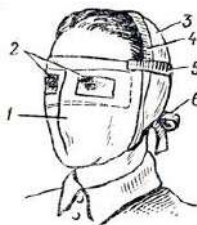


Рис.8.3. Противопыльная тканевая маска

1-корпус маски, 2-смотровые отверстия, 3-крепления, 4-резиновая тесьма, 5-поперечная резинка, 6-завязки.

И ватно-марлевая повязка (рис.8.4.) От ОВ (отравляющих веществ) они не защищают. Их изготавливает преимущественно само население. Маска состоит из корпуса и крепления. Корпус шьется из двух одинаковых по форме тканевых фильтрующих половинок, собранных на 4-5 слоев. На нем имеются смотровые отверстия со вставленными стеклами. Крепится маска на голове при помощи вставленной резинки и двух завязок.

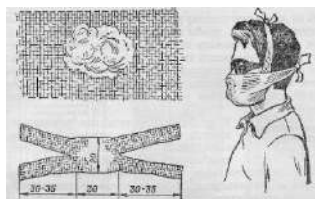


Рис.8.4. Ватно-марлевая повязка

Ватно-марлевая повязка изготавливается из куска марли размером 100 x50 см и ваты. На марлю накладывают слой ваты толщиной 2-3 см, длиной 30 см, шириной 20 см. Марлю с обеих сторон загибают и накладывают на вату. Концы марли разрезают на 30-35 см с каждой стороны, чтобы образовались две пары завязок. Марлевые повязки делают из 10-12 слоев марли. Они шьются также в виде маски, закрывающей лицо или только подбородок, нос и рот. Для защиты глаз используются противопыльные очки.



Рис.8.5.Защитные очки

К средствам индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), в первую очередь, относятся защитные очки, предохраняющие от пыли, твердых частиц, химически неагрессивных жидкостей и газов, от слепящего яркого света, ультрафиолетового, инфракрасного излучения и от сочетания излучений указанных видов с воздействия летящих твердых частиц, а так же очки защищающие от лазерного излучения и других опасных факторов.

К средствам индивидуальной защиты кожи (СИЗК) относят защитную одежду фильтрующего и изолирующего типа. К изолирующим средствам защиты кожи относятся общевойсковой комплексный защитный костюм (ОКЗК), общевойсковой защитный комплекс (ОЗК) (рис.8.6.), легкий защитный костюм (Л-1) , защитный комбинезон или костюм.



Рис. 8.6 Защитный костюм

Общевойсковой комплексный защитный костюм (ОЗК) предназначен для комплексной защиты от светового излучения и радиоактивной пыли, паров и аэрозолей ОВ и биологических аэрозолей. Он состоит из пропитанных специальным составом куртки, брюк, защитного белья, головного убора, подшлемника.

Простейшие средства защиты кожи применяются при отсутствии табельных средств. Может быть использована прежде всего производственная одежда (спецовка) – куртка и брюки, комбинезоны, халаты с капюшоном, сшитые из брезента, огнезащитной или прорезиненной ткани, грубого сукна. Они способны не только защищать от попадания на кожу людей радиоактивных веществ и биологических средств, но и не пропускать в течение некоторого времени капельножидких отравляющих веществ.

Обычная одежда, обработанная специальной пропиткой, может защищать и от паров отравляющих веществ. В качестве пропитки используют моющие средства или мыльно-масляную эмульсию. Основные представители неионогенных моющих средств – ОП-7 и ОП-10 (ОП-7иОП-10 - вспомогательные вещества, представляющие собой продукты обработки смеси моно- и диалкилфенолов окисью этилена. Вспомогательные вещества ОП-7 и ОП-10 относятся к неионогенным поверхностно-активным веществам. Применяются в качестве смачивающих, эмульгирующих, стабилизирующих поверхностно-активных веществ. Хорошо растворимы в воде). Синтетические моющие средства в чистом виде используются редко и служат исходным материалом для приготовления моющих средств, которые состоят из моющего вещества, активных добавок (соли фосфорной кислоты, сульфат натрия, метасиликат натрия и др.) и веществ, предохраняющих кожу (карбоксиметилцеллюлоза, дермоланы – высокомолекулярные циклические соединения, содержащие группы SO_2, NH_4 , далгоны – конденсированные фосфаты).

Придать повседневной одежде защитные от отравляющих веществ свойства можно, пропитав ее раствором, который может быть приготовлен в домашних условиях. 2,5-3 л раствора, необходимого для пропитки одного комплекта одежды, можно получить если растворить 250-300 г измельченного хозяйственного мыла в 2-3 л горячей воды ($60-70^{\circ}\text{C}$), добавить в раствор 0,5 л минерального (машинного) и другого масла и, подогревая, перемешивать раствор до получения однородной мыльно-масляной эмульсии. Одежду помещают в большую емкость (бак, ведро) и заливают раствором. Пропитанная одежда отжимается и просушивается (утюжке не подлежит).

В летнюю жаркую погоду необходимо соблюдать установленные сроки работы в защитной одежде. Зимой для предупреждения обмороживания следует надевать ее на ватник, использовать подшлемник, теплые портянки, в резиновые сапоги подкладывать теплые стельки, защитные перчатки одевать поверх обычных шерстяных или фланелевых. Обычно длительность пребывания людей в убежищах зависит от степени радиоактивного заражения местности. Если убежище находится в зоне заражения с уровнями радиации от 8 до 80 Р/ч через один час после ядерного взрыва, то время пребывания в нем укрываемых людей составит от нескольких часов до одних суток (рис.8.7).



Рис.8. 7. Ватно-марлевая повязка

В зоне заражения с уровнями радиации от 80 до 240 Р/ч нахождение людей в защитном сооружении увеличивается до 3 сут. В зоне заражения с уровнем радиации 240 Р/ч и выше это время составит 3 сут. и более. По истечении указанных сроков из убежищ (укрытий) можно перейти в жилые помещения. В течение последующих 1-4 сут. (в зависимости от уровней радиации в зонах

заражения) из таких помещений можно периодически выходить наружу, но не более чем на 3-4 ч в сутки.

В условиях сухой и ветреной погоды, когда возможно пылеобразование, при выходе из помещений следует использовать СИЗОД. Чтобы благополучно пережить указанные сроки пребывания в убежищах, необходимо иметь запасы продуктов питания (не менее чем на 4 сут. (крупы, сахар и соль, галеты, сухари, консервы, макаронные изделия, мука, сухофрукты, шоколад, подсолнечное масло, мед, варенье, уксус, вода)), питьевой воды (из расчета 3 л на человека в сутки), а также предметы первой необходимости и медикаменты.

Если в результате ядерного взрыва убежище (укрытие) окажется поврежденным, принимают меры к быстрому выходу из него, надев СИЗОД. Если основным и ли запасным выходом воспользоваться невозможно, приступают к расчистке одного из заваленных выходов или к проделыванию выхода. После выхода из очага ядерного поражения (зоны радиоактивного заражения) необходимо провести частичную дезактивацию и санитарную обработку, т.е. удалить радиоактивную пыль. При частичной дезактивации следует осторожно снять одежду, ни в коем случае не снимая СИЗОД. Встав спиной к ветру, вытряхнуть ее, развесить одежду на перекладине или веревке и обмести с нее пыль сверху вниз с помощью щетки или веника. Одежду можно выколачивать и палкой.

После этого следует продезактивировать обувь: протереть тряпками и ветошью, смоченными водой, очистить веником или щеткой. Резиновую обувь можно мыть. Противогаз дезактивируют в особой последовательности. Фильтрующе-поглощающую коробку вынимают из сумки, сумку тщательно вытряхивают. Затем тампоном, смоченным мыльной воде, моющим раствором или жидкостью из противохимического пакета обрабатывают фильтрующе-поглощающую коробку, соединительную трубку и наружную поверхность шлема-маски (маски). Лишь после этого противогаз снимают.

Противопыльные тканевые маски при дезактивации тщательно вытряхивают, чистят щетками, при возможности полощут или стирают в воде. Зараженные ватно-марлевые повязки сжигают. При частичной санитарной обработке открытые участки тела: руки, лицо, шею, глаза обмывают незараженной водой. Нос, рот и горло полощут. Важно, чтобы при обмывке лица зараженная вода не попала в глаза, рот и нос. При недостатке воды обработку проводят путем многократного протирания участков тела тампонами из марли (ваты, пакли, ветоши), смоченными незараженной водой. Протирание следует проводить сверху вниз. каждый раз переворачивая тампон чистой стороной. Зимой может использоваться незараженный снег.

Летом санитарную обработку можно организовать в реке или другом проточном водоеме. Частичная дезактивация и санитарная обработка, проводимые в одноразовом порядке, не всегда гарантируют полное удаление радиоактивной пыли. Потому после их проведения обязательно проводится дозиметрический контроль. Если заражение одежды и тела окажется выше допустимой нормы, частичные дезактивацию и санитарную обработку повторяют. В необходимых случаях проводится полная санитарная обработка. Своевременно проведенные частичные дезактивация и санитарная обработка могут полностью предотвратить или сильно снизить степень поражения людей радиоактивными веществами.

Если люди во время ядерного взрыва находятся вне убежища укрытия, следует использовать естественные ближайшие укрытия (рис.10). Если таких укрытий нет, надо повернуться к взрыву спиной, лечь на землю лицом вниз, руки спрятать под себя. Через 15-20 с. после взрыва, когда пройдет ударная волна, следует встать и немедленно надеть противогаз, респиратор или какое-либо другое СИЗОД. В случае отсутствия специальных средств следует закрыть рот и нос платком, шарфом или плотным материалом.

Задача состоит в том, чтобы исключить попадание внутрь организма радиоактивных веществ. Их поражающее действие бывает значительным в

течение длительного времени, поскольку выведение их из организма происходит медленно. Далее необходимо стряхнуть осевшую на одежду и обувь пыль, надеть имеющиеся средства защиты кожи.

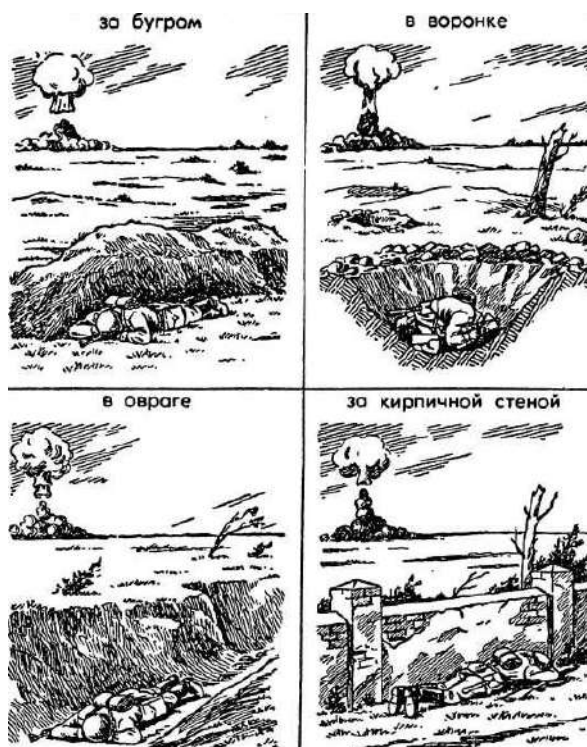


Рис 8.8 Естественные укрытия при внезапном ядерном взрыве

Для этого можно использовать имеющиеся одежду и обувь. Затем следует побыстрее покинуть очаг поражения или укрыться в ближайшем защитном сооружении.

Оставаться на зараженной радиоактивными веществами местности вне убежищ (укрытий), несмотря на использование средств индивидуальной защиты, опасно. Это сопряжено с возможностью облучения и, как следствие, развития лучевой болезни. В целях уменьшения возможности поражения радиоактивными веществами в зонах заражения запрещается принимать пищу, пить и курить. Приготовление пищи должно вестись на незараженной местности или, в крайнем случае, на местности, где уровень радиации не превышает 1 Р/ч. При выходе из очага поражения необходимо учитывать, что в результате ядерных взрывов разрушаются здания, сети коммунального хозяйства. При этом отдельные элементы зданий могут обрушиться через

некоторое время после взрыва. Продвигаться надо посередине улицы, стараясь возможно быстрее попасть в безопасное место. Нельзя трогать электропровода. Направление движения из очага поражения следует выбирать, ориентируясь на знаки ограждения, расставленные разведкой гражданской обороны. Они ведут в сторону снижения уровней радиации. Двигаясь по зараженной территории, надо стараться не поднимать пыли, обходить лужи, не создавать брызг.

В результате применения химического оружия возникают очаги химического поражения-территории, в пределах которой в результате воздействия химического оружия произошли массовые поражения людей и сельскохозяйственных животных. Размеры очага зависят от масштаба и способа применения БТХВ (боевые токсичные химические вещества - это химические соединения, которые способны поражать людей и животных на больших площадях, проникать в различные сооружения, заражать местность и водоемы), его типа метеорологических условий, рельефа местности. Особенно опасны стойкие БТХВ нервнопаралитического действия. Их пары распространяются по ветру на довольно большое расстояние (15-25 км и более). Поэтому люди и животные могут быть поражены ими не только в районе применения химических боеприпасов, но и далеко за его пределами. Длительность поражающего действия БТХВ тем меньше, чем сильнее ветер и восходящие потоки воздуха. В лесах, парках, оврагах, на узких улицах они сохраняются дольше, чем на открытой местности. Современные отравляющие вещества обладают чрезвычайно высокой токсичностью.

При обнаружении признаков применения противником отравляющих веществ, далее ОВ (по сигналу «Химическая тревога») надо срочно надеть противогаз, а в случае необходимости - средства защиты кожи. Если поблизости имеется убежище, нужно укрыться в нем. Перед тем как войти в убежище, следует снять использованные средства защиты кожи и верхнюю одежду и оставить их в тамбуре убежища. Эта мера предосторожности исключает занос ОВ в убежище. Противогаз снимают после входа в убежище.

При пользовании укрытием, например, подвалом, не следует забывать, что оно может служить защитой лишь от попадания на кожные покровы и одежду капельножидких ОВ. Однако оно не защищает от паров или аэрозолей отравляющих веществ, находящихся в воздухе. Находясь в таких укрытиях, при наружном заражении обязательно надо воспользоваться противогазом. Находиться в убежище (укрытии) следует до получения распоряжения на выход из него. Когда такое распоряжение поступит, необходимо надеть требуемые средства индивидуальной защиты - противогазы и средства защиты кожи и выйти за пределы очага поражения по направлениям, обозначенным специальными указателями. Если нет ни указателей, ни постов, то двигаться следует перпендикулярно направлению ветра.

На зараженной ОВ территории надо двигаться быстро, но не пыль (брызги). Нельзя прислоняться к зданиям и прикасаться к окружающим предметам. Не следует наступать на видимые капли и мазки ОВ. На зараженной территории запрещается снимать противогазы и другие средства защиты. Особо осторожно нужно двигаться через парки, сады, огороды и поля. На листьях и ветках растений могут находиться осевшие капли ОВ, при прикосновении к ним можно заразить одежду и обувь, что может привести к поражению.

По возможности следует избегать движения оврагами и лощинами, через луга и болота, в этих местах возможен длительный застой паров ОВ. В городах пары ОВ могут застаиваться в замкнутых кварталах, парках, а также в подъездах и на чердаках домов. Зараженное облако в городе распространяется на наибольшие расстояния по улицам, тоннелям, трубопроводам.

ОВ на кожных покровах, одежде, обуви или средствах индивидуальной защиты необходимо немедленно снять их тампонами из марли или ваты; если таких тампонов нет, капли ОВ можно снять тампонами из бумаги или ветоши. Пораженные места следует обработать раствором из противохимического пакета или тщательно промыть теплой водой с мылом. После выхода из очага

химического поражения немедленно проводится полная санитарная обработка. Если это невозможно, проводятся частичные дегазация и санитарная обработка.

Очагом биологического поражения считаются территории, подвергшиеся непосредственному воздействию бактериальных (биологических) средств, создающих источник распространения инфекционных заболеваний. Заражение людей и животных происходит в результате вдыхания зараженного воздуха, попадания микробов или токсинов на слизистую оболочку и поврежденную кожу, употребления в пищу зараженных продуктов питания и воды.

Причиной заражения могут быть укусы зараженных насекомых и клещей, соприкосновения с зараженными предметами, ранения осколками боеприпасов, снаряженных БС (биологические средства поражения - общее название болезнетворных микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности, предназначенных для использования в системах биологического оружия с целью поражения людей, животных и растений). Заражение возможно также в результате непосредственного общения с больными людьми (животными). Ряд заболеваний быстро передается от больных людей к здоровым и вызывает эпидемии (чума, холера, тиф, грипп и др.). К основным средствам защиты населения от биологического оружия относятся вакциносыывороточные препараты, антибиотики, сульфамидные и другие лекарственные вещества, используемые для специальной и экстренной профилактики инфекционных болезней.

Употребимы такие средства индивидуальной и коллективной защиты. Своевременное и правильное применение средств индивидуальной защиты и защитных сооружений предохранит от попадания БС в органы дыхания, на кожные покровы и одежду. Необходимо строгое соблюдение правил личной гигиены и санитарно-гигиенических требований к питанию и водоснабжению населения. Приготовление и прием пищи должны исключать возможность ее заражения бактериальными средствами. Посуду необходимо мыть дезинфицирующими растворами или обрабатывать кипячением. В случае

применения противником биологического оружия возможно возникновение значительного количества инфекционных заболеваний.

Основными формами борьбы с эпидемиями являются обсервация и карантин. Делается это в тех случаях, когда примененные возбудители болезней относятся к особо опасным (чума, холера и др.). Карантинный режим предусматривает полную изоляцию очага поражения от окружающего населения. Это наиболее эффективный способ противодействия распространению инфекционных заболеваний. На внешних границах зоны карантина устанавливается вооруженная охрана, выход людей, вывод животных и вывоз имущества запрещаются. Транзитный проезд транспорта через очаги поражения запрещается. Объекты экономики переходят на особый режим работы со строгим выполнением противоэпидемических требований. Рабочие смены разбиваются на отдельные группы как можно более малочисленные по составу. Контакт между ними сокращается до минимума. Питание и отдых рабочих и служащих организуются по группам в специально отведенных для этого помещениях. Работа учебных заведений, зрелищных учреждений, рынков и т.д. прекращается. Людям не разрешается без крайней необходимости выходить из своих квартир. Продукты питания, вода и предметы первой необходимости доставляются им специальными командами.

При выполнении срочных работ вне зданий люди должны быть обязательно в средствах индивидуальной защиты. Если установленный вид возбудителя не относится к группе особо опасных, вместо карантина применяется обсервация. Она предусматривает медицинское наблюдение за очагом поражения и проведение необходимых лечебно-профилактических мероприятий. Изоляционно-ограничительные меры при обсервации менее строгие: организуются дезинфекция, дезинсекция и дератизация.

Дезинфекция имеет целью обеззараживание объектов внешней среды, которые необходимы для нормальной деятельности и безопасного нахождения людей. Для дезинфекции применяются растворы хлорной извести и хлорамина,

лизол, формалин, могут использоваться горячая вода (с мылом или содой) и пар.

Дезинсекция и дератизация-это мероприятия, связанные соответственно с уничтожением насекомых и истреблением грызунов, которые являются переносчиками инфекционных заболеваний. Для уничтожения насекомых применяют физические (кипячение, проглаживание накалившим утюгом и др.), химические (применение дезинсектирующих средств) и комбинированные способы.

Истребление грызунов в большинстве случаев проводят с помощью механических приспособлений (ловушек различных типов) и химических препаратов. После проведения дезинфекции, дезинсекции и дератизации проводится полная санитарная обработка лиц, принимавших участие в осуществлении названных мероприятий. При необходимости организуется санитарная обработка и остального населения.

Контрольные вопросы

1. Перечислите СИЗОД.
2. Перечислите СИЗ кожи.
3. Назовите порядок изготовления ВМП.
4. При каких опасностях используются индивидуальные средства защиты?
5. Что является основным средством защиты при угрозе применения ядерного оружия?
6. Что относится к основным средствам защиты населения от биологического оружия?
7. Какие индивидуальные средства защиты применяются при химической угрозе?
8. Какие действия предполагает санитарная обработка?
9. В чем отличие дезинфекции от дезинсекции?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косолапова Н.В. Основы безопасности жизнедеятельности: учебник / Н.В. Косолапова, Н.А. Прокопенко. – 3-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013. – 320 с.: ил.
2. Безопасности жизнедеятельности: учебник / Е.А. Арустамов. – 9-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013 с.: ис.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы	3
Требования к оформлению теста	3
Содержание теста.....	3
Содержание опроса.....	9
Выполнение работы над ошибками.....	11

Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращения, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений

		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения. Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем

		физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) равной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддерживать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма

	как	Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышением частоты шагов. 6. Прыжки. 7. Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2, 1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2, 3, 1, 4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4, 2, 3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6. Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленном суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Критерии оценивания теста

Оценка за тест определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат теста

Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.
24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.

25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.
86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.

- 87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
- 88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
- 89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
- 90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
- 91. Студенческие спортивные соревнования.
- 92. Студенческие спортивные организации.
- 93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Содержание контрольной работы.....	3
Выполнение работы над ошибками.....	9
Критерии оценивания контрольной работы	9
Образец титульного листа	10

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен 1 вариант контрольной работы.

Содержание контрольной работы

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращения, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность

		В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) равной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддерживать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений

	организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышением частоты шагов. 6. Прыжки. 7. Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2, 1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2, 3, 1, 4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4, 2, 3, 1

27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходить к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6. Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленном суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное

		действие Г) предпочтения учителя
42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

**по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ**

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

**Екатеринбург
2018**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине

**ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И
СПОРТУ**

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Содержание контрольной работы.....	3
Выполнение работы над ошибками.....	10
Критерии оценивания контрольной работы	10
Образец титульного листа	11

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Элективные курсы по физической культуре и спорту» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «элективные курсы по физической культуре и спорту» представлено 2 варианта контрольной работы.

Содержание контрольной работы

Вопросы для групповой дискуссии

1. Что можно отнести к средствам физического воспитания?
2. Влияние климатогеографического фактора на здоровье и работоспособность человека
3. Чем отличается спорт от физической культуры?
4. Что мы относим к материальным ценностям физической культуры, а что – к духовным?
5. В чем состоит взаимосвязь физической и умственной деятельности человека?
6. Причины возникновения таких явлений как гипокинезия и гиподинамия
7. Для чего нужна адаптивная физическая культура?
8. При выборе вида спорта на какие аспекты и характеристики необходимо обратить основное внимание.

Контрольная работа №1

Вариант 1

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. Часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности – это:
а) физическая культура; б) спорт; в) туризм; г) физическое развитие.
2. Физическое воспитание – это:
а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств.

3. Чем спорт отличается от физической культуры:

а) наличием специального оборудования; б) присутствием зрителей; в) наличием соревновательного момента; г) большой физической нагрузкой.

4. Какой из ниже перечисленных принципов не относится к основным принципам физического воспитания:

а) сознательности и активности; б) наглядности; в) последовательности; г) систематичности;

5. Под физическим развитием понимается:

а) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни;
б) размеры мускулатуры, форма тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность;
в) процесс совершенствования физических качеств, при выполнении физических упражнений;
г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недугов;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

2. Состояние здоровья обусловлено:

а) резервными возможностями организма; б) образом жизни;
в) уровнем здравоохранения; г) отсутствием болезней.

3. Что не относится к внешним факторам, влияющим на человека:

а) природные факторы; б) факторы социальной среды; в) генетические факторы;
г) биологические факторы.

4. Сколько времени необходимо нормальному человеку для ночного сна:

а) 5 – 6 часов; б) 6 – 7 часов; в) 7 – 8 часов; г) 8 – 9 часов.

5. К активному отдыху относится:

а) сон; б) отдых сидя; в) занятия двигательной деятельностью; г) умственная деятельность.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическими упражнениями называются:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Занятия физическими упражнениями отличаются от трудовых действий:

а) интенсивностью; б) задачами; в) местом проведения; г) все ответы верны.

3. Физические упражнения являются:

а) принципом физического воспитания; б) методом физического воспитания;
в) средством физического воспитания; г) функцией физического воспитания.

4. Что не относится к методам физического воспитания:

а) игровой; б) регламентированного упражнения; в) словесный и сенсорный;
г) самостоятельный.

5. Метод в физической культуре – это

а) основное положение, определяющее содержание учебного процесса по физической культуре;
б) руководящее положение, раскрывающее принципы физической культуры;
в) конкретная причина, заставляющая человека выполнять физические упражнения;
г) способ применения физических упражнений.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Физическая подготовка – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

2. К основным физическим качествам относятся:

- а) рост, вес, объем бицепсов, становая сила; б) бег, прыжки, метания, лазания;
- в) сила, выносливость, быстрота, ловкость, гибкость; г) взрывная сила, прыгучесть, меткость.

3. Различают гибкость:

- а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
- г) простую и сложную.

4. Какие виды спорта развивают преимущественно выносливость:

- а) спортивные единоборства; б) циклические; в) спортивные игры; г) ациклические.

5. Скоростно-силовые качества преимущественно развиваются:

- а) в тяжелой атлетике; б) в акробатике; в) в конькобежном спорте; г) в лыжном спорте.

Вариант 2

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. На что преимущественно влияют занятия по физической культуре:

- а) на интеллектуальные способности;
- б) на удовлетворение социальных потребностей;
- в) на воспитание лидерских качеств;
- г) на полноценное физическое развитие.

2. Физическая культура – это:

- а) часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности;
- б) часть науки о природе двигательной деятельности человека
- в) вид воспитательного процесса, специфика которого заключена в обучении двигательным актам и управлением развитием и совершенствованием физических качеств человека;
- г) процесс физического образования и воспитания, выражающий высокую степень развития индивидуальных физических способностей.

3. Что не относится к компонентам физической культуры:

- а) физическое развитие; б) спорт высших достижений; в) оздоровительно-реабилитационная физическая культура;
- г) гигиеническая физическая культура.

4. Выбрать правильное определение термина «Физическое развитие»:

- а) физическое развитие – это педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
- б) физическое развитие – это приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
- в) физическое развитие – это биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
- г) физическое развитие – это процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

5. Теоретический материал учебного предмета «Физическая культура и спорт» в высших учебных заведениях включает в себя:

- а) фундаментальные знания общетеоретического характера;
- б) инструктивно-методические знания;
- в) знания о правилах выполнения двигательных действий;
- г) все вышеперечисленное.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Что понимается под закаливанием:

- а) купание в холодной воде и хождение босиком;
- б) приспособление организма к воздействиям внешней среды;
- в) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми;
- г) укрепление здоровья.

2. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

- а) естественное состояние организма без болезней и недугов;
- б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
- в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
- г) все перечисленное.

3. Какое понятие не относится к двигательной активности человека:

- а) гипоксия; б) гиподинамия; в) гипокинезия; г) гипердинамия.

4. Какая из перечисленных функций не относится к функции кожи:

- а) защита внутренней среды организма; б) терморегуляция; в) выделение из организма продуктов обмена веществ;
- г) звукоизоляция.

5. Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому что:

- а) обеспечивает ритмичность работы организма;

- б) позволяет правильно планировать дела в течение дня;
- в) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня;
- г) позволяет избегать неоправданных физических напряжений.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическое упражнение - это:

- а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
- б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
- в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
- г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Положительное влияние физических упражнений на развитие функциональных возможностей организма будет зависеть:

- а) от технической и физической подготовленности занимающихся;
- б) от особенностей реакций систем организма в ответ на выполняемые упражнения;
- г) от состояния здоровья и самочувствия занимающихся во время выполнения упражнений;
- г) от величины физической нагрузки и степени напряжения в работе определенных мышечных групп.

3. Что не относится к средствам физического воспитания:

- а) физические упражнения;
- б) подвижные игры;
- в) соревнования;
- в) спортивные игры.

4. Что относится к методическим принципам физического воспитания:

- а) сознательность и активность;
- б) наглядность и доступность;
- в) систематичность и динамичность;
- г) все вышеперечисленное.

5. Регулярные занятия физическими упражнениями способствует повышению работоспособности, потому что:

- а) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости;
- б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации;
- в) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения;
- г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнять больший объем физической работы за отведенный отрезок времени.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Степень владения техникой действий, при которой повышена концентрация внимания на составные операции (части), наблюдается нестабильное решение двигательной задачи – это

- а) двигательное умение; в) массовый спорт; в) двигательный навык;
- г) спорт высших достижений.

2. Для воспитания быстроты используются:

- а) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции;
- б) подвижные и спортивные игры;
- в) упражнения на быстроту реакции и частоту движений;
- г) двигательные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью.

3. Различают два вида выносливости:

- а) абсолютная и относительная; б) общая и специальная; в) активная и пассивная;
- г) динамическую и статическую.

4. Процесс воспитания физических качеств, обеспечивающих преимущественное развитие тех двигательных способностей, которые необходимы для конкретной спортивной дисциплины - это

- а) общая физическая подготовка; б) двигательное умение; в) специальная физическая подготовка; г) двигательный навык.

5. Различают силу:

- а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
- г) статическую и динамическую.

Контрольная работа №2

Вариант 1

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. В комплекс утренней гимнастики следует включать:

- а) упражнения с отягощением; б) упражнения статического характера;
- в) упражнения на гибкость и дыхательные упражнения; г) упражнения на выносливость.
- 2. К объективным показателям самоконтроля относится:
 - а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.
- 3. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:
 - а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.
- 4. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:
 - а) после приема пищи; б) после сна натошак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. Регулярные занятия доступным видом спорта, участия в соревнованиях с целью укрепления здоровья, коррекции физического развития и телосложения, активного отдыха, достижение физического совершенствования – это:
 - а) спорт высших достижений;
 - б) лечебная физическая культура;
 - в) профессионально-прикладная физическая культура;
 - г) массовый спорт.
2. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает гибкость и ловкость:
 - а) фехтование;
 - б) баскетбол;
 - в) фигурное катание;
 - г) художественная гимнастика.
3. Количество игровых одной команды в волейболе на площадке:
 - а) 7; б) 6; в) 5; г) 8.
4. Как осуществляется контроль за влиянием физических нагрузок на организм во время занятий физическими упражнениями:
 - а) по частоте дыхания;
 - б) по частоте сердечно-сосудистых сокращений;
 - в) по объему выполненной работы.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Степень владения техникой действия, при которой управление движением происходит автоматически, и действия отличаются надежностью – это:
 - а) двигательное умение;
 - б) массовый спорт;
 - в) двигательный навык;
 - г) спорт высших достижений.
2. Как дозируются упражнения на гибкость:
 - а) до появления пота;
 - б) до снижения амплитуды движений;
 - в) по 12-16 циклов движений;
 - г) до появления болевых ощущений.
3. При воспитании силы применяются специальные упражнения с отягощениями. Их отличительная особенность заключается в том, что:
 - а) в качестве отягощения используется собственный вес человека;
 - б) они выполняются до утомления;
 - в) они вызывают значительное напряжение мышц;
 - г) они выполняются медленно.
4. В каком из перечисленных видов спорта преимущественно развивается выносливость:
 - а) в фигурном катании;
 - б) в пауэрлифтинге;
 - в) в художественной гимнастике;
 - г) в лыжном спорте.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:
 - а) обеспечивают усиленную работу мышц;
 - б) обеспечивают выполнение большого объема мышечной работы с разной интенсивностью;
 - в) обеспечивают усиленную работу систем дыхания и кровообращения;
 - г) обеспечивают усиленную работу системы энергообеспечения.
2. Меры профилактики переутомления:

- а) посидеть 3-4 минуты;
- б) сменить вид деятельности;
- в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
- г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

3. При нагрузке средней интенсивности частота пульса достигает:

- а) 100 – 130 уд/мин;
- б) 130 – 150 уд/мин;
- в) 150 – 170 уд/мин;
- г) более 170 уд/мин

4. Что называется «разминкой», проводимой в подготовительной части занятия:

- а) чередование легких и трудных общеразвивающих упражнений;
- б) чередование беговых и общеразвивающих упражнений;
- в) подготовка организма к предстоящей работе;
- г) чередование беговых упражнений и ходьбы.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

Специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности – это:

- а) спорт высших достижений;
- б) лечебная физическая культура;
- в) производственная физическая культура;
- г) массовый спорт.

1. ППФП строится на основе и в единстве с:

- а) физической подготовкой; б) технической подготовкой; в) тактической подготовкой;
- г) психологической подготовкой.

3. Какая из нижеперечисленных задач не является задачей ППФП:

- а) развитие физических способностей, специфических для данной профессии;
- б) формирование профессионально-прикладных сенсорных умений и навыков;
- в) сообщение специальных знаний для успешного освоения практических навыков трудовой деятельности;
- г) повышение функциональной устойчивости организма к неблагоприятному воздействию факторов окружающей среды.

4. Что не является формой занятий по ППФП:

- а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Вариант 2

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. Определение повседневных изменений в подготовке занимающихся – это:

- а) педагогический поэтапный контроль;
- б) педагогический текущий контроль;
- в) педагогический оперативный контроль;
- г) педагогический двигательный контроль.

1. В комплекс утренней гимнастики не рекомендуется включать:

- а) упражнения на гибкость;
- б) дыхательные упражнения;
- в) упражнения с отягощением;
- г) упражнения для всех групп мышц.

2. Самостоятельные тренировочные занятия не рекомендуется выполнять:

- а) за час до приема пищи;
- б) после сна натошак;
- в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда;
- г) за 3 часа до отхода ко сну.

4. Дневник самоконтроля нужен для:

- а) коррекции содержания и методики занятий физическими упражнениями;
- б) контроля родителей;
- в) лично спортсмену;
- г) лично тренеру.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. К циклическим видам спорта не относится:

- а) волейбол;
- б) стайерский бег;
- в) плавание;

г) спортивная ходьба.

2. Какой из перечисленных видов спорта преимущественно развивает координацию движений:

а) спортивная гимнастика;

б) лыжный спорт;

в) триатлон;

г) атлетическая гимнастика.

3. Систематическая плановая многолетняя подготовка и участие в соревнованиях в избранном виде спорта с целью достижения максимальных спортивных результатов – это:

а) спорт высших достижений;

б) лечебная физическая культура;

в) профессионально-прикладная физическая культура;

г) массовый спорт.

4. Какие упражнения включаются в разминку почти во всех видах спорта:

а) упражнения на развитие выносливости;

б) упражнения на развитие гибкости и координации движений;

в) бег и общеразвивающие упражнения.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Какая из представленных способностей не относится к группе координационных:

а) способность сохранять равновесие;

б) способность точно дозировать величину мышечных усилий;

в) способность быстро реагировать на стартовый сигнал;

г) способность точно воспроизводить движения в пространстве.

2. Почему на занятиях по «физической культуре» выделяют подготовительную, основную и заключительную части:

а) так удобнее распределять различные по характеру упражнения;

б) выделение частей занятий связано с необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся;

в) выделение частей в занятии требует Министерства науки и образования;

г) перед занятием, как правило, ставятся 3 задачи, и каждая часть предназначена для них.

3. Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:

а) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий;

б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей;

в) утомлением, возникающим в результате их выполнения;

г) частотой сердечных сокращений.

4. Назовите количество игроков на волейбольной площадке:

а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. К объективным показателям самоконтроля относится:

а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.

2. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

3. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:

а) после приема пищи; б) после сна натошак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

4. Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;

б) сменить вид деятельности;

в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;

г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

1. Система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой и профессиональной дееспособности – это:

а) физкультурная пауза;

б) производственная физическая культура;

в) спорт высших достижений;

г) массовый спорт.

2. Профессионально-прикладная физическая подготовка – это

а) специализированный вид физического воспитания, осуществляемый в соответствии с особенностями и требованиями данной профессии;

б) система профессиональных мероприятий, осуществляемая в соответствии с особенностями данной профессии;

- в) процесс формирования специализированных знаний, умений и навыков;
г) целенаправленное воздействие на развитие физических качеств человека посредством нормированных нагрузок.
3. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает координационные способности монтажников-высотников:
а) фехтование; б) баскетбол; в) мото-спорт; г) гимнастика.
4. Что не является формой занятий по ППФП:
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 40 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

20-40 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-19 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

**Екатеринбург
2018**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
РУССКИЙ ЯЗЫК И ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ

Специальность
21.05.03. Технология геологической разведки

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленкова Е. С., канд. филол. наук, доц.

Екатеринбург
2020

Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь/

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженный в РУП.

Методические материалы к практическим занятиям

ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

Цель – вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

Основные понятия темы:

Лексикография – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей.
Энциклопедический словарь – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания.
Лингвистический словарь – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п.
Словарная статья – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.).
Помета – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления.

Задание 1. Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.

ФАЗА – 1. В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). 2. В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*¹).

ФАЗА, -ы, ж. [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. 1. Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* 2. физ. Величина, характеризующая состояние какого-н. процесса в каждый момент времени. Ф.

¹ Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.edudic.ru/geo/>

колебания маятника. Газообразная ф. вещества. **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. **3. эл.** Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810).

Фа́за, -ы, *ж.* **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр. положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.). *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* **2.** Отдельная группа обмоток генератора (спец.). || *прил. фа́зовый*, -ая, -ое (к 1 знач.) и *фа́зный*, -ая, -ое (к 2 знач.). ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике: глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. М., 2005. С. 847).

Задание 2. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ

Типы помет	Примеры помет	Значение отсутствия помет
1. Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю	<i>науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн. и др.</i>	Слово межстилевое
2. Помета, указывающая на сферу употребления слова	<i>обл., прост., жарг., спец. и др.</i>	Слово общеупотребительное
3. Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу	<i>устар., ист., арх., нов. и др.</i>	Слово принадлежит к активному запасу
4. Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова	<i>ласк., ирон., шутол., унич., бран., пренебр., высок., неодобр. и др.</i>	Слово нейтральное

Задание 3. *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

Аборигén, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж. аборигénка* (разг.)

Грамотéй, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

Деяние, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

Женáтик, -а, *м.* (прост. шутол.) – женатый человек (обычно о молодожене).

Иждивénчество, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет.

Карапу́з, -а, *м.* (разг. шутол.) – толстый, пухлый малыш.

Кляча, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь.

Лéнчик, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла.

Матéрщина, -ы, *ж.*, *собирает*. (прост. груб.) – неприличная брань.

Мíшка, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь.

Небезызвéстный, -ая, -ое; -тен, -тна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

Неулыба, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив.

Новодéл, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

Нуворѣш, -а, м. (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

Общепѣт, -а, м. (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. || *прил. общепѣтовский*, -ая, -ое (разг.).

Остолѣп, -а, м. (прост. бран.) – глупец, болван.

Отчѣзна, -ы, ж. (высок.) – отечество, родина.

Побѣры, -ов. 1. Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). 2. *перен.* Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

Предувѣдомить, -млю, -мишь; -мленный; *сов., кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

Ристѣлице, -а, ср. (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

Свѣра, -ы, ж. (прост.) – шумная перебранка, ссора.

Торгѣш, -а, м. 1. То же, что торговец (устар. неодобр.). 2. *перен.* Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

Умка, -и, м. (обл.) – белый медведь.

Уповѣние, -а, ср. (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

Хѣм, -а, м. (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

Задание 4. *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ²

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

бѣрхатка *и* бѣрхѣтка;

ведѣрцев *и* ведѣрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещенный на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредѣвый *и доп.* бредѣвой;

² Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

белёсый и *доп.* белёсый;
мáшет и *доп.* махаёт.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:

ворва́лся и *доп. устар.* ворвалсѧ
вспѣ́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспѣ́нен, вспѣ́нена и *доп. устар.* вспенѣ́нный, вспенѣ́н, вспенѣ́на
бúдо[чн]ик и *доп. устар.* бúдо[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:

балóванный ! *не рек.* ба́лованный;
вручѣ́т ! *не рек.* вру́чит;
гри́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -ѣй.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:

горшóчек, горшóчка ! *не рек. устар.* горшѣ́чек;
да́рит ! *не рек. устар.* дарѣ́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:

вы́боры, вы́боров ! *неправ.* выбора́, выборóв;
компроме́товать, -рую, -рует ! *неправ.* компроме[н]тúровать

Рекомендательные пометы	Запретительные пометы

ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.

Основные понятия темы:

Орфографические нормы – это правила написания слов.

Пунктуационные нормы – это правила расстановки знаков препинания.

Задание 1. Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.

Я р...шил в...рнуться д...мой. Быстрыми шагами я прошел зар...сли кустов. У моих ног т...нулась р...внина а дальше ст...ной возвышался мрачный лес. Я осм...трел

окрес...ность и спустился с х...лма. Высокая тр...ва на дне д...лины б...лела р...вной скат...ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб...раться по у...кой тр...пинке. Кругом р...сла высокая ро...ь. Н...чная птица промчалась и к...снулась меня св...им крылом. В т...шине глухо разд...вались мои шаги. Но вот на в...чернем небе стали заж...гаться звезды. Забл...стел серп м...л...дого мес...ца. Теперь я узнал д...рогу и предпол...гал что через час буду дома.

Задание 2. *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п...р...езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра...ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр...бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра...пряженных телегах сидят пр...старелые пр...езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр...бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по...ъезжаем к ограде пр...вязываем лошадей. На дощатом пр...лавке ра...ложены картинки и книги, и мещанин-пр...давец по...совывает календари и книги с з...манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр...смотреть липового меда п...дешевле п...торговаться в свое удовольствие пр...купить гостинцев родным.

В обед негаданно с...бирается туча, и дождь, по...нимая пыль, барабанит по усыпанной по...солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр...ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра...кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра...ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

Задание 3. *Повторите правописание Ъ и Б (учтите разные функции Б). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред...юбилейное мероприятие, обжеч...ся огнем, решил удалит...ся проч..., кофе был горяч..., достан...те багаж..., чувствовать гореч... неудач..., быть по-волч...и, любител...ская кинос...емка, должность камен...щика, выйти замуж... осен...ю, береч... здоров...е, сроч...ный заказ, лечить кон...юнктивит, уловить фал...ш... в голосе, трех...этажный павил...он, заменить мед...ю, назнач...те время трех встреч..., с...еш... во время лан...ча, следить за своей реч...ю, купает...ся в реке, оформиш... пен...сию, остав...те антиквару старинную брош..., четырех...ядерный процессор, волосы до плеч..., сер...езный компан...он, умнож...те полученный резул...тат, он хорош... собой, выявить из...ян, декабр...ские морозы, с...агитировать на выборы, коротко стрич...ся, сверх...естественный об...ект, боиш...ся ос...минога, неб...ющаяся вещ..., об...емный текст п...есы, не забуд...те плащ..., невтерпеж... ждать, раз...яренный бык, разрабатывать кар...ер.

Задание 4. *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн...о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален...ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы

отполирован...ые плиты гранита. В этом заброшен...ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен...ыми из обожжен...ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен...ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен...ы под цвет камен...ых глыб. Комнаты соединен...ы переходами из плетен...ых циновок. Все разложен...о аккуратно...о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион...ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален...ой. Бросался в глаза и меч повеш...н...ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен...ой цветными пометками. Все, что нанесен...о на нее, – плод трудн...ых поисков в горах прокален...ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

Задание 5. *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н...)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н...)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н...)один из бедных чиновных ее жителей (н...)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н...)приятен? Здесь единствен...ое место, где показываются люди (н...)по(н...)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об...емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н...)сколько лет (н...)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н...)пр...мен...о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н...)составляет (н...)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен...о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н...)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н...)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н...)кто этого (н...)заметит. (по Н. В. Гоголю)

Задание 6. *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш...(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк... (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж... этот(то) поезд притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж... раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где

прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться... (По Ч. Айтматову)

Задание 7. *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)

2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо нарядаются в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)

3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)

4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)

5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)

6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)

7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)

8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)

9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)

10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)

11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений³.

Основные понятия темы:

Акцентологические нормы – это правила постановки ударения в слове.

Омонимы – слова, у которых от постановки ударения зависит значение.

Задание 1. *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, ста́ртер и сартёр):*

1) Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремьнь, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

2) Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотрный, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

3) Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

Задание 2. *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

Например: пла́чу (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – плачу́ (1 лицо ед. число от глагола «платить»).

Задание 3. *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, используя любые слова из задания 1 и / или 2.*

1. В последнем квартале этого года эксперты одной из фирм заключили выгодный договор на прокладку газопровода, за что были премированы. 2. Для обеспечения здорового образа жизни исключите из своего рациона арахис, торты и алкоголь, а включите в него творог, свеклу и щавель. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести красивейшие кухонные гарнитуры по оптовым ценам.

³ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений⁴.

Основные понятия темы:

Орфоэпические нормы – это правила произношения слов.

Транскрипция – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках).

Задание 1. Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:

[шн]	[шн] и [чн]	[чн]

1) Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

2) Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

Задание 2. Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:

Твёрдое произношение	Варианты	Мягкое произношение

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуар, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

Задание 3. Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:

1) Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадежный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

2) Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

⁴ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

Совершенные пропорции – совершенные поступки;
Крестный ход – крестный отец.

Задание 4. Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:

- 1) Масса, суррогат, группа, гриппа, терраса, аттестат, коллега, металл, сумма, аннотация, кристалл, одиннадцать, иллюзия, ванна, апелляция, касса, галлюцинация, нетто.
- 2) Дрожжи, бухгалтер, позже, вожжи, изжарить, выжженный, песчаный, изжить, разжать, жестче, низший, дожди, резче, визжать, изжога, масшаб, можжевельник, безжизненный, расчет, съезжу, приезжай.

Задание 5*. Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

Основные понятия темы:

Словообразовательные нормы – это правила образования новых слов.

Задание 1. Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.

1. Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины.
2. Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию.
3. Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади.
4. Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск.
5. Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия.
6. Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях.
7. После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад.
8. Многие кавказские

народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии вместо высшей математики.

ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

Основные понятия темы:

Лексические нормы – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях.

Паронимы – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению.

Речевая избыточность – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм).

Лексическая сочетаемость – это способность слова соединяться с другими словами по значению.

Жаргонизм – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей.

Фразеологизм – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

Задание 1. *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодovitый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

1. При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.** Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

Задание 3. *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

1. Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В

январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

Задание 4. *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

1. Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. 2. Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. 3. Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. 4. Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. 5. Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

Задание 5. *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

1. Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. 2. В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. 3. Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. 4. После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. 5. Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

Задание 6. *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

1. Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. 2. Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. 3. Его обещания рубля ломаного не стоят. 4. Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». 5. К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

Задание 7*. *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

1. Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. 2. В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. 3. Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. 4. Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. 5. Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. 6. Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. 7. Исправьте ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. 8. Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. 9. К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. 10. После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. 11. В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. 12. Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. 13. На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. 14. Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. 15. После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари⁵).

Основные понятия темы:

Морфологические нормы – это правила образования грамматических форм слова.

Задание 1. *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

1) Атташе, авеню, адвокат, ампула, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (склоняемые и несклоняемые существительные).

2) Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (имена собственные).

3) АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (аббревиатуры).

Задание 2. *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания **прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

Задание 3. *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

Кому:

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

От кого:

⁵ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапино, Станислав Горбачевич.

Задание 33. Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.

Окончание -а/ -я	Окончание -ы/ -и	Варианты -а/ -я и -ы/ -и

Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, ордера – «документы» и ордеры – «элементы в архитектуре»).

1) Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

2) Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

Задание 4. Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ласты – ластов и ласт).

Армяне, апельсины, басни, блюда, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

Задание 5. Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.

1. Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). 2. Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). 3. Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. 4. За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). 5. Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

Задание 6. Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:

1. Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. 2. Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. 3. Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. 4. Двоих подруг она уже встретила по приезду в родной город. 5. Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

Задание 7. Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.

1. Всем стало понятно, что еѣное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. 2. После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. 3. Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазит в аудиторию 3519. 4. Съезды в другой город, она поняла, как хорошо на родине. 5. Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. 6. Он схватился за канат двумя руками. 7. Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. 8. Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. 9. Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. 10. В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

Задание 8. *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Новый преподаватель кажется более образованнее. 2. Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. 3. ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. 4. В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. 5. Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. 6. МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. 7. В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. 8. Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. 9. На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. 10. Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. 11. На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. 12. Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. 13. На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. 14. Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. 15. Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

Основные понятия темы:

Синтаксические нормы – это правила, регулирующие порядок и связь слов в словосочетании и предложении.

Задание 1. *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

Задание 2. *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации (действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему).

Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.

1. Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. 2. Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. 3. Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. 4. Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. 5. Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. 6. Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. 7. Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. 8. Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. 9. Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. 10. Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

Задание 3. Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.

1. Много знаменитых людей закончили наш университет. 2. Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. 3. Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. 4. На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. 5. Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. 6. Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». 7. Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. 8. Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. 9. Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. 10. Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

Задание 4. Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.

1. Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. 2. Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. 3. Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. 4. Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. 5. В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. 6. Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. 7. Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. 8. В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. 9. Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. 10. Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. 11. Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. 12. Учебное пособие не

только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

Цель – повторить систему функциональных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Функциональный стиль – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный, официально-деловой, публицистический, литературно-художественный, церковно-религиозный.** Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризмов, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обозначаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

Функциональный стиль	Стилеобразующий фактор						Жанры
	Доминирующая языковая функция	Форма общественно-го сознания	Основная форма речи	Типичный вид речи	Тон речи	Тип адресата	
Научный	Сообщение	Научное сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный	Массовый (подготовленный к восприятию научной информации)	Учебник, монография лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад
Официально-деловой	Сообщение / воздействие	Правовое сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный / императивный	Массовый	Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика
Публицистический	Сообщение + воздействие	Идеологическое сознание	Письменная и устная	Монолог и диалог	Обусловленный содержательно	Массовый	Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка
Литературно-художественный	Воздействие	Эстетическое сознание	Письменная	Обусловленный родом и жанром литературы	Обусловленный эстетической задачей	Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений)	Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада
Церковно-религиозный	Воздействие	Религиозное сознание	Письменная и устная	Монолог	Обусловленный ситуативно	Массовый	Исповедь, проповедь, житие, молитва
Разговорный	Общение	Обыденное сознание	Устная	Диалог и полилог	Обусловленный ситуативно	Личный (конкретный собеседник)	Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка

Задание 1. Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.

Текст 1

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

Текст 2

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

Текст 3

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

Текст 4

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

Текст 5

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает крестную

силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

Текст 6

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травой такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхла белым огнем; тотчас же опять загредел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыпятся обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки.
(А. П. Чехов. *Степь*)

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.*

1. Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. 2. В статье сообщается, что левые лекарства отслежат по аптекам и конфискуют. 3. Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. 4. Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. 5. Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. 6. Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. 7. Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. 8. Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. 9. Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. 10. Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

Задание 3. *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов⁶. Попробуйте обосновать свою точку зрения.*

Текст 1

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 2

Веруем в Единого Бога Отца Всмогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девой Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознесся на Небо и воссел одесную Всмогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 3

В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

⁶ Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей** в **Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 4

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 5

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 6

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень большое сердце // А что такое большое сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообще / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай вам Бог узнать / что

такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять...

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 7

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 8

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезающая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетававшая пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурою неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 9

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то

обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 10

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 11

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (как Бог на душу положит; как у Христа за пазухой; человек предполагает, а Бог располагает). Некоторые слова изменили свою семантику (воскресение, братия), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (вертеп).

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Научный стиль – один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

Основные стилевые черты научного стиля:

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых, во-вторых, наконец, итак, следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов; четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность и отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– **насыщенность фактической информацией**;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

Основные языковые особенности научного стиля:

Языковые особенности				Примеры			
Лексические							
1) термины				<i>обогащение полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело и др.</i>			
2) общенаучная лексика				<i>закон, теория, аспект, носитель, конструкция и др.</i>			
3) книжная лексика абстрактного значения				<i>применение, явление, замедление, обязательство, подготовка и др.</i>			
Морфологические							
1) частотность существительных				(Примерно 40 % существительных на единицу текста)			

2) частотность форм родительного падежа существительных

попадание в водоемы масло-смазывающих продуктов (род. п.) отдельных узлов (род. п.) механического оборудования (род. п.) гидротехнических сооружений (род. п.) и т. п.

3) широкое использование существительных среднего рода

отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение и др.

4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени

равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет и др.

5) полужнаменательные глаголы-связки

есть, быть, являться

6) употребление причастий и деепричастий

подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив и др.

Синтаксические

1) вводные слова и конструкции

вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей и др.

2) бессубъектные конструкции

карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен и др.

3) безличные предложения

необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов и др.

4) обобщенно-личные предложения

подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков и др.

5) цепочки однородных членов

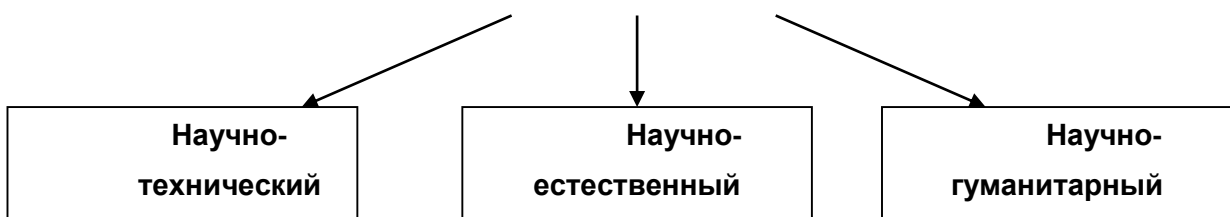
Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.

6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью

Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизируется, а затем ставится новый эксперимент.

Подстили научной речи:

Тематические



(с соответствующим жанром)



Задание 1. Проанализируйте текст по следующей схеме:

1. Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.
2. Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.
3. Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.
4. Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.
5. Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.

Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ⁷

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач невозможно без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательное значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и

⁷ Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической*, или *прикладной*, геологией.

ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ⁸

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

⁸ Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонова. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина, П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА⁹

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

⁹ Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, С₁), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горнодобывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

Задание 2. *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

1. В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. 2. Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. 3. Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. 4. Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза энергетического голода. 5. Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. 6. Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. 7. Компьютерный вирус – это сильный паразит! 8. Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения междисциплинарных исследований. 9. Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий

общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога, как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Официально-деловой стиль – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

Основные стилевые черты официально-делового стиля:

- **объективный, абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);
- **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;
- **стандартизированность, стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета, справка, инструкция, заявление, деловое письмо* и т. д.);
- **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волюнтаривность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю, приказываю, поздравляю*; формами должествования – *надлежит, необходимо, следует, предлагается*);
- **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

Основные языковые особенности официально-делового стиля:

Языковые особенности	Примеры
Лексические	
1) языковые штампы (канцеляризм, клише)	<i>ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока и др.</i>
2) профессиональная терминология	<i>недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие и др.</i>
3) архаизмы	<i>оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание и др.</i>
4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой	<i>прибыть (вместо приехать, прилететь, прийти и т. д.), транспортное средство (вместо автобус, самолет, «Волга» и т. д.), населенный пункт (вместо деревня, город, село и т. д.), помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)</i>
Морфологические	
1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием	<i>налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель и др.</i>
2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода	<i>сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина и др.</i>
3) отглагольные существительные с частицей <i>не-</i>	<i>нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание и др.</i>
4) производные предлоги	<i>в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании и др.</i>
5) инфинитивные конструкции	<i>провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность и др.</i>
6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия	<i>обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф и др.</i>
7) сложные слова, образованные от двух и более основ	<i>бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-</i>

	<i>технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижепоименованный и др.</i>
8) нанизывание существительных с суффиксом <i>-ние</i>	<i><u>Приготовлением</u> к <u>преступлению</u> признается <u>приискание</u> и <u>приспособление</u> средств или орудий или умышленное <u>создание</u> условий для <u>совершения преступлений</u>....</i>
9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п.	<i>Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.</i>
10) широкое использование аббревиатур	<i>РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечатать и др.</i>
11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже	<i>Для <u>применения</u> (род. п.) <u>мер</u> (род. п.) <u>общественного воздействия</u> (род. п.); в целях широкой <u>гласности</u> (род. п.) <u>работы</u> (род. п.) <u>Министерства</u> (род. п.) высшего <u>образования</u> (род. п.); результаты <u>деятельности</u> (род. п.) <u>органов</u> (род. п.) налоговой <u>полиции</u> (род. п.) и др.</i>
Синтаксические	
1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10)	<i>Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является <u>имущество</u>: земельный <u>участок</u>, <u>насаждения</u>, хозяйственные или иные <u>постройки</u>, мелиоративные и другие <u>сооружения</u>, продуктивный и рабочий <u>скот</u>, <u>птица</u>, сельскохозяйственная и иная <u>техника</u>, <u>оборудование</u>, транспортные <u>средства</u>, <u>инвентарь</u> и другое <u>имущество</u> и др.</i>
2) наличие пассивных конструкций	<i>платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год и др.</i>

3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными условиями	<i>При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное в настоящей статье возмещение в том случае, если <u>спор решен</u> в пользу работника.</i>

Документ – зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

Форма документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

	Состав реквизитов документа
1.	Государственный герб Российской Федерации
2.	Герб субъекта Российской Федерации
3.	Эмблема организации или товарный знак
4.	Код организации
5.	Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН)
6.	Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП)
7.	Код формы документа
8.	Наименование организации
9.	Справочные данные об организации
10.	Наименование вида документа (жанр документа)
11.	Дата составления документа
12.	Регистрационный номер документа
13.	Ссылка на регистрационный номер или дату документа
14.	Место составления или издания документа
15.	Адресат
16.	Гриф утверждения документа
17.	Резолюция
18.	Заголовок к тексту
19.	Отметка о контроле
20.	Текст документа
21.	Отметка о наличии приложения
22.	Подпись
23.	Гриф согласования документа
24.	Визы согласования документа
25.	Оттиск печати
26.	Отметка о заверении копии
27.	Отметка об исполнителе

28.	Отметка об исполнении документа и направлении его в дело
29.	Отметка о поступлении документа в организацию
30.	Идентификатор электронной копии документа

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата, адресанта, название жанра документа, основной текст документа, список приложений, дату и подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

Способы классификации документов:

1. **По месту составления:** *внутренние* и *внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др.). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).

2. **По содержанию:** *простые* и *сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление, объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы, письма, инструкции*).

3. **По форме:** *индивидуальные* и *типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).

4. **По срокам исполнения:** *срочные* и *бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).

5. **По происхождению:** *служебные* и *личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).

6. **По виду оформления:** *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).

7. **По функции:** **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание,*

положение о персонале, должностную инструкцию), **распорядительные** документы, содержащие конкретные распоряжения (приказы, распоряжения, указания, решения)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты), **письма, договоры.**

Задание 1. Проанализируйте текст официально-делового стиля:

1. Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.
2. Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.
3. Опишите стилевые и языковые особенности текста¹⁰.

**Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ
«О государственном языке Российской Федерации»**

С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.

Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года

Одобен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-1 «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за

¹⁰ Возможна работа по вариантам: 1 вариант – анализ Статьи 1; 2 вариант – анализ Статьи 3; 3 вариант – анализ статьи 4.

исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<...>

Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<...>

Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<...>

Президент Российской Федерации

В. Путин

Задание 2. Проанализируйте следующий текст¹¹:

1. Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.

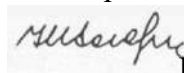
2. Опишите стилевые и языковые особенности.

3. Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.

¹¹ Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

УТВЕРЖДАЮ:

Ректор УГГУ, профессор



Н.П. Косарев

РЕГЛАМЕНТ

ношения форменной одежды преподавателями, сотрудниками и студентами УГГУ

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

- на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
- на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
- на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
- при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- во время лекционных занятий;
- при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;
- при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
- при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;

- при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

- при посещении ректората, деканатов;
- на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
- при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.



Ученый секретарь совета, профессор
28.09.2005 г.

О. В. Ошкордин

Задание 3. Проанализируйте текст¹² с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтаривность.

Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.



Правила внутреннего распорядка обучающихся в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»

Дата введения 01 сентября 2014 года

<...>

5. Основные права и обязанности обучающихся

5.1 Права обучающихся

Обучающиеся в университете имеют право:

- получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;
- бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;
- участвовать в управлении университетом;

¹² Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

- свободно выражать собственные мнения и убеждения;
- выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;
- участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;
- осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);
- определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;
- ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;
- участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;
- бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;
- принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;
- совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;
- представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;
- обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;
- переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;
- получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

5.2 Обязанности обучающихся

Обучающиеся в университете обязаны:

- добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;
- выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;
- постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;
- нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;
- бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;
- нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;
- незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;
- соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;
- поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше полномочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

5.3 Требования к ношению формы

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

- на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;
- на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;
- при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и

научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<...>

ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

Цель – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):

Заявление – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

Основные реквизиты заявления:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).
2. Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).
3. Наименование жанра документа.
4. Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.
5. Опись приложений к документу, если они имеются.
6. Дата.
7. Подпись.

Образец оформления заявления

Декану ФГиГ
проф. Талалаю А. Г.
от студента группы МПГ-16
Волкова Михаила Владимировича

Заявление

Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2018 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.

Копию справки-вызова прилагаю.

01.10.2018 г.



Доверенность – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

Основные реквизиты разовой доверенности:

1. Наименование жанра документа.
2. Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
3. Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
4. Формулировка доверяемой функции.
5. Дата.
6. Подпись.

Образец оформления разовой доверенности

Доверенность

Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-16 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГТУ мою стипендию за март 2017 года.

25.02.2017 г.



Расписка – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

Основные реквизиты расписки:

1. Наименование жанра документа.
2. Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
3. Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
4. Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).
5. Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.
6. Дата.
7. Подпись.

Образец оформления расписки

Расписка

Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-17 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2005 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.

Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2017 г.

07 ноября 2017 г.



Докладная записка – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

Основные реквизиты докладной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.
3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.
4. Опись приложений к документу, если они имеются.
5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).
6. Дата.

Образец оформления докладной записки

*Ректору УГГУ
проф. Душину А. В.*

Докладная записка

24 декабря 2018 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.

Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.

Описание прилагается.

*Студент группы ТБ-17
25 декабря 2018 г.*



/Вутенко Б. Н./

Объяснительная записка – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

Основные реквизиты объяснительной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).
2. Наименование жанра документа.
3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.
4. Опись приложений к документу, если они имеются.
5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).
6. Дата.

Образец оформления объяснительной записки

*Зав. кафедрой ИЯДК
доц. Юсуповой Л. Г.*

Объяснительная записка

05.03.2018 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.

Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.

*Студентка группы МЭ-15
07.03.2018 г.*



/Вайслер Ю. М./

Задание 1. *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

- а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;
- б) заявление с просьбой принять Вас на работу;
- в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;
- г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;
- д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;
- е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;
- ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

Задание 2. *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

Текст 1

*Декану УГТУ
От студента III курса очной формы
обучения факультета гражданской
защиты Волк Василия Васильевича*

заявление

В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.

09.09.18 г.



Текст 2

Ректору УГТУ

Н. П. Косареву

доверенность.

Я, Задорин Виктор, студент УГТУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).

1.5.18 г.



/Задорин В. З./

Текст 3

Кафедре ИЯДК

расписка

Я – Пустник Валентин Шимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.

Обязуюсь вернуть в срок.

25 сентября



Текст 4

Декану ТМФ
Козину Владимиру
Зиновьевичу

Докладная

Уважаемый Владимир Зиновьевич!

Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ТМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.

Пропали: куртка черная кожанная, красная сумка в цветочек, белый платок.



1 октября 2018 года

Текст 5

*Зав. кафедры ТПФ Волкову М. Н.
От студента Хлебникова Семена.*

Объяснительная о прогуле

Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из б городской больницы прилогаю.

01.11.18

Хлебников С.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Голуб И. Б. Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Электрон. текстовые данные. – М.: Логос, 2014. – 432 с. – 978-5-98704-534-3. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/39711.html>
2. Культура устной и письменной речи делового человека: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания).
3. Меленкова Е. С. Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с.
4. Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А. Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.: Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания).

Дополнительная литература

1. Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)
2. Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с.
3. Веселкова Т. В. Культура устной и письменной коммуникации [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 268 с. – 2227-8397. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/54473.html>
4. Гавриленко Р. И., Меленкова Е. С., Шалина И. В. Русский язык и культура речи: учебное пособие. 4-е изд., стереотип. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 84 с.
5. Голуб И. Б. Русский язык и культура речи: учебное пособие. М.: Логос, 2005. 432 с. (и другие стереотипные издания)
6. Данцев А. А., Нефёдова Н. В. Русский язык и культура речи для технических вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. 320 с. (и другие стереотипные издания)
7. Дускаева Л. Р., Протопопова. О. В. Стилистика официально-деловой речи: учебное пособие. М.: Академия, 2012. 272 с.
8. Карякина М. В. Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 71 с.
9. Коренькова Е. В., Пушкарева Н. В. Русский язык и культура речи: учебник. М.: Проспект, 2013. 376 с.
10. Котюрова М. П. Стилистика научной речи: учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования. М.: Академия, 2012. 240 с.
11. Лапынина Н. Н. Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: курс лекций / Н. Н. Лапынина. — Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 с. – 978-5-89040-431-2. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22667.html>
12. Лыткина О. И. Теоретический курс культуры речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. И. Лыткина. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 105 с. – 2227-8397. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/46332.html>

13. Меленкова Е. С. Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.
14. Меленкова Е. С. Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с.
15. Меленкова Е. С. Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с.
16. Миняева В. И. Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с.
17. Петрова Ю. А. Культура и стиль делового общения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Электрон. текстовые данные. – М.: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – 5-476-003-476. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/1129.html>
18. Сковцов Л. И. Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Сковцов Л. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/14555.html>
19. Словарь-справочник по культуре речи: для школьников и студентов / Отв. ред. А. А. Евтюгина. - Екатеринбург: У-Фактория, 2004. 334 с.
20. Усанова О. Г. Культура профессионального речевого общения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Электрон. текстовые данные. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – 5-94839-062-4. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/56426.html>

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. ГОСТ 6.30-2003. «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация <http://docs.cntd.ru/document/1200031361>).
2. Грамота (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.gramota.ru>.
3. Колтунова М. В. Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. М.: Экономика, 2000. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://bibliotekar.ru/delovoe-obschenie/index.htm>
4. Культура письменной речи (сайт) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.gramma.ru>.
5. Русский язык и культура речи/ под ред. Максимова В. И. М., 2001 [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.bibliotekar.ru/russkiy-yazyk/>
6. Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://russkiyyazik.ru>.
7. Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://stylistics.academic.ru>.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет геологии и геофизики

Кафедра Математики



В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург 2020

Министерство высшего образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Уральский государственный горный университет
Факультет геологии и геофизики
Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

УДК 512.64

ББЛ 22.143

С 90

С 90 В. Б. Сурнев

Высшая математика. Учебник задач по высшей математике: -

Учебно-методическое пособие. Екатеринбург. ФГБОУ ВО УГГУ. 2020. – 338 с.

ISBN

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика», предусмотренные государственными стандартами подготовки специалистов специальности «Горное дело». В каждой главе пособия приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело»: специализация № 6 «Обогащение полезных ископаемых», специализация № 10 «Электрификация и автоматизация горного производства», специализация N 8 "Горнопромышленная экология", специализация № 9 "Горные машины и оборудование". Учебное пособие может быть использовано и для других специальностей и направлений подготовки горно-геологического профиля высших учебных заведений.

Рецензенты:

Кафедра информатики ФГБОУ ВО УГГУ, зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент А. В. Дружинин

Д-р физ.-мат. наук, в. н. с., ИГФ УрО РАН им. Ю. П. Булашевича А. Ф. Шестаков.

Сурнев Виктор Борисович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ISBN

© Сурнев В. Б., 2020

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Уральский государственный горный университет (УГГУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	9
Часть 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ	11
1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ	
Практическое занятие 1. Теория множеств. Множества, операции, отношения	11
Предварительные сведения	11
Примеры с решением	13
Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа	20
Предварительные сведения	20
Примеры с решением	22
Задания для самостоятельной работы	24
2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	30
Практическое занятие 1. Векторная алгебра	30
Предварительные сведения	30
Примеры с решением	33
Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения. Прямая линия и плоскость	45
Предварительные сведения	45
Примеры с решением	46

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства	52
Предварительные сведения	52
Примеры с решением	53
Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ	75
Предварительные сведения	75
Примеры с решением	76
Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов	91
Предварительные сведения	91
Примеры с решением	92
Задания для самостоятельной работы	101
Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n	113
Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве	113
Предварительные сведения	113
Примеры с решением	116
Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства	137

Предварительные сведения	137
Примеры с решением	138
Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка	145
Предварительные сведения	145
Примеры с решением	147
Задания для самостоятельной работы	157
ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО	162
Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности	162
Предварительные сведения	162
Примеры с решением	164
Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции	172
Предварительные сведения	172
Примеры с решением	173
Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного	179
Предварительные сведения	179
Примеры с решением	180
Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления	191

Предварительные сведения	191
Примеры с решением	192
Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного	201
Предварительные сведения	201
Примеры с решением	203
Практическое занятие 6. Интегрируемость функций одного переменного	210
Предварительные сведения	210
Примеры с решением	211
Задания для самостоятельной работы	217
ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. РЯДЫ	224
Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных	224
Предварительные сведения	224
Примеры с решением	226
Практическое занятие 2. Исследование функции несколь- ких переменных	239
Предварительные сведения	239
Примеры с решением	240

Практическое занятие 3. Числовые ряды	244
Предварительные сведения	244
Примеры с решениями	245
Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды	251
Предварительные сведения	251
Примеры с решением	253
Задания для самостоятельной работы	260
ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕ- НИЯ	266
Практическое занятие 1. Базисные векторные поля	266
Предварительные сведения	266
Примеры с решением	269
Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы	279
Предварительные сведения	279
Примеры с решением	281
Практическое занятие 3. Кратные интегралы	284
Предварительные сведения	284
Примеры с решением	287
Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволи- нейных и кратных интегралов	296
Предварительные сведения	296

Примеры с решением	297
Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы	302
Предварительные сведения	302
Примеры с решением	303
Практическое занятие 6. Векторный анализ	307
Предварительные сведения	307
Примеры с решением	310
Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения	319
Предварительные сведения	319
Примеры с решением	322
Практическое занятие 8. Системы ОДУ	337
Предварительные сведения	337
Примеры с решением	342
Задания для самостоятельной работы	348

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ» предназначено для студентов технических направлений подготовки и технических специальностей университетов. Цель данного пособия – оказание помощи студентам в самостоятельной работе по освоению общего курса высшей математики технического вуза. Перечислим некоторые причины, побудившие автора к созданию данного пособия.

Хорошо известно, что без самостоятельной работы сколько-нибудь твёрдое освоение курса высшей математики совершенно невозможно. За то малое количество часов аудиторных занятий, которое отводится современными учебными планами, особенно для направлений подготовки бакалавров, никакой преподаватель не сможет обучить студентов даже основам математики, не говоря уже об овладении методами последней на уровне, нужном для плодотворного изучения специальных дисциплин учебных планов таких, как, например, теоретическая механика, теоретическая электротехника и так далее.

Желательно, чтобы студент научился самостоятельно выбирать метод решения задачи, поставленной в предметной области, и мог использовать для его реализации знания по высшей математике, полученные в университете. Последнее может быть достигнуто только упорным и творческим самостоятельным трудом, чему и призвано помочь данное пособие.

В настоящее время достаточно велико число желающих получить высшее образование с использованием дистанционных методов обучения. Несмотря на наличие у подавляющего большинства обучающихся в свободном доступе вычислительной техники разного уровня, «книжный вариант» самостоятельного изучения дисциплины математика не потерял своей актуальности. Для многих студентов наличие печатного пособия по практическому освоению курса высшей математики предпочтительнее её электронного варианта.

Предлагаемое учебное пособие появилось как результат многолетнего преподавания автором высшей математики в техническом вузе – ФГБОУ ВО Уральский государственный горный университет. Пособие содержит материал по основным разделам общего курса высшей математики. Некоторые разделы, включаемые обычно в общий курс высшей математики, в пособии не представлены.

В качестве примера назовём теорию функций комплексной переменной (ТФКП). По мнению автора ТФКП является по существу самостоятельной дисциплиной и требует отдельного издания. К тому же в русскоязычной литературе имеются в большом числе практические пособия по данной дисциплине.

Аналогично, теория вероятностей и математическая статистика в совокупности являются отдельной дисциплиной со своими теориями и методами. Поэтому включение теории вероятностей и

математической статистики в качестве раздела в пособие по общему курсу высшей математики нецелесообразно.

Также отсутствует в пособии теория уравнений с частными производными, которая является по мнению автора отдельной дисциплиной, имеющей своё историческое название – «Математическая физика».

Кроме перечисленных разделов высшей математики в пособии не представлена теория операторов, которая известна также под названием «Функциональный анализ». Данная математическая дисциплина вынужденно исключена из современных учебных планов и программ в связи с сокращением времени на изучение высшей математики.

Список разделов, включённых в данное пособие, легко увидеть из оглавления, поэтому перечислять их нет необходимости. Сделаем лишь несколько замечаний относительно структуры пособия.

Перед каждым разделом помещены краткие теоретические сводки, цель которых напомнить студенту, изучившему предварительно теоретический материал по лекционному курсу, необходимые для разбора предлагаемых примеров и решения заданий формулы.

Дальше приводятся с подробным решением примеры типовых задач, перемежающиеся иногда с дополнительными сведениями и с практико-ориентированными примерами из предметных областей.

После примеров с решениями приводятся в достаточном количестве задания для самостоятельной работы. В заданиях для самостоятельной работы ответы не приводятся. Сделано это намеренно, с целью побудить студентов в процессе самостоятельных занятий к общению между собой и с преподавателем.

В заключение отметим, что особое внимание в пособии уделяется трудным для освоения студентами разделов высшей математики, имеющих на первый взгляд абстрактный характер, например, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладной характер данных разделов не может быть обоснован на начальных стадиях обучения в вузе и выяснится лишь при изучении специальных дисциплин.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие 1. Теория множеств

Множества, операции, отношения

Предварительные сведения

Множество – неопределяемое понятие. Множество можно задать. Конечное множество задаётся списком, например,

$$M = \{a, b, \dots, k\},$$

где $a, b, \dots, k$ – элементы множества.

Бесконечное множество задаётся при помощи признака, позволяющего установить принадлежность элементов данному множеству:

$$M = \{x : x \in K\}.$$

Читается: M есть множество элементов X , обладающих свойством (свойствами) K , и только эти элементы являются элементами данного множества.

Над множествами можно производить операции.

Множества M_1 и M_2 считаются **равными**, если

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \wedge y \in M_2 \Rightarrow y \in M_1.$$

Пересечение множеств: $M_1 \cap M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ и } x \in M_2\}.$

Объединение множеств: $M_1 \cup M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ или } x \in M_2\}.$

Разность множеств: $M_1 - M_2 \equiv M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ и } x \notin M_2\}.$

Произведение множеств: $M_1 \times M_2 = \{\{x, y\} : x \in M_1, y \in M_2\}.$

Здесь $\{x, y\}$ – упорядоченная пара элементов $x \in M_1, y \in M_2$.

Закон тождества гласит:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1.$$

Пусть $x \in M \wedge y \in M$. Бинарной алгебраической операцией называется отображение

$$\varphi : \{x, y\} \rightarrow z \in M.$$

Алгебраическая операция называется **ассоциативной**, если

$$(\forall x, y, z \in M) \quad x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Алгебраическая операция называется **коммутативной**, если

$$(\forall x, y \in M) \quad x * y = y * x.$$

Алгебраическая операция $(\circ)$ называется **дистрибутивной** относительно алгебраической операции $(*)$, если $(\forall x, y, z \in M)$

- 1) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z),$
- 2) $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y).$

Множество $G \neq \emptyset$ с заданной на нём бинарной алгебраической (внутренней) операцией $(*)$, называется **группой**, если выполнены следующие аксиомы:

- 1) $(\forall x, y, z \in G) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$
- 2) $(\exists e \in G): (\forall x \in G) \quad x * e = e * x = x;$
- 3) $(\forall x \in G) (\exists x^{-1} \in G): x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$

Группа называется **абелевой**, или **коммутативной**, если алгебраическая (групповая) операция коммутативна.

Непустое множество K с двумя алгебраическими операциями **сложением** и **умножением** называется **кольцом**, если выполнены аксиомы:

- 1) K есть абелева группа по операции сложения (**аддитивная группа кольца**);
- 2) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x, y, z \in K) \quad x(y + z) = xy + xz$ и $(y + z)x = yx + zx.$

Непустое множество P вместе с двумя алгебраическими операциями – **сложением** и **умножением**, называется **полем**, если выполняются следующие аксиомы:

- 1) P есть аддитивная абелева группа по сложению;
- 2) $P - \{0\}$ есть мультипликативная абелева группа по умножению;
- 3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x, y, z \in P) \quad x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx.$

Примеры с решением

Пример 1.1.1. Найти все подмножества множества $M = \{2, 7, 9\}$.

Решение. Подмножествами данного множества являются: пустое множество $\emptyset$; само множество M ; одноэлементные множества $\{2\}, \{7\}, \{9\}$; двухэлементные множества $\{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\}$. $\otimes$

Пример 1.1.2. Найти пересечение, объединение и разность множеств $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{b, e, f, k\}$.

Решение. Пересечение множеств $A \cap B$ содержит три элемента

$$A \cap B = \{b, e, f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\},$$

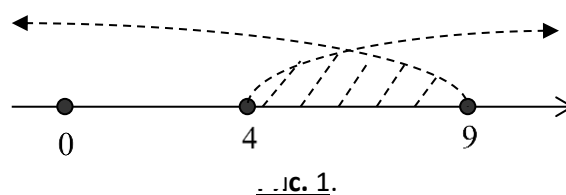
разность

$$A - B = \{a, c, d\}. \otimes$$

Пример 1.1.3. Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1, 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что $x \in R^1$.



Решение. Решением первого неравенства является множество действительных чисел $x > 4$, решением второго неравенства является множество действительных чисел $x < 9$. Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество $M = \{x \in R^1: 4 < x < 9\}$. $\otimes$

Пример 1.1.4. Найти произведение $A \times B$ множеств

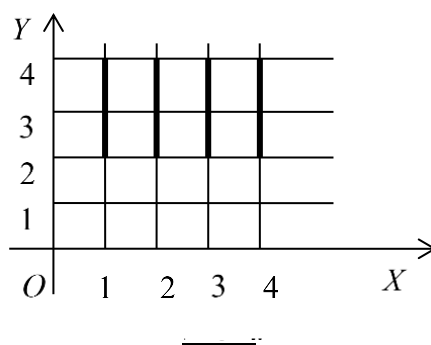
$$A = \{m, p\}, B = \{e, f, k\}.$$

Решение. Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества A , а второй – элемент множества B :

$$A \times B = \{\{m, e\}, \{m, f\}, \{m, k\}, \{p, e\}, \{p, f\}, \{p, k\}\}. \otimes$$

Пример 1.1.5. Изобразить на координатной плоскости произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^1 : 2 \leq y \leq 4\}$.

Решение. Множество A конечно, а множество B – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа 1, 2, 3 или 4, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка $[2, 4]$. Множество пар координатной плоскости изобразится



в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2). $\otimes$

Пример 1.1.6. Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

Решение. Пусть X , Y и Z – произвольные множества. Покажем, что из $X = Y$ и $Y = Z \Rightarrow X = Z$.

Пусть $x \in X$. Тогда, так как $X = Y$, имеем $x \in Y$. Но так как $Y = Z$, получаем $x \in Z$.

Обратно, из $x \in Z$ следует, что $x \in Y$. По закону тождества получаем $X = Z$. $\otimes$

Пример 1.1.7. Доказать, что для произвольных множеств A , B и C справедливо равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Решение. Покажем, что

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Откуда следует, что $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. То есть, $x \in A$ и $x \notin B$, или $x \in A$ и $x \notin C$. Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$ доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\otimes$

Пример 1.1.8. Проверить непосредственно, что для множеств

$$X = \{3, 5, 7\}, Y = \{7, 9\}, Z = \{0, 1\}$$

выполняется следующее равенство: $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

Решение. Для левой части равенства непосредственно получаем $X \cup Y = \{3, 5, 7, 9\}$ и далее имеем:

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \times Z &= \{3, 5, 7, 9\} \times \{0, 1\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{9, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Для правой части получаем аналогично:

$$\begin{aligned} (X \times Z) \cup (Y \times Z) &= \{\{3, 5, 7\} \times \{0, 1\}\} \cup \{\{7, 9\} \times \{0, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}\} \cup \{\{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу. $\otimes$

Пример 1.1.9. Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$$

множества действительных чисел R^1 алгебраической операция $x * y = x^2$ и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

Решение. Пусть x, y, z – любые элементы из R^+ . Тогда, очевидно, $(\forall x \in R^+) x^2 \in R^+$, то есть операция $(*)$ является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$(\forall x \neq y) x * y = x^2 \neq y^2 = y * x,$$

то операция $(*)$ не является коммутативной. Далее, так как

$$(\forall x \neq y \neq z \in R^+) x * (y * z) = x^2 \neq (x * y) * z = (x * y)^2 = x^4,$$

то операция $(*)$ не является ассоциативной. $\otimes$

Пример 1.1.10. Ассоциативна ли на множестве действительных чисел R^1 операция $x * y = \sin x \cdot \sin y$.

Решение. Для определённой операции имеем:

$$(\forall x, y, z \in R) (x * y) * z = \sin(\sin x \cdot \sin y) \cdot \sin z,$$

$$x * (y * z) = \sin x \cdot \sin(\sin y \cdot \sin z).$$

Очевидно, что $(x * y) * z = x * (y * z)$ выполняется не для всех x, y, z , следовательно, операция $(*)$ свойством ассоциативности не обладает. $\otimes$

Пример 1.1.11. На множестве $M = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «меньше». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.

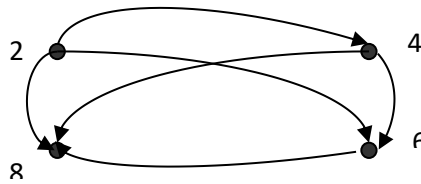


Рис. 1.8.3.

Решение. Отношение имеет вид:

$$2 < 4, 2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества $\mathfrak{R} \subset M \times M$ произведения множества M на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3. $\otimes$

Пример 1.1.12. Пусть $M = \{f, p, q\}$ и задано подмножество $\mathfrak{R}$ множества $M \times M$

$$\{\{f, p\}, \{f, q\}, \{f, f\}, \{p, f\}, \{q, f\}, \{p, q\}, \{p, p\}, \{q, p\}, \{q, q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

Решение. Очевидно, что для элементов множества $\mathfrak{R}$ истинны следующие высказывания:

$$1) \{f, f\}, \{p, p\}, \{q, q\} \in \mathfrak{R};$$

- 2) $\{f, p\} \wedge \{p, f\} \in \mathfrak{R}, \{f, q\} \wedge \{q, f\} \in \mathfrak{R},$
 $\{p, q\} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R};$
- 3) $\{f, p\} \in \mathfrak{R} \wedge \{p, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, q\} \in \mathfrak{R},$
 $\{f, q\} \in \mathfrak{R} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, p\} \in \mathfrak{R},$
 $\{p, f\} \in \mathfrak{R} \wedge \{f, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{p, q\} \in \mathfrak{R}.$

Поэтому отношение $\mathfrak{R}$ на множестве M , заданное множеством упорядоченных пар элементов M , рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\otimes$

Пример 1.1.13. Показать, что отношение включения $\subset$ является отношением порядка.

Р е ш е н и е. 1) Пусть X – произвольное множество. Так как всегда $X \subset X$, то отношение $\subset$ рефлексивно. 2) Пусть X, Y, Z – произвольные множества, для которых выполняются включения $X \subset Y$ и $Y \subset Z$. Если $x \in X$, то в силу $X \subset Y$ имеем $x \in Y$, а так как $Y \subset Z$, то и $x \in Z$. Поэтому $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$, то есть отношение $\subset$ транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y,$$

то отношение $\subset$ антисимметрично.

Отношение $\subset$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка. $\otimes$

Пример 1.1.14. Пусть функция $f : M_1 \rightarrow M_2$, где $M_1 \subset R^1$ и $M_2 \subset R^1$, задана формулой $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Требуется: найти множество определения M_1 и множество значений M_2 этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли f инъективной, сюръективной или биективной.

Р е ш е н и е. Множеством определения функции f является множество $M_1 = \{x \in R^1 : -1 \leq x \leq 1\}$, а множеством значений – множество $M_2 = M_1$, следовательно f осуществляет отображение M_1 на M_1 , то есть является преобразованием. Так как $(\exists x \in M_1) : f(x) = f(-x)$, то преобразование f не является инъективным, но очевидно, что f – сюръективно. Следовательно, отображение f не является биективным. $\otimes$

Пример 1.1.15. Доказать, что множество натуральных чисел N с операцией $(*) : x * y = \min\{x, y\}$ является полугруппой.

Решение. Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция $(*)$ является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x, y \in N) x * y = \min\{x, y\} \in N,$$

то операция $(*)$ является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x, y, z \in N) (x * y) * z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, \min\{y, z\}\}.$$

Операция $(*)$ ассоциативна. Поэтому $(N, *)$ – полугруппа. $\otimes$

Пример 1.1.16. Доказать, что множество положительных действительных чисел $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$, в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R) x + y \stackrel{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \stackrel{def}{=} x^\alpha,$$

является векторным пространством.

Решение. Согласно определению векторного пространства, в множестве R^+ должны выполняться две группы аксиом.

Аксиомы сложения:

$$1) (\forall x, y \in A) x + y = y + x \text{ (коммутативность);}$$

$$2) (\forall x, y, z \in M) x * (y * z) = (x * y) * z. \text{ (ассоциативность);}$$

$$3) (\exists 0 \in A): (\forall x \in A) x + 0 = x \text{ (существование нулевого элемента);}$$

$$4) (\forall x \in A) (\exists (-x) \in A): x + (-x) = 0 \text{ (существование противоположного элемента).}$$

Аксиомы умножения на число:

$$5) (\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$6) (\forall x, y \in A \wedge \forall \alpha \in R) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$7) (\forall x \in A) 1 \cdot x = x;$$

$$8) (\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Во множестве R^+ операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1) x \cdot y \in R^+ \wedge x^\alpha \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y \in R^+) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y, z \in R^+) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$(\forall x \in R^+) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как $(\forall x \in R^+) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, то

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, то

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как $X^1 = X$, то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как $X^{\alpha \cdot \beta} = (X^\beta)^\alpha$, то

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество R^+ с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел R^1 .

⊗

Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа

Предварительные сведения

Комплексными числами называются упорядоченные пары действительных чисел вида (a, b) , для которых операции сложения и умножения вводятся посредством определения результата их выполнения в соответствии со следующими аксиомами.

1. Два комплексных числа (a, b) и (c, d) считаются **равными** в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$, что при помощи логической символики записывается так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \quad (3.1)$$

2. **Сумма** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{def}{=} (a + c, b + d). \quad (3.2)$$

3. **Произведение** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b)(c, d) \stackrel{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \quad (3.3)$$

4. Комплексное число $(a, 0)$ отождествляется с действительным (вещественным) числом a : $(a, 0) \equiv a$. В частности, $(0, 0) \equiv 0$.

Числа вида $(0, b)$ называются **мнимыми числами**. Число $i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$ называется мнимой единицей, причём $i^2 = (-1, 0) \equiv -1$.

Нетрудно показать, что множество всех комплексных чисел является полем.

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = a + bi \equiv a + ib.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – **модуль** комплексного числа, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ – **аргумент** комплексного числа.

Операции над комплексными числами производятся путём обычного раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = (-1, 0) = -1$.

В тригонометрической форме операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Корни n -й степени из комплексного числа α существуют и все они даются формулой

$$\beta_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

при любом целом числе k .

Примеры с решением

Пример 1.2.1. Построить точку, изображающую комплексное число

$$z = -3 - 4i.$$

Решение. В данной задаче $z = a + bi = -3 - 4i$. Так как на комплексной плоскости $a = x$ и $b = y$, то точка, изображающая на комплексной плоскости число z , имеет координаты $x = -3$ и $y = -4$. $\otimes$

Пример 1.2.2. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$.

Решение. Модуль числа $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$. Точка z лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = \arctg \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$. $\otimes$

Пример 1.2.3. Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}.$$

Решение. Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы $i^2 = -1$. $\otimes$

Пример 1.2.4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $-2 < \operatorname{Im} z \leq 3$.

Решение. Так как на комплексной плоскости $\operatorname{Im} z = y$, то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями $y = -2$ и $y = 3$, причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат. $\otimes$

Пример 1.2.5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $|z-1| < 3$.

Решение. Положим $z = x + iy$. Тогда имеем $z-1 = (x-1) + iy$, откуда получаем

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3,$$

или

$$(x-1)^2 + y^2 < 9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке $(1; 0)$. $\otimes$

Пример 1.2.6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $\log_3 |z - 3i| < 1$.

Решение. Положим $z = x + iy$. Тогда для числа $z - 3i$ имеем

$$z - 3i = x + i(y - 3),$$

откуда получаем

$$|z - 3i| = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}.$$

Решая неравенство

$$\log_3 \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} < 1,$$

получаем $x^2 + (y - 3)^2 < 9$. Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке с координатами $(0; 3)$. $\otimes$

Пример 1.2.7. Представить комплексное число

$$z = -\cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

в тригонометрической форме.

Решение. Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. По формулам приведения имеем $-\cos \vartheta = \cos(\pi - \vartheta)$. Поэтому, полагая $r = 1$ и $\varphi = \pi - \vartheta$, получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \cos(\pi - \vartheta) + i \sin(\pi - \vartheta). \otimes$$

Пример 1.2.8. Представить комплексное число $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$ в тригонометрической форме.

Решение. 1) Находим модуль: $|z| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$.

2) Находим аргумент. Так как $\cos \varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Сле-

довательно, $z = 8 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]. \otimes$

Пример 1.2.9. Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{16} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Решение. Используя формулу умножения, получаем:

$$8 \cdot \frac{1}{16} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} i. \otimes$$

Пример 1.2.10. Выполнить деление комплексных чисел:

$$2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) : 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Решение. Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i. \otimes$$

Пример 1.2.11. Возвести комплексное $2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$ число в седь-

мую степень.

Решение. По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\left[2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right]^7 = 2^7 \left(\cos \left(-\frac{21\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{21\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= -64\sqrt{2} + 64\sqrt{2}i. \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $M = \{4, 8, 11, 22\}$. Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X - Y$, $Y - X$.

3. Пусть $X = [1, 3) \cup (5, 7]$ и $Y = [2, 6]$. Найти $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X - Y$, $Y - X$.

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x + 4 \geq 7x - 16, |x - 3| < 1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а) $X = \{x : 2 \leq x \leq 6\}, Y = \{y : 3 < y \leq 5\};$

б) $X = R, Y = \{y : -2 < y \leq 3\};$

в) $[0, 1] \times [0, 1];$

$$\text{г)} [1, 2] \times (-\infty, +\infty);$$

$$\text{д)} (0, +\infty) \times [-2, -3].$$

6. Доказать, что для произвольных множеств X, Y, Z справедливы равенства:

$$\text{а)} X \cup (X \cap Y) = X;$$

$$\text{б)} X \cap (X \cup Y) = X$$

$$\text{в)} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X);$$

$$\text{г)} (X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y;$$

$$\text{д)} Y \cup (X \setminus Y) = X \cup Y;$$

$$\text{е)} (X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z);$$

$$\text{ж)} (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z);$$

$$\text{з)} (X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z);$$

$$\text{и)} X \cup Y \subset Z \Rightarrow X \times Y = (X \times Z) \cap (Z \times Y).$$

7. Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8. Истинны или ложны для любых X, Y, Z следующие высказывания:

$$\text{а)} (X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z;$$

$$\text{б)} (X \neq Y \wedge Y \neq Z) \Rightarrow X \neq Z.$$

9. Найти множество истинности предиката: $\left\langle \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0 \right\rangle$.

10. Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{Корни системы} \\ \text{уравнений} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y = t - 1 \\ 2x - y = 3 - t \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{одновременно} \\ \text{положительны.} \end{array} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката: $\langle x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) > 0 \rangle$.

12. Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число X , что для любого числа Y справедливо равенство $X + Y = 0$ »;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества R действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а) N ; б) $N_{2k} = \{2k : k \in N\}$; в) $N_{2k-1} = \{2k-1 : k \in N\}$;

г) Z ; д) $Z_{2k} = \{2k : k \in Z\}$; е) R ; ж) $R - \{0\}$;

з) $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$; и) $R - Q$; к) $\{0, 1\}$.

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ множества действительных чисел R , и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1) $x * y = \frac{x+y}{2}$; 2) $x * y = x + y - 1$; 3) $x * y = x^2 y$;

4) $x * y = \sqrt{xy}$; 5) $x * y = |x - y|$; 6) $x * y = x^y$;

7) $x * y = x^2 + y^2$; 8) $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$.

15. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения « X равно Y », « X кратно Y » и « X больше Y на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества $X \times X$ задаёт соответствующее отношение?

а) $\{\{4, 2\}, \{6, 2\}, \{8, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}, \{8, 6\}, \{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$;

б) $\{\{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 6\}\}$;

в) $\{\{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$.

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел N с операциями $(*) : x * y = x$ и $(\circ) : x \circ y = 1$ является полугруппой;

б) множества всех целых чисел Z , всех рациональных чисел Q и всех действительных чисел R являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17. Найти действительные числа X и Y , если:

$$\text{а) } \frac{5x + 2xi - 3y - 3yi}{3 + 4i} = 2; \text{ б) } \frac{2u + 4i}{2x + y} - \frac{y}{x - i} = 0.$$

18. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

$$\begin{aligned} \text{а) } z &= \frac{(1 - 2i)^3}{i} + 4i^{16}; \text{ б) } z = \frac{3 - 2i}{1 - 4i} + i^9; \\ \text{в) } z &= \frac{5i - 2}{3i + 1} + i + \frac{8i - 3}{2 - i}; \text{ г) } z = \frac{1}{4} \left(\frac{17 + 31i}{7 + i} + \frac{12}{(1 + i)^4} \right) + i. \end{aligned}$$

19. Выполнить указанные действия:

- 1) $(1 + 2i)^6$;
- 2) $(2 + 3i) \cdot (4 - 5i) + (2 - 3i) \cdot (4 + 5i)$;
- 3) $(x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x + 1 + i) \cdot (x + 1 - i)$;
- 4) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$;
- 5) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2$;
- 6) $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$;
- 7) $\frac{(1 + 2i)^2 - (2 - i)^3}{(1 - i)^3 + (2 + i)^2}$;
- 8) $\frac{(1 + 2i)^3 + (1 - 2i)^3}{(2 - i)^2 - (2 + i)^2}$;
- 9) $\frac{(3 - 4i)(2 - i)}{2 + i} - \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{2 - i}$;

$$10) \frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i};$$

$$11) \left[\frac{1}{3} \left((1-i)^4 + \frac{7-24i}{4-3i} \right) + i \right] \frac{8}{(1+i)^2}.$$

20. Найти такие вещественные числа X и Y , что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-сопряжёнными:

$$а) z_1 = y^2 - 2y + xy - x + y + (x+y)i, z_2 = -y^2 + 2y + 11 - 4i;$$

$$б) z_1 = x + y^2 + 1 + 4i, z_2 = ixy^2 + iy^2 - 3.$$

21. Решить уравнения:

$$1) |z| + z = 1 + 2i;$$

$$2) 2|z| - 4az + 1 + ai = 0 \quad (a \in R);$$

$$3) |z| + z = 2 - i;$$

$$4) 3z^2 - (14 - 8i)z + 8(4 - 3i) = 0;$$

$$5) 2(2 - i)z^2 + (7 - i)z + 5(1 + i) = 0;$$

$$6) (2 + 4i)z^2 + 2z + 6 - 6i = 0;$$

$$7) z^4 - 12z^2 + 64 = 0.$$

22. Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} (1-i)x - (3+i)y = 4, \\ 5x - (4+2i)y = 4i; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (1-i)x + 3iy = 5, \\ 2x - (3-3i)y = 6. \end{cases}$$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = 5 - i; 3) z_3 = 2i; 4) z_4 = -\sqrt{2}i.$$

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = -2i; 3) z_3 = 5 - \sqrt{2}.$$

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

$$1) -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}; 2) 1 \leq |z+1| < 3; 3) |z+i| = 1;$$

$$4) \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 2 + i) \leq \pi; 5) \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi, \\ |1 - 2i - z| = 2; \end{cases}$$

$$6) |z - 1 - i| \geq |z - 2 + i|; 7) |z - 1 + 2i| \geq 3; 8) |z - 2i| + |z - i| = 1.$$

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

$$1) z = 16 - 16\sqrt{3}i; 2) z = -6\sqrt{3} - 6i; 3) z = (\sqrt{5} - 2)i.$$

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

$$1) z = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right);$$

$$2) z = 4 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right).$$

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) (-3 + \sqrt{3}i);$$

$$4\sqrt{3} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) : (\sqrt{3} - i);$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) (1 + i); (-\sqrt{5} + \sqrt{5}i)^3 (1 + i)^2; \frac{2\sqrt{3} - 2i}{(-1 + i)(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)}.$$

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

$$1) \sqrt{-6 + 6\sqrt{3}i};$$

$$2) \sqrt[3]{-13,5\sqrt{2} - 13,5\sqrt{2}i};$$

$$3) \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}.$$

30. Представив комплексные числа

$$z_1 = -1 - i, z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_3 = 1 + \sqrt{3}i$$

в тригонометрической форме, вычислить выражение $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Практическое занятие 1. Векторная алгебра

Предварительные сведения

Множество X абстрактных элементов (**векторов**) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называется **векторным пространством** над полем P , если для его элементов выполнены перечисленные ниже аксиомы.

1⁰. Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in X$ однозначно определена **операция сложения**, результатом которой является вектор, обозначаемый $\vec{x} + \vec{y} \in X$ и называемый **суммой** векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, причём операция сложения обладает следующими свойствами:

$$1) \left(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X \right) \left((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \right) - \text{ассоциативность};$$

$$2) \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X \right) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \text{коммутативность}.$$

2⁰. Существует однозначно определённый элемент $\vec{0} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

который называется **нуль-вектор**.

3⁰. Существует однозначно определённый вектор $-\vec{x} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0},$$

который называется **обратным к вектору** $\vec{x} \in X$.

4⁰. Для любого числа $\alpha \in P$ и для любого вектора $\vec{x} \in X$ определена операция **умножения вектора на число**, результатом которой является вектор $\vec{\alpha \cdot x} \in X$, называемый **произведением вектора $\vec{x}$ на число α** , причём операция умножения векторов на числа обладает следующими свойствами: $(\forall \alpha, \beta \in P)$ и $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X)$

$$1) 1 \cdot \vec{x} = \vec{x};$$

$$2) \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y};$$

$$3) (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x};$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}).$$

Система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X$ называется **линейно независимой**, если

$$\left(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \right) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** в противном случае.

Максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X^n,$$

(содержащая n векторов), называется **базисом векторного пространства**, само векторное про-

странство в этом случае называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается X^n .

Таким образом, в n-мерном векторном пространстве существует линейно независимая система,

содержащая только n векторов, а любая система, содержащая $n+1$ вектор будет уже линейно зависимой.

В реальном трёхмерном пространстве (в его математической модели) векторы – это направленные отрезки. Базис трёхмерного пространства R^3 состоит из трёх взаимно перпендикулярных векторов единичной длины:

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3,$$

которые образуют базис декартовой системы координат.

Любой вектор $\vec{X} \in X^n$ можно представить в виде разложения

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$$

по векторам как-либо выбранной линейно независимой системе n векторов

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n,$$

образующей базис пространства.

Алгебраическая операция сложения векторов и внешняя операция умножения вектора на число определяются так:

$$\vec{X} + \vec{Y} = \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) \vec{e}_i = (x^1 + y^1) \vec{e}_1 + (x^2 + y^2) \vec{e}_2 + \dots + (x^n + y^n) \vec{e}_n;$$

$$\alpha \vec{X} = \alpha \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = \alpha x^1 \vec{e}_1 + \alpha x^2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha x^n \vec{e}_n.$$

Линейная комбинация векторов находится по формуле:

$$\alpha \vec{X} + \beta \vec{Y} = \sum_{i=1}^n (\alpha x^i + \beta y^i) \vec{e}_i.$$

В трёхмерном пространстве скалярное произведение векторов является функцией, значение которой находится по формуле

$$\left(\vec{X}, \vec{Y} \right) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

или по эквивалентной формуле

$$\left(\begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi,$$

где **норма вектора**

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

а φ – угол, образованный приведёнными к общему началу векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В декартовой системе координат задана точка $A(1; 5; 3)$. Найти координаты точки B , расположенной симметрично точке $A(1; 5; 3)$ относительно координатной плоскости X^1OX^2 .

Решение. Координаты точки B по осям OX^1 и OX^2 такие же, как и у точки A , а координата по оси OX^3 имеет противоположный знак. Следовательно, $B(1; 5; -3)$. $\otimes$

Пример 2.1.2. В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{z} = 3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u} = 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \end{array} \right\}$ и взаимном расположении векторов.

Решение. Находим линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z} &= \\ &= 3\left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) + 2\left(2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) = \\ &= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве R^3 , заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости. $\otimes$

Пример 2.1.3. В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора $\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y}$.

Решение. Находим вектор

$$\begin{aligned} \vec{z} &= 2\vec{x} - 5\vec{y} = 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right) - 5\left(4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3\right) = \\ &= -18\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Находим норму вектора $\vec{z}$: $\|\vec{z}\| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-24)^2} = \sqrt{916}$. $\otimes$

Пример 2.1.4. На плоскости R^2 задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты $O(0; 0)$, $B(1; 2)$, $D(5; 0)$ (рисунок 1.1). Найти:

- 1) координаты вершины C ;
- 2) косинус угла между сторонами OB и OD ;
- 3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

Решение. 1) По определению координаты вершины C равны координатам вектора $\vec{OC}$ (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, а $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$, то $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

- 2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD}\right) = 5.$$

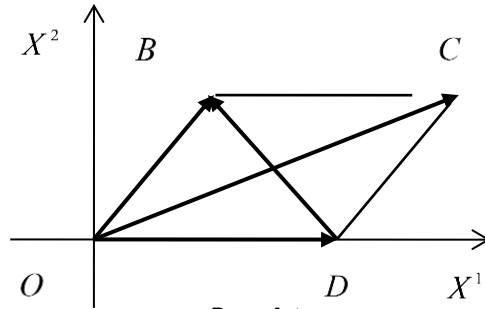


Рис. 1.:

3) Вычисляем длины векторов: $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\|\vec{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,236;$$

$$\|\vec{OD}\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим $\cos\{\vec{OB}, \vec{OD}\}$: $\cos\{\vec{OB}, \vec{OD}\} = \frac{5}{5 \cdot 2,236} \approx 0,447.$

5) Находим диагональ $\vec{DB}$:

$$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_1 = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

6) Далее, $\|\vec{OC}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$; $\|\vec{DB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

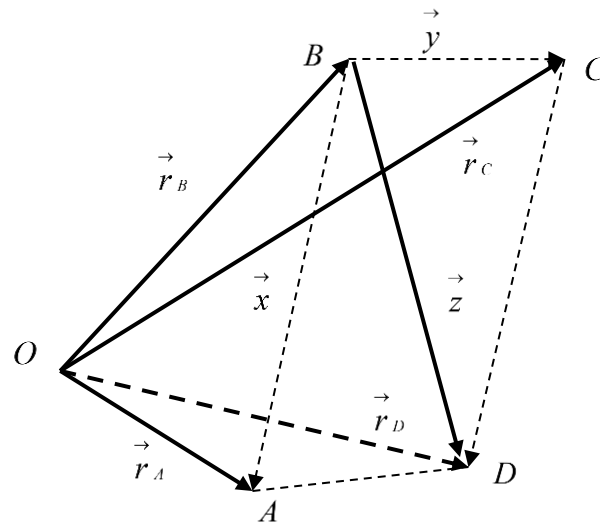
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\{\vec{OC}, \vec{DB}\} = \frac{(\vec{OC}, \vec{DB})}{\|\vec{OC}\| \cdot \|\vec{DB}\|} = \frac{(-4) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \otimes$$

Пример 2.1.5. Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\vec{r}_A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{r}_B = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{r}_C = -7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3;$$

Р е ш е н и е. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.



Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{x}, \quad \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{z},$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{z} = \vec{r}_B + \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины. $\otimes$

Пример 2.1.6. В пространстве R^2 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \sqrt{7}\vec{e}_2, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + \sqrt{24}\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор $\vec{z}$, направленный по биссектрисе угла $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Находим длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = 4;$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{24})^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{3}{4} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \vec{e}_2; \quad \vec{e}_y = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{5} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5} \vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$:

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20} \vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7} + 8\sqrt{6}}{20} \vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому

найденный вектор $\vec{z}$ является искомым вектором. $\otimes$

Пример 2.1.7. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Решение. 1) Находим длину вектора:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2) Находим орт вектора: $\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}} \vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}} \vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}} \vec{e}_3.$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}. \quad \otimes$$

Пример 2.1.8. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Найти скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$ двумя способами.

Решение. 1. Находим линейные комбинации $\vec{x} - 2\vec{y}$ и $3\vec{x} + \vec{y}$:

$$\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - 2\left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = -\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x} + \vec{y} = 3\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) + \left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(-\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3\right) = \\ = -4 + 20 + 80 = 96. \end{aligned}$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right) &= \left(\vec{x}, 3\vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(-2\vec{y}, 3\vec{x}\right) + \left(-2\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\left(\vec{x}, \vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) - 6\left(\vec{y}, \vec{x}\right) - 2\left(\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\|\vec{x}\|^2 - 5\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} - 2\|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи. $\otimes$

Пример 2.1.9. Дано: $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2\sqrt{5}$, $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} = \frac{\pi}{4}$. Найти

$$\left(\vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y}\right).$$

Решение. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\begin{aligned}
 \left(\vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y} \right) &= 3\|\vec{x}\|^2 - \left(\vec{x}, \vec{y} \right) + 9\left(\vec{y}, \vec{x} \right) - 3\|\vec{y}\|^2 = \\
 &= 3\|\vec{x}\|^2 + 8\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} - 3\|\vec{y}\|^2 = -33 + 24\sqrt{10}. \otimes
 \end{aligned}$$

Пример 2.1.10. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_3 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ образуют новый базис в пространстве R^3 .

2) Найти координаты вектора $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ относительно базиса $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$.

Решение. 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространства R^3 .

2) Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ относительно нового базиса записываем разложение вектора $\vec{x}$ по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$. Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$. Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

Пример 2.1.11. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y},$$

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}, 2\vec{z} \right)$:

$$\left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) = \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) \right) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 2.$$

2) находим вектор $\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y} = 2 \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right) + \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3. \end{aligned}$$

3) Находим скалярное произведение $\left(2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \right)$:

$$\begin{aligned} \left(2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \right) &= \left(2 \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right), \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) \right) = \\ &= \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) = 4 + 4 - 6 = 2. \end{aligned}$$

4) Находим вектор $\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2 \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 22\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3. \end{aligned}$$

5) Находим расстояние между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\rho\left(\begin{smallmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{smallmatrix}\right) = \left\| \begin{smallmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{smallmatrix} \right\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9. \otimes$$

Пример 2.1.12. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки $A(2; 4; 6)$, $B(1; 3; 5)$, $C(0; 2; 3)$. Найти длины сторон треугольника

ABC , косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$ на

направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

Решение. 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\vec{AC} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3;$$

$$\vec{BC} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника ΔABC :

$$\left\| \vec{AB} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3};$$

$$\left\| \vec{AC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17};$$

$$\left\| \vec{BC} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \vec{x} & \vec{y} \end{smallmatrix} \right)}{\left\| \vec{x} \right\| \cdot \left\| \vec{y} \right\|} = \frac{x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}.$$

$$\cos\left\{\vec{AB}, \vec{AC}\right\} = \frac{\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA}, \vec{BC}\right\} = \frac{\left(\vec{BA}, \vec{BC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{-4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA}, \vec{CB}\right\} = \frac{\left(\vec{CA}, \vec{CB}\right)}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|} = \frac{10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$:

$$\text{Pr}_{\vec{z}}\left\{\vec{AB} + \vec{AC}\right\} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-4) \cdot (-5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{30}}. \otimes$$

Пример 2.1.13. Пусть на плоскости $X^1 O X^2$ даны две точки $A_1(x_1^1; x_1^2)$ и $A_2(x_2^1; x_2^2)$

. Найти координаты точки $A(x^1; x^2)$, делящей отрезок $A_1 A_2$ в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$.

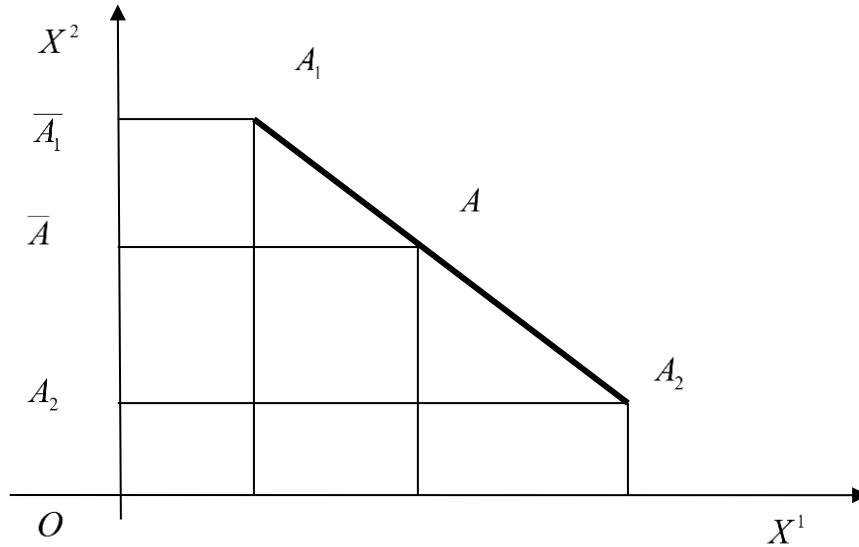
Решение. Предположим, что отрезок $A_1 A_2$ не параллелен оси $O X^1$. Точки A_1, A, A_2 спроектируем на оси $O X^1$, и $O X^2$ (рисунок).

Имеем по условию задачи

$$\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{\overline{A_1 A}}{\overline{A A_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1 A} = |x_1^2 - x^2|, \overline{A A_2} = |x^2 - x_2^2| \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|}.$$



Точка $\overline{A}$ лежит между точками A_1 и A_2 , поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left(x_1^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2 \right)}{\lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки A :

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left(x_1^1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1 \right)}{\lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения.

Прямая линия и плоскость

Предварительные сведения

Векторное произведение векторов как результат алгебраической операции умножения векторов

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^3 y^i \vec{e}_i = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

находится по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Смешанное произведение векторов – это функция, значение которой находится по формуле

$$\left(\left[\vec{x}, \vec{y} \right], \vec{z} \right) = x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 - x^1 y^3 z^2 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1.$$

Параметрические уравнения прямой линии в трёхмерном пространстве имеют вид

$$x^i = x_0^i + t \cdot a^i,$$

где $i = 1, 2, 3$, x_0^i – координаты опорной точки, a^i – координаты направляющего вектора,

$t \in (-\infty, +\infty)$ – параметр.

Параметрические уравнения плоскости в трёхмерном пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + a_1^1 \cdot t_1 + a_2^1 \cdot t_2, \\ x^2 = x_0^2 + a_1^2 \cdot t_1 + a_2^2 \cdot t_2, \\ x^3 = x_0^3 + a_1^3 \cdot t_1 + a_2^3 \cdot t_2. \end{cases}$$

Неявное уравнение плоскости в трёхмерном пространстве записывается в виде

$$A \cdot x^1 + B \cdot x^2 + C \cdot x^3 + D = 0,$$

где коэффициенты при неизвестных суть координаты **нормального** вектора плоскости

$$\vec{N} = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3,$$

удовлетворяющего условию

$$\left(\vec{N}, \vec{x} \right) = 0,$$

где $\vec{X}$ – произвольный вектор на плоскости.

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Решение. Если в некоторой декартовой системе координат векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3, \quad \vec{y} = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[\vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \left[\vec{x}, \vec{y} \right] &= ((-2) \cdot (-6) - (-1) \cdot 1) \vec{e}_1 + ((-1) \cdot (-2) - 3 \cdot (-6)) \vec{e}_2 + \\ &+ (3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) \vec{e}_3 = 13 \vec{e}_1 + 20 \vec{e}_2 - \vec{e}_3. \end{aligned}$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{570}. \quad \otimes$$

Пример 2.2.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1 \text{ и } \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned} \left[\vec{x}, \vec{y} \right] &= \left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b} \right] = 3 \left[\vec{a}, \vec{a} \right] + \left[\vec{a}, \vec{b} \right] + \\ &+ 9 \left[\vec{b}, \vec{a} \right] + 3 \left[\vec{b}, \vec{b} \right] = -8 \left[\vec{a}, \vec{b} \right]. \end{aligned}$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S = \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\| = 8 \left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\| = 8 \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \otimes$$

Пример 2.2.3. Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Решение. Предлагается решить задачу самостоятельно. $\otimes$

Пример 2.2.4. Получить уравнение плоскости $H^2 \subset R^3$, проходящей через начало координат O и через две точки $M_1(4; -2; 1)$, $M_2(2; 4; -3)$.

Решение. Радиус-векторы точек M_1 и M_2

$$\vec{x} \equiv \vec{OM}_1 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} \equiv \vec{OM}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \left[\vec{OM}_1, \vec{OM}_2 \right] \equiv \left[\vec{x}, \vec{y} \right] = \\ &= (x^2y^3 - x^3y^2)\vec{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\vec{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\vec{e}_3 =: \\ &= [(-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 4]\vec{e}_1 + [1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3)]\vec{e}_2 + [4 \cdot 4 - (-2) \cdot 2]\vec{e}_3 = \end{aligned}$$

$$= 2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 + 20\vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$$

текущей точки M плоскости её нормальному вектору

$$\left(\vec{N}, \vec{OM} \right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \otimes$$

Пример 2.2.5. Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0, \quad x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left\{ \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\} &= \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2 \right)}{\left\| \vec{N}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{N}_2 \right\|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}. \otimes$

Пример 2.2.6. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0, \quad x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

Решение. Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2 \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3 = \\ &= [1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)] \vec{e}_1 + [1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3)] \vec{e}_2 + [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] \vec{e}_3 = \\ &= -2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости $X^1 O X^3$, для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^3 = 2, \\ x^1 - 3x^3 = -6 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение $x_0^1 = 0$, $x_0^2 = 0$, $x_0^3 = 2$.

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 2}{-2}. \otimes$$

Пример 2.2.7. Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4},$$

и плоскости с уравнением $x^1 + x^2 + 2x^3 - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left(\vec{N}, \vec{l} \right) = \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = -6 \neq 0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны.

Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1 = 2 + t, \\ x^2 = 3 + t, \\ x^3 = -1 - 4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра t_0 , соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим x^1, x^2, x^3 из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём $t_0 = -1$. Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1 = 1, x_0^2 = 2, x_0^3 = 3. \otimes$$

Пример 2.2.8. Найти расстояние от точки $M(1; 0; 1)$ до плоскости H^2 с уравнением $4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0$.

Р е ш е н и е. Расстояние от точки M до плоскости – это длина вектора $\vec{M_0M}$ с начальной точкой M и конечной точкой M_0 – проекцией точки M на плоскость H^2 .

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1; 0; 1)$ перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор

плоскости $\vec{l} = \vec{N} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2}{6} = \frac{x^3 - 1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 4t, \\ x^2 = 6t, \\ x^3 = 1 + 4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0 = \frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции M_0 точки $M(1; 0; 1)$ на плоскость H^2 :

$$x^1 = 2, x^2 = \frac{3}{2}, x^3 = 2.$$

Вектор

$$\vec{M_0M} = (2-1)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2}-0\right)\vec{e}_2 + (2-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho(M, H^2) = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \otimes$$

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

Предварительные сведения

Аддитивная абелева группа E называется **абстрактным векторным пространством** (над полем P), если на ней определена внешняя бинарная операция – **умножение элементов группы E на элементы поля P** , то есть $(\forall x \in E)$ и $(\forall \alpha \in P)$ $(\exists \alpha \cdot x \in E)$, причём выполняются следующие аксиомы:

$$1) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$2) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$3) 1 \cdot x = x;$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Простейшим примером векторного пространства является множество обычных трёхмерных векторов, которое изучалось выше. Здесь отметим лишь, что из определения векторного пространства следует, что

$$(\forall x \in E) -x = (-1)x,$$

где 1 – единица поля P , и

$$0x = 0.$$

В последнем равенстве 0 в левой части – это нуль поля P , 0 в правой части равенства – это нулевой элемент из группы E . Элементы векторного пространства называются **абстрактными векторами**.

Система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ называется **линейно независимой**, если

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** – в противном случае. Если векторное пространство содержит линейно независимую систему из n векторов, а любая система, содержащая $n + 1$ векторов, уже линейно зависима, то говорят, что пространство E является **n мерным векторным пространством**. Любая линейно независимая система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$ из n векторов образует **базис** пространства. Любой вектор $x \in E$ можно представить в виде разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

где коэффициенты разложения называются **координатами** вектора относительно заданного базиса. Подмножество $L \in E$ называется **линейным многообразием** в E , если

$$(\forall \alpha, \beta \in P)(x, y \in L) \Rightarrow (\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in L).$$

Остальные определения теории векторных пространств, в том числе евклидовых, приведены выше на страницах 25-28.

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Пусть P – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля P :

$$1) (\forall |a\rangle, |b\rangle \in P^n) |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \$$$

$$2) (\forall |a\rangle \in P^n) \text{ и } (\forall \alpha \in P) \alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Показать, что множество P^n является n -мерным векторным пространством.

Р е ш е н и е. Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

Аксиомы сложения.

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле P , действительно

$$\begin{aligned} [|a\rangle + |b\rangle] + |c\rangle &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \dots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \dots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \dots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \right] = |a\rangle + [|b\rangle + |c\rangle]. \end{aligned}$$

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле P , действительно

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \dots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = |b\rangle + |a\rangle$$

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$(\forall |a\rangle \in P^n) |a\rangle + |0\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ \dots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$(\forall |a\rangle \in P^n) -|a\rangle = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle + (-|a\rangle) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ \dots \\ a_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аксиомы умножения вектор-столбца на числа. Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

$$1) (\forall |a\rangle \in P^n) \text{ и } (\forall \alpha \in P)$$

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha(a_1 + b_1) \\ \alpha(a_2 + b_2) \\ \dots \\ \alpha(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};$$

2) $(\forall \alpha, \beta \in P)$

$$(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)a_1 \\ (\alpha + \beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha + \beta)a_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle;$$

$$3) 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix};$$

$$4) (\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_1) \\ \alpha(\beta a_2) \\ \dots \\ \alpha(\beta a_n) \end{pmatrix} = \dots = \alpha[\beta|a\rangle],$$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество P^n является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца $|a\rangle$, он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или *канонический* базис в векторном пространстве P^n .

Теперь очевидно, что множество P^n является n -мерным векторным пространством. $\otimes$

Пример 2.3.2. Показать, что если система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\}$ линейно независима, то

и любая её подсистема также линейно независима.

Решение. Пусть $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ – подсистема данной системы, то есть $m < n$.

Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ линейно за-

висима. Тогда можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Учитывая свойство нуля вектора

$$\left(\forall \vec{x} \in X \right) \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\vec{0} = 0 \vec{x}_{m+1} + \dots + 0 \vec{x}_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m + 0 \vec{x}_{m+1} + \dots + 0 \vec{x}_n = \vec{0},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависи-

мость векторов системы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости *произвольной* подсистемы

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \text{ линейно независимой системы } \left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\} \text{ не верно. } \otimes$$

Пример 2.3.3. Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

Решение. Необходимость. Если из двух векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ хотя бы один равен нулю

вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть

система $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению

найдутся такие числа $\alpha, \beta \in R$, что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа не равны нулю одновременно.

Пусть $\beta \neq 0$. Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) \vec{x}.$$

Обозначая $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть теперь векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, покажем, что система

$\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть $\vec{v} \neq \vec{0}$, тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu} \vec{v} \vec{x},$$

откуда получаем

$$\vec{v} \vec{y} = \lambda \vec{v} \vec{x},$$

или

$$\mu \vec{x} + \vec{v} \vec{y} = \vec{0},$$

где $\mu = -\lambda \nu$. Так как $\lambda \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то система векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.3.4. Показать, что система трёх векторов пространства R^3 линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

Решение. Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

Необходимость. Пусть система $\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$ линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа $\alpha, \beta, \gamma \in R$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}.$$

Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x} + \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y}.$$

Приложив векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ к общей точке O , легко видеть, что вектор $\vec{z}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x}, \vec{b} = \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ компланарны, покажем, что система $\left\{ \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right\}$ линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{X} = \mu \vec{Y} + \lambda \vec{Z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов $\left\{ \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right\}$.

⊗

Пример 2.3.5. Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + \alpha_3 |a_3\rangle + \alpha_4 |a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов. $\otimes$

Пример 2.3.6. Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов $\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ можно выразить в виде разложения

по векторам подсистемы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$.

Решение. Так как подсистема $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ – максимальная по числу векторов

линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор

$\vec{a}_{m+1}$, получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие не равные одновременно нулю числа

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве $\alpha_{m+1} \neq 0$ так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ одновременно равны нулю. Но тогда система

векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}, \dots, \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение. $\otimes$

Пример 2.3.7. Дана система функций

$$\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Решение. По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \quad (\forall t \in (-\infty, +\infty))$$

влечёт за собой выполнение условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим СЛАУ для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого положим в тождестве $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество по t и полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Таким образом, система функций $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Поэтому множество функций вида

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций. $\otimes$

Пример 2.3.8. Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему

векторов $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset E^4$, заданных в некотором ортонормированном базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$ своими разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

Р е ш е н и е. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{g}_2 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_2 \right)}{\left\| \vec{a}_1 \right\|^2} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \\ &- \frac{1}{4}(-4) \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4; \\ \vec{a}_3 &= \vec{g}_3 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_3 \right)}{\left\| \vec{a}_1 \right\|^2} \vec{a}_1 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{g}_3 \right)}{\left\| \vec{a}_2 \right\|^2} \vec{a}_2 = \\ &= 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) - \\ &- \left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4. \end{aligned}$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4} \left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{ \vec{e}_{a1}, \vec{e}_{a2}, \vec{e}_{a3} \right\}$ ортонормиро-

ванная. $\otimes$

Пример 2.3.9. Показать, что линейная оболочка $L\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$, где элементы L вычисля-

ются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2 \right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

Решение. Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0;$$

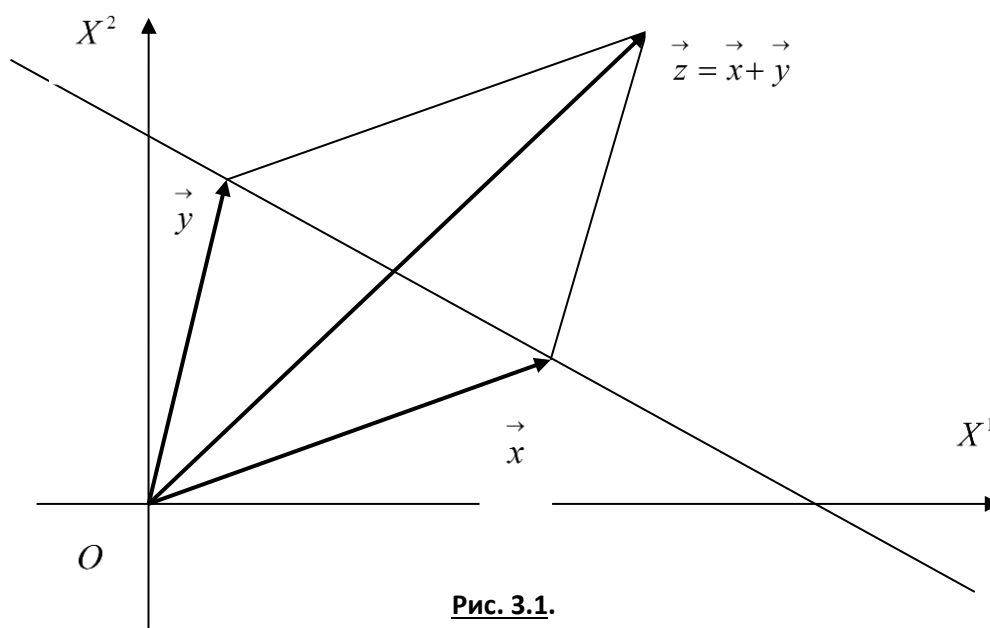
$$\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2 \end{matrix} \right\}$ является ортонормированной и, следовательно, её можно

принять за один из базисов линейного многообразия L . $\otimes$

Пример 2.3.10. Пусть X – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства R^2 .

Решение. 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).



Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству X , так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество X не является векторным подпространством пространства R^2 .

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству X и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество X является векторным подпространством пространства R^2 . $\otimes$

Пример 2.3.11. Дана система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}.$$

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^1$, является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Решение. Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке $(-\pi, \pi)$.

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях $t \in (-\pi, \pi)$ получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0, t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ линейно независима на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$, что и доказывает требуемой. $\otimes$

Пример 2.3.12. Показать, что система векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E^4

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \quad (1)$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства E^4 .

Решение. Находим значение скалярного произведения:

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 0.$$

Следовательно, система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова E^4 , найдём векторы

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(\vec{x}, \vec{a}_1 \right) = 0, \\ \left(\vec{x}, \vec{a}_2 \right) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая X^3 и X^4 за свободные неизвестные, то есть, например, полагая $X^3 = a$ и $X^4 = b$. Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|X\rangle = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

или

$$\vec{X} = a \vec{a}_3 + b \vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ ортогональна и в совокупно-

сти с векторами $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ также образует ортогональную систему $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$. Для

получения ортонормированного базиса пространства E^4 нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\|\vec{a}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_4 \right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4 \right\}$ ортонормиро-

вана. $\otimes$

Пример 2.3.13. В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство H^2 пространства E^4 . Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства H^2 .

2) Найти базис $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ и построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$ к подпростран-

ству H^2 , записать параметрические уравнения ортогонального дополнения $H^{2\perp}$.

Р е ш е н и е. 1) Координаты векторов системы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ непропорциональны – векторы

неколлинеарны. Следовательно, система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ линейно независимая. Векторы си-

стемы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2,$$

где $\vec{x}_0$ – вектор сдвига многообразия. Если $\vec{x}_0 = \vec{0}$, то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения $H^\perp$. Так как система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – базис

подпространства H , то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left(\vec{a}_1, \vec{x} \right) = 0, \\ \left(\vec{a}_2, \vec{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённая, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a и b – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ образуют линейно независимую

систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}.$$

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$, параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства H^2 :

$$\begin{cases} x^1 = \frac{9}{5}\tau_1 - \frac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \frac{3}{5}\tau_1 + \frac{1}{5}\tau_2, \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases} \otimes$$

Пример 2.3.14. В аффинном пространстве A^4 координатами относительно репера

$$\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \text{ заданы четыре точки:}$$

$$A_1(1; 4; 2; 0), A_2(3; 7; 3; 2), A_3(2; 6; 3; -1), A_4(1; 4; 5; 2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Р е ш е н и е. Обозначим точку A_1 через $O^* \equiv A_1$ и примем её за начало репера на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= O^* A_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= O^* A_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= O^* A_4 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.\end{aligned}\tag{1}$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из

этого результата заключаем, что система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ линейно независима и её

можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{ O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$$

на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Пусть $M(x^1; x^2; x^3; x^4)$ – текущая точка гиперплоскости, координаты которой определены относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ вмещающего пространства A^4 . Тогда её

радиус-векторы $\vec{OM}$ относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ пространства A^4 и

$\vec{O^*M}$ относительно репера $\left\{ \vec{O^*}, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \right\}$ гиперплоскости $H^3 \subset A^4$ могут быть, со-

ответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} \vec{x} \equiv \vec{OM} &= x^1 \vec{e_1} + x^2 \vec{e_2} + x^3 \vec{e_3} + x^4 \vec{e_4}, \\ \vec{O^*M} &= t_1 \vec{a_1} + t_1 \vec{a_2} + t_1 \vec{a_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{O^*M}, \quad (3)$$

где

$$\vec{x_0} \equiv \vec{OO^*} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3}. \quad (4)$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем *параметрические уравнения*

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \quad (5)$$

гиперплоскости $H^3 \subset A^4$. Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра t_1, t_2, t_3 из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \quad (6)$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2x^1 - x^2 + 2; \\ t_2 &= -3x^1 + 2x^2 - 5; \end{aligned}$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости

$H^3 \subset A^4$, проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы,

определители и СЛАУ

Предварительные сведения

Оператор – это отображение $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$. Оператор называется линейным, если $(\forall \alpha, \beta \in R^1) \wedge \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X^m \right): \hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \hat{A}\vec{x} + \beta \hat{A}\vec{y}$.

При фиксированных базисах в

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset X^m \text{ и } \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n \right\} \subset Y^n$$

линейный оператор имеет своим представителем **матрицу**:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы по столбцам находятся как коэффициенты разложения образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$ по базису пространства Y^n .

Действия с линейными операторами определяются следующим образом. Если

$$\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n, \hat{B}: X^m \rightarrow Y^n,$$

то

$$\hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Матричные элементы матрицы суммы операторов вычисляются по формуле $c_j^i = a_j^i + b_j^i$.

Произведение оператора на число

$$\hat{T} = \alpha \hat{A} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C} \vec{x} = \alpha \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Матричные элементы матрицы произведения на число вычисляются по формуле $c_j^i = \alpha a_j^i$.

Если $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$ и $\hat{B}: X^m \rightarrow Y^n$, то композиция операторов $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{A}$:

$$\hat{C} \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = \hat{B} \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Элементы матрицы композиции линейных операторов находятся по формуле

$$c_k^i = \sum_{j=1}^n b_j^i a_k^j.$$

Формула разложения определителя матрицы оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ по элементам любой строки или любого столбца определителя, например для столбца с номером k , имеет вид:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_k^i M_k^i = \\ &= (-1)^{1+k} a_k^1 M_k^1 + (-1)^{2+k} a_k^2 M_k^2 + \dots + (-1)^{n+k} a_k^n M_k^n. \end{aligned}$$

Примеры с решением

Пример 2.4.1. В пространстве R^3 оператор $\hat{P}$ действует по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору $\vec{x}$ его координатную проекцию на ось OX^1 . Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

Решение. покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P} \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\begin{aligned}
& \hat{P} \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \\
& = \hat{P} \left[\alpha_1 \left(x_1^1 \vec{e}_1 + x_1^2 \vec{e}_2 + x_1^3 \vec{e}_3 \right) + \alpha_2 \left(x_2^1 \vec{e}_1 + x_2^2 \vec{e}_2 + x_2^3 \vec{e}_3 \right) \right] = \\
& = \hat{P} \left[\left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \right) \vec{e}_1 + \left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \right) \vec{e}_2 + \left(\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 \right) \vec{e}_3 \right] = \\
& = \left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \right) \vec{e}_1 = \alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1 + \alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1 = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.
\end{aligned}$$

Определение выполняется и оператор $\hat{P}$ линейный.

Действуя оператором $\hat{P}$ последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{P} \vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3, \\
\hat{P} \vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3, \\
\hat{P} \vec{e}_3 &= 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{P}$ называется *оператором ортогонального проектирования на ось OX^1* . $\otimes$

Пример 2.4.2. Показать, что оператор $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$, действующий по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{A} \vec{x} = \left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b} \right] \right],$$

где фиксированные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями

$$\vec{a} = 2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\begin{aligned}\hat{A}\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}\right) &= \left[\vec{a}, \left[\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{b}\right]\right] = \left[\vec{a}, \alpha \left[\vec{x}, \vec{b}\right] + \beta \left[\vec{y}, \vec{b}\right]\right] = \\ &= \alpha \left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right] + \beta \left[\vec{a}, \left[\vec{y}, \vec{b}\right]\right] = \alpha \hat{A}\vec{x} + \beta \hat{A}\vec{y}.\end{aligned}$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

- 1) использовать свойства векторного произведения;
- 2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;
- 3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}, \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}, \vec{B}\right).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A}\vec{e}_k = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_k, \vec{b}\right]\right]$$

по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Пусть $k = 1$, тогда получаем:

$$\left[\vec{e}_1, \vec{b}\right] = (0 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \vec{e}_1 + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \vec{e}_2 + (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_1, \vec{b}\right]\right] = -5 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_2, \vec{b}\right]\right] = -4 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4 \vec{e}_3,$$

$$\hat{A} \vec{e}_3 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_3, \vec{b} \right] \right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.4.3. Показать, что если $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ – линейно зависящая система векторов, то и система образов $\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ при действии линей-

ного оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ также линейно зависящая.

Решение. Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ равны нулю одновременно. Действуя на обе части

последнего равенства оператором $\hat{A}$, в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A} \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \hat{A} \vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ есть ненулевые, то система образов

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\}$$

линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.4.4. Показать, что если система

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$$

при действии оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ линейно независимая, то и сама система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ также линейно независима.

Решение. Для системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ потребуем выполнения равенства

нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

то есть предположим, что система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ линейно зависима.

Действуя на обе части равенства оператором $\hat{A}$, получим

$$\alpha_1 \hat{A} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A} \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \hat{A} \vec{x}_m = \vec{0},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$$

неверное. Система линейно независима. $\otimes$

Пример 2.4.5. Пусть $\vec{x} \in R^3$ – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} \equiv \left(\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right) \vec{x}$$

операторов $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$, представленных в каноническом базисе пространства R^3 своими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 32 & 22 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 14 \\ 15 & 12 & 23 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора $\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$, для чего находим координаты образа вектора:

$$(AB - BA) \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^1 + 18x^2 + 2x^3 \\ -7x^1 + 4x^2 + 3x^3 \\ -2x^1 - 12x^2 - 22x^3 \end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} &= \left(\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = (18x^1 + 18x^2 + 2x^3) \vec{e}_1 + \\ &+ (-7x^1 + 4x^2 + 3x^3) \vec{e}_2 + (-2x^1 - 12x^2 - 22x^3) \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

Пример 2.4.6. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ на произвольный вектор $\vec{X} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{X}$.

Решение. Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 \\ a_2^1 x^1 + a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3 \\ a_3^1 x^1 + a_3^2 x^2 + a_3^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$\begin{aligned} 2A + AB &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\rightarrow$

Находим координаты образа вектора $\vec{X}$, используя координатную форму записи:

$$(2A + AB) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \\ 3x_2 + 10x_3 \\ 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x} = (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_1 + (3x_2 + 10x_3)\vec{e}_2 + (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.4.7. Найти $\left(\hat{A} \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \hat{B} \vec{y} \right)$, если

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3; \quad \vec{y} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Находим вектор $\hat{A} \vec{x} + \vec{y}$ в координатном представлении:

$$A|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} \vec{x} + \vec{y} = 22\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор $\vec{x} + \hat{B} \vec{y}$ в координатном представлении:

$$|\vec{x}\rangle + B|\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} + \hat{B} \vec{y} = -19\vec{e}_1 - 17\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left(\hat{A} \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \hat{B} \vec{y} \right) = 22 \cdot (-19) + 16 \cdot (-17) + 13 \cdot (-8) = -794. \otimes$$

Пример 2.4.8. Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Р е ш е н и е. 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное x^1 и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные x^3, x^4 за свободные неизвестные и, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$, выражаем через них x^2, x^1 , имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2 = -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}x^4, \quad x^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b, \quad x^3 = a, \quad x^4 = b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, |x_0\rangle = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку” $|x_0\rangle$ и имеющее направляющие векторы $|a\rangle$ и $|b\rangle$. $\otimes$

Пример 2.4.9. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент.

Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 45 - 5 = 40. \otimes$$

Пример 2.4.10. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель матрицы $\det A = 5 \neq 0$. Матрица A невырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_1^1 = 1; A_2^1 = -3; A_3^1 = 1$$

$$A_1^2 = 3; A_2^2 = 1; A_3^2 = -2;$$

$$A_1^3 = -2; A_2^3 = 1; A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ подтверждает правильность расчёта. $\otimes$

Пример 2.4.11. Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы:

$$A_1^1 = 4, A_2^1 = -2, A_1^2 = -3, A_2^2 = 1.$$

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{adj A}{\det A} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = 9, x^2 = -3. \otimes$$

Пример 2.4.12. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем матричное уравнение вида $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу A^{-1} и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде $X = A^{-1}B$.

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы A равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_1^1 = 3, A_2^1 = -1, A_1^2 = -5, A_2^2 = 2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение. $\otimes$

Пример 2.4.13. Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

Решение. 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2. \end{aligned}$$

Аналогично находим x^2 и x^3 :

$$x^2 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad x^3 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3. \otimes$$

Пример 2.4.14. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый (старый) базис

пространства X^4 и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T} : X^4 \rightarrow X^4$ в этом базисе. Найти матрицу линейного опера-

тора $\hat{T}$ в новом базисе

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{a}_1, \vec{g}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{g}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{g}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как $\det A = 1$. Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= 1; & A_2^1 &= -1; & A_3^1 &= 0; & A_4^1 &= 0; \\
A_1^2 &= 0; & A_2^2 &= 1; & A_3^2 &= -1; & A_4^2 &= 0; \\
A_1^3 &= 0; & A_2^3 &= 0; & A_3^3 &= 1; & A_4^3 &= -1; \\
A_1^4 &= 0; & A_2^4 &= 0; & A_3^4 &= 0; & A_4^4 &= 1.
\end{aligned}$$

Теперь обратная матрица находится по формуле $\hat{A} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ и имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора T преобразуется по формуле

$T' = (A^{-1})^T T A^T$. Проводя вычисления, получаем матрицу T' :

$$\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \otimes
\end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

Предварительные сведения

Ядро оператора $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$ – это множество векторов в X^m , удовлетворяющих условию

$$\hat{A} \vec{x} = \vec{0}.$$

Размерность ядра – **дефект** оператора. Множество значений оператора – это множество образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$. Размерность множества значений оператора – **ранг** оператора.

Примеры с решением

Пример 2.5.1. Найти ядро $K(\hat{A})$ линейного оператора $\hat{A}: X^4 \rightarrow X^3$, заданного в

некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset X^4, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению ядро

$$K(\hat{A}) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \hat{A}\vec{x} = \vec{0} \right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 0, \\ 3 \cdot x^2 + x^3 + 2 \cdot x^4 = 0, \\ -x^2 - 2 \cdot x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, метом Гаусса, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Принимая неизвестное x^4 за свободное неизвестное и, полагая $x^4 = t$, где t может принимать произвольные значения из R , получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t, x^2 = -\frac{4}{5}t, x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t\vec{a}; t \in R \right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \frac{2}{5}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием $L\left\{\vec{a}\right\}$ с

направляющим вектором $\vec{a}$. $\otimes$

Пример 2.5.2. Пусть Y – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

Решение. Сначала покажем, что множество X квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве X алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C).$$

Во множестве X имеется нейтральный элемент

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & -a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве X каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц Y вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства X . Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства X . Операции сложения и умножения на число не нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1^1 & \alpha \cdot a_2^1 \\ \alpha \cdot a_2^1 & \alpha \cdot a_2^2 \end{pmatrix} \otimes$$

Пример 2.5.3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. **Первый метод** (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству $r(A) \leq \min(m, n) = 3$ (n — число строк, m — число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ $\cong$ использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы $r = 2$.

2. **Второй метод** (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы

$$r(A) = 2. \otimes$$

Пример 2.5.4. Найти ранг $r(\hat{A})$, множество значений $\hat{A}(X^5)$ и дефект $d(\hat{A})$ линей-

ного оператора $\hat{A}: X^5 \rightarrow X^3$, если этот оператор в некоторых базисах пространств X^5 и X^3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пусть отмечены базисы

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\} \subset X^5, \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $r(A) = 3$.

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3 = -2\vec{g}_1 + 10\vec{g}_2 - 9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$:

$$\hat{A}(X^5) = \left\{ \vec{y} \in X^3 : (\forall \alpha, \beta, \eta \in R^1) \vec{y} = \alpha \cdot \vec{a}_1 + \beta \cdot \vec{a}_2 + \eta \cdot \vec{a}_3 \right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r(\hat{A}) + d(\hat{A}) = 5,$$

откуда получаем $d(\hat{A}) = 2$. Итак, $r(\hat{A}) = 3$, $d(\hat{A}) = 2$. $\otimes$

Пример 2.5.5. Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 \right\},$$

$$L_2 \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\} = \left\{ \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3 \right\},$$

если $\alpha_k, \beta_k \in R^1$ и

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \\ \vec{b}_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\dim L_2 = r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Базисом L_1 является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом L_2 подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства $L_1 + L_2$, вычислим ранг матрицы, столбцами которой

являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ базисный минор } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства $L_1 + L_2$ есть система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$.

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора.

Вектор $\vec{b}_2$ разложим по базису $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$ подпространства $L_1 + L_2$:

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2, \quad \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства $L_1 \cap L_2$. $\otimes$

Пример 2.5.6. Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен $5 \neq 0$. Все миноры третьего порядка, как у матрицы A , так и у матрицы B , равны нулю: ранги основной и расширенной матриц $r(A) = r(B) = 2$. Следовательно, СЛАУ совместна. $\otimes$

Пример 2.5.7. Выяснить, при каких значениях параметра a СЛАУ с основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей $|b\rangle = (2 \ 1 \ a)^T$ является совместной.

Решение. Нетрудно видеть, что ранг матрицы A СЛАУ $r(A) = 2$. Расширенная матрица имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & a \end{array} \right).$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix} = 3a + 6.$$

Если $a \neq -2$, то $\det B \neq 0$ и $r(B) = 3 \neq r(A)$ – СЛАУ несовместна. Если $a = -2$, то $\det B = 0$. Так как у матрицы B имеются отличные от нуля миноры, то $r(B) = 2 = r(A)$. Поэтому при $a = -2$ СЛАУ совместна. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$$

и норму (длину) вектора $\vec{u}$:

$$1) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1;$$

$$2) \vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\alpha = -4, \beta = 3, \gamma = -2;$$

$$3) \vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 7, \beta = -5, \gamma = -1.$$

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если:

$$1) A(2; -2; 3), B(1; -1; 2), C(4; -4; 5);$$

$$2) A(0; -2; 6), B(-12; -2; -3), C(-9; -2; -6);$$

$$3) A(2; 3; -1), B(4; 5; -2), C(3; 1; 1).$$

3. На плоскости R^2 заданы своими координатами три вершины A, B и C параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины D ;

2) косинус угла между сторонами AB и AC ;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

$$1) A(-1; 2; -2), B(3; 4; -5), C(1; 1; 0);$$

$$2) A(-2; -2; 0), B(-1; -2; 4), C(5; -2; 1);$$

$$3) A(3; 3; -1), B(3; 2; 0), C(4; 4; -1).$$

4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами

заданы векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти $\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \gamma \vec{x} + \lambda \vec{y} \right)$, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1, \lambda = 2;$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = -2, \beta = -5, \gamma = -1, \lambda = -2;$$

$$3) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 11, \beta = 6, \gamma = 2, \lambda = -7.$$

5. Найти $\left(\vec{x} - 4\vec{y}, 6\vec{x} + \vec{y} \right)$, если дано:

$$1) \|\vec{x}\| = 4, \|\vec{y}\| = 5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$2) \|\vec{x}\| = 6, \|\vec{y}\| = 1, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{3};$$

$$3) \|\vec{x}\| = 2,5, \|\vec{y}\| = 1,5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами

задан вектор $\vec{x}$. Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 2\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 1, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6};$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$3) \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 1, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

9. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3, 1, 2)$ и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

10. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки $A_1(0; 0; 0)$; $B_1(3; 3; 0)$; $C_1(0; 3; 3)$ и $A_2(4; 5; 0)$; $B_2(1; 6; 3)$; $C_2(2; 0; 7)$ соответственно.

11. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 7; 3)$ и имеющей нормальный вектор, заданный точками $M_1(-2; -1; -8)$ и $M_2(2; 1; 8)$. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{ON}_1$, $\vec{ON}_2$ и $\vec{ON}_3$, где N_1 , N_2 и N_3 — точки пересечения данной плоскости и осей координат.

12. В пространстве R^3 найти угол между плоскостями, проходящими через точки M_1, M_2, M_3 и N_1, N_2, N_3 :

1) $M_1(0; 7; -4); M_2(4; 8; -1); M_3(-2; 1; 3);$

$N_1(2; 3; 1); N_2(2; 0; 3); N_3(1; 2; 0);$

2) $M_1(1; -2; 2); M_2(-3; 2; 3); M_3(3; 0; 6);$

$N_1(0; 3; 5); N_2(0; -1; 3); N_3(4; 0; 0).$

13. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

1) $\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4}, x^1 + x^2 + 3x^3 - 10 = 0;$

2) $\frac{x^1 + 1}{2} = \frac{x^2 - 3}{-4} = \frac{x^3 + 1}{5}, x^1 + 2x^2 - x^3 + 5 = 0.$

14. Найти координаты проекции точки M_0 на плоскость:

1) $M_0(0; -3; -2); 2x^1 + 10x^2 + 10x^3 - 1 = 0;$

2) $M_0(1; 0; -1); 2x^2 + 4x^3 - 1 = 0.$

15. В пространстве R^3 найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3 :

1) $M_1(0; 7; -4), M_2(4; 8; -1), M_3(-2; 1; 3), M_0(-10; 11; 13);$

2) $M_1(5; 8; 3), M_2(10; 5; 6), M_3(8; 7; 4), M_0(7; 17; 14);$

3) $M_1(1; 3; 5), M_2(-5; 5; 2), M_3(7; -1; 8), M_0(0; 0; 0).$

16. Пусть $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n$ – некоторый базис в векторном пространстве X^n , и

$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса,

найти базу и размерность этой системы векторов.

1) $\dim X^n = 4:$

$$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2) $\dim X^n = 5$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

17. Пусть $L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ и $L\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ – некоторые подпространства векторного пространства X^4 , и пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый его базис. Найти базис суммы и пересечения этих подпространств.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{array} \right.$$

18. Пусть $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$ – некоторый базис в евклидовом пространстве E^4 , и

$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортого-

нальна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где $L_1^2 = L\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$, а $L_2^2 = L_1^{2\perp}$.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right. 2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{array} \right. 4) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 6\vec{e}_4. \end{array} \right.$$

19. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ – некоторый фиксированный вектор из R^3 , а операторы $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и

$\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$, действуют по правилам $\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right)$

$$1) \hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{x} \end{pmatrix} \vec{a}, 2) \hat{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}, \vec{x} \end{bmatrix}.$$

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

20. Показать, что операторы

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{B}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{C}: R^3 \rightarrow R^3,$$

действие которых задано координатными соотношениями

$$1) \hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$2) \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix},$$

$$3) \hat{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

являются линейными и записать их матрицы.

21. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и

$\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

$$1) \left(\hat{A}^2 + 2\hat{B} \right) \vec{x}; 2) \left(2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2 \right) \vec{x}; 3) \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) \vec{x}.$$

22. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

24. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

25. Разложить вектор $\vec{X}$ по системе векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$:

$$1) \vec{a}_1 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = -2\vec{e}_1 + 9\vec{e}_3.$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = 5\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

$$3) \vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{a}_2 = -3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

26. В каноническом базисе пространства R^3 дана линейно независимая система векторов

$$\vec{X}_1 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

$$\vec{X}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов $\hat{A}\vec{x}_1, 2\hat{A}\vec{x}_2, 3\hat{A}\vec{x}_3$?

27. Проверить, что $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Вычислить многочлен

$$P(X) = X^3 - 3X + 2$$

от матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Найти матрицу X , удовлетворяющую условию:

$$\text{а) } 5A + 2X = 0, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{и) } (-1)A + 3X = 2B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

30. Вычислить определители:

$$\text{ф) } \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

31. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

32. Решить неравенства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

33. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

34. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

35. Решить методом Гаусса СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{ в) } \begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$$

36. Пространство R^3 подвергается деформации под действием линейного оператора $\hat{A}$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0; 0; 0); B(3; 3; 0); C(0; 3; 3); D(3; 0; 3)$$

до и после деформации пространства.

37. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T}: X^4 \rightarrow X^4$. Найти матрицу оператора в базисе

$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4$, если:

$$\text{а) } \vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$$

$$\text{б) } \vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4, \vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4.$$

38. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$$

39. При каких значениях параметра a СЛАУ является совместной:

$$\text{а) } \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$$

40. Найти ядро оператора, заданного в пространстве R^3 своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

41. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора $\hat{A}: R^m \rightarrow R^n$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset R^m, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\
 & \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{д) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}; \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n

Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

Предварительные сведения

Пусть $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$ – линейный оператор. Тогда, если для вектора $\vec{x} \in X^n$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$)

и некоторого числа μ выполняется соотношение

$$\hat{T} \vec{x} = \mu \vec{x},$$

то вектор $\vec{x}$ называется **собственным вектором** оператора $\hat{T}$, соответствующим **собственному значению** μ . Если в пространстве X^n зафиксирован базис, то последнее равенство сводится к однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (t_1^1 - \mu)x^1 + t_2^1 x^2 + \dots + t_n^1 x^n = 0, \\ t_1^2 x^1 + (t_2^2 - \mu)x^2 + \dots + t_n^2 x^n = 0, \\ \dots, \\ t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \dots + (t_n^n - \mu)x^n = 0. \end{cases}$$

Система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ собственных векторов линейного оператора

$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, линейно независима.

Линейный оператор $\hat{T}$, действующий в n -мерном пространстве X^n и имеющий n попарно различных собственных значений, называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры имеет диагональный вид.

Из критерия нетривиальной совместности однородной СЛАУ следует, что

$$T(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_j^i - \mu \delta_j^i) = \begin{vmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть **характеристическое уравнение**, а многочлен в левой части – **характеристический многочлен**. Из характеристического уравнения определяются собственные значения линейного оператора, а из однородной СЛАУ его собственные векторы.

Подпространство $X_{inv} \subset X^n$ называется **инвариантным подпространством оператора**

$$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n), \text{ если } \left(\forall \vec{x} \in X_{inv} \right) \vec{y} = \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}.$$

Пусть $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$ – некоторый линейный оператор. Оператор $\hat{T}^*: E^n \rightarrow E^m$ называется **сопряжённым по отношению к оператору $\hat{T}$** , если $\left(\forall \vec{x} \in E^m, \forall \vec{y} \in E^n \right)$

выполняется условие

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \hat{T}^* \vec{y} \right).$$

Матрица оператора, сопряжённого с оператором $\hat{T}^*: E^n \rightarrow E^m$ связана следующим соотношением:

$$t_j^{k*} = \overline{t_k^j}.$$

В случае вещественных пространств комплексное сопряжение отсутствует.

Если $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$, $\hat{R}: E^m \rightarrow E^n$ – некоторые операторы и $\beta \in C$ – произвольное число, то справедливы следующие пять свойств сопряжённого оператора:

$$\begin{aligned} 1) \left(\hat{T}^* \right)^* &= \hat{T}; 2) \left(\hat{T}^* \right)^{-1} = \left(\hat{T}^{-1} \right)^*; 3) \left(\beta \hat{T} \right)^* = \overline{\beta} \hat{T}^*; \\ 4) \left(\hat{T} + \hat{R} \right)^* &= \hat{T}^* + \hat{R}^*; 5) \left(\hat{T} \hat{R} \right)^* = \hat{R}^* \hat{T}^*. \end{aligned}$$

Линейный оператор $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ называется **самосопряжённым (эрмитовым)**, если $\hat{T}^* = \hat{T}$. Матрица самосопряжённого оператора является симметрической, то есть связана с матрицей самого оператора соотношением

$$t_j^i = t_i^j.$$

Оператор $\hat{T}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве E^n , называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

Ортогональные операторы $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ в вещественном евклидовом пространстве E^n обладают следующими свойствами:

- 1) единичный оператор является ортогональным;
- 2) композиция ортогональных операторов также является ортогональным оператором;
- 3) оператор, обратный ортогональному оператору, также является ортогональным;

4) если $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ – ортогональный оператор, то оператор $\alpha \cdot \hat{T}$ является ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$.

Оператор $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ является ортогональным в том и только в том случае, если он переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.

Пусть $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$ и

$$F_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \in C[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_m \hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора $\hat{T}$ или **операторным многочленом**.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В каноническом базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2$ оператор $\hat{T}$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Решение. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(T - \mu \cdot I) = 0; \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$.

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_1 = 2$, для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1, x_1^2 = 1 \Rightarrow |x_1\rangle = c|a_1\rangle, c \in R^1 \Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = 5$, решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = c/2, x_2^2 = c, c \in R^1 \Rightarrow |x_2\rangle = c|a_2\rangle \Rightarrow |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\left\{\vec{a}_1\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\right\}$$

и

$$L\left\{\vec{a}_2\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2; t \in R^1\right\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2. \otimes$$

Пример 2.1.2. Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 в пространстве R^3 .

Р е ш е н и е. Оператор зеркального отражения в пространстве R^3 относительно координатной плоскости X^1OX^2 , очевидно, действует по правилу (рисунок 2.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right) \vec{y} = \hat{R} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 - x^3 \vec{e}_3.$$

Поддействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R} \vec{e}_1 = \vec{e}_1; \hat{R} \vec{e}_2 = \vec{e}_2; \hat{R} \vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости

$X^1 O X^2$ получаем:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\hat{R}$ имеет вид:

$$R(\mu) = \det \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix} = (1-\mu) \cdot (1-\mu) \cdot (-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень $\mu_1 = -1$ и двукратный корень $\mu_2 = 1$.

1) Для собственного значения $\mu_2 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, c \in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = -1$, есть линейная оболочка вида

$$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left\{\vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = c \cdot \vec{e}_3; c \in R^1\right\},$$

то есть ось $O X^3$.

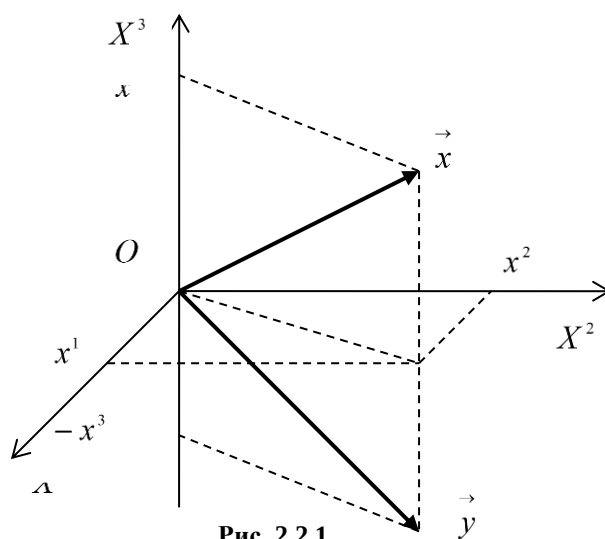


Рис. 2.2.1.

2) Для собственного значения $\mu_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R^1$ – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = 1$, являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2; a, b \in R^1\right\},$$

то есть координатной плоскостью X^1OX^2 . Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств $OX^1 \oplus OX^2$. $\otimes$

Пример 2.1.3. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$T = \begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 \\ 1 & 2-\mu & -1 \\ 1 & -1 & 2-\mu \end{pmatrix} \Rightarrow (3-\mu)(\mu^2 - 4\mu + 3) = 0.$$

Собственные значения $\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = 3$.

Собственный вектор, соответствующий $\mu_1 = 1$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_{2,3} = 3$ находится как решение системы уравне-

ний

$$\begin{cases} 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |x_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\}; X_2 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1\}. \otimes$$

Пример 2.1.4. Линейный оператор $\hat{T} : E^3 \rightarrow E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Решение. Составим характеристический многочлен оператора $\hat{T}$:

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9, \mu_2 = 9, \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы

оператора $\hat{T}$ в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$.

1) Для собственного значения $\mu_1 = -9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L \left\{ \vec{a}_1 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения $\mu_2 = 9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L \left\{ \vec{a}_2 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения $\mu_3 = 18$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая $x^3 = a$, где a – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{ \vec{a}_3 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} \vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}} \vec{a}_3 = \frac{1}{3} \vec{e}_1 - \frac{2}{3} \vec{e}_2 + \frac{2}{3} \vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A: \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

имеет вид:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \det A = -1 \neq 0; A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \operatorname{adg} A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; (A^{-1})^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$:

$$\begin{aligned} T_a &= (A^{-1})^T T_e A^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 2.1.5. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\hat{T}^*$ в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2, A_2^1 = 0, A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2, A_2^2 = -1, A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0, A_2^3 = -1, A_3^3 = 1;$$

$$\text{adg}A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\hat{T}^*$ в новом базисе:

$$\begin{aligned}
T_g^* &= (A^{-1})^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \otimes
\end{aligned}$$

Пример 2.1.6. Ранее показано, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вы-

числяются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ и матрицу сопря-

жённого оператора $\hat{D}^*$.

2) Выяснить, является ли оператор $\hat{D}$ симметрическим.

Р е ш е н и е. Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\begin{aligned}\hat{D} \vec{e}_1 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos x - \sin x) = \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2;\end{aligned}$$

$$\hat{D} \vec{e}_2 = \frac{d}{dx} (\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x = \sqrt{3} \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2.$$

Следовательно, матрица оператора $\hat{D}$ в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора $\hat{D}^*$ равна транспонированной матрице оператора $\hat{D}$, то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ для матрицы оператора $\hat{D}$ имеем $d_2^1 \neq d_1^2$, оператор не является симметрическим. $\otimes$

Пример 2.1.7. В евклидовом пространстве E^3 линейный оператор $\hat{T}$ переводит систему векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ в систему векторов $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$. Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. По условию задачи имеем

$$\hat{T} \vec{a}_1 = \vec{g}_1, \hat{T} \vec{a}_2 = \vec{g}_2, \hat{T} \vec{a}_3 = \vec{g}_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_2^1 + t_3^1 &= 2, \\ t_2^2 + t_3^2 &= 3, \\ t_2^3 + t_3^3 &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_1^1 + t_3^1 &= -1, \\ t_1^2 + t_3^2 &= 0, \\ t_1^3 + t_3^3 &= 3; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_1^1 + t_2^1 &= -5, \\ t_1^2 + t_2^2 &= 1, \\ t_1^3 + t_2^3 &= 4. \end{aligned}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $(\forall i \neq j = 1, 2, 3) t_i^j = t_j^i$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ является самосопряжённым. $\otimes$

Пример 2.1.8. Матрица линейного оператора $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ в базисе векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subset E^3$ имеет вид:

$$T' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор $\hat{T}$ ортогональным, если в ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Решение. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$ в произвольном базисе

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset E^3 \text{ по формуле}$$

$$\left(\vec{x}, \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \quad \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3 \right) \\ \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3 \right) \\ \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3 \right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующий результат:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}, \vec{y} \right) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j = 2x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^1 y^3 + \\ &+ x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^2 y^3 + x^3 y^1 + x^3 y^2 + 2x^3 y^3. \end{aligned}$$

Находим координаты образов векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при действии оператора $\hat{T}$:

$$\hat{T} \vec{x} = \vec{u} \Rightarrow T|x\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^1 + x^2 \\ -x^1 \\ \frac{2}{3}x^1 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$\hat{T} \vec{y} = \vec{v} \Rightarrow T|y\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y^1 + y^2 \\ -y^1 \\ \frac{2}{3}y^1 + y^3 \end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и метрических коэффициентов g_{ij} в формулу для скалярного произведения

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} u^i v^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения преобразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ к новому базису $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ и обратная к ней матрица имеют, соответственно, вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T' = (A^{-1})^T T A^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ получаем:

$$\begin{aligned} T &= A^T T' (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу T на транспонированную матрицу T^T , получим

$$T T^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство $T^T = T^{-1}$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ и, соответственно, его матрица являются ортогональными. $\otimes$

Пример 2.1.9. Пусть $\hat{T} : X \rightarrow X$. Показать, что если $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, то $X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$ и $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ также являются инвариантными подпространствами оператора $\hat{T}$.

Решение. Пусть $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$. Предположим, что вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$. Но тогда вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$ и $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, следовательно, и его образ

$$\hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$

Теперь очевидно, что образ вектора $\vec{X}$ принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T} \vec{X} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь $\vec{X} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$. Тогда, по определению суммы подпространств

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2, \quad \vec{X}_1 \in X_{inv}^{(1)}, \quad \vec{X}_2 \in X_{inv}^{(2)},$$

откуда в силу того, что снова $\hat{T} \vec{X} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$, получаем

$$\hat{T} \vec{X} = \hat{T} \vec{X}_1 + \hat{T} \vec{X}_2 \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \quad \otimes$$

Пример 2.1.10. Пусть $\hat{T} : X \rightarrow X$. Показать, что если оператор $\hat{T}$ биективный, то его инвариантное подпространство X_{inv} является инвариантным подпространством и для обратного

оператора $\hat{T}^{-1}$.

Решение. Известно, что линейный оператор $\hat{T} : X \rightarrow X$ взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\} \subset X_{inv}^m$$

– базис в X_{inv}^m , тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1 \hat{T} \vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \hat{T} \vec{a}_m = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора $\hat{T}$

$$\hat{T} \left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m \right) = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь $\left(\forall \vec{X} \in X_{inv}^m \right)$. Разложим вектор $\vec{X}$ по базису из образов векторов исход-

ного базиса подпространства X_{inv}^m , то есть представим вектор $\vec{X}$ в виде

$$\vec{X} = x^1 \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T} \vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя

на обе части оператором $\hat{T}^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{T}^{-1} \vec{X} &= x^1 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_m = \\ &= x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m, \end{aligned}$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m \in X_{inv}^m,$$

так как он разложен по базису X_{inv} .

Итак, получили, что если $\vec{x} \in X_{inv}^m$, то $\hat{T}^{-1} \vec{x} \in X_{inv}^m \otimes$

Пример 2.1.11. Показать, что любое инвариантное подпространство оператора

$\hat{T}: X^n \rightarrow X^n$ является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p.$$

Решение. Пусть операторы $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ и $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$ имеют одно и тоже инвариантное подпространство $Y^m \subset X^n$. Тогда

$$\left(\forall \vec{x} \in Y^m \right) \vec{y}_1 = \hat{A} \vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B} \vec{x} \in Y^m.$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства Y^m снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A} \vec{x} + \beta \cdot \hat{B} \vec{x} = \left(\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B} \right) \vec{x} \in Y^m.$$

То есть подпространство $Y^m \subset X^n$, инвариантное относительно операторов $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ и $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$, инвариантно и относительно оператора $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$. Далее, из того, что

подпространство $Y^m \subset X^n$ является инвариантным относительно оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$, следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора $\hat{A}^k$ ($k = 0, 1, \dots, p$)

.

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}$ является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p \otimes$$

Практическое занятие 2. Некоторые задачи геометрии

евклидова пространства

Предварительные сведения

Система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset E^n$ линейно зависима в том и только в том случае, если определитель Грама системы

$$G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_m \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве E^n некоторое подпространство L^m размерности $m < n$. Пусть дан некоторый вектор $\vec{x} \in E^n$, причём $\vec{x} \notin L^m$. Можно показать, что справедливо представление вектора $\vec{x}$ в виде следующего разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор $\vec{g}_L$ принадлежит подпространству L^m , а вектор $\vec{h}^\perp$ ортогонален к этому подпространству. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{g}_L$ называются, соответственно, **наклонной** к подпространству L^m и **проекцией** наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m . Вектор $\vec{h}^\perp$ называется **перпендикуляром**, опущенным из конца наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m .

Пусть в евклидовом пространстве E^n зафиксирована система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \quad (m < n).$$

Обозначим $\vec{h}_m^\perp$ перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\vec{x}_{m+1}$ на подпространство

$$L\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right\} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1).$$

Формула для вычисления объёма m -мерного параллелепипеда в пространстве E^n имеет вид:

$$V^2 = G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right) \equiv \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}.$$

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3, \text{ если имеют место разложения}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \quad \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Решение. Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствие с критерием Грама система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\}$ является линейно зависимой. $\otimes$

Пример 2.2.2. Радиус-вектор $\vec{x}$ в пространстве R^3 имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

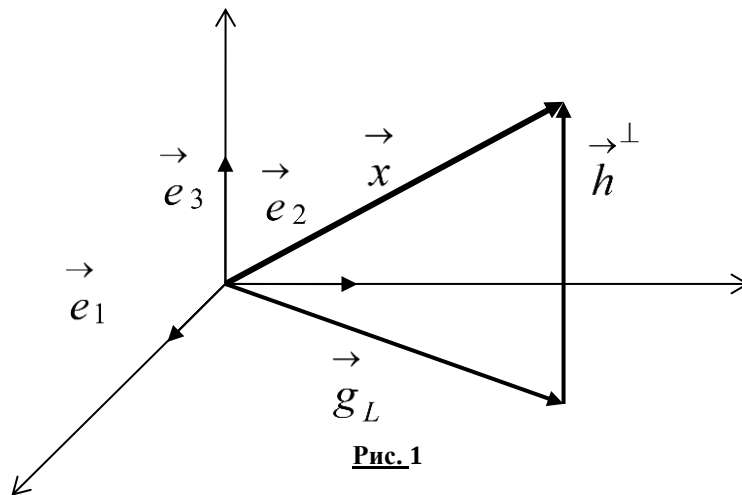
$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость X^1OX^2 как L^2 .

Представить вектор $\vec{x}$ в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где $\vec{g}_L \in L^2, \vec{h}^\perp \in L^{2\perp}$.



Решение. Разложим вектор $\vec{g}_L$ по базису подпространства L^2 :

$$\vec{g}_L = g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства L^2 . Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^\perp$ подпространству L^2 , состоящие в том, что вектор $\vec{h}^\perp$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$:

$$\left(\vec{h}^\perp, \vec{e}_1 \right) = 0,$$

$$\left(\vec{h}^\perp, \vec{e}_2 \right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases} \left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_1 \right) = 0, \\ \left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_2 \right) = 0, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} \left(g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_1 \right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1 \right), \\ \left(g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_2 \right). \end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases} g^1 = 3, \\ g^2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \right) - \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \right) = 5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.2.3. В пространстве R^4 опустить перпендикуляр из точки $P(-1; 5; 3; 2)$ на гиперплоскость H^3 , проходящую через заданные точки $A_1(1; 4; 2; 0)$, $A_2(3; 7; 3; 2)$, $A_3(2; 6; 3; -1)$, $A_4(1; 4; 5; 2)$.

Решение. В пространстве R^4 все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$. Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\vec{a}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

Проверим, что точка $P(-1; 5; 3; 2)$ не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23 \cdot (-1) - 14 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 29 = -64 \neq 0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке $P(-1; 5; 3; 2)$ её радиус-вектор

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор $\vec{g}_L \in H^3$, а вектор $\vec{h}^\perp \in H^{3\perp}$.

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства H^3 . Запишем условия орто-

гональности вектора $\vec{h}^\perp$ подпространству H^3 (плоскость проходит через начало системы коор-

динат), состоящие в том, что вектор $\vec{h}^\perp$ должен быть ортогонален всем векторам базиса

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}:$$

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_1\right)=0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_2\right)=0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_3\right)=0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_1\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_2\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_3\right)=0.$$

Представляя наклонную $\vec{g}_L$ разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_1\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_2\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_3\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_3\right),$$

или в виде

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_3\right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases} 18g^1 + 7g^2 + 7g^3 = 20, \\ 7g^1 + 7g^2 + g^3 = 10, \\ 7g^1 + g^2 + 13g^3 = 13. \end{cases}$$

Решение СЛАУ ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции $\vec{g}_L$ на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left(-\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3 \right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по векторам ортонормированного базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$, то получим вектор $\vec{h}$ – перпендикуляр, опущенный

из конца наклонной $\vec{g}_L$ на плоскость H^3 . $\otimes$

Пример 2.2.4. *) Записать матрицу оператора $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ ортогонального проектирования на координатную плоскость $X^1 O X^2$ в пространстве R^3 .

Р е ш е н и е. Этот оператор любому вектору пространства R^3 ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость $X^1 O X^2$ параллельно координатной оси $O X^3$. Согласно

изложенной выше теории, оператор $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1 O x^2} : R_{x^1 O x^2}^2 \rightarrow R_{x^1 O x^2}^2$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{O x^3} : R_{O x^3}^1 \rightarrow R_{O x^3}^1.$$

На главной диагонали его матрицы расположены 2×2 клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 1×1 клетка вида $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$. Остальные элементы равны нулю:

$$P_{x^1 O x^2}^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора $\vec{X}$ из предыдущей задачи на координатную плоскость $X^1 O X^2$. Запишем для этого образ вектора

$$\vec{X} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

при действии оператора $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ в координатной форме

$$P_{x^1 O x^2}^\perp |X\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи. $\otimes$

Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

Предварительные сведения

Квадратичной формой $\varphi(\vec{X}, \vec{X})$ от n переменных называется формальное выражение

$$\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} X^i X^j,$$

где $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – симметрические вещественные коэффициенты.

При изменении базиса в пространстве в пространстве R^n матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$\Phi' = A^T \Phi A.$$

Квадратичная форма, определённая на векторах пространства R^n , является положительно определённой в том и только в том случае, если в каком-либо базисе $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset R^n$ все

угловые миноры её матрицы $\phi_{ij}(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$ положительны, то есть

$$M_1 = \varphi_{11} > 0, M_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\dots, M_n = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Поверхностью второго порядка в пространстве R^3 называется множество точек $\vec{x} \in R^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} x^i x^j + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x^k + c = 0.$$

В пространстве R^2 существуют две **кривые второго порядка**, называемые **центрными**. Эти кривые описываются каноническими уравнениями вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

и называются, соответственно, **эллипсом** и **гиперболой**.

В пространстве R^3 существует три типа **невырожденные**, центральные поверхности второго порядка, определяемых каноническими уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Поверхности, задаваемые в пространстве R^3 этими уравнениями, называются соответственно, **эллипсоидом**, **однополостным гиперboloидом** и **двуполостным гиперboloидом**.

В трёхмерном пространстве R^3 существует **коническая поверхность** с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

В пространстве R^3 существуют две невырожденные нецентральные поверхности с каноническими уравнениями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– эллиптический параболоид;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– гиперболический параболоид.

В пространстве R^3 общий вид **вырожденной поверхности** получается параллельным переносом вдоль оси OX_3 какой-либо кривой второго порядка на плоскости X_1OX_2 . При этом для эллипса, гиперболы и параболы получаются поверхности, носящие соответственно названия **эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры**. Пара параллельных, пересекающихся или слившихся прямых приводит, соответственно, к **паре параллельных, пересекающихся или слившихся плоскостей**

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве R^3 вид

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение. Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) &= \\ &= 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + (2x^1x^2 + 2x^2x^1) + (2x^1x^3 + 2x^3x^1) - (x^2x^3 + x^3x^2) = \\ &= 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^1 + 3(x^2)^2 - x^2x^3 + 2x^3x^1 - x^3x^2 + 3(x^3)^2. \end{aligned}$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 2 & 2 \\ 2 & 3-\mu & -1 \\ 2 & -1 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^3 - 6\mu^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -2$, $\mu_{2,3} = 4$.

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай $\mu_1 = -2$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай $\mu_{2,3} = 4$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ ортогональны вектору $\vec{x}_1$, но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_1, \vec{g}_2 = \vec{x}_2, \vec{g}_3 = \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2.$$

Так как должно быть $\left(\vec{g}_2, \vec{g}_3 \right) = 0$, то

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2 \right) = 0, \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 \right) + \alpha \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2 \right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \alpha = 0, \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{g}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\|\vec{g}_1\| = \sqrt{6}, \|\vec{g}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \|\vec{g}_3\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \Rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$ как $\{y^1, y^2, y^3\}$, запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = -2(y^1)^2 + 4(y^2)^2 + 4(y^3)^2. \otimes$$

Пример 2.3.2. Найти значения параметра λ , при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 4(x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda(x^3)^2.$$

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, $\lambda > \frac{52}{3}$. $\otimes$

Пример 2.3.3. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Решение. Уравнение перепишем в виде

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_{1'} = x_1 + 1, \quad x_{2'} = x_2 - 2.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку $O'(-1; 2)$, в которой уравнение принимает вида

$$x_{1'}^2 + x_{2'}^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке $O'(-1; 2)$ радиуса

$$R = \sqrt{5}. \quad \otimes$$

Пример 2.3.4. Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}.$$

Решение. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке $O'(-2; 1)$ радиуса $R = \sqrt{15}$, лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением $x_2 = 1$. $\otimes$

Пример 2.3.5. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Решение. Уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение описывает точку $M(2; 1)$. $\otimes$

Пример 2.3.6. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2 + 25x_2^2 + 200x_1 - 100x_2 - 200 = 0.$$

Решение. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1 + 1)^2 + 25(x_2 - 2)^2 = 400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(-1; 2)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 4$. $\otimes$

Пример 2.3.7. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1 = -2\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}.$$

Решение. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2 + 4(x_2 + 3)^2 = 16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{(x_2 + 3)^2}{4} = 1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке $O'(0; -3)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 2$, лежащую слева относительно оси OX_2 . $\otimes$

Пример 2.3.8. Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2 \text{ уравнением}$$

$$11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 - 20x^1 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) &= 11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 = \\ &= 11(x^1)^2 - 10x^1x^2 - 10x^2x^1 - 4(x^2)^2 \end{aligned}$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме $\varphi\left(\begin{smallmatrix} \rightarrow \\ X, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ X \end{smallmatrix}\right)$ ставим в соответствие симметрический оператор $\hat{T}$ с матрицей $T = \Phi$ и записываем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 - \mu & -10 \\ -10 & -4 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \mu^2 - 7 \cdot \mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$. Находим собственные векторы оператора $\hat{T}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$, для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \vec{x}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\|\vec{x}_2\|} \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы A равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы A^{-1} . Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1(y^1)^2 + \mu_2(y^2)^2 = -9(y^1)^2 + 16(y^2)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1 = -\frac{20}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}}y^1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9(y^1)^2 + 16(y^2)^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{32}{\sqrt{5}}y^2 + 1 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по y^1 , y^2 и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 = 0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{(z^1)^2}{5/9} - \frac{(z^2)^2}{5/16} = 1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол φ , что $\cos \varphi = 1/\sqrt{5}$ и $\sin \varphi = 2/\sqrt{5}$. Далее, в соответствии с формулами

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами $O' \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. $\otimes$

Пример 2.3.9. Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$ уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi \left(\vec{x}, \vec{x} \right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора $\mu_1 = -2$, $\mu_{2,3} = 4$. Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ($A^{-1} = A^T$).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'}.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2 - 40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'} + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4(x_{1'} - 5\sqrt{6})^2 - 2(x_{2'} - 3\sqrt{5})^2 + 4x_{3'}^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения $y_1 = x_{1'} - 5\sqrt{6}$, $y_2 = x_{2'} - 3\sqrt{5}$, $y_3 = x_{3'}$, получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$ матрицу:

$$1) A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}; 2) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$, действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства:

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right)$$

$$1) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix}; 2) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$3) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}; 4) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$5) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; 6) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$

задан матрицей:

$$1) T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix};$$

$$3) T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 4) T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

4. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$. Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{ \vec{e}_1 \right\}, L\left\{ \vec{e}_2 \right\}, L\left\{ \vec{e}_3 \right\}, L\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}, L\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right\}, L\left\{ \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора $\hat{A}$.

5. Пусть подпространства $L_1 \subset X^n$ и $L_2 \subset X^n$ инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n.$$

Показать, что подпространства $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ также инвариантны относительно оператора $\hat{A}$.

6. Показать, что если $L \subset X^n$ – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n,$$

то L является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}(\hat{A}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \dots + a_m \hat{A}^m.$$

7. Пусть $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор $\hat{A}$ биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

8. Пусть $\hat{T}: R^2 \rightarrow R^2$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть $\hat{T}: R^3 \rightarrow R^3$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$1) T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Пусть $\hat{T}: R^4 \rightarrow R^4$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Показать, что линейная оболочка

$$L\left\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\right\}$$

является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}$.

11. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости $H^m \subset R^n$, проходящей через заданные точки

$$A_1(0; 6; 3; 5; 1), A_2(-3; 2; 4; 1; 0), \\ A_3(5; 1; 4; 3; 2), A_4(-1; 3; -4; 2; -1).$$

12. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\} \subset R^3$:

$$1) \vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

$$2) \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.$$

13. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \right\} \subset R^4$:

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

14. Пусть $L^3 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ – линейное многообразие в E^4 , а $\vec{x}$ – наклонная к многообразию

L^3 . Найти наименьший угол между вектором $\vec{x}$ и многообразием L^3 , если:

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

15. В ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ пространства E^4 задана система векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}.$$

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе

новый ортонормированный базис пространства R^4 .

16. В пространстве R^5 найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$1) \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$$

$$2) \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$$

17. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

18. В пространстве R^4 даны две плоскости H_1 и H_2 с направляющими векторами

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset H_1, \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

$$1) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$$

19. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

$$1) x_2 = -1 - \frac{3}{5} \sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2};$$

$$2) x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1;$$

$$3) x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}.$$

20. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

$$1) 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0;$$

$$2) 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0.$$

21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$1) 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0;$$

$$2) \alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0,$$

где $\alpha = 5$ или $\alpha = 0$.

ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности

Предварительные сведения

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону ставится в соответствие вполне определённое действительное число, то говорят, что задана **бесконечная числовая последовательность**

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Числа a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) называются **элементами (членами)** последовательности (a_n) .

Числовая последовательность (a_n) называется **монотонно возрастающей (монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}),$$

и **строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}).$$

Пусть $\varepsilon \in R^1$ ($\varepsilon > 0$) и $x_0 \in R^1$. Тогда множество

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^1 : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

называется **ε -окрестностью** числа (точки) x_0 .

Последовательность (x_n) действительных чисел **сходится к действительному числу x_0** , если для каждого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся номер n_0 , такой, что начиная с этого номера, то есть, для всех номеров $n \geq n_0$, выполняется неравенство

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Пусть (x_n) и (y_n) – числовые последовательности, сходящиеся, соответственно, к пределам x_0 и y_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $x_n \equiv C$, где C – некоторая постоянная величина (число), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C;$$

2) существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 + y_0;$$

3) существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 y_0;$$

4) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x_0}.$$

Примеры с решением

Пример 3.1.1. Показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Решение. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, такой, что

$(\forall n \geq n_0) \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, следовательно, 1 является пределом данной последовательности.

⊗

Пример 3.3.1.2. Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}.$$

Решение. Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1} \Rightarrow x_{n+1} > x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом x_1 . При любом n , очевидно, $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$. Последовательность ограничена сверху:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1. \end{aligned}$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. ⊗

Пример 3.3.1.3. Доказать, что последовательность (x_n) есть бесконечно малая последовательность, если

$$1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; 2) x_n = \frac{2n}{n^3+1}; 3) x_n = \frac{1}{n!}; 4) x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0				

Р е ш е н и е. 1) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0,1$. Тогда

$$n_0 = \left[\frac{1}{1/10} \right] + 1 = 11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε . Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0	11	1001	10001	...

2) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{2n}{n^3 + 1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{2n}{n^3 + 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow n > \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] \Rightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0,1$. Тогда

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{1/10}} \right] + 1 \approx [4,472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε . Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0	5	46	142	...

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения.

⊗

Пример 3.3.1.4. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1}.$$

Решение. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 2. \otimes$$

Пример 3.3.1.5. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2}.$$

Решение. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{3n+1}{n} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 3 = 6. \otimes$$

Пример 3.3.1.6. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 3.3.1.7. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Решение. Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 3.3.1.8 (неперово число e). Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Решение. Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности: $e = 2,71828\dots$

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последователь-

ность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что

$$(\forall b > -1) \wedge (\forall n \in N) (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по n :

1) при $n=1$ имеем $1+b \geq 1+b$, что всегда выполняется;

2) предположим, что $(\forall n=k) (1+b)^k \geq 1+kb$;

3) покажем, что $(\forall b > -1) \wedge (n=k+1) (1+b)^{k+1} \geq 1+(k+1)b$.

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k (1+b) \geq (1+b)(1+kb) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+(k+1)b,$$

так как $kb^2 > 0$.

Так как неравенство справедливо при $n=1$, оно справедливо и при любом $n \in N$. Итак, $(\forall b > -1)$ и $(\forall n \in N)$

$$(1+b)^n \geq 1+nb. \quad (1)$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1} \cdot (n-1)}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (n-1)} = \\ &= \frac{(n^2)^{n+1} \cdot (n-1)}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \frac{(n^2-1+1)^{n+1} \cdot n-1}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \\ &= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \{используем(1)\} \geq \\ &\geq \left(1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\forall n \in N) \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно, $y_n \leq y_{n-1}$, то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \otimes$$

Пример 3.3.1.9. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Решение. Неравенство справедливо при $n = 1, 2$, что легко проверяется.

Например, для $n = 2$ имеем:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 \geq 1 + x_1 + x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, то есть

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}. \end{aligned}$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом $k = n$. $\otimes$

Пример 3.3.1.10. Показать, что если $x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1),$$

причём знак равенства имеет место только при $x = 0$.

Решение. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство. $\otimes$

Пример 3.3.1.11. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n].$$

Решение. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n] = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3} = 3 \cdot \ln e = 3. \quad \otimes$$

Пример 3.3.1.12. Доказать, что последовательность (a^n) является:

- 1) бесконечно большой последовательностью при $|a| > 1$;
- 2) бесконечно малой последовательностью при $|a| < 1$.

Решение. 1) Пусть $|a| > 1$. Покажем, что последовательность (a^n) удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть $(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}): (\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \quad (1)$$

Зададимся произвольным числом $A > 0$. Для нахождения номера n_0 решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \lfloor \log_{|a|} A \rfloor.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \lfloor \log_{|a|} A \rfloor + 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $|a| < 1$. Если $a = 0$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) a^n = 0$ и, следовательно, последовательность (a^n) бесконечно малая. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}. \quad (2)$$

Так в этом случае $\frac{1}{|a|} > 1$, то последовательность $\left(\frac{1}{a^n} \right)$ является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при $|a| < 1$ последовательность (a^n) – бесконечно малая последовательность. $\otimes$

Пример 3.3.1.13. Показать, что если (x_n) – сходящаяся последовательность, а (y_n) – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$(z_n) = (x_n + y_n)$$

– бесконечно большая последовательность.

Решение. Покажем, что

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |x_n + y_n| > A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность (x_n) ограничена, то есть

$$(\exists M > 0): (\forall n \in N) |x_n| < M. \quad (1)$$

Пусть задано произвольное $A > 0$. Так как последовательность (y_n) бесконечно большая, то для числа $A + M$

$$(\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |y_n| > A + M. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем: $|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| > A + M - M = A$.

Что и требовалось доказать. $\otimes$

Пример 3.3.1.14. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n. \quad (1)$$

Решение. Так как $(\forall x \in R^1) |\cos x| < 1$, то последовательность $(\cos n)$ ограничена.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$ – бесконечно малая последовательность. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n = 0. \otimes$$

Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции

Предварительные сведения

Функция $f: M \rightarrow f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in M$, если для каждой последовательности (x_n) точек множества M , сходящейся к точке x_0 , последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции f сходится к значению $f(x_0)$ функции в этой точке (определение непрерывности по Гейне).

Функция $f: M \rightarrow f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in M$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(определение непрерывности по Коши).

Говорят, что функция f , определённая на множестве M , имеет **предел** C при $x \rightarrow x_0$, и пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для каждой последовательности точек

$$x_n \in M - \{x_0\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции сходится к точке (числу) C , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C.$$

Говорят, что функция f , определённая на множестве M , имеет предел C при $x \rightarrow x_0$, и при этом пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех точек x удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - C| < \varepsilon.$$

Пусть x_0 – предельная точка множества M . Функция $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется **бесконечно малой функцией** при условии $x \rightarrow x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пусть f и g – две действительные функции, имеющие одно и то же множество определения

$M \subset \mathbb{R}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ – некоторое действительное число, а x_0 – предельная точка множества M . Тогда

если пределы этих функций в точке x_0 существуют и соответственно равны

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

где $a, b \in \mathbb{R}^1$, то справедливы следующие правила выполнения рациональных операций с пределами функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha a;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = ab;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Примеры с решением

Пример 3.3.1.15. Вычислить предел функции в точке: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5)$.

Решение. Выбираем произвольную последовательность значений аргумента (x_n) , сходящуюся к 1, то есть такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Используем определение по Гейне:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + x_n + 5) = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 3 + 1 + 5 = 9. \otimes\end{aligned}$$

Пример 3.3.1.16. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$.

Решение. Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём для него такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$|x - 6| < \delta \Rightarrow 6 - \delta < x < 6 + \delta. \quad (1)$$

будет следовать неравенство

$$|(2x - 5) - 7| < \varepsilon.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}|(2x - 5) - 7| < \varepsilon &\Rightarrow |2x - 12| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |x - 6| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow 6 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 6 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)\end{aligned}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$. $\otimes$

Пример 3.3.1.17. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8.$$

Решение. По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): \left| x - \frac{1}{3} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{15 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{5} \right)}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|15x - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15} < x < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x \in \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15}, \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15} \right),$$

так сразу

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Из этого следует, что $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$. Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0) \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{15} \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon,$$

а значит $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8. \otimes$

Пример 3.3.1.18. Найти предел функции в точке: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4}.$

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right], \text{ то есть получаем так называемую } \textit{неопределённость вида } \frac{0}{0}. \text{ Для «рас-}$$

крытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно прирав-

няв их к нулю ($x^2 - 3x + 2 = 0$, $3x^2 + x - 4 = 0$) и решив соответствующие квадратные урав-

нения. В результате получаем:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)}.$$

Так как $x \rightarrow 1$, но $x \neq 1$, то на множитель $(x-1)$, дающий в пределе $x \rightarrow 1$ нуль, можно сокра-

тить. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)}{3\left(x + \frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{4}{3}\right)} = -\frac{1}{7}. \otimes$$

Пример 3.3.1.19. Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция $f(x) = 5x^2 + 5$ непрерывна в точке $x_0 = 8$.

Р е ш е н и е. Значение функции в точке $x_0 = 8$ равно $f(8) = 325$. По определению функция будет в точке $x_0 = 8$ непрерывной, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - 8| < \delta \Rightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси M такой, что как только $x \in M$, так сразу $|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon$. Имеем:

$$|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon \Rightarrow |5x^2 - 320| < \varepsilon \Rightarrow 64 - \frac{\varepsilon}{5} < x^2 < 64 + \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}} < x < \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in \left(\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} \right) \Rightarrow |(5x^2 + 5) - 325| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке $x_0 = 8$ непрерывна. $\otimes$

Пример 3.3.1.20. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty, 0], \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (2 - x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1,$$

то $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0.$$

Так как $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке $x = \frac{\pi}{2}$ непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси

$\mathbb{R}$, кроме точки $x = 0$, которая является точкой разрыва первого рода. $\otimes$

Пример 3.3.1.21. Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2 - 9}, & x \neq 3, \\ 1, & x = 3. \end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

Решение. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \frac{1}{18} \neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва. $\otimes$

Пример 3.3.1.22. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x}.$$

Решение. Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \sin x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$ функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то есть, $\sin x \approx x$ при $x \rightarrow 0$.

Далее, вспоминая, что $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ и заменяя $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$, получим, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \approx 2 \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 4. \quad \otimes$$

Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Пусть $M \subset R^1$ – допустимое множество. Действительная функция $f: M \rightarrow R$ называется **дифференцируемой в точке** $x_0 \in M$, если выполняется условие:

$$(\exists U(x_0) \subset M): (\forall x \in U(x_0))$$

$$f(x) = f(x_0) + D(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.

Пусть f – функция, определённая на множестве $M \subset R^1$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in M$. Тогда величина $D(x_0)$, определённая предельным соотношением

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D(x_0),$$

называется **первой производной функции f в точке x_0** и обозначается

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv f^{(1)}(x_0).$$

Линейная по смещению $x - x_0$ часть

$$df(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0)(x - x_0)$$

приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

дифференцируемой в точке x_0 функции f , называется **первым дифференциалом** этой функции в точке x_0 .

Пусть функции f, f_1, f_2 определены на одном и том же множестве M и дифференцируемы в точке $x_0 \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сумма $f_1 + f_2$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) + \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

2) если $c \in \mathbb{R}^1$, то функция cf дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(cf)}{dx}(x_0) = c \frac{df}{dx}(x_0);$$

3) произведение $f_1 f_2$ дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

4) если $f(x_0) \neq 0$, то функция $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{1}{f}\right)}{dx}(x_0) = -\frac{1}{[f(x_0)]^2} \frac{df}{dx}(x_0);$$

5) если $f_2(x_0) \neq 0$, то частное f_1/f_2 дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{dx}(x_0) = \frac{1}{[f_2(x_0)]^2} \left[\frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0) \right].$$

Примеры с решением

Пример 3. 2.1. Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f(x) = 4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{17}}.$$

Решение. Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную производную $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{17}} \right)' = \\ &= \left(4x^5 - 25x^{1/5} - 2x^{3/2} + 7x^4 \right)' = 20x^4 - 5x^{-4/5} - 3x^{1/2} + \frac{119}{4}x^{13/4} = \end{aligned}$$

$$= 20x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке x) $df(x) = f'(x)dx$, то имеем:

$$df(x) = \left(20x^4 + 9x^2 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}} \right) dx. \otimes$$

Пример 3. 2.2. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

Решение. В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x) = \left(\frac{g_1}{g_2} \right)'(x) = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2, \quad g'(x) = (x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right]' = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2} = \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5} \right]' = \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x + 5) - (x^2 - 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 16}{(x^2 + 2x + 5)^2} = 4 \frac{x^2 + x - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.3. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить $f'(5)$ при $a = 3, b = 10$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [a^2 \cdot (x-a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2]' = \\ &= a^2(x^3 - a^3)' + (x^2 - 2bx + b^2)' = 3a^2x^2 + 2(x-b). \end{aligned}$$

Далее получаем при $a = 3, b = 10$:

$$f'(5) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot (5 - 10) = 675 - 10 = 665. \otimes$$

Пример 3. 2.4. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x} \right] = \frac{(2x - 2 \sin x) \cdot \sin x - (x^2 + 2 \cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x}{\sin x} - x^2 \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \frac{2}{\sin^2 x}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.5. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)' \sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})'(2x-1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' (2x-1)}{x^2+1} = \\
&= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} 2x(2x-1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \\
&= \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+2}{(x^2+1)^{3/2}}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 3. 2.6. Найти производную функцию для функции, действие которой определено формулой

$$f(x) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}).$$

Р е ш е н и е. Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \right]' = \\
&= \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (x+1+\sqrt{x^2+2x+3})' = \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot 2 \cdot (x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} = \\
&= \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \cdot (\sqrt{x^2+2x+3})} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 3. 2.7. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ и вычислить производные } f'(e), f'\left(\frac{1}{e}\right), f'(e^2).$$

Р е ш е н и е. Сначала находим производную функцию:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0; \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{e^2}} = 2e^2;$$

$$f'(e^2) = \frac{1 - 2 \ln e}{(e^2)^2} = \frac{1 - 2}{e^4} = -e^{-4}. \otimes$$

Пример 3. 2.8. Найти производную функцию $f''(x)$ для функции f , если $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-1) \cdot 2x = -2x \cdot e^{-x^2}, \\ f''(x) &= (-2x \cdot e^{-x^2})' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} = \\ &= 2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.9^{*}. Найти производную функцию $f'''(x)$ для функции f , если $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

Решение. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cdot \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x; \\ f''(x) &= 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x; \\ f'''(x) &= 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x. \otimes \end{aligned}$$

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде $(\forall x \in M)$

$$f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где $M \subset R^1$ – общее множество определения для функций $g_k^{\alpha_k}(x)$, а числа α_k ($k = 1, 2, \dots, m$) – показатели степени. Предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M) f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции $f(x)$, очевидно, затруднительно даже для малых ($k = 1, 2, \dots$). Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x)].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x)] = \\ &= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \dots + \alpha_m \ln g_m(x). \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x) \left[\alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)} \right]. \end{aligned}$$

Выражение

$$u' = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется *логарифмической производной функции* $f(x)$.

Пример 3. 2.10. Найти производную функцию для функции

$$f(x) = \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)}.$$

Решение. Имеем:

$$u = \ln f = \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)} \cdot \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{-(x^2-2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.11 ^{*)}. Найти производную функцию для функции

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Решение. Логарифмируя, имеем:

$$u(x) = \ln f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{8x^2+7x-4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}, \\ f'(x) &= x^2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \cdot \frac{8x^2+7x-4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} = \frac{x \cdot (8x^2+7x-4)}{2 \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}. \otimes \end{aligned}$$

Если функция, определённая формулой $y = f(x)$, задана неявно, то есть посредством уравнения $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по x , помня, что $y = f(x)$, и разрешить уравнение относительно y' .

Пример 3. 2.12. Найти первую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что $y = f(x)$, получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем $y' = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$. $\otimes$

Пример 3. 2.13. Найти вторую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy' y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя y' полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2} = \frac{2y}{(1 - y^2)^3}. \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 3. 2.14. Найти первую и вторую производную функцию для функции y , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

Решение. Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t^2}\right)}{3t^2} = -\frac{2}{3t^2}.$$

Так как из второго уравнения для x имеем $t = \sqrt[3]{x-5}$, отсюда получаем:

$$y_{xx}'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}}. \quad \otimes$$

Пример 3. 2.15^{*}). Найти первую производную функцию для функции y , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{3\cos t}{3\sin t} = -ctgt. \quad \otimes$

Пример 3. 2.16. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = \frac{3 \cdot \cos x}{2x + 1}.$$

Решение. Находим дифференциал функции y , используя определение:

$$dy = y'(x)dx = -3 \frac{2x \sin x + \sin x + 2 \cos x}{(2x + 1)^2} dx. \otimes$$

Пример 3. 2.17. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = e^{x^3}.$$

Решение. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy = y'(x)dx = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3} dx. \otimes$$

Пример 3. 2.18. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y = f(x) = (2x^2 - 3)^5.$$

Решение. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x) = 5 \cdot (2x^2 - 3)^4 \cdot 4x \cdot dx = 20x(2x^2 - 3)^4 dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$\begin{aligned} d^2 df(x) &= [20x(2x^2 - 3)^4] (dx)^2 = 60 \cdot (2x^2 - 3)^3 (6 \cdot x^2 - 1) \cdot (dx)^2; \\ d^3 df(x) &= [12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (6x^2 - 1) + 12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^3] \cdot (dx)^3 = \\ &= 720x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (8x^2 - 4) \cdot (dx)^3 = \\ &= 2880 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot (dx)^3. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.19. Вычислить приближённо $\sin 32^\circ$.

Решение. Используя приближённую формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

получаем:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + df(x_0).$$

Определяя функцию f формулой $f(x) = \sin x$, видим, что нам нужно вычислить значение

$f(x)$ в точке $x = 32^0$ при $x_0 = 30^0$, или в радианах $x = \frac{\pi}{180} \cdot 32$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Учитывая, что

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos x, \text{ имеем:}$$

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0),$$

или

$$\begin{aligned} \sin 32^0 &\approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{32}{180} \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0,5 + \frac{1,73 \cdot 3,14}{90} \approx 0,5 + 0,03 = 0,53. \end{aligned}$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков $\sin 32^0 = 0,5299$. $\otimes$

Пример 3. 2.20 ^{*)}. Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения $\sqrt{101}$, $\sqrt{1,04}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию f , определив её формулой $f(x) = \sqrt{x}$. По приближённой формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = a^2$, $\Delta x = h$, получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2 + h} \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2}} \cdot h = a + \frac{h}{2a}.$$

Вычислим $\sqrt{101}$ и $\sqrt{1,04}$:

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = \sqrt{10^2+1} \approx 10 + \frac{1}{20} = 10,05;$$

$$\sqrt{1,04} = \sqrt{1+0,04} \approx 1 + \frac{0,04}{2} = 1,02. \otimes$$

Пример 3. 2.21 ^{*}). Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

функции, определённой формулой $y = x^2$ при $x_0 = 2$, $\Delta x = x - x_0 = 0,01$.

Решение. Из приближённой формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = df(x_0).$$

Подставляя в формулу $x_0 = 2$, $\Delta x = x - x_0 = 0,01$, получаем:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = (2 + 0,01)^2 - 2^2 \approx 2 \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04. \otimes$$

Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Предварительные сведения

Говорят, что функция $f : M \rightarrow f(M)$ имеет в точке $x_0 \in M$ **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что

$$f(x_0) = \max_{U \cap M} f \quad \left(f(x_0) = \min_{U \cap M} f \right).$$

Теорема Ферма. Если функция f определена и дифференцируема на открытом множестве $J = (a, b)$ и имеет в точке $x_0 \in J$ локальный экстремум (всё равно, максимум или минимум), то $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J = (a, b)$, причём $f(a) = f(b) = c$, то

$$(\exists x_0 \in J): \frac{df}{dx}(x_0) = 0.$$

Теорема Лагранжа. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J = (a, b)$, то

$$(\exists x_0 \in (a, b)): f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Коши. Если функции f и g непрерывны на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируемы на открытом промежутке $J = (a, b)$, причём

$$(\forall x \in J) \frac{dg}{dx}(x) \neq 0,$$

то $g(b) \neq g(a)$ и

$$(\exists x_0 \in J): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема Тейлора. Если функция $f: J \rightarrow f(J)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $[x_0, x] \subset J$ и $n+1$ раз дифференцируема на соответствующем открытом промежутке (x_0, x) , а её производные до порядка n включительно имеют предельные значения $f^{(k)}(x_0)$, $(k = 0, 1, 2, \dots, N)$, то существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что для функции f справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Примеры с решением

Пример 3.3.1. Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x) = 3 - x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке $(1, 4)$.

Решение. Данная функция на промежутке $(1, 4)$ монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке 1, а минимума в точке 4. Следовательно, в промежутке $(1, 4)$ не существует точки x_0 локального экстремума, в которой $f'(x_0) = 0$. Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет. $\otimes$

Пример 3.3.2. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = 3 + 2x - x^2,$$

на промежутке $[0, 4]$ условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (0, 4)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Р е ш е н и е. На промежутке $(0, 4)$ функция дифференцируема, следовательно $(\exists x_0 \in (0, 4)) f'(x_0) = 0$. Находим эту точку:

$$f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow 2 - 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1. \otimes$$

Пример 3.3.3. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = x^2 + 6x - 35,$$

на промежутке $[-5, -1]$ условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (-5, -1)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5) = f(-1) = -40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка $x_0 \in (-5, -1)$, в которой $f'(x_0) = 0$, существует. Найдём её:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = -3. \otimes$$

Пример 3.3.4. На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y = x^3 - 3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 18)$.

Р е ш е н и е. Функция определена на промежутке $[-1, 3]$, непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке $(-1, 3)$. Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка $x_0 \in (-1, 3)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 4.$$

Так как $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$, то имеем $3x^2 - 3 = 4$. Из этого уравнения находим

$x_{01} = +\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_{02} = -\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как из этих двух точек $x_{01} \in [-1, 3]$ а $x_{02} \notin [-1, 3]$, то

$$x_0 = x_{01} = \sqrt{\frac{7}{3}}. \otimes$$

Пример 3.3.5. В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y = f(x) = x^2 - 8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1; 9)$, $B(5; -15)$.

Решение. На промежутке $[-1, 5]$ функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

Поэтому имеем:

$$\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-24}{6} = -4 \Rightarrow f'(x_0) \equiv 2x_0 - 8 = -4 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Подставляя это значение x в формулу для функции, получаем

$$y = f(2) = -12.$$

Таким образом, искомой является точка $C(2; -12)$. $\otimes$

Пример 3.3.6. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$$

на промежутке $[1, 2]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0 , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Решение. Обе функции непрерывны на промежутке $[1, 2]$ и дифференцируемы на промежутке $(a, b) = (1, 2)$, причём $(\forall x \in (a, b))g'(x) \neq 0$. Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3x_0^2}{2x_0} = \frac{3}{2}x_0 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{14}{9}. \otimes$$

Пример 3.3.7. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

на промежутке $[1, 4]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0 , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Решение. Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x) = 2x - 2, \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20.$$

Кроме этого, производная функции g в точках промежутка $(1, 4)$ не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения $3x^2 - 14x + 20 = 0$ имеем $D = b^2 - 4ac = -44 < 0$ (график функции g не имеет точек пересечения с осью OX). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{11-2}{27-9} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x_0-2}{3x_0^2-14x_0+20} = \frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_{01} = 4, \quad x_{02} = 2$$

Так как из этих двух точек промежутку $(1, 4)$ принадлежит только точка $x_{02} = 2$, то она и является искомой точкой. $\otimes$

Пример 3.3.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^{-x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((e^x + x^{-x}) \cdot (1+x) \right) = 2. \otimes$$

Пример 3.3.9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{9x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{18x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.3.10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = [-\infty \cdot 0]$. Для раскрытия не-

определённости заменим переменную:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = \{x = -t\} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^3 \cdot e^{-t}) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t}{e^t} = -6 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0. \otimes$$

Пример 3.3.11. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Для раскрытия неопределённости приводим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right).$$

Получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.3.12. Разложить многочлен

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$

по степеням $x-1$ по формуле Тейлора.

Решение. В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \\ &+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

где $x_0 = 1$. Находим значение многочлена и его производных в точке $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1, & P(1) &= 0; \\ P^{(1)}(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2, & P^{(1)}(1) &= 0; \\ P^{(2)}(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2, & P^{(2)}(1) &= 0; \\ P^{(3)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6, & P^{(3)}(1) &= 18; \\ P^{(4)}(x) &= 120x - 48, & P^{(4)}(1) &= 72; \\ P^{(5)}(x) &= 120, & P^{(5)}(1) &= 120. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x) = 3 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^4 + (x-1)^5. \otimes$$

Пример 3.3.13. Разложить многочлен

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$$

по степеням $x + 1$ по формуле Тейлора.

Решение. Вычисляя значение многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$, получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, & P(-1) &= -9; \\ P^{(1)}(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4, & P^{(1)}(-1) &= 22; \\ P^{(2)}(x) &= 12x^2 + 12x - 16, & P^{(2)}(-1) &= -16; \\ P^{(3)}(x) &= 24x + 12, & P^{(3)}(-1) &= -12; \\ P^{(4)}(x) &= 24, & P^{(4)}(-1) &= 24. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= -9 + \frac{22}{1!} \cdot (x+1) + \frac{-16}{2!} \cdot (x+1)^2 + \frac{-12}{3!} \cdot (x+1)^3 + \\ &+ \frac{24}{4!} \cdot (x+1)^4 = -9 + 22 \cdot (x+1) - 8 \cdot (x+1)^2 - \\ &- 2 \cdot (x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.3.14. Представить функцию $f(x) = e^x$ в виде разложения по формуле Маклорена.

Решение. Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f}{dx^k}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств: $(\forall n \in N)$

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{d^2 x}(0) = \dots = \frac{d^n f}{d^n x}(0) = e^0 = 1.$$

Кроме этого, очевидно, что $\frac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x) = e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить $\xi = \theta \cdot x$, где $0 < \theta < 1$. $\otimes$

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \\ & + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Здесь многочлен Тейлора

$$\begin{aligned} T_n(x_0, x) = & \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \\ & + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

При условии $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = o((x-x_0)^n) = o((\Delta x)^n).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((\Delta x)^n).$$

Последняя форма записи называется **формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**.

Пример 3.3.15. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.

Решение. Рассмотрим производные функции $f(x) = \sin x$ в точке x :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin x = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$\frac{d^k}{dx^k} \sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Здесь мы положили $\xi = \theta x$, где $0 < \theta < 1$, $x \in (a, b)$.

Формула Маклорена принимает вид

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \alpha^{(2n+1)}(x) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x. \end{aligned}$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Пример 3.3.16. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Записываем для $\sin x$ разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

Пример 3.3.17. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x}$.

Решение. Используем разложение для e^x , $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3 \cdot (x + o(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^5)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного

Предварительные сведения

Пусть функция $f: J \rightarrow f(J)$ дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и монотонно возрастает (монотонно убывает) на нём. Тогда на этом множестве её производная неотрицательна (неположительна), то есть

$$(\forall x \in (a, b)) \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Пусть функция $f: J \rightarrow f(J)$ дифференцируема на $J = (a, b)$ и существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$. Тогда если при переходе через точку x_0 в направлении

роста аргумента x производная f' функции f меняет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (локальный минимум). Если же знак производной f' при переходе через точку x_0 не меняется, то функция в точке x_0 экстремума не имеет.

График G_f функции $f : J \rightarrow f(J)$, дифференцируемой на $J = (a, b)$, называется **выпуклым в окрестности** $U(x_0)$ точки $x_0 \in J$, если точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика лежат ниже касательной к графику в точке x_0 . Если же все точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика G_f функции лежат выше касательной к нему в точке x_0 , то график называется **вогнутым в окрестности** $U(x_0)$ точки x_0 . •

Пусть функция $f : J \rightarrow f(J)$ определена и дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Тогда если при переходе через точку x_0 (в направлении роста аргумента x) график функции G_f меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), то точка $(x_0; f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции.

Пусть $f : J \rightarrow f(J)$, где $J = (a, b)$. Тогда, если вторая производная функция f'' для функции f во всех точках множества J положительна (отрицательна), то график функции G_f является вогнутым (выпуклым) на этом множестве.

Пусть дана функция $f : M \rightarrow f(M)$ и G_f – её график. Прямая линия, с уравнением $x = a$, где $a \in M$, называется **вертикальной асимптотой графика функции** f , если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

не существует.

Прямая линия с уравнением

$$y = kx + b$$

называется **наклонной асимптотой графика** G_f функции $f : M \rightarrow f(M)$ (правой при $x \rightarrow +\infty$ и левой при $x \rightarrow -\infty$), если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Справедливо представление

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$. Нетрудно видеть также, что справедливы формулы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Примеры с решением

Пример 3.4.1. Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

Решение. Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+1)^2 - 12.$$

Поэтому имеем:

$$f' > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 > 0;$$

$$f' < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 < 0.$$

Корни уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

есть

$$x_1 = -3, x_2 = 1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x_0 = -1$, $y_0 = -12$. Следовательно, неравенство $f'(x) > 0$ выполняется при $x < -3$ и $x > 1$, а неравенство $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 1$.

На множестве $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ функция строго монотонно возрастает, а на множестве $(-3, 1)$ строго монотонно убывает. $\otimes$

Пример 3.4.2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi = -0,01 \cdot x^3 + 300 \cdot x - 500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

Решение. Производная от Φ равна:

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300 < 0,$$

откуда имеем $x^2 - 10000 > 0$. Из последнего неравенства получаем: $x_1 > 100$, $x_2 < -100$. Имеет экономический смысл только неравенство $x_1 > 100$. Следовательно, при $x > 100$ финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше 100 единиц становится экономически не выгодно. $\otimes$

Пример 3.4.3. Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции f есть

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной $f'(x)$ справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

x	$x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}} < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x > \sqrt{\frac{5}{3}}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		Максимум $f(x_1) = 6,3$		Минимум $f(x_2) = -2,3$	

4. Вычисляем значения функции в точках x_1 , x_2 и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум $f(x_1) = 6,3$, а в точке

$$x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимум $f(x_2) = -2,3$. $\otimes$

Пример 3.4.4. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3.$$

Решение. Множеством определения функции является вся числовая ось R .

1) Находим производную функции:

$$f'(x) = x^2 + 5x + 4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

В результате решения имеем корни: $x_1 = -1$, $x_2 = -4$. Критические точки разбивают R^1 на промежутки

$$-\infty < x < -4, -4 < x < -1, -1 < x < \infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке $(-\infty, -4)$ имеем $y' > 0$;

в промежутке $(-4, -1)$ имеем $y' < 0$;

в промежутке $(-1, \infty)$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, в точке -4 имеем **максимум**; в точке -1 имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-4) \approx 5,67; \min f(x) = f(-1) = 1,17. \otimes$$

Пример 3.4.5. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10.$$

Решение. 1) Находим производную функции:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0, x^4 - x^2 = 0, x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0; f''(1) = 30; f''(-1) = -30.$$

В точке $x_2 = 1$ функция имеет **минимум**, а в точке $x_3 = -1$ - **максимум**. В точке $x_1 = 0$ функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака. $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

Пример 3.4.6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = (x^2 + 7x) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции $M = R$. Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка $x = -1$ является нулём второй производной $f''(x)$, а точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода второй производной $f''(x)$. Эти точки делят множество определения функции $f(x)$ на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

2) Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$$(\forall x \in (-\infty, -1)) f''(x) < 0;$$

$$(\forall x \in (-1, 0)) f''(x) > 0;$$

$$(\forall x \in (0, +\infty)) f''(x) > 0.$$

Следовательно: на $(-\infty, -1)$ график функции *выпуклый*; на $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ график функции *вогнутый*.

3) Так как функция в точке $x_0 = -1$ определена, а $f''(-1) = 0$, то в точке $x_0 = -1$ график функции испытывает перегиб, а точка

$$(x_0; f(x_0)) = (-1; 3)$$

является точкой перегиба графика функции. $\otimes$

Пример 3.4.7. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Р е ш е н и е. 1) Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 3$.

2) По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем x , то есть

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = -x + 4$. $\otimes$

Пример 3.4.8. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x.$$

Решение. 1) Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

2) Из представления функции в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx],$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

Правый предел:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 2 \right) = -1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -x.$$

Левый предел:

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \{x = -z\} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+z^2} + 2z}{-z} = \\ &= -\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} + 2 \right) = -3; \end{aligned}$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -3x. \otimes$$

Пример 3.4.9. Исследовать функцию, заданную формулой $y(x) = x \cdot e^{-x}$.

Решение. 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел R .

2) Нуль функции – точка $x = 0$, причём $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$. Следовательно, функция в точке

$x = 0$ асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x) \Rightarrow x = 1.$$

4) Имеем два промежутка $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$. На этих промежутках

$$(\forall x \in (-\infty, 1)) \quad y'(x) > 0,$$

$$(\forall x \in (1, \infty)) \quad y'(x) < 0,$$

соответственно. Следовательно, при $x \in (-\infty, 1)$ функция строго монотонно возрастает, а при $x \in (1, \infty)$ функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x) = -e^{-x} \cdot (1 - x) - e^{-x} = e^{-x} \cdot (x - 2).$$

Так как в точке $x = 1$ вторая производная равна

$$y''(1) = \frac{1-2}{e} = -\frac{1}{e} < 0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный $\frac{1}{e}$.

6) Вторая производная функции в точке $x = 2$ обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при $x = 2$ имеет перегиб,

причём при $x < 2$ график функции выпуклый, а при $x > 2$ – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}. \otimes$$

Практическое занятие 6. Интегрируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Определённым интегралом от определённой на промежутке $[a, b]$ функции f называется предел последовательности интегральных сумм Римана

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

если он существует. Можно показать, что этот предел существует для непрерывной на $[a, b]$ функции.

Свойства определённого интеграла:

- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- 2) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
- 3) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;
- 4) $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$;
- 5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ при $a < c < b$;
- 6) $\int_a^b f(x) dx > 0$, если $(\forall x \in [a, b]) f(x) > 0$.

Пусть f и F – две функции, определённые на открытом промежутке $M = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Функция F называется **первообразной (примитивной) функцией** для функции f на промежутке M , если она дифференцируема на этом промежутке и выполняется следующее условие:

$$(\forall x \in (a, b)) \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Неопределённым интегралом от функции f на промежутке (a, b) действительной числовой оси называется бесконечное множество $H(x)$ всех её первообразных. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$H(x) = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Если F – первообразная функция для функции f на промежутке $\bar{J} = [a, b]$, то определённый интеграл от функции f по заданному промежутку равен разности значений первообразной на концах промежутка (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Примеры с решением

Пример 3.5.1. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt[3]{x^2} dx.$$

Решение. Непосредственно имеем:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C. \otimes$$

Пример 3.5.2. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx.$$

Решение. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\begin{aligned} \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx &= 6 \int x^2 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5 \int dx = \\ &= 2x^3 - 2x^{\frac{3}{2}} + 5x + C = 2x^3 - 2\sqrt{x^3} + 5x + C, \end{aligned}$$

где все постоянные интегрирования объединены в одну постоянную C . $\otimes$

Пример 3.5.3. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \left(5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Решение. Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\begin{aligned} \int \left(5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx &= \\ &= 5 \int x^2 dx + 11 \int dx - 3 \int \sin x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 11x + 3\cos x + 2\ln|x| + \operatorname{ctgx} + C. \otimes$$

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int (\ln f(x))' dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется *методом подведения под дифференциал*.

Пример 3.5.4. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+1}.$$

Решение. Замечая, что $dx = d(x+1)$ и, используя табличную первообразную для

функции $\frac{1}{x}$, в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C. \otimes$$

Пример 3.5.5. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}.$$

Решение. Замечая, что $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, имеем:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \otimes$$

Пример 3.5.6. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Решение. Так как $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$, получаем:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \otimes$$

Пример 3.5.7. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5} dx.$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3(x+5)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x+5} dx &= \int \left(3 - \frac{13}{x+5} \right) dx = 3 \int dx - 13 \int \frac{1}{x+5} dx = \\ &= 3x - 13 \ln|x+5| + C. \otimes \end{aligned}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена на промежутке $\bar{J} \in [\alpha, \beta]$, имеет непрерывную производную на (α, β) и принимает значения в промежутке $\bar{M} \in [a, b]$, а функция $f: \bar{M} \rightarrow f(\bar{M})$ – непрерывная функция, определённая при всех $x \in \bar{M}$. Тогда в неопределённом интеграле

$$I = \int f(x) dx + C$$

можно заменить переменную x функцией $\varphi(t)$ от переменной t , причём dx заменяется на $\frac{d\varphi}{dt}(t)dt$, то есть, справедлива формула **замены переменной**

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt + C.$$

Если функции u и v имеют непрерывные производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$, то

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

(формула интегрирования по частям).

Пример 3.5.8. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3} dx.$$

Решение. Заменяя переменную по формуле $t = x + 3 \Rightarrow dx = dt$, получаем:

$$\int \sqrt{x+3} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.9. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx.$$

Решение. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2 + 1} dt,$$

получаем:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.10. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Решение. Замечая, что $\cos x dx = d(\sin x)$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d(\sin x), \quad v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.11. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Решение. Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.12. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

Решение. Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Полученное число $\frac{1}{3}$ имеет смысл площади криволинейного треугольника с вершинами в точках

$$O(0, 0), A(1, 1), B(1, 0). \otimes$$

Пример 3.5.13. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Решение. Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.14. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^2 2^{3x-4} dx.$$

Решение. Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\begin{aligned} \int_1^2 2^{3x-4} dx &= \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-4) \right\} = \frac{1}{3} \int_1^2 2^{3x-4} d(3x-4) = \\ &= \left\{ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x-4}}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.15. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx.$$

Решение. Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную $t = 2 - x^2$. Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d(2 - x^2) = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx &= \left\{ \begin{array}{l} dt = d(2 - x^2) = -2x dx; x dx = -\frac{1}{2} dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \cdot (64 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.16. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Решение. Используя замену переменной интегрирования $t = \ln x$, имеем:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.17. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Решение. Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d(-x) = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2 \cdot e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = e - \frac{2}{e}. \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

$$1) \left(\frac{n}{2n+1} \right); 2) \left(\frac{n}{5^n} \right); 3) \left(\frac{n}{4n-3} \right); 4) \left(\frac{n}{n+1} \right); 5) \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

2. Используя определение, показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, если:

$$1) x_n = \frac{3n+1}{5n+2}, x_0 = \frac{3}{5}; 2) x_n = \frac{2n-2}{3n-1}, x_0 = \frac{2}{3};$$

$$3) x_n = \frac{4n-2}{2n+3}, x_0 = 2; 4) x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}, x_0 = 4;$$

$$5) x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}, x_0 = -1; 6) x_n = \frac{6n-2}{2n+1}, x_0 = 3;$$

$$7) x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}, x_0 = 2; 8) x_n = \frac{5n+2}{3n+1}, x_0 = \frac{5}{3}.$$

3. Вычислить предел последовательности:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n}; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+5};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-n)^2 + (5+n)^2}{(5-n)^2 - (5+n)^2}; 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^2 - (2+n)^2}{(2+n)^2 - (1-n)^2}; 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3}{(n+2)^2 - (n+1)^3};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+5)^3}{(3-n)^3}; 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{n}{2^n}}{n^2 - 1};$$

$$\begin{aligned}
& 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{3n^2}{3n - 1} \right); 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a^2 n^2 + bn} - an \right); \\
& 11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}; 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{2n^2 + 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 2}}; \\
& 13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}; 14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+5} + n}; \\
& 15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{2^n + 5^n}; 16) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} \sin x); \\
& 17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^n; 18) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2}; \\
& 19) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + n - 1} \right)^{-n^2}; 20) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + n + 1} \right)^{3n^2}; \\
& 21) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}; 22) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n.
\end{aligned}$$

23. Найти множество определения M и множество значений $f(M)$ функции $f(x) = \lg x$.

24. Найти множество определения M следующих функций:

$$\begin{aligned}
& 1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; 2) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}; 3) f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}; \\
& 4) f(x) = \lg(x - 2) - \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}; 5) f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}.
\end{aligned}$$

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

$$\begin{aligned}
& 1) f(x) = 1 - x; 2) f(x) = x^3 + x; 3) f(x) = \sqrt{2x - x^2}; \\
& 4) f(x) = x^5 - x^3 + x; 5) f(x) = x^2 + x - 1.
\end{aligned}$$

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = \sin(5x + 3)$; 3) $f(x) = \cos x^2$;

4) $f(x) = 2[x] + 1$, где $[x]$ – целая часть x .

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция $f(x) = x^2 + 3x + 3$ непрерывна в любой точке действительной числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках x_0 :

1) $f(x) = 3x - 5$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = 4x^2 - 1$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = -3x^2 + 8$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = 4x^2 + 1$, $x_0 = 8$;

5) $f(x) = \sin x - \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

29. Решить неравенство $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0$.

30. Найти предел данной функции при $x \rightarrow x_0$:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 3x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 5x - \cos 3x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x3^x}{1 + x2^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right); \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2}; 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4}; \\
& 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + x + 1}; 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right); 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}; 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}.
\end{aligned}$$

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

$$\begin{aligned}
& 1) f(x) = \ln \frac{5-4x^2}{3+7x^2}, x_0 = 3; 2) f(x) = \ln \frac{(1+x^2) \cdot (1-2x)^3}{(x^2-5)^2}; \\
& 3) f(x) = x \cdot \ln x, x=1, x=1x=e, x=\frac{1}{e}, x=\frac{1}{e^2}; \\
& 4) f(x) = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg}(3x^2 + 2) + \operatorname{ctg} 6x; \\
& 5) f(x) = \ln^2(1 - \cos x); 6) f(x) = \frac{3^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 3)}{1 + \ln^2 3}; \\
& 7) f(x) = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}; 8) f(x) = \ln(1 + \sqrt{thx}).
\end{aligned}$$

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + (1+x^2) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

34. Найти $f'(0)$ и $df(0)$, если $f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$.

35. Найти $f'(x)$ и $df(x)$, если $f(x) = \ln(5e^x + 7)$.

36. Пусть функции f и g , определённые на одном и том же множестве $M \subset R$, n -раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также n -раз дифференцируемы на M .

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1) $f(x) = \ln(2x - 3)$, $f''(x) = ?$;

2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$, $f'''(x) = ?$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$, $f'''(x) = ?$;

4) $f(x) = \ln(3x+1)$, $f'''(x) = ?$;

5) $f(x) = 3^{2x+1}$, $f'''(x) = ?$;

6) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, $f^{(3)} = ?$.

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1) $f(x) = \cos^2 x$, $f''(x) = ?$, $d^2 f(x) = ?$;

2) $f(x) = e^x \cos x$, $f^{(3)}(x) = ?$, $d^{(3)} f(x) = ?$.

39. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции $f(x) = 3x^2 - 1$ на промежутке $[1, 2]$.

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x$ на промежутке $[0, 1]$.

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции $f(x) = 2x - x^2$ на про-

межутке $[1, 3]$. Найти точку ξ , удовлетворяющую условию $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty]$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$;

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left[\frac{0}{0} \right]; 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

$$\begin{aligned} &1) \int (x^6 - 6x^5 + 40x^3 - 24x^2) dx; 2) \int \sqrt[3]{x^2} (8\sqrt[3]{x} - 1) dx; \\ &3) \int \frac{(4 - 3\sqrt{x})^2}{x^2} dx; 4) \int \frac{x+2}{x+3} dx; 5) \int \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) dx; \\ &6) \int (2x^2 + 1)^3 dx; 7) \int (1 + \sqrt{x})^4 dx; 8) \int \frac{(x+1) \cdot (x^2 - 3)}{3x^2} dx; \\ &9) \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx; 10) \int (5^x - 1)(5^{-x} + 1) dx; \\ &11) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx; 12) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx; 13) \int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x} dx; \\ &14) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; 15) \int \frac{dx}{2 + 3x^2} dx. \end{aligned}$$

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

$$\begin{aligned} &1) \int \frac{dx}{ax+b}, \text{ где } a, b - \text{ постоянные;} \\ &2) I = \int \frac{x dx}{1+x^2}; \\ &3) \int \sqrt{x+3} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x+3); \\ &4) I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \text{ (Указание: использовать подстановку } t = e^x); \\ &5) \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx; 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \end{aligned}$$

$$7) \int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x} dx; 8) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$9) \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^3} dx; 10) \int \frac{\sin 2x - \cos x}{(\cos^2 x + \sin x)^2} dx.$$

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

$$1) \int x \cdot e^{x^2} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x^2);$$

$$2) \int \frac{\ln^3 x}{x} dx; 3) \int (12x-5)^7 dx; 4) \int e^{4-3x} dx;$$

$$5) \int 6^{5x+2} dx; 6) \int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx; 7) \int \frac{e^x dx}{2e^x+7}; 8) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$9) \int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx; 10) \int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx; 11) \int \sin x \cos^2 x dx;$$

$$12) \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx; 13) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx;$$

$$14) \int \frac{\sqrt{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; 15) \int e^{4 \cos x - 1} \sin x dx.$$

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

$$1) \int x^2 \cdot \cos x dx; 2) \int x^2 \cdot \sin x dx; 3) \int x \cdot e^x dx;$$

$$4) \int (x^2 + 2x + 3) \cdot \cos x dx; 5) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx; 6) \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$7) \int x^2 e^x dx; 8) \int x \ln x dx.$$

47. Найти определённый интеграл:

$$1) \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx; 2) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; 3) \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx; 5) \int_1^e \frac{1 + \ln^3 x}{x} dx; 6) \int_{-2}^5 \sqrt[3]{5x+2} dx;$$

$$\begin{aligned}
& 7) \int_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x} dx; 8) \int_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx; 9) \int_0^1 x e^{-x} dx; \\
& 10) \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx; 11) \int_0^\pi (\pi - x) \sin x dx; 12) \int_{-1}^0 (2x + 3) e^{-x} dx; \\
& 13) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}; 14) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \cos x} dx; 15) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx; 16) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.
\end{aligned}$$

ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЯДЫ

Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций

нескольких переменных

Предварительные сведения

Функция $f: R^n \rightarrow R^1$ называется дифференцируемой в области $\Omega \subset R^n$, если выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned}
& \left(\forall \vec{x}_0 \in \Omega \right) \left(\exists U \left(\vec{x}_0 \right) \subset \Omega \right) : \left(\forall \vec{x} \in U \left(\vec{x}_0 \right) \right) \\
& f \left(\vec{x} \right) = f \left(\vec{x}_0 \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \left(\vec{x}_0 \right) \cdot \Delta x^k + o \left(\left\| \Delta \vec{x} \right\| \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& \Delta \vec{x} = \sum_{k=1}^m \left(x^k - x_0^k \right) \vec{e}_k \equiv \sum_{k=1}^m \Delta x^k \vec{e}_k, \\
& \lim_{\left\| \Delta \vec{x} \right\| \rightarrow 0} \frac{o \left(\left\| \Delta \vec{x} \right\| \right)}{\left\| \Delta \vec{x} \right\|} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x}_0 \right) \equiv \lim_{\Delta x^k \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k + \Delta x^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m)}{\Delta x^k}.$$

частная производная по переменной x^k первого порядка.

Частные производные функции нескольких переменных высших порядков находятся посредством рекуррентной формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \left(\vec{x} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x} \right).$$

Вторая формула даёт выражение для смешанной частной производной второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

Пусть $f : M \rightarrow f(M)$ ($M \subset R^n$ и $f(M) \subset R^1$) – некоторая дифференцируемая в окрестности $U(\vec{x}_0) \subset M$ точки $\vec{x}_0 \in M$ функция. Тогда, если в окрестности $U(\vec{x}_0)$ существуют (смешанные) частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left(\vec{x} \right),$$

непрерывные в точке $\vec{x}_0$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x}_0 \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left(\vec{x}_0 \right).$$

Теорема обобщается и на смешанные производные любого порядка, вычисленные одинаковое число раз по одним и тем же переменным, даже в разном порядке.

Высшие дифференциалы определяются аналогично высшим производным посредством рекуррентной формулы следующего вида

$$d^n f \left(\vec{x} \right) \stackrel{\text{def}}{=} d \left(d^{n-1} f \left(\vec{x} \right) \right).$$

Так, например, второй дифференциал функции $f : M \rightarrow f(M)$ в точке $\vec{x} \in M \subset R^n$ вычисляется по формуле:

$$d^2 f \left(\vec{x} \right) = d \left(df \left(\vec{x} \right) \right) = d \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x} \right) dx_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x} \right) dx_k \right) dx_j.$$

Примеры с решением

Пример 4.1.1. Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке $M_0(5; 1)$.

Решение. Для частной производной по переменной x имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение $y = y_0$, находим сужение функции $z(x, y)$ на прямую линию $y = y_0$, параллельную оси Ox . На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции $z(x, y)$ является функцией одной переменной x . Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения $z(x, y_0)$.

1) Придавая переменной x приращение Δx в точке $(x_0; y_0)$, получим:

$$\begin{aligned} z(x_0 + \Delta x, y_0) &= x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + \\ &+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5. \end{aligned}$$

2) Находим приращение функции $z(x, y_0)$ в точке $(x_0; y_0)$, придавая переменной x приращение Δx :

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 y_0 + 4. \end{aligned}$$

4) Подставляя координаты точки $(x_0; y_0) = (5; 1)$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5, 1) = (2x_0 y_0 + 4) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 14.$$

Аналогично находим частную производную в точке $(x_0; y_0) = (5; 1)$ по второй переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5, 1) = (x_0^2 - 2) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 23. \quad \otimes$$

Пример 4.1.2. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2 y - y^3.$$

Решение. Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2. \quad \otimes$$

Пример 4.1.3. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

Решение. Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x + y} \right) = \frac{y^2}{(x + y)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x + y} \right) = \frac{x^2}{(x + y)^2}. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.4. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 - x)^{y^2}.$$

Решение. Для вычисления частной производной по переменной x фиксируем переменную y и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем формулу $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot (1-x)^{y^2} \cdot \ln(1-x). \quad \otimes$$

Пример 4.1.5. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

Решение. Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 + 2 \ln y + yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + \frac{2x}{y} + x^y \ln x. \quad \otimes$$

Пример 4.1.6. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 + xy)^y.$$

Решение. Фиксируя переменную y и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной x получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y(1 + xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1 + xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x, y) = y \ln(1 + xy) \rightarrow z'_y = \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \rightarrow$$

$$z' = \frac{u'}{u} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (1 + xy)^y \cdot \ln(1 + xy) + (1 + xy)^y \frac{xy}{1 + xy} =$$

$$= (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{x \cdot y}{(1+xy)} \right]. \otimes$$

Пример 4.1.7. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

в точке $M_0(1; -1; -2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(1; -1; -2) = -\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(1; -1; -2) = \frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(1; -1; -2) = -\frac{2}{\sqrt{216}}. \otimes$$

Пример 4.1.8. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \equiv e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

в точке $M(0; 1; 2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = 0;$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = 2e^5;$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_3 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M) = 4e^5. \otimes$$

Пример 4.1.9. Показать, что функция, заданная формулой

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции в произвольной точке (x, y) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0. \otimes$$

Пример 4.1.10. Показать, что функция

$$u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}.$$

Решение. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(x_1^2 - x_2^2) = x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 - x_2^2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \ln(x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 - x_2^2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{1}{x_2} \left[\ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \right] = \\ & = \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} - \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{\ln(x_1^2 - x_2^2)}{x_2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция $u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}. \otimes$$

Пример 4.1.11. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \otimes$$

Пример 4.1.12. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \otimes$$

Пример 4.1.13. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных $u(x, y) = \sin(x + y)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x + y). \otimes$$

Пример 4.1.14. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Решение. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2-1} + x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2. \otimes$$

Пример 4.1.15. Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M_0(1; -1)$.

Решение. Находим частные производные функции:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = -\frac{1}{\frac{3}{2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \frac{1}{\frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$3) dz(1, -1) = -\frac{\sqrt{2}}{4} dx + \frac{\sqrt{2}}{4} dy. \otimes$$

Пример 4.1.16. Вычислить приближённо $(0,98)^{2,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $Z = X^Y$. В точке $(1; 2)$ значение функции $z(1; 2) = 1$. Вычислим значение функции в точке $(0,98; 2,01)$. Имеем $\Delta x = -0,02$, $\Delta y = 0,01$. Находим частные производные функции $Z = X^Y$ в точке $(1; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$(0,98)^{2,01} = z(1; 2) + \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0,04 = 0,96. \otimes$$

Пример 4.1.17. Найти дифференциал функции

$$f = f(x + y^2, y + x^2)$$

в точке $M(-1; 1)$.

Решение. Обозначим, например,

$$u = x + y^2, v = y + x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$\begin{aligned} df(M) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M) dy = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - 2 \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dx + \left[2 \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dy. \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.18. Найти дифференциал второго порядка функции

$$f = f(x + y, xy).$$

Решение. Обозначим $u = x + y$, $v = xy$. Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot xy + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x+y) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes
\end{aligned}$$

Пусть функция $u = f(x, y)$ задана *параметрическим способом*, то есть, с помощью формул

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тогда функция u является функцией одного переменного t :

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t , то есть, существуют производные

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\varphi}{dt}(t), \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\psi}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема, то придавая переменной t приращение Δt , видим, что все функции получают соответствующие приращения Δx , Δy и Δu , причём по определению дифференцируемости

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y
\end{aligned}$$

где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta = 0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$, то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Пример 4.1.19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = x^3 - x^2 y, \quad x = 1 - t^2, \quad y = t^4.$$

Решение. Находим непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (3x^2 - 2xy)2t + (-x^2)4t^3 = \\ &= 4t^7 + 2t^6 + 8t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 2t. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.20. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \ln \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sin(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$x_1 = a \sin t, \quad x_2 = b \cos t, \quad x_3 = ce^{-kt},$$

где a, b, c, k – некоторые постоянные.

Пример 4.1.21. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ для функции $z = x^3 e^y$, если

$$x = ts, \quad y = t^2 - s^2.$$

Решение.

$$1) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{t^2-s^2} t^2 s^3 (3+2t^2).$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^{t^2-s^2} t^3 s^2 (3-2s^2). \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно посредством уравнения

$$F(x, y) = 0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

где учтено, что $\frac{dx}{dx} = 1$. Если $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, то получаем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F(x, y, u) = 0$$

задаёт функцию двух переменных $u = \varphi(x, y)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Пример 4.1.22. Найти частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1 = 0.$$

Решение. Здесь

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y; \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y - 4; \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x+y}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2-x-y}{z}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

Предварительные сведения

Пусть $f : M \rightarrow f(M)$ – некоторая функция n переменных, дифференцируемая в области $M \subset R^n$, а N_0 и N – точки множества её определения. Тогда **производной по направлению** вектора $\vec{N_0 N} = t \vec{h}$, где $t \in R^+ \cup \{0\}$, в точке N_0 (с радиус-вектором $\vec{x_0}$) функции f называется правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x_0} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left(\vec{x_0} + t \vec{h} \right) - f \left(\vec{x_0} \right)}{t}.$$

Градиентом функции $f : M \rightarrow f(M)$ в точке $\vec{x_0} \in M$ называется вектор, имеющий в каноническом базисе пространства R^n координаты $\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x_0} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то есть вектор

$$\vec{\text{grad}} f \left(\vec{x_0} \right) \equiv \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x_0} \right) \vec{e}_k.$$

Связь производной по направлению и градиента даётся формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x_0} \right) &= \left(\vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{h} \right) = \left\| \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \right\| \cdot \left\| \vec{h} \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{N_0 N} \right\} = \\ &= \left\| \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{N_0 N} \right\}. \end{aligned}$$

Внутренняя точка $\vec{x}_0 \in M$ называется **точкой локального минимума** (точкой локального максимума) функции f , если существует окрестность $U(\vec{x}_0)$ такая, что

$\left(\forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \right)$ выполняется неравенство

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \left(f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \right).$$

Справедлива теорема, позволяющая исследовать на экстремум функцию двух переменных.

Пусть функция $f: M \rightarrow f(M)$, $M \subset R^2$, $f(M) \subset R^1$ непрерывна вместе со сво-

ими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in M$ и удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Составим определитель следующего вида

$$D(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда в точке $\vec{x}_0$ функция f :

- 1) имеет локальный минимум, если $D(\vec{x}_0) > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) > 0$;
- 2) имеет локальный максимум, если $D(\vec{x}_0) > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) < 0$;
- 3) не имеет экстремума, если $D(\vec{x}_0) < 0$.

Примеры с решением

Пример 4.2.1. Найти $\vec{\text{grad}} f$ и $\left\| \vec{\text{grad}} f \right\|$ для функции, определённой формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке $M_0(1; -1; 2)$.

Решение. Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = -4.$$

Теперь имеем:

$$\vec{\text{grad}} f(M_0) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}. \otimes$$

Пример 4.2.2. Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M_0(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, где $M(2; 4; -3)$.

Решение. Находим вектор

$$\vec{M_0M} : \vec{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке $M_0(1; 2; -1)$:

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3 = (2x - 2z)\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 - 2x\vec{e}_3,$$

$$\vec{\text{grad}} u(M_0) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора $\vec{M_0M}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \vec{M_0 M}}(M_0) &= \frac{\left(\left. \vec{\text{grad}} u \right|_M, \vec{M_0 M} \right)}{\left\| \vec{M_0 M} \right\|} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ &= \frac{4 + 8 + 4}{\sqrt{9}} = \frac{16}{3}. \quad \otimes\end{aligned}$$

Пример 4.2.3. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{7}{3}. \otimes$$

Пример 4.2.4. Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{2}.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ x + 3y = 16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Точка $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ является точкой локального минимума.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) \approx 36,6. \otimes$$

Практическое занятие 3. Числовые ряды

Предварительные сведения

Пусть $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ – некоторая последовательность действительных чисел ($a_k \in R, k=1, 2, 3, \dots$). Сопоставим из элементов этой последовательности новую последовательность, определив её члены так:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\dots\dots\dots$$

Формула для общего члена получившейся последовательности имеет, очевидно, вид

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Последовательность (s_n) определяет **числовой ряд**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и называется последовательностью частичных сумм числового ряда.

Бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся (расходящимся)**, если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Если ряд сходится, то его **суммой** называется число

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Необходимое условие сходимости числового ряда даётся следующей теоремой.

Последовательность (a_k) членов сходящегося числового ряда сходится к нулю.

Геометрическая прогрессия $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ при $|q| < 1$ сходится к

$$S = \frac{1}{1-q},$$

а при $|q| \geq 1$ расходится.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с положительными членами.

Если для почти всех k выполняется неравенство $a_k \leq b_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

называется **минорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – **мажорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Признак сравнения. Каждая миноранта сходящегося ряда сходится, а каждая мажоранта расходящегося ряда расходится.

Признак Даламбера. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с положительными членами. Если существует та-

кое число $q \in (0, 1)$, что для почти всех номеров k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, то ряд

сходится. Если же для почти всех k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, то ряд расходится.

Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

где (a_k) – последовательность положительных чисел, называется **знакопеременным рядом**.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

сходится в том и только в том случае, если последовательность из абсолютных величин его членов монотонно убывает и сходится к нулю.

Примеры с решением

Пример 4.3.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Решение. Общий член ряда равен

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \dots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 4.3.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \right] = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 4.3.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Р е ш е н и е. Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства $q = \frac{1}{2} < 1$

сходится и имеет сумму

$$S = \frac{1}{1-q} = 2. \otimes$$

Пример 4.3.4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Решение. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.5. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Решение. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$.

Решение. Для почти всех n выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1 + 2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$ является минорантой ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, ко-

торый сходится, так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$ по признаку сравнения сходится. $\otimes$

Пример 4.3.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$.

Решение. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям: $(\forall n \in N)$

$$-1 \leq \sin n \leq 1; 1 < 2 + \sin n < 3; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} < \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$ является так называемым обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^{\alpha}}$, который при

$0 < \alpha < 1$ расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \geq \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$ расходится, то и исходный ряд также расходится.

⊗

Пример 4.3.8. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Решение. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Поэтому ряд сходится по признаку

Даламбера. ⊗

Пример 4.3.9. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера расходится. ⊗

Пример 4.3.10. Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Решение. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится. $\otimes$

Пример 4.3.11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

Решение. Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена: $\Delta < 0,2$. $\otimes$

Пример 4.3.12. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

Решение. Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Для всех n , очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно. $\otimes$

Пример 4.3.13. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех n (начиная с $n = 2$) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно. $\otimes$

Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

Предварительные сведения

Последовательность функций (f_n) называется сходящейся на множестве M **поточечно** (или **в обычном смысле**), если для **каждой точки** $x_0 \in M$ сходится числовая последовательность $(f_n(x_0))$.

Предельной функцией, или **пределом** $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ сходящейся поточечно последовательности функций (f_n) , называется функция f , определённая на множестве M условием: $(\forall x_0 \in M) f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$.

Таким образом, для поточечно сходящейся функциональной последовательности неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется для каждой точки $(\forall x_0 \in M)$ и для своего ε , то есть $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$.

Функциональная последовательность (f_n) называется **равномерно сходящейся на множестве M к предельной функции f** , если для произвольного положительного числа ε и для

любой точки $x \in M$ найдётся такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, для равномерно сходящейся на множестве M функциональной последовательности неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех $x \in M$ и, следовательно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k : M \rightarrow f_k(M)$ называется **сходящимся на множестве M поточечно или в обычном смысле**, если на этом множестве поточечно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Функция $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ называется **суммой ряда** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, и при этом пишут

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ называется **равномерно сходящимся на множестве**

$M \subset R^1$, если на M равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, где $f_k : M \rightarrow f_k(M)$ – функциональный ряд. Тогда если $|f_k(x)| \leq a_k$ для всех точек $x \in M$ и для почти всех номеров $k \in N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на множестве M абсолютно и равномерно.

Функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ называется **степенным рядом с центром в**

точке x_0 . Числа a_k называются **коэффициентами** степенного ряда.

Первая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

сходится в некоторой точке x_1 , то он сходится абсолютно и равномерно во всякой точке x , удовлетворяющей условию $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Кроме этого, для каждой такой точки x существуют такие числа $S > 0$, $0 < q < 1$, что для всех номеров k справедливо неравенство

$$|a_k| \cdot |x - x_0|^k \leq Sq^k.$$

Причём, если $x \neq x_0$, $x_1 \neq x_0$ то $q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}$, а число S от x не зависит.

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

в точке x_1 не сходится абсолютно (например, расходится), то он расходится в каждой точке x , удовлетворяющей условию

$$|x - x_0| > |x_1 - x_0|.$$

Число

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

называется **радиусом сходимости**, а открытое множество $M_r = \{x : |x - x_0| < r\}$ – **множеством (интервалом) сходимости степенного ряда** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Примеры с решением

Пример 4.4.1. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^n + \dots$$

в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Решение. 1) В точке $x_1 = 0$ имеем

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot 2^n + \dots$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{2n-1}; u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) > 1.$$

Поэтому в точке $x_1 = 0$ ряд расходится.

2) В точке $x_2 = 1$ имеем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{3^n \cdot (2n-1)}; u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) < 1.$$

Поэтому в точке $x_2 = 1$ ряд сходится. $\otimes$

Пример 4.4.2. Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(n-1)x} + \dots$$

Решение. В точке $x = 0$ не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

1) На промежутке $(-\infty, 0)$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n-1)x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)(-x)} = \{-x = t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t},$$

где $t \in (0, \infty)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t} \neq 0$. Снова не выполняется необходимый при-

знак сходимости. Ряд на промежутке $(-\infty, 0)$ расходится.

2) На промежутке $(0, \infty)$ выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}} = \frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

На $(0, \infty)$ всегда $\frac{1}{e^x} < 1$. Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1 + \frac{1}{e^x} + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{e^x}\right)^n + \dots$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{e^x} < 1$. Поэтому сумма ряда равна

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x-1}. \quad \otimes$$

Пример 4.4.3. Исследовать сходимость степенного ряда

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$$

Решение. Здесь

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1 < x < 1$.

Если $x = 1$, имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Если $x = -1$, то получаем ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $x \in [-1, 1)$, который можно задать двойным неравенством $-1 \leq x < 1$. $\otimes$

Пример 4.4.4. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

Решение. Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{n^2}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

На левом конце промежутка сходимости $x = 1$ имеем ряд

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости $x = 3$ имеем ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Этот ряд сходится, так как при $p > 1$ сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений x , удовлетворяющих двойному неравенству $1 \leq x \leq 3$. $\otimes$

Пример 4.4.5. Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots + n!(x-5)^n + \dots$$

Решение. Коэффициенты ряда

$$a_n = n!; a_{n+1} = (n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при $x - 5 = 0$, то есть в точке $x = 5$. $\otimes$

Пример 4.4.6. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty, \infty)$.

Решение. Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} = -\frac{1}{x^4 + 1^2} + \frac{2}{x^4 + 2^2} - \frac{3}{x^4 + 3^2} + \dots$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1| = \frac{1}{x^4 + 1} > |u_2| = \frac{2}{x^4 + 4} > |u_3| = \frac{3}{x^4 + 9} > \dots$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x^2}{n} \right)^2 + 1} = 0.$$

Ряд сходится для любых $x \in (-\infty, \infty)$.

Для остатка ряда имеем

$$|r_n| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| < |u_{m+1}| = \left| \frac{(-1)^{(m+1)} \cdot (m+1)}{x^4 + (m+1)^2} \right| < \frac{1}{m+1},$$

так как $x^4 > 0$. Рассмотрим неравенство $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Из этого неравенства получаем

$m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Если теперь мы выберем $m_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$, то $(\forall m \geq m_0)$ получаем

$|r_m| < \frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Таким образом, ряд сходится на $(-\infty, \infty)$ независимо от x , то есть равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$. $\otimes$

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x-x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

для бесконечно дифференцируемой функции $f: M \rightarrow f(M)$, вне зависимости от его сходимости и суммы, называется **рядом Тейлора** для этой функции. При $x_0 = 0$ ряд называется **рядом Маклорена**.

Пример 4.4.7. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням x ($x_0 = 0$) в ряд Тейлора.

Решение. Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2, 2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости:

$$M = (-1, 1) \cap (-2, 2) = (-1, 1). \quad \otimes$$

Пример 4.4.8. Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Решение. Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x) = \sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x) = -4 \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin\left(2x + 2 \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \sin\left(2x + 3 \frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \sin\left[2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

.....

Вычисляем производные в точке $x = 0$:

$$f^{(0)}(0) = 0;$$

$$f^{(1)}(0) = 0;$$

$$f^{(2)}(0) = 2;$$

$$f^{(3)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(0) = 2^3;$$

$$f^{(5)}(0) = 0;$$

$$f^{(6)}(0) = 2^5;$$

.....

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{2^n \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \left| \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right| \leq 1,$$

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Поэтому функция $f(x) = \sin^2 x$ может быть разложена в ряд Маклорена

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot x^4 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^6 - \frac{2^7}{8!} \cdot x^8 + \dots$$

на любом промежутке $[-b, b]$. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

$$1) u(x, y) = x^3 \sin y + y^4; \quad 2) u(x, y) = x^2 \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

2. Найти частные производные в заданных точках:

$$1) u(x, y) = \frac{1-xy}{1+xy}, \quad A(0; 1);$$

$$2) u(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, \quad A(1; 1);$$

$$3) u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A(\sqrt{2}; 1).$$

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

$$1) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad 2) u = \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2});$$

3) $u = \ln \sin(x_1 - 2x_2)$; 4) $u = x^2 y z^4$; 5) $u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3)$.

4. Пусть функция задана формулой $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$. Вычислить $df(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) = \left(-1; \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

1) $u = \frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $dx_1 = \frac{1}{2}$, $dx_2 = -\frac{1}{3}$;

2) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $dx = -0,1$, $dy = 0,3$, $dz = 0,2$.

6. Вычислить приближённое значение выражения $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$.

7. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

8. Найти $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, если $f = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

9. Функция задана уравнением $e^u = \cos x \cos y$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{3},$$

в точке $M_0(1; 2; 3)$ по направлению вектора $\vec{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$$

32^{*)}. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

33^{*)}. Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

$$1) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots; 2) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots;$$

$$3) 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}; 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}; 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^2(2 + \sin n)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (1+2^n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2\sin n}{n-\ln n}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+3};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3-2}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+6}{n^3+5}; 10) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^4+3}{n^4+2};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{3^n+n}{7^n+2n}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{2n^3}} - 1 \right).$$

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}; 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3 + n}{3n^3 - 1} \right)^{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1} \right)^{n^3}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+3} \right)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}.$$

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n-2}{3n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{n}{10^n} \right);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + n + 1}.$$

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

$$1) \frac{3x+1}{x^2+x+1} + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^n + \dots,$$

$$x=1, x=2, x=3;$$

$$2) \frac{1!}{1} (x^2 - 4x + 6) + \frac{2!}{2^2} (x^2 - 4x + 6)^2 + \dots + \frac{n!}{n^2} (x^2 - 4x + 6)^n + \dots,$$

$$x=1, x=2, x=3.$$

41. Найти область сходимости функционального ряда

$$1) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2^2(1+x^2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2(1+x^2)^n} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2 - 6x + 10)^n};$$

$$\begin{aligned}
& 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 5x + 9)^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2 + 3)^n}; \\
& 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2 - 4x + 8)^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(x^2 - 2x + 6)^n}; \\
& 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n + \sqrt{n})^x}.
\end{aligned}$$

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

$$\begin{aligned}
& 1) \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots; \\
& 2) 1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \dots + \frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}} + \dots; \\
& 3) 2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \dots + \frac{2^n x^{5n}}{2n-1} + \dots; \\
& 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 9^n}; \\
& 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}; \\
& 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}; \\
& 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}.
\end{aligned}$$

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

$$1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}; \quad 2) f(x) = \frac{x}{3+2x};$$

3) $f(x) = \sqrt[4]{16+x}$; 4) $f(x) = 2^x$;

5) $f(x) = \cos^2 x$; 6) $f(x) = e^{-x^2}$;

7) $f(x) = \frac{1}{x}$ по степеням $x-2$; 8) $f(x) = 3^x$;

9) $f(x) = e^{-2x}$; 10) $f(x) = \sqrt{x+2}$.

ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие 1. Базисные векторные поля

Предварительные сведения

Регулярной системой координат в области $D \subset E^n$ называется система гладких функций

$$\begin{cases} q^1 = q^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ q^2 = q^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \dots, \\ q^n = q^n(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases},$$

задающих взаимно однозначное (биективное) отображение области $G \subset R^n$ на область $D \subset E^n$, и удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial q^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial q^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

во всех точках области D .

Если радиус-вектор является функцией декартовых координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^3} dx^3 \equiv dx^j \vec{e}_j.$$

Если радиус-вектор является функцией криволинейных координат, то есть

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}(q^1, q^2, q^3) = \\ &= x^1(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_1 + x^2(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_2 + x^3(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

или в скалярной форме

$$\begin{cases} x^1 = x^1(q^1, q^2, q^3), \\ x^2 = x^2(q^1, q^2, q^3), \\ x^3 = x^3(q^1, q^2, q^3), \end{cases}$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} dq^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^3} dq^3 \equiv dq^j \vec{g}_j,$$

где по определению введены новые векторы

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j},$$

которые зависят от криволинейных координат и являются, следовательно, не векторами, а **векторными полями**.

→

Можно показать, что векторные поля $\vec{g}_k$ при выполнении приведённого выше условия регулярности отображения, образуют базис пространства E^3 . Эти поля называются **натуральными базисными векторными полями**.

Взаимные базисные векторные поля определяются по формуле

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} \nabla q^i,$$

или формулами

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} g^{ij} \vec{g}_j,$$

где g^{ij} – некоторая, пока произвольная невырожденная симметрическая матрица.

Полярные координаты $\{q^1; q^2\} \equiv \{r; \varphi\}$ на плоскости R^2 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^2\{r; \varphi\} \rightarrow R^2\{x^1; x^2\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Координата r называется **полярным радиусом**, а координата φ – **полярным углом**. Якобиан этого преобразования равен:

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Цилиндрические координаты в пространстве R^3 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r; \varphi; h\} \rightarrow R^3\{x^1; x^2; x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \{\{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\}.$$

Якобиан преобразования

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферические координаты в пространстве R^3 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r, \varphi, \theta\} \rightarrow R^3\{x^1, x^2, x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид (рисунок 1.3)

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \{ \{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta \leq \pi \}.$$

Якобиан преобразования (1.35)

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} \right) = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2 \sin \vartheta.$$

Примеры с решением

Пример 5.1.1. Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \quad (1)$$

Решение. В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = A_{\cdot j}^i \vec{e}_i. \quad (4)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\
&= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \tag{7}$$

Векторное поле $\vec{g}_\varphi$ не нормировано, а его норма

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi\right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r. \tag{8}$$

Орт векторного поля $\vec{g}_\varphi$ равен

$$\begin{aligned}
\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left(-r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\
&= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу. $\otimes$

Пример 5.1.2. В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^1(t) = r(t) \cdot \cos \varphi(t), \quad x^2(t) = r(t) \cdot \sin \varphi(t), \tag{1}$$

где t – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Решение. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (2)$$

Вектор скорости

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\sin \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$\begin{aligned} v_r &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_r} \vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle r \rangle} \right) = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \sin \varphi = \frac{dr}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_\varphi} \vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} \right) = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \cos \varphi = \\ &= r \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{g}_{\langle r \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad (6)$$

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt} = -\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \left(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) + \\ &+ \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + \\ &+ r \frac{d\varphi}{dt} \left(-\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) = \\ &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \end{aligned}$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad \otimes \quad (7)$$

Пример 5.1.3. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r = t \cdot \sin 3t, \\ \varphi = t^3. \end{cases} \quad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 1 \text{ с}$. Радиус дан в метрах.

Р е ш е н и е. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0,141; \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t \cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \quad (2)$$

При $t = 1 \text{ с}$ имеем:

$$\dot{r}(1) = -2,829, \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2,829 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v_\varphi(1) = r(1) \cdot \dot{\varphi}(1) = 0,423 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2,860 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1,883 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v^2(1) = -2,148 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2} = 2,85 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6 \cos 3t - 9t \sin 3t; \ddot{\varphi} = 6t.$$

При $t = 1$ имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9,74; \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1) = \ddot{r}(1) - r(1)\dot{\varphi}^2(1) = -11,01 \frac{M}{c^2};$$

$$w_\varphi(1) = r(1)\ddot{\varphi}(1) + 2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1) = -16,128 \frac{M}{c^2}.$$

8) Норма ускорения

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 19,52 \frac{M}{c^2}.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \cos \varphi - \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \sin \varphi \equiv w_r \cos \varphi - w_\varphi \sin \varphi;$$

$$w^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \sin \varphi + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \cos \varphi = w_r \sin \varphi + w_\varphi \cos \varphi.$$

При $t = 1$ имеем:

$$w^1(1) = 7,602; w^2(1) = -17,95.$$

Проверка:

$$w = \sqrt{(w^1)^2 + (w^2)^2} = 19,49. \otimes$$

Пример 5.1.4. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r = 22 \cdot \frac{1 - \frac{t^2}{121}}{t}; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 9 \text{ с}$. Радиус дан в метрах.

Ответ:

r	$\dot{r}$	φ	$\dot{\varphi}$	v_r	v_φ	v	v^1	v^2
м	м/с	рад	рад/сек			м/с		
0,81	-0,45	0,61	-0,16	-0,45	-0,13	0,47	-0,3	-0,37

Пример 5.1.5. Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Решение. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h, \end{cases} \det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{ \{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty \}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \varphi \vec{e}_2 + h \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j} \vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j} \vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j} \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} h \cdot \vec{e}_3 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_r$

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} h \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_\varphi$

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi\right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r,$$

то поле $\vec{g}_\varphi$ ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left(-r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\ &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_h$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_h &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial h} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial h} = \\ &= \frac{\partial}{\partial h}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial h}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial h} h \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Таким образом, базисное векторное поле $\vec{g}_h$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h \rangle} = \vec{e}_3. \otimes$$

Пример 5.1.6. Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Решение. Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\det \left(\frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (r, \varphi, \theta)} \right) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin \theta,\end{aligned}$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{ \{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta \leq \pi \}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \theta \cdot \sin \varphi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) =$$

$$= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\theta$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_\theta\| = \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \theta \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\theta\|} \vec{g}_\theta = \frac{1}{r} \left(r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3 \right) = \\ &= \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по параметризованному замкнутому пути $\hat{W}(\bar{J})$, $\bar{J} = [\alpha, \beta]$

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t) \vec{e}_k$$

имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha, \beta}} f(\vec{x}(t)) dl \equiv \int_{W_{\alpha, \beta}} f(x_1, x_2, x_3) dl = \int_{W_{\alpha, \beta}} f(\vec{x}(t)) \left\| \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \right\| dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dw_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dw_2(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dw_3(t)}{dt} \right]^2} dt.$$

В случае естественной параметризации

$$y = y(x), z = z(x), x \in \bar{J}$$

формула принимает вид

$$\int_{L_{a, b}} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dy(x)}{dx} \right]^2 + \left[\frac{dz(x)}{dx} \right]^2} dx,$$

где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$,

Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода для общего случая параметризации имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha, \beta}} F_1(\vec{x}(t)) dx^1 + F_2(\vec{x}(t)) dx^2 + F_3(\vec{x}(t)) dx^3 =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_1(t)}{dt} + F_2(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_3(t)}{dt} \right] dt.$$

Если путь задан естественной параметризацией

$$y = y(x), z = z(x),$$

то есть параметром является переменная x , формула переписывается так:

$$I_{W_{a, b}} = \int_{W_{a, b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} + R(x, y(x), z(x)) \frac{dz(x)}{dx} \right] dx,$$

где

$$a = x(\alpha), b = x(\beta)$$

– пределы изменения переменной x и учтено, что $\frac{dx}{dx} = 1$. Аналогичные формулы можно записать

и в тех случаях, когда в качестве параметра рассматривается переменная y или z .

Примеры с решением

Пример 6.2.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x + y) dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками $A(0, 0, R)$, $B\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Параметризация окружности:

$$x = t, y = t, z = \sqrt{R^2 - 2t^2}, 0 \leq t \leq \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x + y) dl = \int_0^{R/2} 2t \frac{\sqrt{2}R dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2(\sqrt{2} - 1). \otimes$$

Пример 6.2.2. Найти массу $\frac{1}{4}$ окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

если $\rho(x_1, x_2) = x_2$ и $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Решение. Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R \cos t, \\ x_2 = R \sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} M &= \int_W \rho(x_1, x_2) dl = \\ &= \int_0^{\pi/2} R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = R^2. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.2.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь W — отрезок прямой, соединяющий точки $M_0(0; 0)$ и $M_1(4; 2)$.

Решение. Используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} I_{W_{a,b}} &= \int_{W_{a,b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = \\ &= \int_a^b \left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{M_0 M_1} = 4 \vec{e_1} + 3 \vec{e_2}, \quad \vec{M_0 M} = x \vec{e_1} + y \vec{e_2},$$

$$\vec{M_0 M} = t \cdot \vec{M_0 M_1}, \quad \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x \in [0, 4].$$

Имеем:

$$\int_W (x + y) dx - x dy = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8. \otimes$$

Пример 6.2.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy$$

по пути с параметризацией $x = t, y = t^3, t \in [0, 1]$.

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} \int_{W_{\alpha, \beta}} F_1 \left(\vec{x} \right) dx_1 + F_2 \left(\vec{x} \right) dx_2 = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Получаем:

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy = \int_0^1 (t^5 + 3t^9) dt = \left(\frac{t^6}{6} + 3 \frac{t^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

Пример 6.2.5. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, начальной и конечными точками $M_0(0; 0; 0)$, $M_1(1; 1; 1)$ соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$\begin{aligned} I_{W_{a, b}} = \int_{W_{a, b}} F_1 \left(\vec{x} \right) dx_1 + F_2 \left(\vec{x} \right) dx_2 + F_3 \left(\vec{x} \right) dx_3 = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} + \right. \\ \left. + F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_3(t)}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Пределы изменения параметра $t \in [0, 1]$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Подстановка данных задачи даёт:

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3 = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4] dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{35}. \quad \otimes$$

Пример 6.2.6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x + y)dx + (x - y)dy,$$

где W – окружность с уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Решение. Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t) = (1 + 2\cos t)\vec{e}_1 + (1 + 2\sin t)\vec{e}_2,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1\left(\vec{x}\right)dx + F_2\left(\vec{x}\right)dy = \int_\alpha^\beta \left[F_1\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dx(t)}{dt} + F_2\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dy(t)}{dt} \right] dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy(t)}{dt} = 2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x + y)dx + (x - y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2 + 2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t \cdot \cos t + 4\cos 2t) dt = 0. \quad \otimes$$

Практическое занятие 3. Кратные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

Пусть

$$P = \{(x; y) \in R^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

– замкнутый прямоугольник, $f : P \rightarrow R^1$ – непрерывная функция двух переменных x, y и

$$\iint_P f(x, y) d\mu \equiv \iint_P f(x, y) dx dy$$

– двойной интеграл от функции $f : P \rightarrow R^1$ по прямоугольнику P . Тогда, если для каждой точки $x \in [a, b]$ существует определённый интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

то существует и **повторный интеграл** от функции $f(x, y)$ вида

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right),$$

причём справедливо равенство:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right).$$

Таким образом, формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b I(x) dx &= \iint_P f(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \left(\int_c^d dy f(x, y) \right). \end{aligned}$$

Формула вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат через последовательное вычисление трёх (одномерных) определённых интегралов имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Формула вычисления двойного интеграла в криволинейной системе координат имеет следующий вид

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| d\xi d\eta,$$

где положено

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta), \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases} \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| \equiv \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \right|.$$

В частности, вычисление двойного интеграла в полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

производится по формуле

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где якобиан

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{z_1}^{z_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz, \end{aligned}$$

где якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Аналогично, Формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

имеет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.
\end{aligned}$$

Примеры с решением

Пример 6.3.1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

Решение. Область интегрирования D ограничена линиями

$$x = -1, x = 1, y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1-x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке $(0; 1)$, ветви параболы направлены вниз. Область D представим объединением двух областей: области D_1 , ограниченной ветвями параболы $x = \pm\sqrt{1-y}$ и прямыми линиями $y = 0, y = 1$; области D_2 , ограниченной линиями $x = \pm\sqrt{1-y^2}, y = -1, y = 0$. Тогда имеем:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \otimes$$

Пример 6.3.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x \ln y dx dy,$$

где $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq e\}$.

Решение. Так как область D является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D x \ln y dx dy &= \int_0^4 x dx \int_1^e \ln y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln y, \quad du = \frac{dy}{y}, \\ dv = dy, \quad v = y. \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^4 x dx \left\{ y \ln y \Big|_1^e - \int_1^e dy \right\} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \cdot \left\{ y \ln y \Big|_1^e - y \Big|_1^e \right\} = 8 \cdot (e - e + 1) = 8. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.3. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + 2y) dx dy$ по области D , ограниченной

линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

Решение. Область D ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией $x = 2$, справа – вертикальной прямой линией $x = 3$, сверху – прямой линией $y = 2x$, снизу – прямой линией $y = x$. Область простая относительно оси OY , следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x + 2y) dy = \int_2^3 dx \left(xy + y^2 \right) \Big|_{y=x}^{y=2x} = \\ &= \int_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x - y) dx dy$ по области D , ограниченной

линиями $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = x^2$.

Решение. Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint_D (2x - y) dx dy = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) dy = \int_1^2 dx \left(2xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{10}. \otimes$$

Пример 6.3.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y - y^2, \quad x + y = 6.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x = 0, \\ x + y = 6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий: $A(4; 2)$, $B(3; 3)$. Поэтому площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S \equiv \mu(D) &= \iint_D dx dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy = \\ &= \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6) dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.6. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью

$$\sigma(x, y) = 16x + \frac{9}{2}y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x, \quad y \geq 0.$$

Решение. Так как

$$x = \frac{1}{16}y^2,$$

то $x \geq 0$. Поэтому область D можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D) = \iint_D \sigma(x, y) dx dy = \iint_D \left(16x + \frac{9}{2}y^2 \right) dx dy =$$

$$= \int_0^{1/4} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2} y^2 \right) dy = \int_0^{1/4} \left(16xy + \frac{3}{2} y^3 \right) \Big|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160 \int_0^{1/4} x^{3/2} dx = 2. \otimes$$

Пример 6.3.7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

переходя к полярным координатам, где область D – 1-я четверть круга

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Решение. Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : 0 \leq r \leq a; 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Omega} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.8. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, переходя к полярным

координатам, если область D – кольцо, заключённое между окружностями $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

Решение. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} \ln r^2 r dr d\varphi = 2 \iint_{\Omega} r \ln r dr d\varphi = \\ &= \left\{ \Omega : 0 \leq \varphi \leq 2\pi; e \leq r \leq e^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r \ln r dr = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln r, \quad du = \frac{dr}{r}, \\ dv = r dr, \quad v = \frac{r^2}{2}. \end{array} \right\} = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2} \ln r \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} r dr \right\} = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} e^2 (3e^2 - 1) \right] d\varphi = \pi e^2 (3e^2 - 1). \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.3.9. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4.$$

Решение. Тело ограничено кругом на плоскости XOY с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) r dr = 16 \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] d\varphi = \\
&= 16 \left[\varphi - \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin \varphi - \cos \varphi) \right] \Big|_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.3.10. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x dx dy,$$

где область D ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0; \quad y^2 - 8y + x^2 = 0; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} x; \quad x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область D неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2 + x^2 = 4; (y-4)^2 + x^2 = 16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты $(0; 2)$ и $(0; 4)$, а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область D лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2 + x^2 \geq 4; (y-4)^2 + x^2 \leq 16.$$

Кроме этого, область D лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси OX , то область D лежит над прямой линией $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и справа от прямой линии $x = 0$. Поэтому координаты точек области

D удовлетворяют неравенствам

$$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0.$$

Таким образом,

$$D = \left\{ (x; y) : \begin{array}{l} (y-2)^2 + x^2 \geq 4, \\ (y-4)^2 + x^2 \leq 16, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0. \end{array} \right.$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получаем

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : \begin{cases} (r \sin \varphi - 2)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \geq 4, \\ (r \sin \varphi - 4)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \leq 16, \\ r \sin \varphi \geq \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{3}}, r \cos \varphi \geq 0. \end{cases} \right.$$

Решение этих неравенств относительно r и φ имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4 \sin \varphi \leq r \leq 8 \sin \varphi. \end{cases} \right.$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

Пример 6.3.11. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz,$$

где область V – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1.$$

Решение. Используя формулу (1.50)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

получаем:

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_1^3 dy \int_0^1 (x - 2y + z) dz = -18. \otimes$$

Пример 6.3.12. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz,$$

где область V – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2.$$

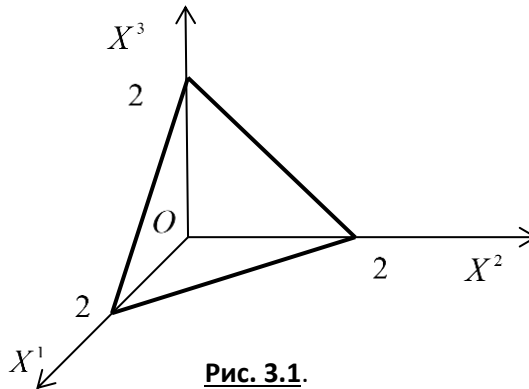
Решение. Запишем уравнение плоскости

$$z = 2 - x - y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).



Применяем для решения формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[x \cdot z + y \cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int_0^2 \left[2y - x \cdot \frac{y^2}{2} - y \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[\frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.13. Найти объём кругового цилиндра высоты H с радиусом основания R .

Р е ш е н и е. Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H dz = \pi R^2 H. \otimes$$

Пример 6.3.14. Найти объём шара радиуса R .

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x, y, z) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \otimes$$

Пример 6.3.15. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (конус),}$$

$$z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2 \text{ (эллиптический параболоид).}$$

Р е ш е н и е. Область V – тело вращения вокруг оси OZ , поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz.$$

Задаём область Ω' неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2 \quad \text{и} \quad \frac{11}{2} - r^2 \leq z \leq \frac{9}{2}r.$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение $r = 1$, следовательно, $0 \leq r \leq 1$. При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega'} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi dz = \dots = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов

Предварительные сведения

Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\int_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right) \cdot\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{4 \pi \varepsilon \varepsilon_0\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3} d l, \quad (1)$$

где $\vec{x}_0$ – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right)=\frac{d Q\left(\vec{x}\right)}{d l}.$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\iint_{D'} r^2(\varphi) d r d \varphi.$$

Формула Грина имеет вид

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) d x d y=\oint_{\Gamma} P(x, y) d x+Q(x, y) d y$$

Примеры с решением

Пример 6.4.1. Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной L , имеющей форму дуги окружности радиуса r , в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

Решение. Так как $\gamma\left(\vec{x}\right)=const$, то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4 \pi \varepsilon \varepsilon_0} \int_W \frac{\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3} d l =$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_W \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left(\int_W \frac{y_0 - y}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right]. \quad (2)$$

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cos t \cdot \vec{e}_1 + r \sin t \cdot \vec{e}_2 \quad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad (4)$$

– скалярная форма.

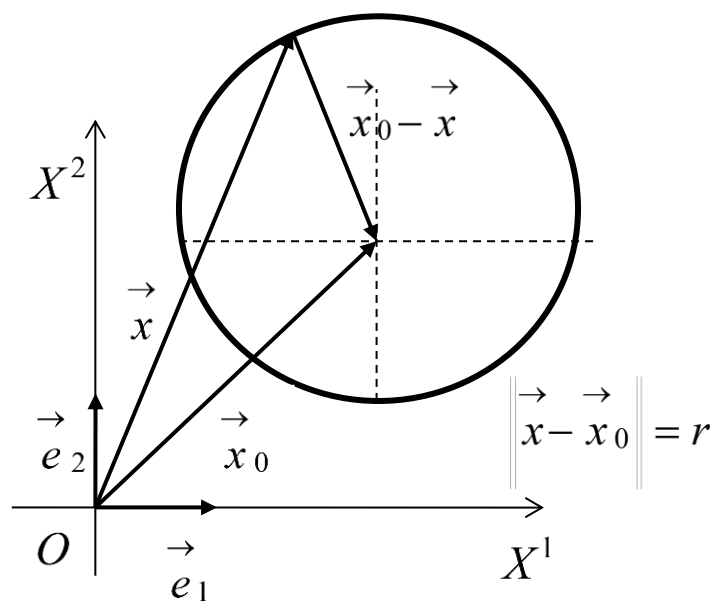


Рис. 4.1.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int_W f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}(t) \right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}(t) \right]^2} dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой $dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt$. По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r \sin t \cdot \vec{e}_1 + r \cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = r dt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| = \left\| \vec{x}_0 - \vec{x} \right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}_0) &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_W \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left(\int_W \frac{y_0 - y}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \cos t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \sin t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\cos t}{r} dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\sin t}{r} dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos t dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin t dt \right) \vec{e}_2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[\left(\sin t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_1 + \left(-\cos t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_2 \right] = \\
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1 - \underbrace{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right)}_{=0} \vec{e}_2 \right] = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E} \left(\begin{matrix} \vec{x}_0 \end{matrix} \right) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \vec{e}_1. \quad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E = \left\| \vec{E} \left(\begin{matrix} \vec{x}_0 \end{matrix} \right) \right\| = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (7)$$

из которой следует:

$$1) E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \text{ при } \alpha = \pi;$$

$$2) E = 0 \text{ при } \alpha = 2\pi. \otimes$$

Пример 6.4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0.$$

Р е ш е н и е. Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

При переходе к полярным координатам область D перейдёт в область D' , ограниченную линиями

$$r = 4 \cos \varphi, r = 8 \cos \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна $S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi$. В полярных координатах область D' задаётся неравен-

ствами

$$D' = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4\cos\varphi \leq r \leq 8\cos\varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr.$$

Результат получается интегрированием:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr = 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi = \left\{ \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right\} = \\ &= 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = 8\pi - (6 + 3\sqrt{3}). \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.4.3. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy, \quad (1)$$

где Γ – окружность с уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Формула Грина имеет вид:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \otimes$$

Пример 6.4.4. Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2, x = y^2, 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

Решение. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью OY и OX соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{OA} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{AB} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{BO} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8} \int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int_{1/4}^0 \sqrt{x} dx = \frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0,13. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления поверхностного интеграла первого рода имеет вид

$$\iint_F f(x^1, x^2, x^3) dS =$$

$$= \iint_{G^{12}} f(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x^1, x^2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x^1, x^2) \right]^2} dx^1 dx^2,$$

где двойной интеграл в правой части формулы вычисляется по проекции G^{12} поверхности F , задаваемой уравнением $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$ на координатную плоскость $X^1 O X^2$.

Если поверхность F однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то **общий поверхностный интеграл второго рода** является суммой частных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 &\stackrel{def}{=} \\ &= \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + \\ &+ \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 &= \iint_{G^{12}} H_3(x^1, x^2, \varphi^3(x^1, x^2)) dx^1 dx^2, \\ \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 &= \iint_{G^{23}} H_1(\varphi^1(x^2, x^3), x^2, x^3) dx^2 dx^3, \\ \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 &= \iint_{G^{13}} H_2(x^1, \varphi^2(x^1, x^3), x^3) dx^1 dx^3 \end{aligned}$$

– двойные интегралы, вычисляемые по однозначным проекциям поверхности на координатные плоскости.

Примеры с решением

Пример 6.5.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS,$$

где F – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \iint_F f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{G^{12}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy.$$

Так как область G^{12} – это круг, определённый неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, то

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot \otimes$$

Пример 6.5.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS,$$

где F – поверхность цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

заключённая между плоскостями $y = b$ и $y = c$.

Решение. Из уравнения

$$x^2 + z^2 = a^2$$

следует

$$z = \varphi^3(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поверхность F разбилась на две части: F_1 ($z \geq 0$) и F_2 ($z \leq 0$). Определим элемент поверхности dS в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0;$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_F f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy,$$

получим:

$$\begin{aligned} \iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS &= \\ &= \iint_{F_1} (\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}) y dS + \iint_{F_2} (\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}) y dS = \\ &= \iint_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2} y \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint_{G_1} y dx dy = \\ &= 2a \int_{-a}^a dx \int_b^c y dy = 2a^2 (c^2 - b^2). \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.5.3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Решение. Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость XOY является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy = \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_{G^{12}} r^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \sqrt{R^2 - r^2} dr d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{R^2 - r^2} = t; R^2 - r^2 = t^2; \\ r dr = -t dt; r^4 = (R^2 - t^2)^2. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int_0^R (R^2 - t^2)^2 t^2 dt \\ &= \frac{2}{105} \pi R^7. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.5.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где F – верхняя сторона части плоскости с уравнением $x + z - 1 = 0$, отсечённая плоскостями с уравнениями $y = 0$, $y = 4$ и лежащая в первом октанте.

Р е ш е н и е. Заданная поверхность изображена на рисунке 5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} \iint_F P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz + \iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz + \\ &+ \iint_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

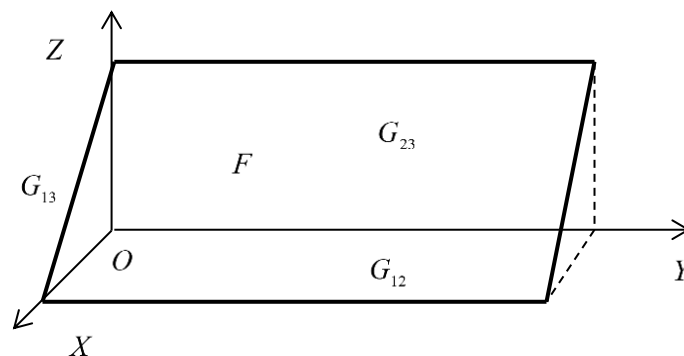


Рис. 5.1.

Так как плоскость параллельна оси OY , то

$$\iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz = 0.$$

Получаем:

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_{G_{23}} (1-z) dy dz + \iint_{G_{12}} (1-x) dx dy = 4. \otimes$$

Практическое занятие 6. Векторный анализ

Предварительные сведения

В декартовой системе координат градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \vec{e}_3.$$

Производная скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ в точке N_0 по направлению, заданному век-

тором $\vec{N}_0 N$, имеющим орт

$$\vec{h} = \frac{1}{\|\vec{N}_0 N\|} \vec{N}_0 N$$

по определению равна

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x}_0 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left(\vec{x}_0 + t \vec{h} \right) - f \left(\vec{x}_0 \right)}{t}$$

и вычисляется по одной из следующих формул

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{h}} \left(\vec{x} \right) = \left(\vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right), \vec{h} \right) = \frac{\left(\vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right), N_0 N \right)}{\left\| N_0 N \right\|} = \text{Pr}_{\vec{h}} \left\{ \vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right) \right\}.$$

Дивергенция векторного поля $\vec{A} \left(\vec{x} \right)$ в некоторой точке $\vec{x}$ в декартовой системе координат

вычисляется по формуле:

$$\text{div} \vec{A} \left(\vec{x} \right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{A} \left(\vec{x} \right) \right).$$

Формула для нахождения ротора векторного поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$\text{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \left(\vec{x} \right) \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Потоком Φ векторного поля $\vec{A} \left(\vec{x} \right)$ через поверхность F называется поверхностный интеграл

второго рода

$$\begin{aligned} \Phi &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_F \left(\vec{A}, d\vec{s} \right) = \iint_F \left(\vec{A} \left(\vec{x} \right), \vec{n} \right) dS = \\ &= \iint_F \left(A_1 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_1 + A_2 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_2 + A_3 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_3 \right) dS = \\ &= \iint_F A_1 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_1 dS + \iint_F A_2 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_2 dS + \iint_F A_3 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_3 dS = \\ &= \iint_{G^{23}} A_1 \left(\omega \left(x^2, x^3 \right), x^2, x^3 \right) dx^2 dx^3 + \iint_{G^{13}} A_2 \left(x^1, \psi \left(x^1, x^3 \right), x^3 \right) dx^1 dx^3 + \\ &+ \iint_{G^{12}} A_3 \left(x^1, x^2, \phi \left(x^1, x^2 \right) \right) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$d\vec{s} = \left\| d\vec{s} \right\| \frac{d\vec{s}}{\left\| d\vec{s} \right\|} = ds \vec{n}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью:

$$\oiint_F \left(\vec{A}(\vec{x}), d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right) dV.$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{A}(\vec{x})$ по замкнутому контуру Γ называется криволинейный интеграл второго рода

$$C_A \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\Gamma} \left(\vec{A}, d\vec{l} \right) = \oint_{\Gamma} A_t dl.$$

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{A}(\vec{x})$ по замкнутому контуру Γ равна

потoku векторного поля

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right]$$

через поверхность, ограниченную контуром Γ :

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{A}(\vec{x}), d\vec{l} \right) = \iint_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right], d\vec{s} \right) \equiv \iint_S \left(\text{rot} \vec{A}(\vec{x}), \vec{n} \right) ds.$$

Приведём краткую сводку наиболее часто используемых формул векторного анализа:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \cdot \text{grad}\psi + \psi \cdot \text{grad}\varphi;$$

$$\text{div}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{div} \vec{A} + \left(\vec{A}, \text{grad}\psi \right);$$

$$\text{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{B}, \text{rot} \vec{A} \right) - \left(\vec{A}, \text{rot} \vec{B} \right);$$

$$\text{rot}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{rot} \vec{A} + \left[\text{grad}\psi, \vec{A} \right];$$

$$\text{grad}f(\xi) = f'(\xi) \cdot \text{grad}\xi;$$

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A};$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \psi \right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^3)^2}.$$

В декартовых координатах справедлива также формула

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{e}_1 \vec{\nabla}^2 A^1 + \vec{e}_2 \vec{\nabla}^2 A^2 + \vec{e}_3 \vec{\nabla}^2 A^3.$$

Примеры с решением

Пример 6.6.1. Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где $\vec{r} = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. По определению градиента имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r) \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \vec{e}_3 = \\ &= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z}{r} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \otimes \end{aligned}$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$, называется **по-**

тенциальным полем, а скалярная функция φ называется **потенциалом** векторного поля $\vec{a}$. Само

векторное поле $\vec{a} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ называется **потенциальным** полем. Иногда потенциальное поле

определяют соотношением $\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Пример 6.6.2. Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}.$$

Решение. По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \varphi(r) \vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)x] + \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)y] + \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r). \quad \otimes$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если выполнено условие $\operatorname{div} \vec{a} = 0$. $\otimes$

Пример 6.6.3. Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

Решение. Условие соленоидальности $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ для поля $\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r) = 0$$

С разделяющимися переменными. Разделяя переменные и учитывая, что в случае функций одного

переменного производная $\frac{d\varphi}{dr}$ – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -3 \frac{dr}{r}. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем $\ln|\varphi| = -3\ln r + C_1$. Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде $C_1 = \ln C$, где C – произвольная положительная постоянная, по-

лучаем $\varphi = \frac{C}{r^3}$. Здесь C уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная. $\otimes$

Пример 6.6.4. Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r},$$

$$\text{где } r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение. Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r} = \varphi(r)x \vec{e}_1 + \varphi(r)y \vec{e}_2 + \varphi(r)z \vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{a} &= \left[\vec{\nabla}, \vec{a} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z \end{vmatrix} = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)z] - \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)y] \right\} \vec{e}_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)x] - \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)z] \right\} \vec{e}_2 \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)y] - \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)x] \right\} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \right) \vec{e}_1 + \\
&+ \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r} \right) \vec{e}_2 + \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r} \right) \vec{e}_3 = \vec{0}. \otimes
\end{aligned}$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$, называется **безвихревым** полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

Пример 6.6.5. Доказать, что

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right) - \left(\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (1)$$

Решение. Для решения применим правило действия оператора $\vec{\nabla}$ на произведение функций

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi) &= \\
&= \vec{\nabla} \left(\overset{\vee}{\varphi} \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi \right) + \vec{\nabla} \left(\varphi \cdot \overset{\vee}{\omega} \cdot \dots \cdot \psi \right) + \dots + \vec{\nabla} \left(\varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \overset{\vee}{\psi} \right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где символ $\vee$ над функцией устанавливает порядок действия оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B} \right] \right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B} \right] \right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) + \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) = \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right], \vec{B} \right) = \left(\vec{B}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right) = \left(\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right). \quad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right) = - \left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{B}}, \vec{A} \right] \right) = - \left(\vec{A}, \left[\vec{\nabla}, \vec{B} \right] \right) = - \left(\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). $\otimes$

Пример 6.6.6. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \left(u \cdot \vec{A} \right) = \left[\vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A},$$

где $u(M)$ – скалярное, а $\vec{A}(M)$ – векторное поля.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(u \cdot \vec{A} \right) &= \left[\vec{\nabla}, u \cdot \vec{A} \right] = \left[\vec{\nabla}, \overset{\vee}{u} \cdot \vec{A} \right] + \left[\vec{\nabla}, u \cdot \overset{\vee}{\vec{A}} \right] = \\ &= \left[\vec{\nabla} u, \vec{A} \right] + u \cdot \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] = \left[\vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A}. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.7. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

где Δ – оператор Лапласа $\Delta = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right)$.

Решение. Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C} \right] \right] = \vec{B} \left(\vec{A}, \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A}, \vec{B} \right),$$

полагая $\vec{A} = \vec{B} = \vec{\nabla}$, получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right] = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}, \vec{A} \right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \otimes$$

Пример 6.6.8. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = x^3 \vec{e}_1 - y^2 \vec{e}_2 + y \vec{e}_3$$

по замкнутому контуру $(t \in [0, 2\pi])$, заданному уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = \cos t - \sin t.$$

Решение. По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{A}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённым интегралам:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz = \\ & = \int_0^{2\pi} \left(-\cos^3 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t - 3 \sin^2 t - 3 \sin t \cos t \right) dt = \\ & = - \int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) - \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) d(2t) - 3 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = -3\pi. \otimes$$

Пример 6.6.9. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = -\omega x_2 \vec{e}_1 + \omega x_1 \vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом R , в положительном направлении.

Решение. Параметризация окружности

$$x_1 = R \cos t, \quad x_2 = R \sin t,$$

где $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} -\omega x_2 dx_1 + \omega x_1 dx_2 = \\ &= \omega \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt = 2\pi R^2 \omega. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.10. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \vec{e}_1 + (2x_1 + x_3) \vec{e}_2 + (x_1 - x_2) \vec{e}_3$$

по контуру треугольника ABC , если $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

Решение. Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{1} = 1,$$

или

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}
\vec{rot F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & 2x_1 + x_3 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (2x_1 + x_3) \right] \vec{e}_1 - \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_2 + \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1 + x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Теперь циркуляция

$$\begin{aligned}
C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \vec{rot F} \right) ds = \\
&= -2 \iint_{G^{23}} dx_2 dx_3 + \iint_{G^{13}} dx_3 dx_1 - \iint_{G^{12}} dx_1 dx_2 = \\
&= -2 \int_0^3 dx_2 \int_0^{1-x_2/3} dx_3 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{2-x_3} dx_1 - \int_0^2 dx_1 \int_0^{3-3x_1/2} dx_2 = \\
&= -2 \left[x_2 - \frac{1}{6} x_2^2 \right]_0^3 + \left[2x_3 - x_3^2 \right]_0^1 - \left[3x_1 - \frac{3}{4} x_1^2 \right]_0^2 = -5. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.6.11. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2 + a \vec{e}_3 \quad (a = \text{const})$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0$$

в положительном направлении двумя способами.

Решение. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид ($R = 1$):

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t] dt = - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & a \end{vmatrix} = -2 \vec{e}_3.$$

Нормаль плоскости треугольника $\vec{n} = \vec{e}_3$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds = -2 \iint_S \left(\vec{n}, \vec{e}_3 \right) ds = -2 \iint_S dx_1 dx_2 = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.12. Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность F , ограничивающую область Ω , имеющую объём V .

Решение. Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oint_F \left(\vec{r}, d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{r} \right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления объёма области Ω при помощи поверхностных интегралов

$$V = \frac{1}{3} \oiint_F \left(\vec{r}, \vec{n} \right) ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V = \frac{1}{3} \oiint_F (x n_1 + y n_2 + z n_3) ds = \frac{1}{3} \oiint_F (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – координаты орта нормали $\vec{n}$. $\otimes$

Пример 6.6.13. Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0 \quad (0 \leq z \leq 1).$$

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv.$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке $(0; 0; 1)$, ограниченный плоскостями с уравнениями

$z = 0$ и $z = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S \left(\vec{r}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dv = 3 \iiint_V dv = 3 \iiint_{\Omega} r d\varphi dr dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1-r) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.14. Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{F}, d\vec{s} \right) = \iint_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds.$$

Так как $r = R = \text{const}$ и скалярное произведение ортов

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) = 1,$$

получаем:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \iint_S ds = \frac{q4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \otimes$$

Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Предварительные сведения

Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Его общее решение находится по определению первообразной:

$$y(x) = \int f(x) dx + C,$$

где C – произвольная постоянная величина.

Уравнение с разделёнными переменными имеют вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0.$$

Общее решение этого уравнения находится по формуле

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P(x)T(y)dx + Q(x)S(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \frac{S(y)}{T(y)}dy = 0,$$

решая которое, получаем общее решение в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int \frac{S(y)}{T(y)} dy = C.$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка в приведённой форме записи имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Однородное уравнение решается путём разделения переменных, а неоднородное методом вариации произвольной постоянной. Формула для общего решения неоднородного уравнения имеет вид

$$z(x) = \left(\int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + A \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Простейшее ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его общее решение находится путём последовательного интегрирования и имеет вид:

$$y(x) = \underbrace{\int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx}_{n \text{ раз}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + C_3 + \dots \\ + C_{n-2} \frac{x^2}{2!} + C_{n-1} x + C_n.$$

Линейное ОДУ высшего порядка, соответственно, неоднородное и однородно, имеет вид:

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = g(x),$$

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0.$$

Задача Коши для уравнения (неоднородного, или однородного) ставится так: **найти решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям**

$$y|_{x=x_0} = y_0, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = y_0^1, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}|_{x=x_0} = y_0^{n-1}.$$

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = f(x).$$

Находя линейно независимую систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

– **фундаментальную систему решений** (ФСР) $\{y_1, y_2\}$, можем составить общее решение однородного уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений.

При подстановке в однородное уравнение функции e^{kx} приходим к характеристическому уравнению

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0.$$

В зависимости от того, какие решения будут у характеристического уравнения, приходим к следующим трём случаям построения общего решения однородного дифференциального уравнения.

1) Корни характеристического уравнения простые и вещественные, то есть $k_1 \neq k_2 \in R^1$.

Тогда ФСР есть $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Корень k вещественный, кратности 2. Тогда ФСР есть $\{e^{kx}, xe^{kx}\}$ и общее решение

имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{kx} (C_1 + x C_2).$$

3) Корни комплексно-сопряжённые $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Тогда ФСР есть $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Для решения неоднородного уравнения применяется **метод Лагранжа**. Решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$z(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

Составляется СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1(x) \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2(x) \frac{dC_2(x)}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{dC_1(x)}{dx} + \frac{dy_2(x)}{dx} \frac{dC_2(x)}{dx} = f(x). \end{cases}$$

Здесь $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – новые функции, подлежащие определению, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – элементы ФСР соответствующего однородного уравнения. Решение СЛАУ относительно производных новых функций ищется любым методом. В общем виде это решение записывается так

$$\begin{cases} \frac{dC_1(x)}{dx} = \varphi(x), \\ \frac{dC_2(x)}{dx} = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти независимые простейшие ОДУ, и подставляя результаты в общий вид решения неоднородного уравнения, получаем общее решение в форме

$$z(x) = A_1 y_1(x) + A_2(x) y_2(x) + y_1(x) \int \varphi(x) dx + y_2(x) \int \psi(x) dx.$$

Примеры с решением

Пример 6.7.1. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$$

Решение. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y(x^2 + 3)dy = 3x(2 + y^2)dx.$$

2) Замечаем, что $x^2 + 3 > 0$, $2 + y^2 > 0$. Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на $(x^2 + 3)(2 + y^2)$:

$$\frac{2y}{2 + y^2} dy = \frac{3x}{x^2 + 3} dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int \frac{2y}{2 + y^2} dy + C_1 = \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + C_2;$$

$$\ln(2 + y^2) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C;$$

$$C = C_2 - C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2 \ln(2 + y^2) - 3 \ln(x^2 + 3) = C;$$

$$\ln \frac{(2 + y^2)^2}{(x^2 + 3)^3} = C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln \frac{(2+y^2)^2}{(x^2+3)^3} = C$$

при всевозможных значениях параметра C . $\otimes$

Пример 6.7.2. Найти частное решение уравнения

$$(1+y^2)dx = xydy,$$

если $y=1$ при $x=2$.

Решение. 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|x| + \ln C;$$

$$(1+y^2) = Cx^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2 = Cx^2 - 1$$

3) Используем начальные условия:

$$4 = 2C; C = 2; x^2 = 2(1+y^2).$$

4) Частный интеграл:

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}.$$

Ответ: $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}$. $\otimes$

Пример 6.7.3. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2\frac{y}{x} - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x) = \frac{y}{x},$$

где $u(x)$ — новая искомая функция. Так как

$$y' = u + xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1 + u^2}{2 - 6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что $1 + u^2 \neq 0$, $x \neq 0$:

$$\frac{2 - 6u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2\arctgu - 3\ln(1 + u^2) = \ln|x| + C.$$

Заменяя $u(x) = \frac{y}{x}$, получаем:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C. \otimes$$

Пример 6.7.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}.$$

Решение. Здесь $p(x) = 3$, $f(x) = e^{2x}$.

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = -3y;$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx;$$

$$\ln|y| = -3x + \ln C_1;$$

$$|y| = C_1 e^{-3x};$$

$$y = C_2 e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде $z = C_2(x)e^{-3x}$. Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = e^{5x};$$

$$C_2(x) = \int e^{5x} dx + C;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}. \otimes$$

Пример 6.7.5. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием $y(1) = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right) = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(-2 \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} \right) = \frac{1}{x} + Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2} + C = 1,$$

откуда $C = 0$. Решение задачи Коши принимает вид:

$$z = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}. \otimes$

Пример 6.7.6. Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 1, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

Решение. Интегрируем уравнение последовательно:

$$\begin{aligned} 1) \frac{dy}{dx} &= \int xe^x dx + C_1 = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx + C_1 = \\ &= (x-1)e^x + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) y &= \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \left\{ \begin{array}{l} u = x-1, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = \\ &= (x-2)e^x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Так как в силу первого начального условия $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$, получаем:

$$(0-1)e^0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 1.$$

Так как в силу второго начального условия $y|_{x=0} = 1$, получаем:

$$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1, \quad C_2 = 3.$$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \quad \otimes$$

Пример 6.7.7. Найти общее решение ОДУ

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 = 0.$$

Решение. Решаем уравнение относительно $z = \frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \frac{dy}{dx} = x + C_1, y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2;$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 2, \frac{dy}{dx} = 2x + C_3, y = x^2 + C_3x + C_4.$$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2 - 3z + 2 = (z - z_1)(z - z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C_1x - C_2\right) \cdot (y - x^2 - C_3x - C_4) = 0. \otimes$$

Пример 6.7.8. Найти общее решение ОДУ

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3.$$

Решение. Положим $\frac{d^2 y}{dx^2} = Z$, тогда из уравнения получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3.$$

Интегрируя получившееся уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3, \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2}dx, \frac{1}{z^2} = x + C_1, z^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Заменяя $Z = \frac{d^2 y}{dx^2}$, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Уравнение содержит только x и y . Разрешая его относительно $\frac{d^2 y}{dx^2}$, получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x + C_1}}.$$

Это уравнение интегрируем последовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x + C_1}} + C_2 = \{dx = d(x + C_1)\} =$$

$$= \pm \int (x + C_1)^{-1/2} d(x + C_1) + C_2 = \pm (x + C_1)^{1/2} + C_2$$

$$y_1 = \int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = (x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3,$$

$$y_2 = -\int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = -(x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3. \otimes$$

Пример 6.7.9. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -2, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-2x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x. \otimes$$

Пример 6.7.10. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравне-

ния

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^x, xe^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x. \otimes$$

Пример 6.7.11. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin x). \otimes$$

Пример 6.7.12. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$(k^2 - 1)(k - 2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 2.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}. \otimes$$

Пример 6.7.13. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = (k - 2)(k^2 - 2k + 2).$$

Уравнение принимает вид:

$$(k - 2)(k^2 - 2k + 2) = 0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2, k_2 = 1 + i, k_3 = 1 - i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x}, e^x \cos x, e^x \sin x\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x). \otimes$$

Пример 6.7.14. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^2 - x + 1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^x.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ -e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2} e^x (x^2 - x + 1); \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2} e^{-x} (x^2 - x + 1).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \int e^x (x^2 - x + 1) dx + A_1 = \dots = \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - 2 \right) e^x + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2} \int e^{-x} (x^2 - x + 1) dx + A_2 = \dots = \left(-\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + 12 \right) e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^x - x^2 + x - 1. \otimes$$

Пример 6.7.15. С аэростата, падающего с высоты H со скоростью V_0 , сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время t_0 аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна m , а сила сопротивления воздуха R и подъёмная сила аэростата T постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

Решение. Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось OZ направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m \ddot{z} = T + R - G, \quad (1)$$

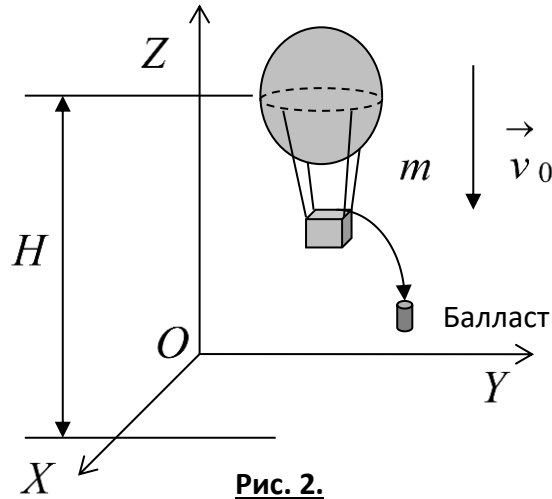
где $G = mg$ – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте H , поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H, \quad \dot{z}(0) = -v_0. \quad (2)$$

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m \dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \quad (3)$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (4)$$



Используя начальные условия (2), получаем для постоянных: $C_1 = -mv_0$, $C_2 = mH$.

Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T + R - G}{m}t - v_0, \quad (5)$$

$$z = \frac{T + R - G}{2m}t^2 - v_0t + H. \quad (6)$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m\ddot{z} = T - R - G, \quad (7)$$

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m\dot{z} = (T - R - G)t + C_1, \quad (9)$$

$$mz = \frac{T - R - G}{2}t^2 + C_1t + C_2. \quad (10)$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m} t^2. \quad (11)$$

Обозначим время падения аэростата t_1 , а время подъёма t_2 . Из условия задачи $t_0 = t_1 + t_2$

. Подставляя $t = t_1$, $\dot{z}(t_1) = 0$, $z(t_1) = 0$ в (5) и (6) и $t = t_2$, $z(t_2) = H$ в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{T + R - G}{m} t_1 - v_0 = 0, \\ \frac{T + R - G}{2m} t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \frac{T - R - G}{2m} t_2^2 = H. \end{cases} \quad (12)$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные H и v_0 с учётом того, что $t_2 = t_0 - t_1$, получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \frac{\sqrt{T + R - mg}}{T - R - mg}}. \quad \otimes$$

Пример 6.7.16. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $V_{\max}$ и разгоняется с места до скорости V_* за время t_* . Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

Решение. Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя $\vec{F}$ постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения $\vec{R} = k \vec{v}$, где коэффициент динамического трения $k > 0$ неизвестен; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (дороги); $\vec{G}$ – сила тяжести.

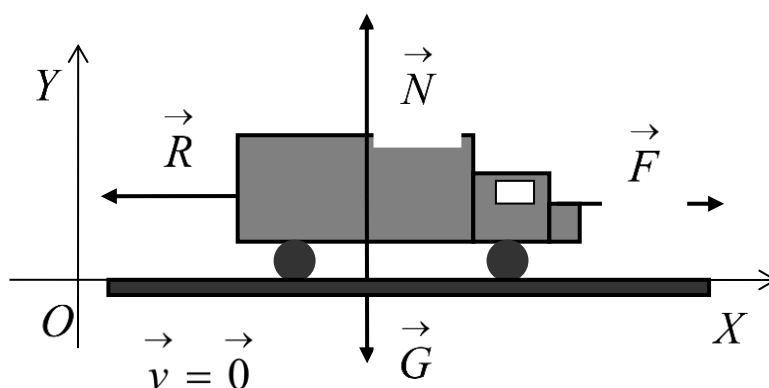


Рис. 2.

Обозначая $\dot{X} = v$, получаем:

$$m\dot{v} = F - kv \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{mdv}{F - kv} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k} \int \frac{d(F - kv)}{F - kv} = t + C \Rightarrow -\frac{m}{k} \ln(F - kv) = t + C.$$

Начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Из условия на скорость получаем, что

$$C = -\frac{m}{k} \ln F. \text{ Подстановка даёт}$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln(F - kv) + \frac{m}{k} \ln F = -\frac{m}{k} \ln \frac{F - kv}{F} \Rightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{kv}{F} \right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость $v_{\max}$, то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0 \Rightarrow k = \frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем:

$$t_* = -\frac{m}{F/v_{\max}} \ln \left(1 - \frac{(F/v_{\max})v_*}{F} \right) \Rightarrow t_* = -\frac{mv_{\max}}{F} \ln \left(1 - \frac{v_*}{v_{\max}} \right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max} - v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*}. \otimes$$

Практическое занятие 8. Системы ОДУ

Предварительные сведения

Системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = f^1(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \frac{dy^2}{dt} = f^2(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = f^n(t, y^1, y^2, \dots, y^n). \end{cases}$$

называются **системами ОДУ в нормальной форме**, или просто нормальными системами.

Если функции в правой части системы нормальной ОДУ зависят от искомых функций $\{y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)\}$ линейным образом, то есть

$$f^k(t, y^1, y^2, \dots, y^n) = \sum_{j=1}^n p_j^k y^j + f^k(t),$$

то нормальную систему ОДУ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^1 y^j + f^1(t), \\ \frac{dy^2}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^2 y^j + f^2(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^n y^j + f^n(t). \end{cases}$$

Эквивалентная матрично-векторная форма имеет вид

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |f(t)\rangle,$$

где введены обозначения для матричного дифференциального оператора

$$L = I \frac{d}{dt} + P(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

и вектор-столбцов

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \quad |f(t)\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейная однородная система ОДУ в нормальной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в матрично-векторной записи

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |0\rangle.$$

Система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений системы

$$|y_1\rangle = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \\ \dots \\ y_1^n(t) \end{pmatrix}, \quad |y_2\rangle = \begin{pmatrix} y_2^1(t) \\ y_2^2(t) \\ \dots \\ y_2^n(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |y_m\rangle = \begin{pmatrix} y_m^1(t) \\ y_m^2(t) \\ \dots \\ y_m^n(t) \end{pmatrix}$$

называется **линейно независимой на промежутке** (a, b) , если $(\forall t \in (a, b))$

$$\alpha_1 |y_1(t)\rangle + \alpha_2 |y_2(t)\rangle + \dots + \alpha_n |y_n(t)\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Линейно независимая система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений однородно системы ОДУ в нормальной форме называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** этой системы. Векторы ФСР можно расположить в виде матрицы, составленной из их координат по столбцам:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ – линейно независимая система частных решений системы уравнений (4.30), то любое её решение имеет вид

$$|y(t)\rangle = \sum_{k=1}^n C_k |y_k(t)\rangle.$$

Общее решение записывается через фундаментальную матрицу в виде:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

или

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Решение задачи Коши

$$I \frac{d}{dt} |y\rangle + P(t)|y\rangle = |0\rangle, \quad |y(t_0)\rangle = |y_0\rangle$$

получается из последней формулы за счёт выбора произвольного числового вектора $|C\rangle$. Действительно, имеем

$$|y_0\rangle = Y(t_0)|C\rangle \Rightarrow |C\rangle = Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle,$$

причём обратная матрица $Y^{-1}(t_0)$ существует, так как матрица $Y(t_0)$ невырожденная. Подставляя найденный вектор $|C\rangle$ в формулу для общего решения, получаем решение задачи Коши в виде

$$|y(t)\rangle = Y(t)Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle.$$

Матричная функция

$$G(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

называется **функцией Коши**.

Решение однородной системы ОДУ

$$\frac{dy^i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n a_j^i y^j(t) = 0$$

Ищется в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}, \quad \dots, \quad y^n(t) = x^n e^{-\mu t}.$$

Подстановка в систему ОДУ приводит к однородной СЛАУ

[illegible]

Условие разрешимости СЛАУ имеет вид уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \mu & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \mu & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется **характеристическим уравнением**.

В зависимости от структуры матрицы СЛАУ реализуются три случая существования решений характеристического уравнения и, соответственно, три случая построения фундаментальной матрицы для системы ОДУ в нормальной форме.

Случай 1. Пусть все корни $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ уравнения (4.69) различные и вещественные. Этот случай реализуется, если матрица A является матрицей простой структуры. Совершая последовательные подстановки μ_k ($k = \overline{1, n}$) в СЛАУ (4.68), получим n экземпляров СЛАУ для нахождения собственных векторов матрицы A :

[illegible]

Решив n экземпляров СЛАУ (4.70), найдём линейно независимую систему собственных векторов матрицы A :

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \dots \\ x_1^n \end{pmatrix}, |x_2\rangle = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \dots, |x_n\rangle = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \dots \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы однородной линейной ОДУ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 e^{-\mu_1 t} & x_2^1 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ x_1^2 e^{-\mu_1 t} & x_2^2 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n e^{-\mu_1 t} & x_2^n e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} C_1 x_1^1 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^1 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ C_1 x_1^2 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^2 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots \\ C_1 x_1^n e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^n e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть корни характеристического уравнения (4.69) различные, но среди них имеются комплексно-сопряжённые. Тогда частные решения (4.72) и, следовательно, общее решение (4.75) будут комплексными функциями. Выделим одну из пар комплексно-сопряжённых корней: $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре корней соответствуют вещественные частные решения. Исследуем их.

Построим частное решение, соответствующее корню $\mu_1 = \alpha + i\beta$. Это *комплексное* решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \dots \\ y_1^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_1^1 + iz_1^1 \\ x_1^2 + iz_1^2 \\ \dots \\ x_1^n + iz_1^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_2^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_2^1 + iz_2^1 \\ x_2^2 + iz_2^2 \\ \dots \\ x_2^n + iz_2^n \end{pmatrix}, \\
\dots, \quad \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_n^1 + iz_n^1 \\ x_n^2 + iz_n^2 \\ \dots \\ x_n^n + iz_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вещественная и мнимая части решения сами являются решениями однородной системы ОДУ. Эти решения в совокупности образуют линейно независимую систему, которую можно использовать для построения фундаментальной матрицы.

Случай 3. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень μ_1 кратности k . Можно показать, что тогда ему соответствует решение системы ОДУ вида

$$y^1 = F_1(t)e^{-\mu_1 t}, \quad y^2 = F_2(t)e^{-\mu_1 t}, \quad \dots, \quad y^n = F_n(t)e^{-\mu_1 t},$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$, ..., $F_n(t)$ – многочлены от t степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k произвольных коэффициентов. Полагая последовательно в этом решении, что один из

произвольных коэффициентов многочленов равен единице, а остальные – нулю, получим линейно независимую систему k частных решений системы уравнений ОДУ.

Если μ_1 – вещественное характеристическое число, то полученные частные решения будут вещественными.

Если $\mu_1 = \alpha + i\beta$ – комплексное характеристическое число, то имеется комплексно-сопряжённое характеристическое число $\alpha - i\beta$ той же кратности.

Построив k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых частных решений. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых характеристических чисел $\alpha \pm i\beta$ кратности k соответствует $2k$ линейно независимых вещественных частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение, каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному корню характеристического уравнения кратности k соответствуют k линейно независимых частных решения, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности k характеристического уравнения соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения. В совокупности получается n линейно независимых частных решений, из которых можно составить фундаментальную матрицу и, следовательно, записать общее решение системы ОДУ.

Описанная совокупность действий носит название «Метод Эйлера интегрирования линейной однородной системы ОДУ».

Примеры с решением

Пример 6.8.1. Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

Решение. Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель $e^{-\mu t}$, получаем

$$\begin{cases} (1 - \mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu + 4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2, \mu_2 = -1.$$

1) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая $x^2 = a \in R^1$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая $x^2 = b \in R^1$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1e^{2t} - C_2e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 6.8.2. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1 e^{-\mu t}, \quad y_2 = x_2 e^{-\mu t}, \quad y_3 = x_3 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню $\mu_1 = -2$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$|y_1\rangle = a|a_1\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при $\mu_2 = \mu_3 = 1$ равен 1, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая $x_2 = a$, $x_3 = b$, получаем решение в виде

$$|x\rangle = a|a_2\rangle + b|a_3\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$|y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, |y_3\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix} \otimes$$

Для решения линейной неоднородной системы ОДУ в нормальной форме можно использовать метод Лагранжа. Продемонстрируем его на примере.

Пример 6.8.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя $y_1 = x_1 e^{-\mu t}$ и $y_2 = x_2 e^{-\mu t}$, записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 1 = 0: \mu_1 = -1; \mu_2 = 1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для $\mu_1 = -1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = a \Rightarrow x_1 = a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_2 = 1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1 |y_1\rangle + C_2 |y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t}. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирований и приведения подобных

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t + \frac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = 0, \\ \frac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t - \frac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) + A_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t} - \ln t \right) + A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} - \ln t, \\ z_2(t) = A_1 e^t - A_2 e^{-t} - \frac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_W xy dl,$$

где путь W — контур треугольника с вершинами: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь W — отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0; 0), B(2; 0), C(4; 2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x dy - y dx,$$

где W — путь, заданный неявным уравнением $y = x^3$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(2; 8)$

.

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x^2 dx + y^2 dy,$$

где W — путь, заданный неявным уравнением $y = \sqrt{x}$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$.

5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (5x^2 y - 2y^3) dx dy$$

по прямоугольнику $D = \{(x, y) \in R_2 : 2 \leq x \leq 5 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$.

6. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y) dx dy$$

по области, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y^2 = x$.

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 1$;

б) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 4$;

в) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 2x$;

г) $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, где D — первая четверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а) $y = \ln x, x - y = 1, y = -1$;

б) $y = x^2, 4y = x^2, x = 2, x = -2$.

9. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1;$$

б) $\iiint_V (x+y) dx dy dz$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1.$$

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2;$$

б) $\iiint_V z dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями $x^2 + y^2 = 1$,

$$z = 0, z = a \ (a > 0).$$

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где область V – это шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$;

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область V – это верхняя половина шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint_F (x + 18y + 24z) ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x + 2y + 3z = 1,$$

и неравенствами $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

б) $\iint_F (x^2 + y^2) ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

и неравенствами $0 \leq z \leq 1$.

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint_F z dx dy$, где поверхность F – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

б) $\iint_F (x^2 + y^2) dx dy$, где поверхность F – верхняя сторона части параболоида с уравнением

нием

$$z = 1 - x^2 - y^2,$$

отсечённая плоскостью $z = 0$.

14. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ по направлению радиуса-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке $M(2; 1)$.

16. Найти производную функции, определённой формулой $u = \frac{xyz}{3}$, в точке $M_0(1; 2; 3)$ по

направлению вектора $\vec{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

17. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}; \text{ б) } \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

19. Найти

$$\text{а) } \operatorname{div} \vec{r}; \text{ б) } \operatorname{div} \left(r^4 \vec{r} \right); \text{ в) } \operatorname{div} \left(\left(\vec{A}, \vec{r} \right) \vec{B} \right).$$

20. Найти $\operatorname{div} \vec{A}$, если:

$$\text{а) } \vec{A} = (x - y)(y - z)\vec{e}_1 + (y - z)(z - x)\vec{e}_2 + (z - x)(x - y)\vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{e}_1 + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{e}_2 + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{e}_3.$$

21. Найти ротор векторного поля $\vec{A}(M)$:

$$\text{а) } \vec{A} = \frac{y}{x} \vec{e}_1 + \frac{z}{y} \vec{e}_2 + \frac{x}{z} \vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = yz \vec{e}_1 + z(x+2y) \vec{e}_2 + y(x+y) \vec{e}_3.$$

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что

для произвольного скалярного поля $\varphi(M)$ и для произвольных векторных полей $\vec{A}(M)$ и

$\vec{B}(M)$ справедливы следующие формулы:

$$\text{а) } \left(\vec{A}, \nabla \right) \varphi \vec{B} = \vec{B} \left(\vec{A}, \nabla \varphi \right) + \varphi \left(\vec{A}, \nabla \right) \vec{B};$$

$$\text{б) } \vec{C} \cdot \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right) = \vec{A} \cdot \left(\left(\vec{C}, \nabla \right), \vec{B} \right) + \vec{B} \cdot \left(\left(\vec{C}, \nabla \right), \vec{A} \right);$$

$$\text{в) } \left(\vec{C}, \nabla \right) \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left[\vec{A}, \left(\vec{C}, \nabla \right) \vec{B} \right] - \left[\vec{B}, \left(\vec{C}, \nabla \right) \vec{A} \right].$$

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

$$\text{а) } \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi);$$

$$\text{б) } \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi);$$

$$\text{в) } \operatorname{rot} \left[\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right].$$

24. Найти векторные линии векторных полей:

$$\text{а) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2y \vec{e}_1 + 6x \vec{e}_2;$$

$$\text{б) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2x \vec{e}_1 + 3y \vec{e}_2;$$

$$\text{в) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2y \vec{e}_2 + 6z \vec{e}_3.$$

25. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}\left(\begin{smallmatrix}\vec{r} \\ x\end{smallmatrix}\right)$ вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

$$\text{а) } \vec{A}\left(\begin{smallmatrix}\vec{r} \\ x\end{smallmatrix}\right) = y \vec{e}_1 - z \vec{e}_2 + x^2 y \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{б) } \vec{A}\left(\begin{smallmatrix}\vec{r} \\ x\end{smallmatrix}\right) = z \vec{e}_1 - x \vec{e}_2 + yz \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = 6 \sin t, \quad z = 3, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{в) } \vec{A}\left(\begin{smallmatrix}\vec{r} \\ x\end{smallmatrix}\right) = 4y \vec{e}_1 + x \vec{e}_2 + y \vec{e}_3,$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2 - \cos t - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

26. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$1) \text{ Решить уравнение } (1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$$

$$2) \text{ Решить уравнение } (1 + e^x)yy' = e^x.$$

$$3) \text{ Решить уравнение } x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

27. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

$$1) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$2) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = \frac{y}{x} - 1.$$

3) Найти интегральные кривые уравнения

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

28. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

$$1) (2x+1)\frac{dy}{dx} = 4x + 2y.$$

$$2) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0.$$

$$3) x\frac{dy}{dx} + y - e^x = 0, y(a) = b.$$

$$4) \frac{dy}{dx} \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0.$$

$$5) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

$$6) \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x, y(0) = 0.$$

$$7) \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{\sin x}, y(0) = 0.$$

$$8) x\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

$$9) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3.$$

$$10) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y.$$

$$11) \frac{dy}{dx} - ay = e^{bx}.$$

29. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

$$1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 8y = 0. \quad 2) \frac{d^4 y}{dx^3} - y = 0. \quad 3) \frac{d^4 y}{dx^4} - 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0.$$

$$4) \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

$$5) \frac{d^5 y}{dx^5} - 6 \frac{d^4 y}{dx^4} + 9 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

30. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = -12x^2 + 6x - 4.$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 4e^x.$$

$$3) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = -4e^x + 3.$$

$$4) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6 \sin 2x.$$

$$5) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = -13 \sin 2x.$$

31. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера.

$$1) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 4y_1 + y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_3 = 0. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 + y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

$$5) \frac{d}{dt} |y\rangle = A |y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6) \frac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

$$1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \frac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$$



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

***МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ**

Екатеринбург

2020

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:
 - Внимательно прочитать условие задачи.
 - Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
 - Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
 - Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
 - Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
 - Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать по оси координат и записать в скалярной форме.
 - Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
 - После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
 - Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.
2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$, останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?
3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.
4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.
5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?
6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0,5 t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?
8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.
9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
10. На горизонтальной платформе шахтной клетки находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/с^2 , при спуске с ускорением $9,8 \text{ м/с}^2$.
11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.
12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.
13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Определить коэффициент трения.
14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30° .
15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5° .
16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.
17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10 с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки $1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом $0,6 \text{ м}$, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен $0,5$.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с . Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж , чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8 с^{-1} . Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5 кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин ? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м .

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин . После выключения он останавливается через 10 с . Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом $0,4 \text{ м}$ и имеющий массу 100 кг , был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с . Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 10^6 Па и температуре 20°C ? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л . Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и температура 16°C . Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°C и 7°C . Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом C_2H_2 при температуре 27°C до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена израсходована, если давление в баллоне при температуре 23°C стало равным 14 МПа? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°C . Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450°C . Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600°C , если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17°C ?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 см^3 воздуха в секунду при давлении 50 атм?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800°C . До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°C , $\gamma=1,4$?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 см^3 при указанном давлении и температуре 27°C ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20°C , а после него 2600°C . Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO , принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°C до 100°C надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47°C , а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600°C до 2000°C . Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны $1,25\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ и $0,96\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$.

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 м^3 в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227°C . Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится еже часно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9°C . Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит $0,02 \text{ Кл}$ заряда. Ширина ремня $0,3 \text{ м}$, скорость его движения 20 м/с . Какой заряд проходит каждую секунду через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?
48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3 \text{ км}$ и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м .
49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ , заряд каждой пластины 10 нКл . Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см .
50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ , расстояние 1 мм , диэлектрик слюда ($\epsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 см^2 ?
51. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от $0,03 \text{ м}$ до $0,1 \text{ м}$? Площадь пластин 100 см^2 . Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В .
52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В , потребляя ток в 40 А . Напряжение на электростанции 120 В , а расстояние до нее 1 км . Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$).
53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром $1,5 \text{ мм}$ для изготовления спирали вулканизатора, применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали $5,5 \text{ Ом}$, а удельное сопротивление нихрома $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом м}$?
54. Цена деления прибора $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ А /дел}$. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом . Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А ?
55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30° С . Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м . Площадь сечения проводов $0,8 \text{ мм}^2$, $\rho = 0,017 (\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м})$, $\alpha = 0,0044 \text{ град}^{-1}$.
56. ЭДС батареи 12 В , ток короткого замыкания 5 А . Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?
57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность $9,5 \text{ Вт}$, а при токе 8 А мощность $14,4 \text{ Вт}$.

58. Ток в проводнике сопротивлением $100\ \text{Ом}$ равномерно нарастает от 0 до $10\ \text{А}$ в течение $30\ \text{с}$. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $50\ \text{А}$. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние $5\ \text{см}$ от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $50\ \text{А}$ и $100\ \text{А}$ в противоположных направлениях. Расстояние между проводами $20\ \text{см}$. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на $25\ \text{см}$ от первого и на $40\ \text{см}$ от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром $10\ \text{см}$, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе $0,2\ \text{А}$. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля $12,8\ \text{А/м}$. Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли, если обмотка тангенс-буссоли имеет 10 витков радиусом $25\ \text{см}$. При токе $0,64\ \text{А}$ стрелка отклоняется на угол 45° .

63. Плоский контур площадью $20\ \text{см}^2$ находится в однородном магнитном поле с индукцией $0,03\ \text{Тл}$. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром $51\ \text{см}$ и вакуумным зазором $2\ \text{мм}$. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800 .

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита, если проводник массой $10\ \text{г}$ и длиной $1\ \text{м}$ при токе в нем $19,6\ \text{А}$ висит в поле, не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией $0,1\ \text{Тл}$ движется проводник длиной $10\ \text{см}$ со скоростью $15\ \text{м/с}$, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника $15\ \text{см}^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике $1,4\ \text{Тл}$. Вычислить величину средней ЭДС, возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение $0,001\ \text{с}$.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 см^2 , длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56 м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин^{-1} . Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с^{-1} .

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0,5 \sin t$, $y = 2 \cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340 м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0,1\sin 0,5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2,3 \cdot 10^3$ кг/м³.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4\pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25 см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см² и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см².

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см² имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм , диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $1,02 \text{ Гн}$ и конденсатора емкостью 25 нФ . На обкладках конденсатора сосредоточен заряд $2,5 \text{ мкКл}$. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц ?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $0,01 \text{ м}^2$ и расстоянием между ними $0,1 \text{ мм}$. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м .

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью $0,5 \text{ мГн}$. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В . На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50 \cos 10^4 \pi t (\text{В})$. Емкость конденсатора равна $0,1 \text{ мкФ}$. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80 пФ и катушки с индуктивностью $1,2 \text{ мГн}$. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура $0,5 \text{ мГн}$. Какова должна быть емкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м ?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм , диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц ?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10 м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга 1 мм, расстояние от щелей до экрана 3 м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластины освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0° , длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза ($n=1,5$) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете ($\lambda=600 \text{ нм}$).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1° . Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda=0,6$ мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на 1 мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35° . Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.

116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43° . Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57° . Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60° ?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4 \text{ K}$. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 K , определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт . Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 см^2 .

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна $0,55 \text{ Дж}$. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 K посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм . Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 см^2 , чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм . Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона 1 эВ ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм . Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм .

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм .

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см . Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 см^2 ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно $2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2$. Сколько фотонов падает на 1 см^2 за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, масса протона $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью $6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51 МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda_{\text{мин}} = 77,6$ пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n=2$).

Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.

46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?

147. В одномерной потенциальной яме шириной l находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l

с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n=3$).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция ${}_{38}\text{Sr}^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β -частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа ${}_{11}\text{Na}^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат ${}_{92}\text{U}^{238}$ массой 1 г излучает $1,24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода ${}_{53}\text{I}^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β -частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора ${}_{15}\text{P}^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра ${}_{7}\text{N}^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра ${}_{6}\text{C}^{12}$, если известно, что $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{12}\text{C}}^6 = 12,00000$ а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 МэВ. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода ${}_{8}\text{O}^{16}$, если $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}}^{16} = 15,99491$ а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если $m_{{}_{11}\text{Na}}^{23} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра ${}_{3}\text{Li}^7$, если известно, что $m_{{}_3\text{Li}}^7 = 7,01601$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода ${}_1\text{H}^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}_5\text{B}^{11}$, если известны следующие массы: $m_{{}_5\text{B}^{11}} = 11,00931$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если известны следующие массы: $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}^{23}} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}^{22}} = 21,99444$ а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра ${}_2\text{He}^4$, если известны массы: $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^3} = 3,01603$ а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра ${}_8\text{O}^{16}$ (${}_8\text{O}^{16} \rightarrow {}_7\text{N}^{15} + {}_1\text{H}^1$). $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}^{16}} = 15,99491$ а.е.м.; $m_{{}_7\text{N}^{15}} = 15,00011$ а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
 ${}_{13}\text{Al}^{27} + {}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_{15}\text{P}^{30} + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_{13}\text{Al}^{27}} = 26,98154$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_{15}\text{P}^{30}} = 29,97263$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.

172. Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^3 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^3} = 3,01605$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция ${}_2\text{He}^3 + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_1\text{H}^1$. Вычислить энергию этой реакции. ($m_{{}_2\text{He}^3} = 3,01603$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции ${}_7\text{N}^{14} + {}_0\text{n}^1 \rightarrow {}_6\text{C}^{14} + {}_1\text{H}^1$. ($m_{{}_7\text{N}^{14}} = 14,00307$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_6\text{C}^{14}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции ${}_3\text{Li}^6 + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_2\text{He}^4$. ($m_{{}_3\text{Li}^6} = 6,01513$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра ${}_6\text{C}^{14}$? Известны массы: $m_{{}_6\text{C}^{14}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_6\text{C}^{13}} = 13,00335$ а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить ${}_6\text{C}^{12}$ на три равные части. ($m_{{}_6\text{C}^{12}} = 12,00000$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции ${}_{20}\text{Ca}^{44} + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_{19}\text{K}^{41} + 2\text{He}^4$. ($m_{{}_{20}\text{Ca}^{44}} = 43,95549$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_{19}\text{K}^{41}} = 40,96184$ а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И.Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/48021.html> -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30092.html> - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45392.html> - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	$1a.e.m.$	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с
	$\hbar$	$1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Мно жи- тель	Приставка			Мно жи- тель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^9	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^6	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^3	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^2	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^1	атто	а	a	10^{-18}

Примечание: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а.е.м.	$1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
	сутки	сут	86400 с
Плоский угол	градус	...°	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...'	$2.91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...''	$4.85 \cdot 10^{-6}$ рад
	град	град	($\pi/200$) рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м ³
Длина	астрономическая единица	а.е.	$1.50 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	$9.46 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	$3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м ⁻¹
Площадь	гектар	Га	10^4 м ²
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
<i>Примечание:</i> Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см ³	Твердое тело	Плотность, г/см ³
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,80
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7,15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г./см ³	Газ (при нормальных условиях)	Плотность, кг/м ³
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2,53 \cdot 10^{-8}$	Ртуть	$9,6 \cdot 10^{-7}$
Алюминий провод	$2,87 \cdot 10^{-8}$	Свинец	$2,08 \cdot 10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Вода	10^4	Сталь литая	$1,3 \cdot 10^{-7}$
дистиллированная			
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1,01 \cdot 10^{-7}$
Вольфрам	$5,5 \cdot 10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3,9 \cdot 10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Угольные щётки	$4 \cdot 10^{-5}$
Железо	$8,7 \cdot 10^{-8}$	Цинк	$5,9 \cdot 10^{-8}$
Золото	$2,2 \cdot 10^{-8}$	Чугун серый	$1 \cdot 10^{-6}$
Константан	$5 \cdot 10^{-7}$	Никель	$8,7 \cdot 10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1,12 \cdot 10^{-6}$
Магний	$4,4 \cdot 10^{-8}$	Олово	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Манганин	$4,3 \cdot 10^{-7}$	Платина	$1,07 \cdot 10^{-7}$
Медь	$1,72 \cdot 10^{-8}$	Медь провод	$1,78 \cdot 10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	Альфа	Ν, ν	ню
Β, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
Ε, ε	Эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	Дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	Эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	Иота	Φ, φ	фи
Κ, κ	Каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	10
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	12
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	19
Список литературы	23
Приложения	24



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

Н. А. Зайцева

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

***Учебно-методическое пособие
для выполнения лабораторных и контрольных
работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия»
для студентов всех специальностей***

**Екатеринбург
2020**

Рецензент: Т. И. Красненко, д-р химических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории оксидных систем ИХТТ УрО РАН

Зайцева Н. А.

317 КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ: учебно-методическое пособие для выполнения лабораторных и контрольных работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей / Н. А. Зайцева. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 35 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о качественных реакциях в неорганической химии. Пособие содержит необходимые сведения для выполнения лабораторных работ по качественному анализу катионов и решения задач.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Зайцева Н. А., 2017

© Уральский государственный
горный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH_4^+ (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом**. При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от pH -среды.
2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.
3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	$\text{Na}^+, \text{K}^+, \text{NH}_4^+$	—	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	$\text{Ag}^+, \text{Pb}^{2+}, \text{Hg}_2^{2+}$	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	$\text{Ca}^{2+}, \text{Sr}^{2+}, \text{Ba}^{2+}$	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	$\text{Al}^{3+}, \text{Cr}^{3+}, \text{Zn}^{2+},$ * As^{3+} , * As^{5+} , Sn^{2+} , Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	$\text{Fe}^{2+}, \text{Fe}^{3+}, \text{Mn}^{2+},$ $\text{Mg}^{2+}, \text{Bi}^{3+}, \text{Sb}^{3+}, \text{Sb}^{5+}$	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	$\text{Cu}^{2+}, \text{Co}^{2+}, \text{Ni}^{2+},$ $\text{Hg}^{2+}, \text{Cd}^{2+}$	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

* As^{3+} и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+} .

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $\text{Fe}(\text{OH})_3$ и $\text{Fe}(\text{OH})_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание KMnO_4 ? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительные свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа $[\text{Fe}(\text{C}_4\text{H}_7\text{O}_2\text{N}_2)_2]$.

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $\text{Fe}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]_3$.

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав $\text{Fe}_3 [\text{Fe} (\text{CN})_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+} , и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+} .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком $\text{Fe} (\text{OH})_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2 ? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeCl_3 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_3) = 3,8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeSO_4 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_2) = 4,8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка $\text{Fe} (\text{OH})_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для FeCl_3 и FeSO_4 , определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения — минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1 мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* — метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм³. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрористаллоскопический анализ* — метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс перевода вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции.*

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего $\text{Co}(\text{OH})_2$, голубого $\text{Cu}(\text{OH})_2$ и зелёного $\text{Ni}(\text{OH})_2$. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

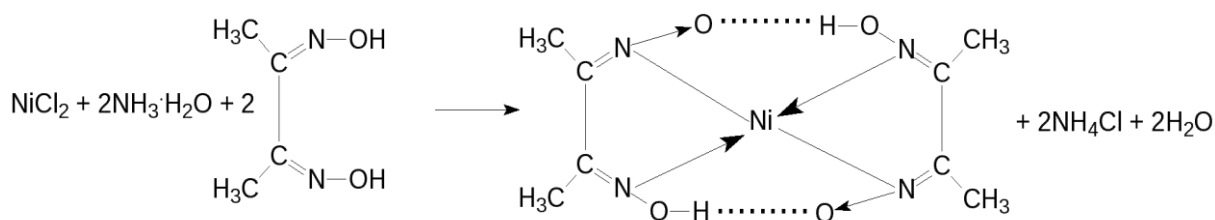
Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе.

Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN , при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+} , открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02 мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+} , соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} и Zn^{2+} , научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: pH -среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением pH водного раствора. Значение pH можно контролировать с помощью индикаторов или прибора pH -метра. Для поддержания нужного значения pH при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение pH при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроксохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

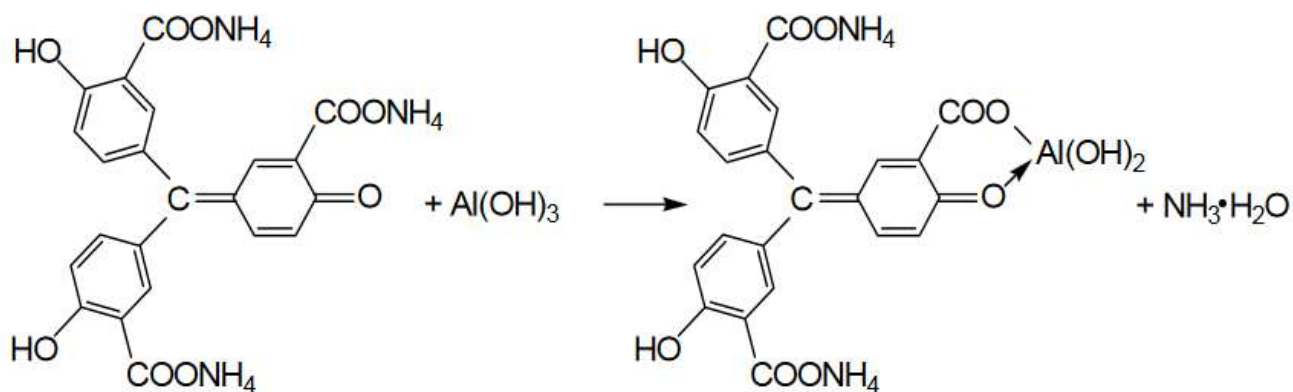
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

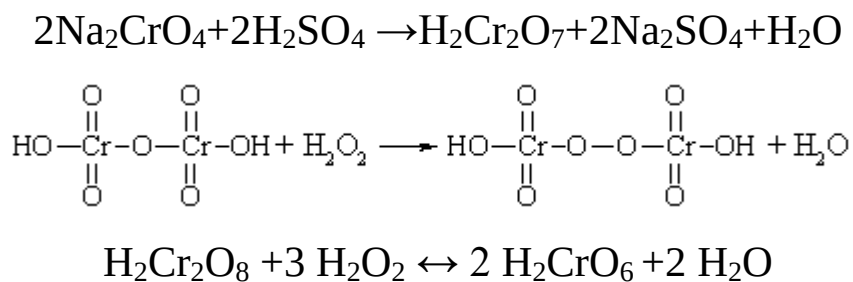
В пробирке к 1 мл раствора ZnCl_2 добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $\text{K}_2\text{Zn}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2 . Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2 , ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6 . Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:



Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.
2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.
3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} и Pb^{2+} , после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgI (жёлтый), HgI_2 (оранжевый), PbI_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH . При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2 , йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?
2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.
3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов AgNO_3 и KI , если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра $\text{ПР}(\text{AgI}) = 8,3 \cdot 10^{-17}$.
4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «сорбция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	Раствор может быть окрашенным
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

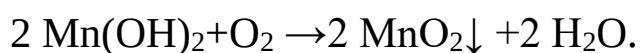
Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсутствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl Co(OH)_2	В пробирке был CoCl_2
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

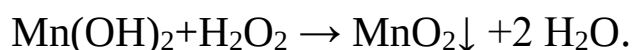
Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $\text{Pb}(\text{OH})_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2 , а светло-бежевый гидроксид марганца $\text{Mn}(\text{OH})_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

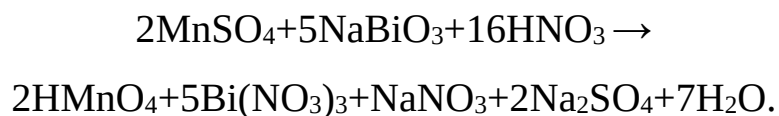


Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:



Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильноокислой среде:



Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделения бурого газа и образования чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршино А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карпетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА.....	6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} И Cu^{2+}	10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}	15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ.....	19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ.....	23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ».....	26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	34

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 1**

Составили: Н.Б. Смирнова, доц., канд. хим. наук
В.М. Сахарова, доц., канд. техн. наук

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение	4
Общие правила работы в химической лаборатории	7
Правила техники безопасности при работе с химическими реактивами	7
Оказание первой медицинской помощи	8
Оформление лабораторного журнала	8
1. Периодичность изменения свойств оксидов и гидроксидов	9
1.1. Экспериментальная часть	11
1.2. Контрольные вопросы и задания	12
2. Химическая кинетика	14
2.1. Экспериментальная часть	16
2.2. Контрольные вопросы и задания	18
3. Химическое равновесие	19
3.1. Экспериментальная часть	20
3.2. Контрольные вопросы и задания	21
4. Ионные равновесия в растворах электролитов	23
4.1. Экспериментальная часть	25
4.2. Контрольные вопросы и задания	26
5. Реакции ионного обмена	27
5.1. Экспериментальная часть	29
5.2. Контрольные вопросы и задания	31
6. Гидролиз солей	32
6.1. Экспериментальная часть	34
6.2. Контрольные вопросы и задания	35
Список литературы	37

ВВЕДЕНИЕ

Горные инженеры, геологи и геофизики сталкиваются с самыми разнообразными явлениями природы, химическими по своей сущности: быстрой выветриваемостью, окисляемостью, различной смачиваемостью горных пород, с особенностями воздушной среды под землей, с обводненностью горных выработок, агрессивностью рудничных вод. Поэтому им требуются более глубокие знания по химии, чем любому другому специалисту. Инженеры горнодобывающей отрасли способны справиться с современными задачами горно-металлургической и горно-химической промышленности только зная весь путь от разведки полезного ископаемого до его переработки. Физико-химическая некомпетентность горных инженеров и геологов является причиной недостатков в развитии горной науки, техники и технологии, бедственного экологического положения горных предприятий.

Роль химии в подготовке инженеров непрерывно возрастает в связи с необходимостью решения задач по снижению уровня потерь полезных компонентов и увеличению комплексности использования руд, рациональному применению вскрышных пород, очистке и использованию шахтных вод и сточных вод обогатительных фабрик, защите от коррозии бурового и горнодобывающего оборудования, заблаговременной дегазации угольных месторождений, применению физико-химических методов упрочнения грунтов, геотехнологическим методам добычи полезных ископаемых.

В горном деле широко применяются химические материалы: химические растворы при бурении и тампонаже скважин, взрывчатые вещества при отбойке угля, руды и породы, химические добавки, препятствующие распылению угля и налипанию льда на конвейерную ленту, материалы для покрытия из пены, предохраняющей от промерзания участка разработки, компоненты для отвердевания закладочных смесей, огнетушащие составы, синтетические смолы для укрепления горных пород, реагенты для флотации и обогащения руд и большой ассортимент таких обычных химикатов как горючие и смазочные материалы, цемент, стекло, керамика, гидро-, термо- и электроизоляционные материалы, лаки, краски, пластмассы, резина.

Еще благодаря усилиям Д.И. Менделеева, химию, как одну из фундаментальных дисциплин, стали преподавать во всех высших школах России. Химия вместе с физикой и математикой составляет основу профессиональной подготовки специалистов высокой квалификации.

Будущие специалисты должны получить такой комплекс знаний по химии, который составит базу для успешного освоения последующих дисциплин и правильного использования материалов, применяемых в технике.

Теоретические разделы химии, такие как строение электронных оболочек атомов, основные виды химических связей, химическая кинетика и равновесие, окислительно-восстановительные потенциалы, водородный показатель, произведение растворимости, свойства комплексных соединений, позволяет правильно ориентироваться в вопросах, связанных непосредственно со свойствами и превращениями минералов и горных пород.

Горные породы и руды состоят из минералов. К минералам относят природные химические соединения. Неорганические минералы подразделяются на минеральные типы, названия которым присваиваются согласно классификации неорганических веществ и их номенклатуре. По химическому составу минералы подразделяют на:

- а) простые вещества (металлы, неметаллы),
- б) карбиды, нитриды, фосфиды, сульфиды, арсениды, селениды, оксиды, гидроксиды, галогениды и др.,
- в) соли кислородсодержащих кислот (силикаты, фосфаты, арсенаты, ванадаты, бораты, карбонаты, сульфаты, нитраты, вольфраматы, молибдаты, хроматы, иодаты и др.).

Основа химической номенклатуры - русские названия химических элементов, приведенные в периодической системе Д.И. Менделеева, которые не всегда совпадают с латинскими названиями, например, гидрогениум - водород, оксигениум - кислород.

К неметаллам относят:

He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, F, Cl, Br, I, At, O, S, Se, Te, N, P, As, C, Si, B, H, остальные элементы - металлы.

Названия простых веществ состоят из одного слова - наименования химического элемента с числовой приставкой, например: O₃ - трикислород, P₄ - тетрафосфор, S₈ - октасера.

Используют также числовые приставки:

1 - моно	7 - гепта
2 - ди	8 - окта
3 - три	9 - нона
4 - тетра	10 - дека
5 - пента	11 - ундека
6 - гекса	12 - додека

В химических формулах сложных веществ на первом месте (слева) всегда записывают формульные обозначения электроположительных составляющих, а за ними указывают формульные обозначения электроотрицательных составляющих. Например, PCl_3 .

Названия сложных веществ составляются по их химическим формулам справа налево. Они складываются из двух слов - названий электроотрицательных составляющих (условных или реальных катионов) в именительном падеже и электроположительных составляющих (условных или реальных катионов) в родительном падеже, например: PCl_3 - трихлорид фосфора, CO - монооксид углерода.

Названия одноэлементных анионов оканчиваются на -ид, а названия многоэлементных анионов - на -ат.

Для построения названий сложных веществ используются корни (иногда усеченные) русских названий элементов, например, бериллий - бериллат, молибден - молибдат, фосфор - фосфид и фосфат. Традиционно применяются корни латинских названий для элементов: серебро, мышьяк, золото, углерод, медь, железо, ртуть, марганец, азот, никель, свинец, сера, сурьма, кремний, олово:

Ag - аргентат	N - нитрид, нитрат
As - арсид, арсенат	Ni - никелат
Au - аурат	Pb - плюмбат
C - карбид, карбонат	S - сульфид, сульфат
Cu - купрат	Sb - стибид (антимонид), стибат
Fe - феррат	Si - силицид, силикат
Hg - меркурат	Sn - станнат
Mn - манганат	

В названиях сложных веществ употребляются как числовые приставки, так и степени окисления катиона (обычно металлического) при точно известном заряде аниона, например, P_4O_{10} - декаоксид тетрафосфора, V_2O_5 - оксид ванадия (V), $\text{Bi}(\text{OH})_3$ - гидроксид висмута (III).

Названия кислот и кислотных остатков приводятся в учебном пособии [1]. Названия кислотных остатков используют построения названий солей. Соли - продукты реакций нейтрализации. Соли, содержащие кислотные остатки с незамещенными атомами водорода, - к и с л ы е соли. Соли, содержащие гидроксид-ионы, называют о с н о в н ы м и солями.

$\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$ - дигидрофосфат кальция

KHSO_4 - гидросульфат калия

$\text{FeOH}(\text{NO}_3)_2$ - гидроксонитрат железа (III)
 $(\text{CaOH})_2\text{SO}_4$ - гидроксосульфат кобальта (II)
 $\text{Cu}_2\text{CO}_3(\text{OH})_2$ - дигидроксид-карбонат димеди

Если соли содержат два разных катиона, то их называют
д в о й н ы м и.

$\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$ - сульфат алюминия-калия
 $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$ - карбонат магния-кальция

ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Прежде чем приступить к работе по данной теме, следует изучить ее по описанию, уяснить цель задания и план его выполнения.

Не загромождайте рабочее место портфелями, свертками, сумками, перчатками и т.п. Для них отведены специальные этажерки. На рабочем столе должны находиться только необходимые приборы и лабораторный журнал.

Работайте тщательно, аккуратно, без лишней торопливости, соблюдайте в лаборатории тишину.

Внимательно наблюдайте за ходом опыта, отмечая и записывая каждую его особенность.

Категорически запрещается в лаборатории принимать пищу, пробовать химические вещества на вкус.

Без указания преподавателя не проводите никаких дополнительных опытов.

После окончания работы вымойте использованную посуду, выключите воду, электрические приборы и приведите в порядок рабочее место.

ПРАВИЛА ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ РАБОТЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКТИВАМИ

Для выполнения работ в лаборатории имеется определенный набор химических реактивов, часть которых размещается на лабораторных столах (водные растворы солей), а остальные - концентрированные и разбавленные кислоты и щелочи, сухие соли, дурно пахнущие вещества - в вытяжных шкафах.

При использовании реактивов следует соблюдать следующие правила:

1. Не разрешается уносить реактивы из вытяжного шкафа на рабочее

место.

2. Сухие реактивы набирают чистым шпателем или ложечкой.
3. Для проведения опыта в пробирке брать сухое вещество в количестве, закрывающем дно пробирки, а раствора - не более $1/6$ ее объема.
4. Избыток реактива нельзя высыпать (выливать) обратно в те склянки, из которых они были взяты.
5. Не следует путать пробирки от разных склянок. Крышки и пробирки кладут на стол поверхностью, не соприкасающейся с реактивом.
6. При нагревании растворов в пробирке держать ее таким образом, чтобы отверстие пробирки было направлено в сторону от работающего и его соседей по рабочему месту.
7. При разбавлении концентрированных кислот вливать кислоту в воду, а не наоборот.
8. Остатки растворов, содержащих кусочки металлов, собирают в специальные склянки, находящиеся в вытяжных шкафах.

ОКАЗАНИЕ ПЕРВОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

При порезах стеклом удаляют осколки из раны, смазывают края раны раствором йода и перевязывают бинтом.

При ожоге горячей жидкостью или горячим предметом обожженное место обрабатывают раствором перманганата калия, накладывают мазь от ожога.

При ожогах кислотами сразу промывают обожженное место большим количеством воды, а затем 3%-ным раствором гидрокарбоната натрия.

При ожогах едкими щелочами хорошо и обильно промыть обожженное место проточной водой, затем разбавленным раствором уксусной кислоты и опять водой.

При попадании кислоты или щелочи в глаза немедленно промыть глаза в течение трех минут большим количеством воды, а затем раствором гидрокарбоната натрия или борной кислоты.

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО ЖУРНАЛА

Каждый студент должен иметь лабораторный журнал - отдельную тетрадь для записей.

В лабораторном журнале студент выполняет отчеты по лаборатор-

ным работам, домашние задания, решает задачи, отвечает на контрольные вопросы.

Все наблюдения и выводы по экспериментальной работе студент заносит в лабораторный журнал непосредственно после выполнения опыта.

Отчеты по выполненным лабораторным работам должны содержать:

- 1) название лабораторной работы,
- 2) названия всех проделанных опытов,
- 3) после названия опыта записывается уравнение проделанной реакции, в котором указываются осадки ($\downarrow$) и их окраска, газы ($\uparrow$), изменения окраски растворов,
- 4) задания, указанные в методическом руководстве,
- 5) выводы по каждому опыту и общий вывод по работе.

1. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ОКСИДОВ И ГИДРОКСИДОВ

Цель работы - изучение изменения кислотно-основных свойств гидроксидов в периодах и группах периодической системы Д.И. Менделеева.

Периодическая система Д.И. Менделеева - естественная система химических элементов, созданная на основе периодического закона.

Положение элемента в периодической системе определяет физико-химические свойства соответствующих им простых веществ и химических соединений.

Периодичность свойств химических соединений удобно проследить на примере оксидов и гидроксидов. Оксиды и гидроксиды относятся к основным пороодообразующим минералам, они широко распространены и составляют 17% от массы земной коры.

В табл.1.1. приведены наиболее часто встречающиеся реакции взаимодействия оксидов и гидроксидов с водой.

Кислотно-основные свойства соединений можно объяснить на основе электростатических представлений. Ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроксидов связано с изменением поляризующего действия элемента, образующего гидроксид, на группу OH^- . Поляризующее действие катиона сильно зависит от его строения и может быть охарактеризовано следующими закономерностями:

- 1) Поляризующее действие иона очень быстро возрастает с увеличением его заряда;

Таблица 1.1

Кислотно-основные реакции оксидов и гидроксидов

Тип оксида (гидроксида)	Типичная реакция
Сильно - кислый	$\text{SO}_3(\text{г}) + \text{H}_2\text{O} = \text{SO}_4^{2-}(\text{р}) + 2\text{H}^+(\text{р})$
Слабо - кислый	$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HCO}_3^-(\text{р}) + \text{H}^+(\text{р})$
Амфотерный	$\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{к}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{H}^+(\text{р})} \text{Zn}^{2+}(\text{р}) + \text{H}_2\text{O} \\ \xrightarrow{\text{OH}^-(\text{р})} [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-}(\text{р}) \end{cases}$
Слабо - основной	$\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{к}) \rightleftharpoons \text{FeOH}^+(\text{р}) + \text{OH}^-(\text{р})$
Сильно - основной	$\text{Li}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Li}^+(\text{р}) + 2\text{OH}^-(\text{р})$

2) большое значение имеет строение внешней электронной оболочки, по этому признаку катионы разделяются на ионы с незаконченным внешним слоем, переходным от 8-электронного и 18-электронному (Mg^{2+} , Fe^{2+} , Fe^{3+}) и ионы с 18-электронным внешним слоем (Zn^{2+} , Ag^+);

3) при сходном строении внешней электронной оболочки и равном заряде поляризующее действие иона возрастает по мере уменьшения его радиуса.

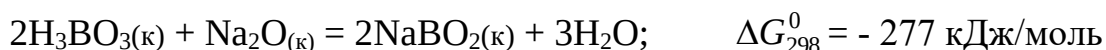
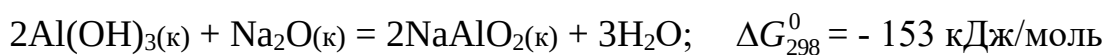
Итак, ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроокисей связано с увеличением поляризующего действия катиона, т.е. с убыванием его радиуса и возрастанием положительной степени окисления, а также с увеличением числа внешних электронов. Например, если катион имеет малый заряд сравнительно большой радиус, его электростатическое притяжение к группе OH^- невелико и OH^- выступает в гидроксиде как единое целое. Поэтому типичными основаниями являются гидроксиды элементов, находящихся в главных подгруппах I и II групп периодической системы (KOH , NaOH), а также NH_4OH .

По мере увеличения поляризующего действия катиона возрастает ковалентность связей элемент-кислород и усиливается ионный характер связей $\text{O} - \text{H}$. Основные свойства гидроксидов ослабляются и появляются кислотные свойства. Из элементов II группы бериллий и цинк дают амфо-

дают атмосферные гидроксиды, в (III) группе амфотерны гидроксиды алюминия, галлия, индия. Амфотерность характерна для большинства элементов четвертой группы периодической системы.

Когда катион имеет большой положительный заряд и малый радиус (что типично для неметаллов), усиление его поляризующего действия приводит к тому, что водород становится подвижным и преобладает диссоциация по кислотному типу. Среди элементов третьей группы гидроксид бора - типичная кислота. В четвертой группе кислотами являются гидроксиды углерода и кремния, однако, эти кислоты еще очень слабые. Гидроксиды многих элементов с максимальной степенью окисления пятой, шестой, седьмой групп - сильные кислоты.

Способность веществ к взаимодействию определяется изменением изобарно-изотермического потенциала (ΔG) химической реакции. Чем меньше алгебраическая величина энергии Гиббса химического процесса, тем больше вероятность ее протекания в данном направлении.



Увеличение отрицательного значения ΔG_{298}^0 свидетельствует об усилении кислотных свойств гидроксида бора H_3BO_3 .

1.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Гидроксиды магния и кальция

Поместите в пробирку небольшое количество оксида магния или кальция и прибавьте 5 мл воды. Взболтайте содержимое пробирки и испытайте реакцию среды 1-2 каплями фенолфталеина. Составьте уравнение реакции взаимодействия оксида с водой. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 2. Получение и свойства гидроксида алюминия

В пробирку налейте 2 мл раствора соли алюминия и прибавьте примерно такой же объем раствора гидроксида аммония. Содержимое пробирки распределите в две пробирки. В одну из пробирок при взбалтывании прилейте по каплям разбавленный раствор серной кислоты до полного рас-

творения осадка. Во вторую пробирку прилейте разбавленный раствор гидроксида натрия также до полного растворения осадка. Составить уравнение реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида алюминия.

ОПЫТ 3. Двуокись углерода

Налейте в пробирку несколько мл воды и прибавьте 1-2 капли индикатора. Пропустите из аппарата Киппа в воду двуокись углерода до изменения окраски индикатора. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 4. Гидроксид кремния

В пробирку поместите раствор силиката натрия и пропустите через него углекислый газ из аппарата Киппа, при этом наблюдайте образование осадка гидроксида кремния. Напишите уравнение реакции. Сделайте вывод о кислотно-основном характере гидроксида кремния.

ОПЫТ 5. Оксид фосфора (V)

В пробирку поместите немного фосфорного ангидрида и добавьте несколько мл воды. Наблюдайте растворение, встряхивая пробирку. Испытайте реакцию среды индикаторами. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 6. Гидроксиды олова (II) и свинца (II)

а) Налейте в пробирку 2 мл раствора хлорида олова. Добавьте по каплям разбавленный раствор щелочи до образования осадка. Содержимое пробирки разделите на две части. Подействовать на одну концентрированным раствором щелочи, а на другую - соляной кислотой. Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида олова.

б) Такой же опыт проделать с раствором соли азотнокислого свинца. На полученный гидроксид свинца подействовать азотной кислотой и щелочью. Почему для растворения гидроокиси свинца нельзя воспользоваться соляной или серной кислотами? Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида свинца.

1.2. Контрольные вопросы и задания

1. Сравнив результаты опытов, сделайте вывод, как изменяется характер гидроксидов элементов: Mg, Al, Si, P в третьем периоде слева

направо. Чем объясняется это изменение характера гидроксидов? Как оно связано с изменением металлических свойств элементов?

2. По результатам опытов сделайте вывод об изменении кислотно-основных свойств гидроксидов элементов: C, Si, Sn, Pb в главных подгруппах сверху вниз. Как увязать такое изменение характера гидроксидов с возрастанием порядкового номера элемента и изменением металлических свойств элементов?

3. Запишите кислородные соединения марганца со степенями окисления II, IV, VI, VII и покажите, как с увеличением степени окисления изменяется характер оксидов и соответствующих им гидроксидов.

4. Укажите, какая из сравниваемых двух кислот H_2SO_3 или H_2SO_4 является более сильной и как объяснить такое явление.

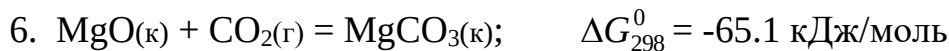
5. Какой из галогенов имеет наибольшее сродство к натрию, если энергия Гиббса для галогенидов натрия имеет следующую величину (кДж/моль):

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaJ} = -237.2,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaBr} = -347.7,$$

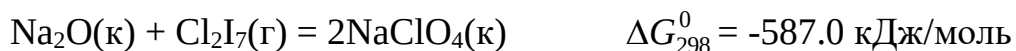
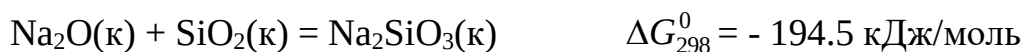
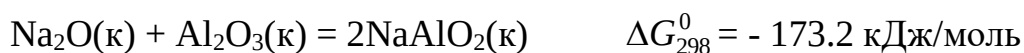
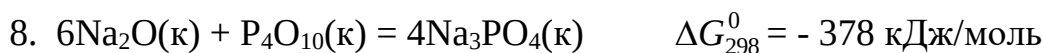
$$\Delta G_{298}^0 \text{NaCl} = -384.0,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaF} = -541.0.$$



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значением ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых карбонатов из оксидов?

7. Как изменяется сила кислот в ряду $\text{H}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{SeO}_4 - \text{H}_2\text{TeO}_4$?



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значениями ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых солей из оксидов?

9. Укажите, какое из рассматриваемых двух соединений является более сильным основанием: а) гидроксид натрия или гидроксид цезия; б) гидроксид бария или гидроксид кальция? Объясните это изменение характера гидроксидов, исходя из расположения элементов в таблице Д.И. Менделеева.

2. ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Ц е л ь р а б о т ы - изучение скорости химической реакции и ее зависимости от концентрации и температуры.

Раздел химии, изучающей скорость химических реакций, называется химической кинетикой.

Скорость химической реакции - это изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени. Зависимость скорости химической реакции выражается законом действующих масс: при постоянной температуре скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ, взятых в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам в уравнении реакции.

Для реакции $aA + bB = cC + dD$ скорость выразится уравнением:

$$v = k \cdot [A]^a \cdot [B]^b \quad (\text{для гомогенной системы}),$$

где v - скорость реакции;

$[A]$, $[B]$ - молярные концентрации реагирующих веществ;

k - константа скорости реакции

(при $[A] = [B] = 1$ моль/л, k численно равна v).

Для реакции $2NO_{(г)} + O_{2(г)} = 2NO_{2(г)}$ выражение скорости имеет следующий вид:

$$v = k \cdot [NO]^2 \cdot [O_2].$$

Гомогенная система состоит из одной фазы - между реагентами нет поверхности раздела. Гетерогенная система состоит из двух и более фаз. Реакция в гетерогенной системе осуществляется на поверхности раздела фаз. Скорость гетерогенной реакции не зависит от площади поверхности раздела фаз, так же как скорость гомогенной реакции не зависит от объема системы.

Концентрация твердого вещества принимается за единицу.

Зависимость скорости химической реакции от температуры описывается экспериментально найденным уравнением Вант-Гоффа:

$$v_{t_2} = v_{t_1} \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}},$$

где v_{t_1} , v_{t_2} - скорость реакции при температурах соответственно t_1 и t_2 ;

γ - температурный коэффициент скорости реакции,
равный обычно 2-4.

Эта зависимость может быть выражена в виде следующего правила: при увеличении температуры на каждые 10° скорость химической реакции увеличивается в 2-4 раза.

Зависимость скорости реакции от температуры более точно может быть выражена уравнением Аррениуса:

$$k = c \cdot e^{-\frac{E_{\text{акт}}}{RT}},$$

где k - константа скорости реакции;

c - постоянная;

$E_{\text{акт}}$ - энергия активации;

R - универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/моль · К);

T - абсолютная температура.

Из уравнения Аррениуса следует, что скорость реакции с повышением температуры увеличивается по закону экспоненты, однако интенсивность теплоотвода в конкретных условиях реакции может возрасти только линейно. В этом случае возможен скачкообразный переход от стационарного режима к нестационарному, быстрое ускорение - самовоспламенение, или цепной взрыв. По такому механизму происходят взрывы метана и угольной пыли в шахтах. Например, при повышении концентрации метана на несколько процентов достигается нижний предел взрываемости метана в воздухе, в тысячи раз ускоряется реакция окисления метана кислородом воздуха $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + Q$. Концентрационные пределы взрываемости метана в воздухе от 5 до 15% по объему.

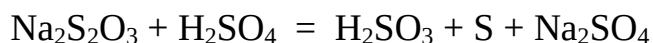
Одним из направлений в решении проблемы предупреждения взры-

вов метана и угольной пыли в шахтах, опасных по газу и пыли, является применение способов взрывозащиты, основанных на использовании распыленной воды или специальных химических соединений, которые играют роль отрицательных катализаторов (ингибиторов), теплопоглотителей в реакциях окисления углеводородов. Такие вещества носят общее название флегматизаторов горения. Этим свойством обладают гидрокарбонаты натрия и калия, гидрофосфаты аммония, бура и др.

2.1. Экспериментальная часть.

ОПЫТ 1. Зависимость скорости химической реакции от концентрации реагирующих веществ.

Соли тиосерной кислоты устойчивы в твердом состоянии и в растворе. Тиосерная кислота неустойчива и при получении распадается самопроизвольно по реакции



с образованием сернистой кислоты и свободной серы.

Постановка опыта основывается на следующем: в результате реакции между серной кислотой и тиосульфатом натрия образуется сера, выделяющаяся в виде белой мути. Время от начала реакции до момента появления мути зависит от скорости этой реакции.

В три пробирки налить по 6 мл раствора серной кислоты.

В первую пробирку влить 6 мл раствора $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, быстро перемешать ее содержимое и одновременно включить секундомер. Отсчитать время (τ) до начала появления белой мути - коллоидной серы.

Во вторую пробирку влить смесь 4 мл раствора тиосульфата натрия и 2 мл воды. Наблюдать, через сколько секунд растворы сделаются мутными.

Результаты наблюдений записать по следующей форме, выразив значения скоростей реакций в условных единицах (десятичных дробях!) в виде $v = 1/\tau$, где τ - время в секундах.

Относительная концентрация раствора тиосульфата натрия записана в условных единицах $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} = v_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} / V_{\text{раствора}}$, где $V_{\text{раствора}}$ - общий объем раствора 12 мл. Тогда для первого случая $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3}$ 50%, для второго - 33% и третьего - 17%, что соответствует значениям 3а, 2в, а.

№ опы-та	Объем в мл			Относит. концентр. $C_{Na_2S_2O_3}$	Время до появления мути, τ	$v = \frac{1}{\tau}$
	раствора H_2SO_4	раствора $Na_2S_2O_3$	H_2O			
1	6	6	0	3a		
2	6	4	2	2a		
3	6	2	4	a		

Результаты измерений необходимо представить в виде графика. На ось абсцисс наносят значения относительных концентраций в виде трех точек, отстоящих от начала координат на a , $2a$, $3a$, где a - произвольно выбранный отрезок. Из каждой точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого соответствует значениям скоростей реакции в условных единицах. Далее следует обдумать, каким образом, пользуясь верхними концами этих перпендикуляров, провести линию, характеризующую зависимость скорости реакции от концентрации. Подсказкой будет служить математическое выражение для скорости изучаемой реакции, которое нужно записать согласно закону действия масс.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от концентрации реагирующих веществ.

ОПЫТ 2. Зависимость скорости реакции от температуры опыта

Налить в одну пробирку 5 мл раствора $Na_2S_2O_3$, а другую - 5 мл раствора H_2SO_4 . Обе пробирки поместить в стакан с водопроводной водой. Спустя 5-7 минут измерить температуру воды и слить вместе содержимое обеих пробирок. Измерить время появления помутнения.

В две другие пробирки налить по 5 мл тех же растворов. Поместить пробирки в стакан с водой, нагретой на 10° выше, чем в предыдущем опыте. Через 5-7 минут слить содержимое пробирок. Измерить время до появления мути.

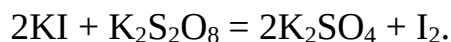
Повторить опыт, повысив температуру еще на 10° .

Результаты наблюдений выразить в виде графика, откладывая по оси абсцисс температуру опыта, по оси ординат - относительную скорость реакции.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от температуры.

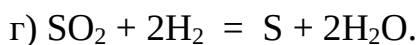
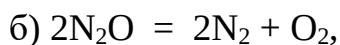
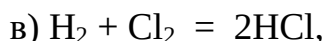
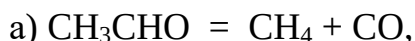
2.2. Контрольные вопросы и задания.

1. Реакция в водном растворе выражается уравнением:



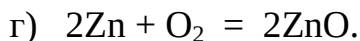
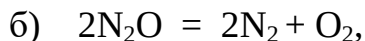
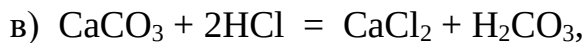
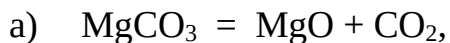
Как изменится скорость этой реакции при разбавлении реагирующей смеси в 2 раза?

2. Записать математические выражения для скорости следующих газовых реакций



Предсказать изменение скорости этих реакций при увеличении концентрации каждого из реагирующих веществ в 2 раза.

3. Записать выражения для скорости реакций



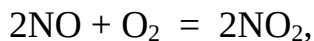
Как изменится скорость вышеуказанных реакций, если:

а) увеличить концентрацию исходных веществ в 2 раза;

б) увеличить давление в 2 раза.

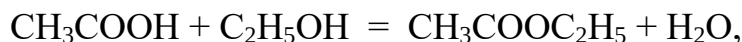
4. Срок хранения флотационного реагента, поступившего на обогательную фабрику, согласно техническим условиям составляет при температуре 20°C 2 месяца. Воспользовавшись правилом Вант-Гоффа, рассчитать срок годности этого флотореагента, если на складе фабрики поддерживается 0°C, а температурный коэффициент скорости разложения равен 2.

5. Во сколько раз изменится скорость реакции



если концентрация оксида азота уменьшится в 2 раза, а концентрация кислорода увеличивается в 2 раза?

6. Реакция протекает по уравнению



концентрацию CH_3COOH увеличили от 0.3 до 0.45 моль/л, а концентрацию $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ увеличили от 0.4 до 0.8 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

7. Кальцинированная сода (безводная Na_2CO_3) используется в виде раствора в качестве регулятора щелочности флотационного процесса. При температуре 55°C сода растворяется в 6 раз быстрее, чем при 15° . Рассчитать температурный коэффициент скорости растворения соды.

8. Для приготовления раствора силиката натрия требуемой плотности, используемого в качестве подавителя пустой породы, твердые прозрачные куски силикат-глыбы Na_2SiO_3 загружают в воду: нагревают до 95° и ведут перемешивание в течение четырех часов. Какой срок потребуется для получения раствора необходимой концентрации, если поддерживать температуру 90° ($\gamma = 2$)?

3. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение влияния концентрации на сдвиг химического равновесия.

Многие реакции идут не до исчезновения исходных веществ, а до состояния, не изменяющегося во времени, когда в реакционной смеси можно обнаружить как исходные вещества, так и продукты реакции. Такое состояние системы называется химическим равновесием.

С термодинамической точки зрения состояние равновесия характеризуется тем, что система достигает минимального значения энергии Гиббса (при заданных температуре, давлении и общем составе).

С кинетической точки зрения при равновесии скорости процессов образования продуктов реакции из исходных веществ и исходных веществ из продуктов выравниваются. Скорость достижения равновесия в зависимости от природы процесса, условий, а также наличия подходящих катализаторов может варьировать от малых долей секунды до веков и тысячелетий.

Если равновесие достигнуто, то для реакции



называемая константой равновесия, принимает определенное значение. Константа равновесия зависит от температуры, но не зависит от конкретных количеств реагентов и порядка их взаимодействия.

Изменение равновесных концентраций при внешнем воздействии называется **с м е щ е н и е м х и м и ч е с к о г о р а в н о в е с и я**.

Основным законом, управляющим смещением равновесия, служит принцип Ле-Шателье: «Если на систему, находящуюся в равновесии, оказывается внешнее воздействие, то равновесие смещается в сторону, указываемую воздействием, до тех пор, пока нарастающее в системе противодействие не станет равно оказанному воздействию».

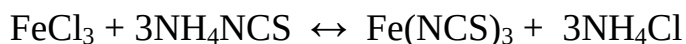
Внешним воздействием, смещающим равновесие, может быть изменение температуры, давления, концентрации одного или нескольких веществ, участвующих в реакции. «Смещение равновесия в сторону, указанную воздействием» означает, что при повышении давления преимущество получает процесс, ведущий к уменьшению объема, т.е. к тому же результату, что и само воздействие. Нагревание ведет к увеличению роли эндотермического процесса, т.е. процесса, увеличивающего запас энергии в системе (эндотермические реакции идут с поглощением тепла, а экзотермические - с его выделением).

Увеличение концентрации одного из веществ приводит к смещению равновесия в сторону расходования этого вещества.

3.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Влияние концентрации веществ на смещение химического равновесия.

Реакция между хлоридом железа и тиоцианатом аммония протекает по уравнению:



Красная окраска образовавшегося раствора обусловлена содержанием в нем тиоцианата (роданида) железа. По изменению интенсивности этой окраски можно судить о направлении смещения равновесия при изменении концентрации какого-либо реагирующего вещества.

В одной пробирке приготовить смесь (по 4 мл) разбавленных растворов FeCl_3 и NH_4NCS . Полученный окрашенный раствор разлить поровну в 4 пробирки.

В первую пробирку добавить 2 капли насыщенного раствора FeCl_3 . Во вторую пробирку добавить несколько кристалликов NH_4NCS (или KNCS). В третью пробирку всыпать немного твердой соли NH_4Cl (или KCl). Четвертую пробирку оставить для сравнения.

Записать уравнение химической реакции и выражение для константы

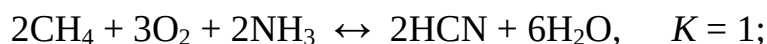
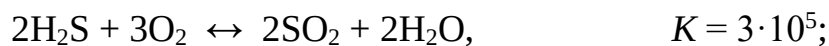
равновесия. Сделать выводы о влиянии концентрации веществ на смещение химического равновесия с использованием принципа Ле-Шателье.

Форма записи

Что добавлено	Изменение интенсивности окраски	Смещение равновесия
1. FeCl ₃	более интенсивная	вправо
2. NH ₄ NCS		
3. NH ₄ Cl		

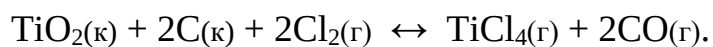
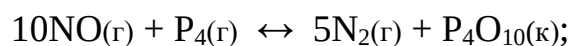
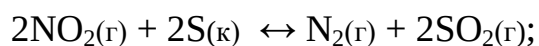
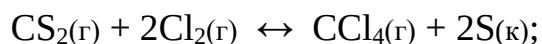
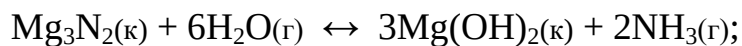
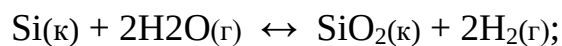
3.2. Контрольные вопросы и задания

1. К гомогенных химических системах при постоянных давлении и температуре установилось состояние равновесия:



По данным значениям констант равновесия укажите, реагенты или продукты будут преобладать в равновесной смеси веществ. На основании закона действующих масс составьте выражения для констант равновесия.

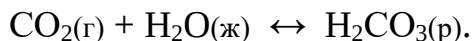
2. В гетерогенных химических системах установилось состояние равновесия:



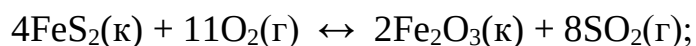
На основании закона действующих масс составьте выражения для

констант равновесия.

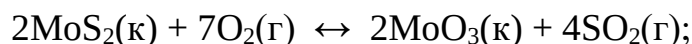
3. За последние 100 лет количество углекислого газа, поступающее за счет сжигания ископаемого топлива, возросло в 50 раз, а парциальное давление CO_2 в атмосфере за это же время увеличилось в 1.2 раза. Объясните это соотношение, допустив, что CO_2 поглощается океаном:



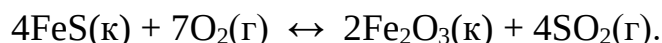
4. Рассчитать равновесный выход диоксида серы в реакциях окислительного обжига сульфидных минералов - пирита, молебденита, пирротина, если в состоянии равновесия количество SO_2 равно 0.4 моль, а начальный объем O_2 составлял 33.6 л (н.у.):



пирит



молибденит



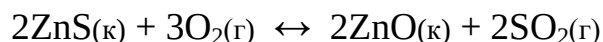
пирротин

5. Равновесный процесс, протекающий в подземных пещерах при образовании сталактитов и сталагмитов, можно описать уравнением



Напишите выражение для константы равновесия этого процесса. Укажите, в какую сторону сдвигается равновесие а) при улетучивании CO_2 , б) испарении воды, в) увлажнении атмосферы в пещерах.

6. Состояние равновесия реакции окисления сфалерита



установилось при равновесной концентрации диоксида серы, равной 0.25 моль/л. Рассчитать исходную концентрацию кислорода.

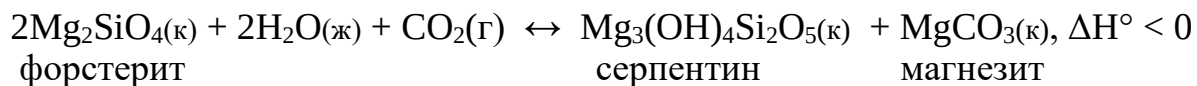
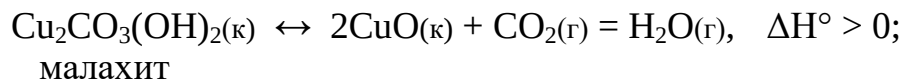
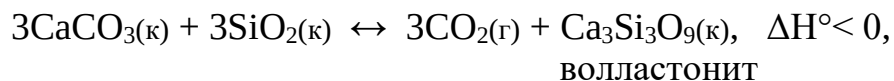
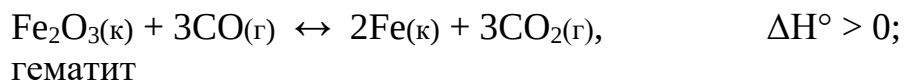
7. В герметически закрытом сосуде объемом 0.25 л проводят реакцию восстановления антимонита



Равновесная концентрация каждого газообразного вещества равна 0.3 моль/л. Для смещения равновесия добавляют 0.1 моль CO . Определить новые равновесные концентрации CO и COS .

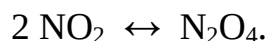
8. Определить, влево или вправо сместится положение равновесия

реакций



при следующих воздействиях: а) введение избытка диоксида углерода, б) нагревание, в) увеличение давления.

9. На некоторых предприятиях систематически из труб в атмосферу выбрасываются оксиды азота, что можно наблюдать как газ красно-желтого цвета (лисий хвост). Объяснить причину различной интенсивности окраски этого газа в зависимости от времени года (лето, зима), если известно, что NO_2 - бурый газ при -11°C превращается в димер N_2O_4 - бесцветные кристаллы, а при обычных условиях существует смесь NO_2 и N_2O_4



Укажите знак при ΔH в этом уравнении.

4. ИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение смещения ионного равновесия в водных растворах.

Электrolитами называют вещества, диссоциирующие в растворах (или расплавах) на ионы и способные проводить электрический ток. Распад вещества на ионы называется электролитической диссоциацией. Перенос тока в растворах (и расплавах) электролитов осуществляется положительными и отрицательными ионами, которые называются катионами и анионами. К электролитам относятся соли, кислоты и основания.

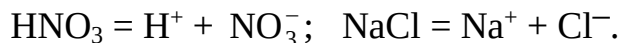
Для количественной характеристики электролитической диссоциации используется степень диссоциации α - доля моля электролита, существующая в растворе в виде ионов:

$$\alpha = C/C_0,$$

где C - концентрация молекул, распавшихся на ионы, моль/л;

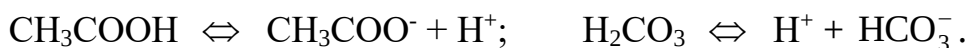
C_0 - исходная концентрация раствора, моль/л.

По величине степени диссоциации все электролиты делятся на сильные и слабые. К сильным относятся те электролиты, α - степень диссоциации которых равна единице, т.е. $C = C_0$. Распад на ионы сильных электролитов протекает необратимо. В растворе сильного электролита не может быть недиссоциированных молекул.



К сильным электролитам относятся практически все соли, гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов и некоторые кислоты (например, HCl , HNO_3 , H_2SO_4 , HBr , HI , HClO_4)

Степень диссоциации слабых электролитов меньше единицы ($C < C_0$). Их ионизация протекает обратимо:



Константу равновесия электролитической диссоциации слабого электролита называют константой диссоциации. Например, при 298 К

$$K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = \frac{C_{\text{CH}_3\text{COO}^-} \cdot C_{\text{H}^+}}{C_{\text{CH}_3\text{COOH}}} = 1.8 \cdot 10^{-5}.$$

$$K_{\text{H}_2\text{CO}_3} = \frac{C_{\text{H}^+} \cdot C_{\text{HCO}_3^-}}{C_{\text{H}_2\text{CO}_3}} = 4.4 \cdot 10^{-7}.$$

Из величин констант видно, что угольная кислота по первой ступени электролит более слабый, чем уксусная кислота.

Степень и константа ионизации слабого электролита связаны зависимостью (закон Оствальда):

$$K = \frac{\alpha^2 \cdot C_0}{1 - \alpha}.$$

Если степень ионизации электролита значительно меньше единицы, то уравнение можно записать $K = \alpha^2 \cdot C_0$, откуда следует, что α возрастает с разведением раствора.

В чистой воде кроме молекул H_2O содержатся протоны и гидроксид-ионы, при этом

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-7} \text{ моль/л (25}^\circ \text{C)}.$$

Содержание протонов и гидроксид-ионов выражают также через водород-

ный показатель $pH = 1g [H^+]$. При $pH = 7$ среду водного раствора называют нейтральной, при $pH < 7$ - кислотной и при $pH > 7$ - щелочной.

Каковы пределы значений pH в природе? Рудничные воды выветривающихся колчеданных месторождений, содержащие свободную серную кислоту, имеют pH около 2, а воды окисляющихся месторождений самородной серы в песчаниках - еще ниже. Воды кратерных озер имеют pH 1-3, торфяных болот около 4, буроугольных месторождений около 5, pH дождевой воды примерно 5.5. Обычные грунтовые воды имеют pH 6.5 - 8.5, морская вода (в зависимости от времени года, ее температуры, количества растворенной в ней углекислоты, органических кислот, привнесенных реками) колеблется от 8.2 до 8.5. В содовых озерах pH достигает 9-10.

4.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Сравнение относительной силы кислот

В одну пробирку наливают 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты, в другую - столько же раствора соляной кислоты той же концентрации. В обе пробирки добавляют небольшое количество мелко измельченного известняка. Взбалтывая пробирки с содержимым, наблюдать, одинаково ли быстро растворяется $CaCO_3$ во взятых кислотах.



Интенсивность выделения CO_2 при этой реакции служит относительным индикатором концентрации водородных ионов. Рассчитайте, во сколько раз концентрация протонов в растворе HCl больше, чем в растворе CH_3COOH , если $K_{CH_3COOH} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

Напишите уравнения диссоциации обеих кислот.

ОПЫТ 2. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабой кислоты.

К 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты в двух пробирках прибавьте 2 капли метилоранжа. Отметьте окраску индикатора. Добавьте при перемешивании в одну пробирку несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Как изменился pH раствора? Объясните изменение pH , применяя правило Ле Шателье и используя выражение константы диссоциации CH_3COOH

ОПЫТ 3. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабого основания.

В две пробирки наливают по 1-2 мл 2М раствора гидроксида аммония и по 2 капли фенолфталеина. В одну из пробирок добавляют при перемешивании несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Объясните причину наблюдаемого изменения окраски на основании уравнения диссоциации NH_4OH , принципа Ле Шателье и константы диссоциации NH_4OH .

ОПЫТ 4. Определение характера диссоциации гидроксидов

В три пробирки наливают по 2-3 мл растворов: в 1-ю - силиката натрия, во 2-ю - сульфата никеля, в 3-ю - сульфата цинка. До начала выпадения осадков гидроксидов добавляют по каплям в 1-ю - раствор серной кислоты, а во 2-ю - раствор гидроксида натрия.

Содержимое каждой пробирки взбалтывают и разливают каждый осадок гидроксидов на две пробирки. В одну пробирку добавляют разбавленной кислоты, а в другую концентрированной щелочи. На основании наблюдений за растворением осадков кремниевой кислоты, гидроксида никеля и гидроксида цинка в кислоте и щелочи сделайте вывод о кислотно-основном характере электролитической диссоциации этих гидроксидов.

Напишите уравнения диссоциации гидроксидов.

4.2. Контрольные вопросы и задания

1. Присутствие каких ионов можно ожидать в водном растворе сернистой кислоты H_2SO_3 ? Запишите выражения для констант диссоциаций этой кислоты.
2. Почему константа электролитической диссоциации служит более удобной характеристикой, чем степень диссоциации?
3. Объясните, почему соли являются сильными электролитами. На примере NaHCO_3 укажите характер химических связей, по которым электролитическая диссоциация протекает в водном растворе: а) практически полностью; б) частично; в) отсутствует.
4. Укажите, корректно ли сопоставлять такие свойства, как растворимость вещества и способность его к электролитической диссоциации.
5. В практике флотации используются процессы с низкими и высо-

кими значениями pH флотационной пульпы. Можно ли приготовить растворы с pH 0, -1, -2, 14, 15, 16?

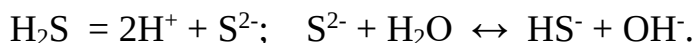
6. Вычислите концентрацию ионов водорода в 1М (9.45 %-ном) растворе серной кислоты, pH которого - 0.005. Объясните полученный результат.

7. В Первоуральске выпал кислотный дождь, водородный показатель которого равен 2.5. Во сколько раз превышена концентрация иона водорода, если обычная дождевая вода имеет pH = 5.5?

8. Шахтные воды Кизеловского бассейна содержат 0.01 г/л ионов водорода. Рассчитайте водородный показатель этих вод, концентрацию OH^- ионов. Укажите, кислотный или щелочной характер имеют эти воды.

9. Во сколько раз уменьшится концентрация ионов водорода, если к 1 литру раствора уксусной кислоты с концентрацией 0.005 моль/л прибавить 0.05 моль ацетата натрия, считая, что концентрация недиссоциированных молекул уксусной кислоты, как и объем раствора остаются практически постоянными? $K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

10. Для оценки pH раствора сероводорода студент записал следующие уравнения:



Таким образом, студент сделал вывод, что среда щелочная. Найдите ошибки в его рассуждениях.

5. РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА

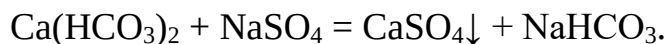
Ц е л ь р а б о т ы - выявление закономерностей протекания реакций ионного обмена в растворах электролитов.

Минералы и горные породы в условиях земной поверхности стремятся перейти в более устойчивые соединения. Известняки медленно растворяются в водах, содержащих уголекислоту, образуя гидрокарбонат кальция. Грунтовые воды, содержащие $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, реагируют с сульфатно-хлоридно-магниевыми (морскими) водами. При этом осаждаются гипс и доломит:

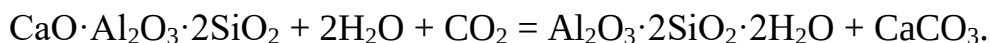


Так озера морского типа превращаются в озера континентального типа. Сульфатно-натриевые воды - результат выщелачивания горных по-

род, могут образовывать содовые озера.



Изверженные горные породы выветриваются, в полевых шпатах содержание алюминия увеличивается от ранних пород к поздним. При этом из них выносятся катионы щелочноземельных металлов. Например, из анорита образуется каолинит



В результате воздействия растворов, содержащих в повышенных концентрациях ионы Mg^{2+} и SO_4^{2-} , происходит доломитизация известняков



Если химическая реакция протекает, то она отличается следующими признаками:

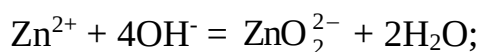
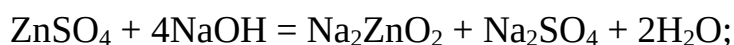
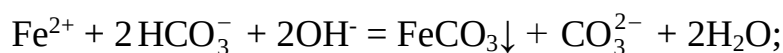
происходит образование осадка, или растворение осадка, или изменяется цвет осадка или раствора, или появляются пузырьки газа.

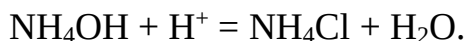
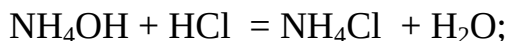
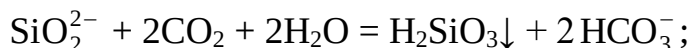
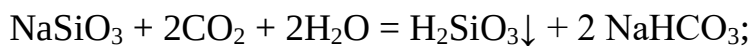
Сущность ионных реакций обмена сводится к соединению ионов в молекулы новых веществ. Равновесия ионных реакций в растворах смещаются в сторону образования слабых электролитов (слабых кислот, слабых оснований, воды) и сильных электролитов (осадков, летучих веществ).

Все кислые соли в воде растворяются, основные соли, как правило, нерастворимы.

В ионных уравнениях сильные, хорошо растворимые электролиты записываются в форме ионов, а слабые электролиты, газы и осадки - в виде молекул.

Рассмотрим следующие примеры реакций. Запишем их сначала в молекулярной форме, а затем в виде кратких ионных уравнений.





5.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Образование осадков

а) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида бария и добавляют в одну пробирку сульфата натрия, а в другую - нитрата калия. Написать молекулярное и ионное уравнения и сделать вывод, в каком случае соль реагирует с другой солью;

б) В две пробирки наливают по 2 мл раствора сульфата меди. В одну пробирку добавляют 1 мл очень разбавленный (1%-ный) раствор гидроксида натрия, а в другую - столько же разбавленного раствора той же щелочи. Написать молекулярные и ионные уравнения, указав окраску образующихся осадков и учитывая, что в первом случае образуется основной сульфат меди $(\text{CuOH})_2\text{SO}_4$. Сделайте вывод об условиях образования основной соли и гидроксида. Осадки сохранить для выполнения опыта 2б;

в) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида кобальта. В одну пробирку добавляют разбавленного раствора щелочи до образования синего осадка основной соли. Во вторую пробирку приливают еще столько же щелочи и нагревают с целью получения гидроксида кобальта розового цвета. Содержимое пробирок оставляют для проведения опыта 2в. Написать молекулярное и ионные уравнения, указав цвет осадков.

ОПЫТ 2. Растворение осадков.

а) Наливают в пробирку известковую воду $\text{Ca}(\text{OH})_2$, через этот раствор пропускают углекислый газ из аппарата Киппа. Наблюдают образование белого осадка средней соли, продолжают пропускать пузырьки CO_2 до растворения белого осадка и получения бесцветного прозрачного раствора кислой соли $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$. Написать молекулярные и ионные уравнения образования карбоната кальция и растворения его. Сделайте вывод об условии получения кислой соли.

б) В обе пробирки опыта 1б добавляют серной кислоты до растворения осадков. Написать молекулярные и ионные уравнения реакции растворения. Объяснить причину сдвига ионного равновесия;

в) Берут пробирки с осадками опыта 1в. В пробирку с синим осадком добавляют хлороводородной кислоты, в пробирку с розовым осадком - разбавленной щелочи. Напишите молекулярные и ионные уравнения. Наблюдать растворение одного из осадков. Дать объяснения наблюдениям.

О П Ы Т 3. Образование газообразного вещества

Все сульфиты, растворимые и нерастворимые в воде, разлагаются минеральными кислотами с выделением диоксида серы, который определяют как запах горящей серы.

К раствору сульфита натрия приливают разбавленной серной кислоты. Обнаруживают запах SO_2 , стараясь запомнить его. Это позволит впредь распознавать диоксид серы органолептически.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции.

О П Ы Т 4. Образование слабых электролитов

а) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора ацетата натрия и добавляют разбавленной серной кислоты. Определяют по запаху образующуюся уксусную кислоту;

б) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора хлорида аммония и добавляют разбавленной щелочи. Определяют по запаху выделяющийся аммиак;

в) Наливают в пробирку 3 мл раствора сульфата хрома (III) и приливают к нему по каплям раствор разбавленной щелочи до появления серо-зеленого осадка гидроксида хрома.

Содержимое пробирки разделяют на две части. К одной части приливают раствор серной кислоты, к другой - раствор щелочи. Сравнить цвет полученных растворов. Сделать вывод о характере гидроксида хрома.

Для опытов а), б), в) написать молекулярные и ионные уравнения реакций, объяснить причины сдвига ионных равновесий.

Сделать вывод, в каком направлении протекают реакции ионного обмена в растворах электролитов.

5.2. Контрольные вопросы и задания

1. Составить в молекулярном виде уравнения реакций растворения следующих малорастворимых минералов:

а) стронцианит SrCO_3 переводят в водный раствор насыщением CO_2 суспензии минерала в воде;

б) сассолин $\text{B}(\text{OH})_3$ обрабатывают избытком раствора едкого натра;

в) гиббсит $\text{Al}(\text{OH})_3$ хорошо растворяется известковым молоке;

г) азурит $\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot 2\text{CuCO}_3$ обрабатывают хлороводородной кислотой;

д) гетит Fe_2O_3 хорошо растворяется в серной кислоте;

е) гемиморфит $\text{Zn}(\text{OH})_2 \cdot \text{Zn}_3\text{Si}_2\text{O}_7$ нагревают в растворе гидроксида натрия;

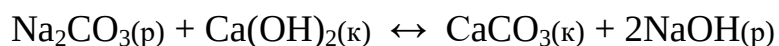
ж) брусит $\text{Mg}(\text{OH})_2$ разлагается раствором серной кислоты;

з) борнит $\text{FeS} \cdot \text{CuS} \cdot 2\text{Cu}_2\text{S}$ обрабатывают соляной кислотой.

2. При смещении водных растворов одного из следующих веществ: NaOH , KOH , CsOH концентрацией 1 моль/л с одинаковыми объемами 1М раствором HCl , HBr , HNO_3 , HClO_4 выделяется примерно одно и то же количество теплоты, составляющее 55-59 кДж/моль. О чем это свидетельствует? Напишите уравнения реакции в ионном виде.

3. При смешении 1М водных растворов одной из следующих кислот: азотной, уксусной, бензойной с одинаковыми объемами 1М растворов KOH обнаруживаются различные тепловые эффекты. Объясните, приведя уравнения реакций в молекулярно-ионном виде.

4. Укажите причины, по которым реакция



обратима, составьте выражение для константы равновесия. Почему в этом процессе образуется только разбавленный раствор гидроксида натрия, а получение концентрированного раствора невозможно?

5. Для переработки карбонатных марганцевых руд предложен способ, основанный на выщелачивании их раствором хлорида кальция:



Можно ли регенерировать раствор хлорида кальция и вывести одновременно марганец в осадок добавлением к продуктам выщелачивания суспензии $\text{Ca}(\text{OH})_2$? Напишите уравнение реакции.

6. Растворение соли слабой кислоты в растворах кислот должно проходить тем быстрее, чем больше концентрация ионов водорода. Однако кальцит CaCO_3 растворяется в растворе уксусной кислоты быстрее, чем в растворе серной. Почему?

7. В 250 мл раствора содержится 1 г NaOH . Вычислите молярную концентрацию и pH этого раствора.

8. Кислые растворы имеют кислый вкус, щелочные - вкус мыла. Сливаются равные объемы растворов хлороводородной кислоты и гидроксида натрия одинаковой концентрации. Какой вкус полученного раствора?

9. Гашеную известь $\text{Ca}(\text{OH})_2$ используют при флотации для создания щелочной среды (pH 12 и более), отделения пирита от сфалерита и сульфидов меди. Как изменяется pH растворов извести при хранении их в открытых емкостях? Напишите уравнение реакции.

6. ГИДРОЛИЗ СОЛЕЙ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение свойств водных растворов, связанных с реакцией гидролиза солей.

Природные воды часто не бывают нейтральными, а имеют либо кислую, либо щелочную среду вследствие гидролиза. При химическом выветривании известняков образуются щелочные растворы, а пиритсодержащих - кислые. Изменение нейтральной реакции среды водного раствора - признак гидролиза соли, обменной химической реакции, протекающей с участием воды. Однако не все соли вступают в реакцию гидролиза. Если растворить в воде хлорид калия KCl , нейтральная реакция среды (pH = 7), характерная для чистой воды, не изменится. Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой (NaCl , LiNO_3 , CsBr и т.п.), в реакцию гидролиза не вступают.

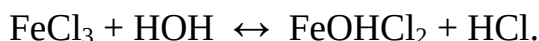
С водой взаимодействуют: 1) соли, образованные слабыми основаниями и сильными кислотами (NH_4Cl , CuSO_4 , $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ и т.п.); 2) соли, образованные слабыми кислотами и сильными основаниями (Na_2S , KCN , BaCO_3 и т.п.); 3) соли, образованные слабыми основаниями и слабыми

кислотами ($\text{NH}_4\text{CH}_3\text{COO}$ и т.п.).

Из рассмотренных примеров следует, что в реакцию с водой вступают катионы слабых оснований и анионы слабых кислот. Если эти ионы многозарядны (Fe^{3+} , Cu^{2+} , CO_3^{2-} , SiO_3^{2-} и т.п.), их взаимодействие с водой обычно идет до образования основного или кислого иона (первая ступень гидролиза). Например, соль FeCl_3 , образованная слабым основанием с сильной кислотой, подвергается гидролизу по катиону:

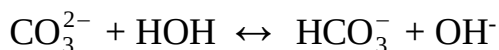


Или в молекулярной форме:

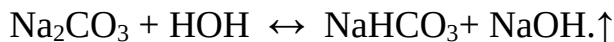


В результате гидролиза соли FeCl_3 появляется избыток катионов H^+ и раствор приобретает кислую реакцию, $\text{pH} < 7$.

Гидролизу по аниону подвергаются соли, образованные сильным основанием и слабой кислотой. В качестве примера запишем уравнение гидролиза соли Na_2CO_3 в ионном виде:

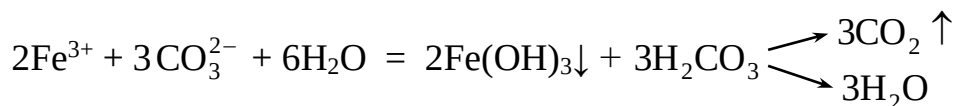
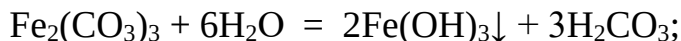


И в молекулярной форме:



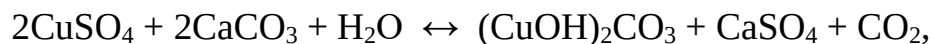
Избыток анионов OH^- придает раствору щелочную реакцию, $\text{pH} > 7$.

Если же соль образована слабым малорастворимым основанием и слабой летучей кислотой, то происходит полный необратимый гидролиз. В таблице растворимости такие соли обозначены прочерком, означающим, что эти соли в водных растворах не существуют. Например, гидролиз карбоната железа (III):

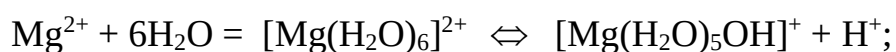


т.е. карбонат железа (III) может существовать только в виде сухой соли, а в растворе он подвергается полному гидролизу, образуя труднорастворимый гидроксид железа (III) и слабую летучую угольную кислоту. В подобных случаях в осадок выпадает наименее растворимый из возможных продуктов гидролиза. Так, растворимость $(\text{CuOH})_2\text{CO}_3$ меньше, чем $\text{Cu}(\text{OH})_2$,

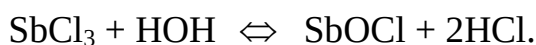
поэтому в зоне окисления минералов меди в известняках встречается малахит



В водном растворе положительные ионы металлов гидратированы. Многие из них связывают воду так прочно, что их можно рассматривать как комплексные ионы. Гидролиз солей, образованных слабыми основаниями и сильными кислотами, происходит за счет молекул воды, входящих в комплексный ион. При этом катион металла выталкивает за пределы внутренней сферы одноименно заряженный ион водорода из молекулы воды, среда становится кислой. Например, при гидролизе хлорида магния координационное число Mg^{2+} равно шести



Ионы Bi^{3+} , Sb^{3+} , Ti^{4+} , V^{4+} обладают настолько сильным поляризующим действием, что выталкивает из молекулы воды оба иона водорода, вследствие чего образуются ионы BiO^+ висмутит, SbO^+ антимонид, TiO^{2+} титанил, VO^{2+} ванадил.



6.1. Экспериментальная часть

О П Ы Т 1. Образование основной соли при гидролизе

В три пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора лакмуса и добавляют по 2 мл растворов: в одну пробирку - дистиллированной воды, в другую - сульфата натрия, в третью - сульфата алюминия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей. Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором Na_2SO_4 .

О П Ы Т 2. Образование кислой соли при гидролизе

В две пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора фенолфталеина и добавляют по 2 мл растворов: хлорида натрия и карбоната натрия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей.

Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором NaCl.

О П Ы Т 3. Смещение равновесия гидролиза

Налить в пробирку 1-2 мл раствора нитрата висмута $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ и разбавить его водой в 3-5 раз. Наблюдать образование осадка, т.е. помутнение раствора. Составить молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза, зная, что труднорастворимым продуктом является соль BiONO_3 .

В пробирку с осадком BiONO_3 прибавить несколько капель концентрированной азотной кислоты. Наблюдать растворение осадка. Объяснить наблюдаемое, исходя из уравнения гидролиза.

О П Ы Т 4. Влияние нагревания на гидролиз ацетата натрия

К 3-4 мл раствора уксуснокислого натрия CH_3COONa прибавить 1-2 капли фенолфталеина и нагреть до кипения. Обратит внимание на появление розовой окраски, исчезающей при охлаждении раствора.

Написать ионное и молекулярное уравнение реакции гидролиза уксуснокислого натрия. Объясните различие окраски при нагревании и охлаждении раствора.

О П Ы Т 5. Полный гидролиз (совместный гидролиз)

К 1-2 мл раствора сернокислого алюминия $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ прилить такой же объем раствора карбоната натрия Na_2CO_3 . Наблюдать выделение углекислого газа и образование осадка гидроксида алюминия. Написать молекулярное и ионное уравнение совместного гидролиза взятых солей.

6.2. Контрольные вопросы и задания

1. На некоторых обогащательных фабриках иногда барабаны (емкости) из-под цианида натрия обезвреживают 10%-ным раствором железного купороса FeSO_4 . Напишите уравнения реакции, ведущих к образованию в этих условиях циановодородной кислоты, и покажите тем самым, что такой способ растворения цианидов абсолютно недопустим. При подкислении до $\text{pH} \leq 9$ работать с растворами цианида натрия опасно; безопасно при $\text{pH} > 10$.

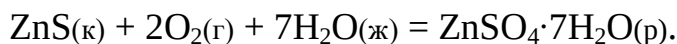
2. Раствор основания и раствор кислоты смешивают в эквивалент-

ных соотношениях. Для каких из перечисленных пар раствор будет иметь нейтральную реакцию:

- а) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{HCl}$, б) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$, в) $\text{NaOH} + \text{HCl}$,
г) $\text{NaOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$?

3. Сточные воды обогатительных фабрик, содержащие гидрокарбонат кальция, очищают от коллоидных примесей (удалить которые отстаиванием и фильтрованием невозможно) добавлением к ним сульфата алюминия. Образующийся хлопьевидный $\text{Al}(\text{OH})_3$ обволакивает коллоидные частицы примесей и вызывает их осаждение. Объясните образование $\text{Al}(\text{OH})_3$ и напишите уравнение реакции.

4. Определить, возможна ли реакция окисления сфалерита кислородом воздуха в стандартных условиях, если



ΔG_{298}^0 , кДж/моль	-201	-237	-2564

Сделайте вывод о кислотности рудничных вод, содержащих в качестве продукта выветривания сульфат цинка, записав уравнение реакции гидролиза в молекулярном и ионном виде.

5. При окислении пирита, преобладающего в колчеданных рудах, кислородом, растворенным в воде, выделяется сульфат железа (III). Поступая с нисходящим током растворов в нижние горизонты, он реагирует с породой. Сделайте вывод о составе породы, если наблюдается совместное образование гипса $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и лимонита $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции взаимодействия сульфата железа (III) и породы.

6. Объясните, приведя молекулярно-ионное уравнение, почему при нагревании раствора NaHCO_3 реакция среды из слабощелочной переходит в сильнощелочную.

7. В водном растворе хлорида цинка при нагревании происходит растворение кусочка металлического цинка. Напишите уравнения реакции, объясняя причину выделения водорода.

8. В жесткой воде ионы железа обычно присутствуют в виде гидрокарбоната железа (II). При хранении такой воды в открытых сосудах, железо окисляется кислородом воздуха, вода мутнеет из-за выпадения в осадок $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции, в результате которой образуется гидроксид железа (III).



**ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»**

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

**ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ
ПО КУРСУ «ХИМИЯ»
ЧАСТЬ II**

Окислительно-восстановительные реакции

**Учебное пособие для студентов о
факультета Геологии и геофизики**

Екатеринбург

2020

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие для студентов

ФАКУЛЬТЕТА ФГИГ

Издание УГГУ

Екатеринбург, 2020

Рецензент: Г. Л. Левит, кандидат химических наук, старший научный сотрудник Института органического синтеза УрО РАН

Низова И.А., Зайцева Н.А.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ», часть II. Окислительно-восстановительные процессы: учебное пособие / И.А. Низова, Н.А. Зайцева – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 30 с.

В учебном пособии изложены краткие сведения об окислительно-восстановительных процессах и основных приемах составления уравнений окислительно-восстановительных реакций. Пособие содержит 20 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы по каждой теме.

Для студентов горно-технологического факультета.

© Низова И.А., Зайцева Н.А. ©

Уральский государственный
горный университет

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.....	6
2. Классификация окислительно-восстановительных реакций.....	8
3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса.....	10
4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).....	13
5. Направление протекания окислительно-восстановительных реакций.....	22
Список литературы.....	20

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только -1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только $+1$

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только $+2$

Алюминий – только $+3$.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления $+1$. Исключение составляют гидриды металлов (NaH , CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (-1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления -2 . Исключение составляют фторид кислорода OF_2 , (степень окисления кислорода $+1$) и пероксиды H_2O_2 , Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода -1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны

(сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2 , но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2 , озоном O_3 , хлором Cl_2 и бромом Br_2 . К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2 , углерод C и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4 ; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2 , и свинца (IV) PbO_2 ; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка»), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI ; сульфит натрия Na_2SO_3 ; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S ; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3 .

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO , H_2O_2 , MnO_2 , так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO ₂ , CH ₄ , Cl ₂ , KMnO ₄	11	HF, Zn, H ₃ PO ₄ , NH ₄ Cl
2	H ₂ O ₂ , H ₂ SO ₄ , I ₂ , K ₂ Cr ₂ O ₇	12	H ₂ SO ₃ , NaH ₂ SbO ₃ , Au, ZnCl ₂
3	NaH, F ₂ , K ₂ HPO ₄ , N ₂ H ₄	13	NH ₄ HS, P, C ₆ H ₆ , Ba(ClO ₄) ₂
4	OF ₂ , C ₂ H ₆ , O ₂ , K ₂ MnO ₄	14	NaNO ₂ , Ca(HS) ₂ , Ag, PH ₃
5	CaH ₂ , C ₂ H ₄ , Br ₂ , Fe ₂ (SO ₄) ₃	15	BaCO ₃ , AsH ₃ , Ca, Na ₃ SbO ₄
6	PbO ₂ , C ₂ H ₂ , O ₃ , MnOHNO ₃	16	HNO ₃ , Xe, KClO ₄ , NH ₄ OH
7	Na ₂ O ₂ , N ₂ , H ₂ O, K ₂ SiO ₃	17	Sn(OH) ₂ , CuCl ₂ , K ₂ S, Mn
8	H ₂ S, Mg, Na ₃ SbO ₃ , Cr(OH) ₃	18	Al ₂ S ₃ , Na ₂ SO ₃ , NaClO, Se
9	Na ₂ S, NH ₃ , H ₂ , KHCO ₃	19	NaClO ₂ , Al ₄ C ₃ , He, Bi(NO ₃) ₃ ,
10	AlP, CO, HCl, NH ₄ NO ₃	20	NaHSO ₃ , Si, Na ₃ AsO ₃ , Cr(OH) ₃

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, KClO₃, NaClO₄, Cl₂O₇, HClO₂ ?

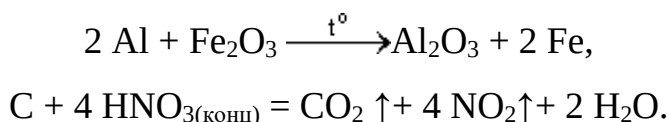
3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: NaNO₂, NO, N₂O₃, N₂H₄, N₂O, HNO₃, N₂O₅, NH₄NO₃, NH₃, NH₄Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H₂SO₄, Ca(HS)₂, H₂S, Na₂SO₃, Na₂S, SO₂, Na₂S₂O₃, SO₃, SO?

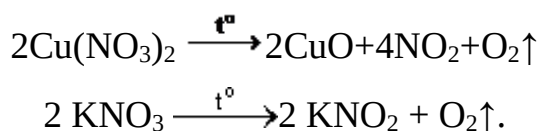
2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четвертый тип – реакции конпропорционирования.

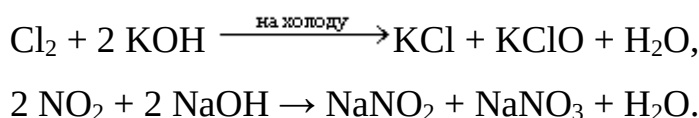
1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:



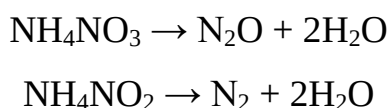
2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:



3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:



4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:



Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3 , HNO_2 , H_2SO_4 , NH_4NO_3 , Br_2 , H_2O_2 , CaH_2 ?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?



3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

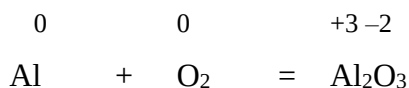
Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

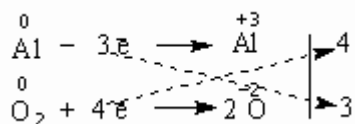
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты в реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $\text{Al} + \text{O}_2 \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3$

Определим степени окисления:

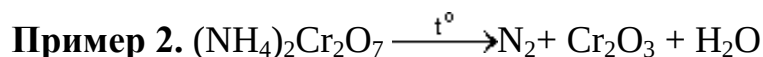
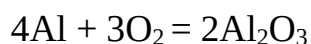


Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:

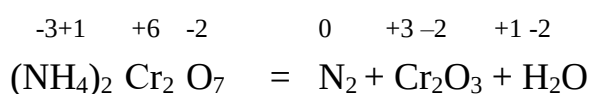


Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

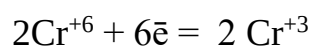
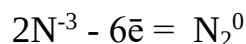
Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O₂) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al₂O₃ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



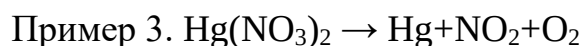
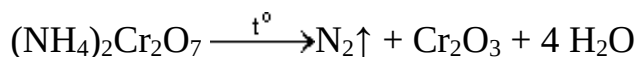
Определим степени окисления:



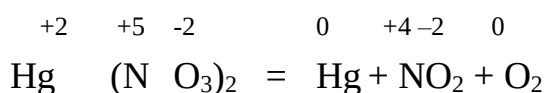
Азот отдаёт электроны, хром получает.



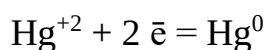
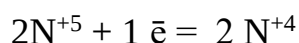
Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H₂O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



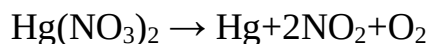
Определим степени окисления:



Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:



Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO₂ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Mn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{MnO}_2 + \text{NO}_2$	11	$\text{BaO}_2 \rightarrow \text{BaO} + \text{O}_2$
2	$\text{K}_2\text{MnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	12	$\text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Ag} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
3	$\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{ZnO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	13	$\text{FeSO}_4 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_2 + \text{SO}_3$
4	$\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \rightarrow \text{O}_2 + \text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{K}_2\text{CrO}_4$	14	$\text{KClO}_4 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
5	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	15	$\text{CdSO}_3 \rightarrow \text{CdSO}_4 + \text{CdS}$
6	$\text{KMnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	16	$\text{HNO}_3 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
7	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	17	$\text{NaClO}_2 \rightarrow \text{NaClO}_3 + \text{NaCl}$
8	$\text{HNO}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	18	$\text{KClO}_3 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
9	$\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{CoO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	19	$\text{SnSO}_4 \rightarrow \text{SnO}_2 + \text{SO}_2$
10	$\text{LiNO}_3 \rightarrow \text{Li}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	20	$\text{Ni}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Ni}(\text{NO}_2)_2 + \text{O}_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{C} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{Fe}$	11	$\text{Zn} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Zn}(\text{NO}_3)_2 + \text{Ag}$
2	$\text{KBr} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{KCl} + \text{Br}_2$	12	$\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Al}$
3	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{Fe}$	13	$\text{MnO}_2 + \text{Al} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mn}$
4	$\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2$	14	$\text{H}_2\text{S} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{S} + \text{HBr}$
5	$\text{O}_2 + \text{HI} \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{I}_2$	15	$\text{CuCl}_2 + \text{Cr} \rightarrow \text{Cu} + \text{CrCl}_3$
6	$\text{Al} + \text{CuSO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Cu}$	16	$\text{Mg} + \text{SiO}_2 \rightarrow \text{MgO} + \text{Si}$
7	$\text{Ca} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{Ca}(\text{OH})_2$	17	$\text{NaI} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{NaCl} + \text{I}_2$
8	$\text{TiO}_2 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Ti}$	18	$\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{NaOH}$
9	$\text{Al} + \text{FeO} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}$	19	$\text{KClO}_3 + \text{I}_2 \rightarrow \text{KIO}_3 + \text{Cl}_2$
10	$\text{KI} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{KBr} + \text{I}_2$	20	$\text{Al} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_3 + \text{H}_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присутствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- .
Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+ .
Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+ , ни OH^- в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.
2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.
3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнивать число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O , ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$\text{O}^{2-} + 2\text{H}^+ = \text{H}_2\text{O}$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$
Восполнение недостатка кислорода	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$2\text{OH}^- = \text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O}$

в) уравнивать суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

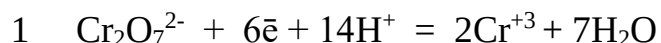
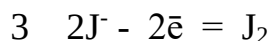
8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости “привести подобные” ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $\text{H}^+ + \text{OH}^- = \text{H}_2\text{O}$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

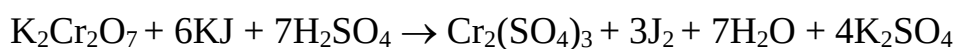
10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

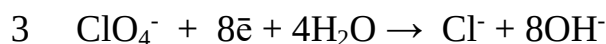
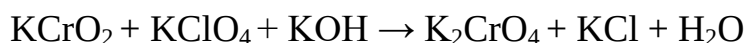
Пример 3. В кислой среде:



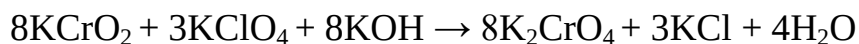
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



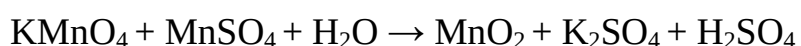
Пример 4. В щелочной среде:



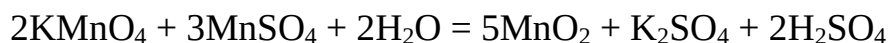
Суммарное молекулярное уравнение реакции



Пример 5. В нейтральной среде:



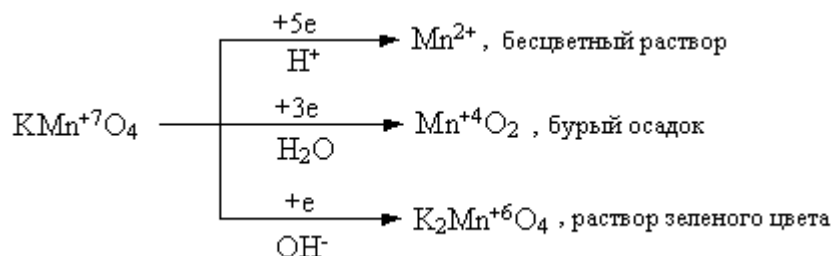
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



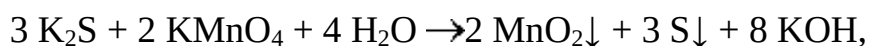
Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:

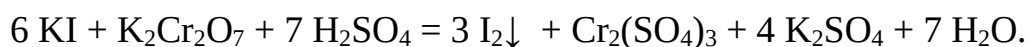
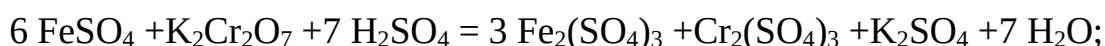


Ниже приведены реакции KMnO_4 с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах. В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы KOH не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.



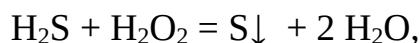
2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

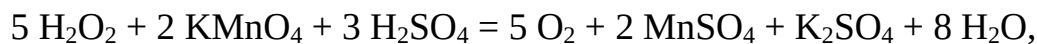


3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

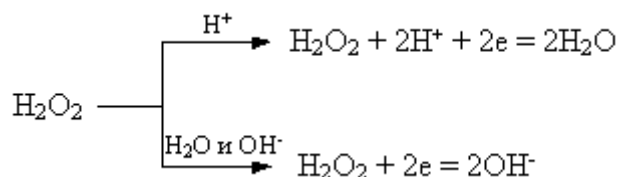
Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:



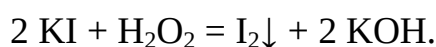
Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, KMnO_4), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановителей:



Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:



Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KBr} + \text{KBrO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{O}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_3\text{H}_6 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{C}_2\text{H}_6(\text{OH})_2 + \text{KOH}$

Вариант 2

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{S}\downarrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{S} + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{S} + \text{K}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}.$
- 3) $\text{BaS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{S}\downarrow + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 3

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NO}_2 + \text{NaOH} \rightarrow \text{NaNO}_2 + \text{NaNO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{CrCl}_3 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{HCl}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 4

- 1) $\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

- 2) $\text{AuCl}_3 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{Au} + \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2\uparrow + \text{KCl}$
- 3) $\text{KMnO}_4 + \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{Fe}(\text{OH})_3\downarrow + \text{KOH}$
- 4) $\text{C}_5\text{H}_{10} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 5

- 1) $\text{Ag} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Ag}_2\text{SO}_4\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{HS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{S}\downarrow + 2\text{NO}_2\uparrow + \text{NH}_4\text{NO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{MnSO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_{12} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 6

- 1) $\text{Bi} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{CuS} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{NO}_2\uparrow + \text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{C} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_{7(\text{конц.})} \rightarrow \text{CO}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{HCOH} + \text{NaOH} + \text{I}_2 \rightarrow \text{HCOONa} + \text{NaI} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 7

- 1) $\text{Ag} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{AgNO}_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{CrO}_4 + \text{KBr} + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{S} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HBr}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 8

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{MnO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{MnCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Cl}_2\uparrow$
- 3) $\text{As}_2\text{O}_3 + \text{NaOH} + \text{NaNO}_3 \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaNO}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{KOH} + \text{MnO}_2\downarrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант -9

- 1) $\text{Be} + \text{HNO}_{3(\text{разб., гор.})} \rightarrow \text{Be}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{P} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NaClO} + \text{NaOH}_{(\text{конц.})} \rightarrow \text{NaBiO}_3\downarrow + \text{NaNO}_3 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-C}_2\text{H}_5 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{K}_2\text{CO}_3 + \text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 10

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlBr}_{3(\text{тв.})} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{NaOH}_{(\text{разб.})} + \text{NaClO} \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 11

- 1) $\text{Ca} + \text{HNO}_3(\text{разб.}) \rightarrow \text{Ca}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{I}(\text{тв.}) + \text{H}_2\text{SO}_4(\text{конц.}) \rightarrow \text{I}_2\downarrow + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_4\text{HSO}_4$
- 3) $\text{Bi}(\text{OH})_3 + \text{KOH}(\text{конц.}) + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{KBiO}_3\downarrow + \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 12

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_3(\text{оч. разб.}) \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{NH}_4\text{NO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Au}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_3(\text{конц.}) \rightarrow \text{Au}\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{HBrO}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{S} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 13

- 1) $\text{Bi} + \text{HNO}_3(\text{разб.}) \rightarrow \text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{PbO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{PbCl}_2 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{Ag}\downarrow + \text{HNO}_3$
- 4) $\text{CH}_3\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

Вариант 14

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_3(\text{конц.}) \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{C}_2\text{N}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KCN} + \text{KCNO} + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{H}_2\text{SO}_3 + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HI}$
- 4) $\text{C}_4\text{H}_8 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 15

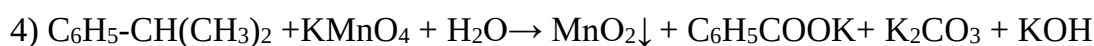
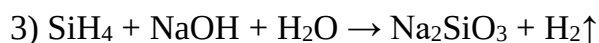
- 1) $\text{Cu} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{CuSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlP} + \text{HNO}_3(\text{конц., гор.}) \rightarrow \text{Al}(\text{NO}_3)_3 + \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_4 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 16

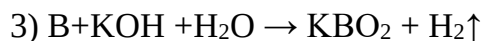
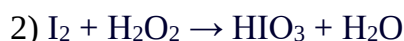
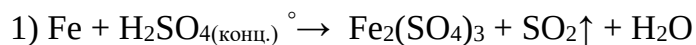
- 1) $\text{Cu} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{H}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{CrO}_6 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Si} + \text{NaOH} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{H}_2\uparrow$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 17

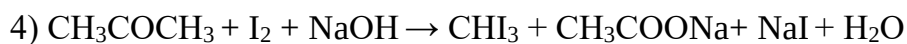
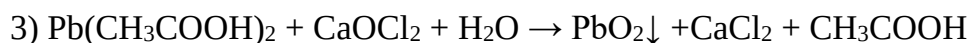
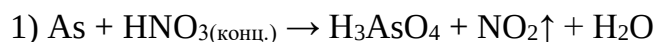
- 1) $\text{As} + \text{H}_2\text{SO}_4(\text{конц., гор.}) \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{B}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_3(\text{конц.}) \rightarrow \text{H}_3\text{BO}_3\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$



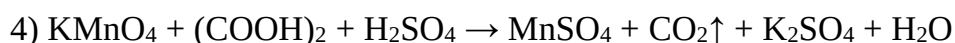
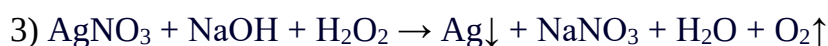
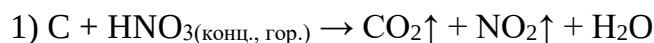
Вариант 18



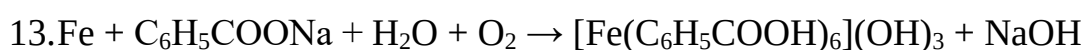
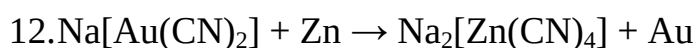
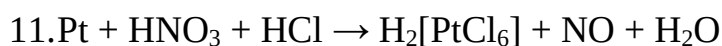
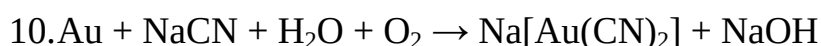
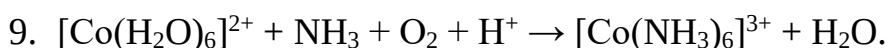
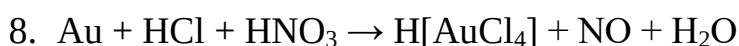
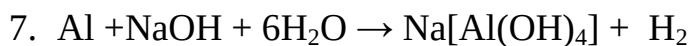
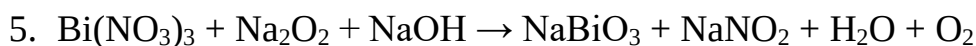
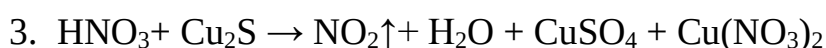
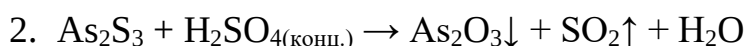
Вариант 19



Вариант 20

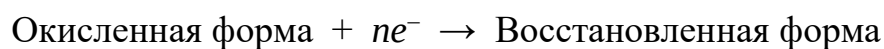


Дополнительные уравнения



Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

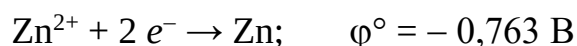
Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:



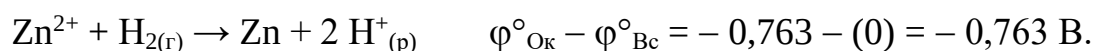
Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

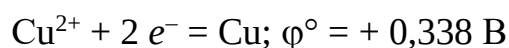


то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

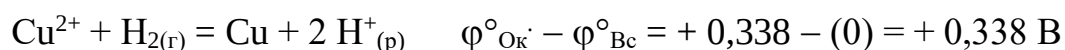


Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $\text{Zn} + 2\text{H}^+_{(\text{р})} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + \text{H}_{2(\text{г})}$ $\varphi^\circ_{\text{Ок}} - \varphi^\circ_{\text{Вс}} = 0 - (-0,763) = +0,763 \text{ В}$

Для положительных значений φ° , например пары $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}$

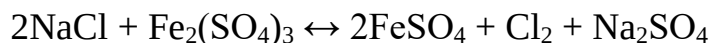


реакция



где $2\text{H}^+_{(\text{p})}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

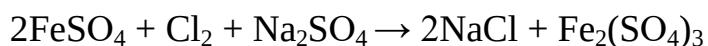
Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



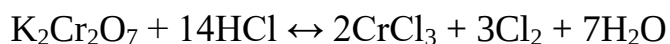
Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :



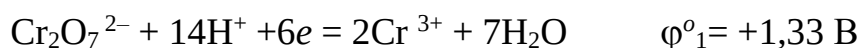
Поскольку $\varphi_1^\circ > \varphi_2^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – ион Fe^{2+} ; рассматриваемая реакция будет протекать так:



Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:



Поскольку $\varphi_2^\circ > \varphi_1^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::



В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ° при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φ^0 близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[Red]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, К;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалоопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея ($F = 96484.56$ Кл/моль);

$[Ox]$ – концентрация окисленной формы ионов;

$[Red]$ – концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0,059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[Red]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции



при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[\text{Ag}^+] = 10^{-4}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-1}$ моль/л;

б) $[\text{Ag}^+] = 10^{-1}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-4}$ моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:



По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

$$\text{а) } \varphi_1 = \varphi_1^0 + 0,059/2 \cdot \lg [\text{Hg}_2^{2+}] = 0,79 + 0,030 \lg 10^{-1} = 0,79 - 0,03 = 0,76 \text{ В;}$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + 0,059 \cdot \lg [\text{Ag}^+] = 0,80 + 0,059 \lg 10^{-4} = 0,80 - 0,24 = 0,56 \text{ В.}$$

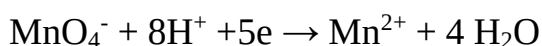
В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

$$\text{б) } \varphi_1 = 0,79 + 0,030 \cdot \lg 10^{-4} = 0,79 - 0,12 = 0,67 \text{ В;}$$

$$\varphi_2 = 0,80 + 0,059 \cdot \lg 10^{-1} = 0,80 - 0,06 = 0,74 \text{ В.}$$

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции



окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0,059}{5} \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-] \cdot [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1,507 + 0,012 \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-]}{[\text{Mn}^{2+}]} - 0,095 \text{pH}$$

Потенциалы процесса зависят от pH среды и будут тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала KMnO_4 от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰
Ag	$\alpha\text{-Ag}_2\text{S} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{S}^{2-}$	-0,70	B	$\text{BF}_4^- + 3e = \text{B} + 4\text{F}^-$	-1,04
	$\text{Ag}(\text{CN})_2^- + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{CN}^-$	-0,29		$\text{H}_3\text{BO}_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,869
	$\text{AgI} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{I}^-$	-0,152		$\text{BO}_3^{3-} + 6\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,165
	$\text{AgCN} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{CN}^-$	-0,04	Ba	$\text{Ba}^{2+} + 2e = \text{Ba}$	-2,905
	$\text{Ag}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-} + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,01	Be	$\text{Be}^{2+} + 2e = \text{Be}$	-1,847
	$\text{AgBr} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Br}^-$	0,071		$\text{Be}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,820
	$\text{AgCl} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Cl}^-$	0,222		$\text{BeO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,909
	$\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + 2\text{OH}^-$	0,344	Bi	$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = 2\text{Bi} + 6\text{OH}^-$	-0,46
	$\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+ + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{NH}_3$	0,373		$\text{BiOCl} + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,16
	$\text{Ag}_2\text{CrO}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{CrO}_4^{2-}$	0,446		$\text{Bi}^{3+} + 3e = \text{Bi}$	0,215
	$\text{Ag}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{C}_2\text{O}_4^{2-}$	0,472		$\text{BiO}^+ + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{H}_2\text{O}$	0,32
	$\text{AgBrO}_3 + \bar{e} = \text{Ag} + \text{BrO}_3^-$	0,55		$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6e = 2\text{Bi} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,371
	$2\text{AgO} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + 2\text{OH}^-$	0,60		$\text{NaBiO}_3(\text{т}) + 6\text{H}^+ + 2e = \text{Bi}^{3+} + \text{Na}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,6 - 1,808
	$\text{Ag}^+ + \bar{e} = \text{Ag}$	0,799	Br	$2\text{BrO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Ag}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{H}_2\text{O}$	1,173		$2\text{BrO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10e = \text{Br}_2 + 12\text{OH}^-$	0,50
	$2\text{AgO} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	1,398		$\text{BrO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4e = \text{BrO}^- + 4\text{OH}^-$	0,54
Al	$\text{AlO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{e} = \text{Al} + 4\text{OH}^-$	-2,35		$\text{BrO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = \text{Br}^- + 6\text{OH}^-$	0,61
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\bar{e} = \text{Al} + 3\text{OH}^-$	-2,31		$\text{BrO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}^- + 2\text{OH}^-$	0,76
	$\text{AlF}_6^{3-} + 3\bar{e} = \text{Al} + 6\text{F}^-$	-2,07		$\text{Br}_3^- + 2e = 3\text{Br}^-$	1,05
	$\text{Al}^{3+} + 3e = \text{Al}$	-1,663		$\text{Br}_2(\text{ж}) + 2e = 2\text{Br}^-$	1,065
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 3\text{H}_2\text{O}$	-1,471		$\text{BrO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6e = \text{Br}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,44
	$\text{AlO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,262		$2\text{BrO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10e = \text{Br}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,52
As	$\text{As} + 3\text{H}^+ + 3e = \text{AsH}_3$	-0,60	C	$2\text{HBrO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Br}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,59
	$\text{HAsO}_2 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{As} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,248		$\text{HCOO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{HCHO} + 3\text{OH}^-$	-1,07
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HAsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,559		$2\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$	-0,49
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_3\text{AsO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,58		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCOOH}$	-0,20
Au	$\text{Au}(\text{CN})_2 + e = \text{Au} + 2\text{CN}^-$	-0,61		$\text{C}(\text{графит}) + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_4$	-0,132
	$\text{AuBr}_4^- + 2e = \text{AuBr}_2^- + 2\text{Br}^-$	0,802		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{CO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,12
	$\text{AuCl}_4^- + 2e = \text{AuCl}_2^- + 2\text{Cl}^-$	0,926		$\text{HCOOH} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,01
	$\text{AuBr}_2^- + e = \text{Au} + 2\text{Br}^-$	0,959		$\text{HCOOH} + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,145
	$\text{AuCl}_2^- + 2e = \text{Au} + 2\text{Cl}^-$	1,15		$\text{HCOO}^- + 3\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	0,167
	$\text{Au}^{3+} + 2e = \text{Au}^+$	1,401		$\text{CH}_3\text{CHO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	0,19
	$\text{Au}^{3+} + 3e = \text{Au}$	1,498		$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4e = \text{HCHO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,197
	$\text{Au}^+ + 3e = \text{Au}$	1,692		$\text{HCOO}^- + 5\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,199
Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰

C	$\text{CO}_3^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,209	Co	$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{OH}^-$	-0,73
	$\text{CO}_3^{2-} + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HCOO}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,227		$\text{CoCO}_3 + 2\text{e} = \text{Co} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,64
	$\text{HCHO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_3\text{OH}$	0,232		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Co} + 6\text{NH}_3$	-0,42
	$2\text{CO}_3^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{O}_4^{2-} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441		$\text{Co}^{2+} + 2\text{e} = \text{Co}$	-0,277
	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{H}_6 + \text{H}_2\text{O}$	0,46		$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,095
	$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{C}(\text{графит}) + 3\text{H}_2\text{O}$	0,475		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{3+} + \text{e} = \text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+}$	0,1
	$\text{CO} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,497		$\text{CoO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + \text{H}_2\text{O}$	0,166
	$\text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,59		$\text{Co}(\text{OH})_3 + \text{e} = \text{Co}(\text{OH})_2 + \text{OH}^-$	0,17
Ca	$\text{Ca}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ca}$	-2,866	Cr	$\text{Co}^{3+} + 3\text{e} = \text{Co}$	0,33
Cd	$\text{CdS} + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{S}^{2-}$	-1,175		$\text{Co}^{3+} + \text{e} = \text{Co}^{2+}$	1,38 - 1,842
	$\text{Cd}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{CN}^-$	-1,09		$\text{Cr}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cr} + 2\text{OH}^-$	-1,4
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{OH}^-$	-0,81		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{OH}^-$	-1,3
	$\text{Cd}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{NH}_3$	-0,61		$\text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr} + 4\text{OH}^-$	-1,2
	$\text{Cd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd}$	-0,403		$\text{Cr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cr}$	-0,913
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,005		$\text{Cr}^{3+} + 3\text{e} = \text{Cr}$	-0,744
	$\text{CdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{H}_2\text{O}$	0,063		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,654
Ce	$\text{Ce}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ce}$	-2,48		$\text{Cr}^{3+} + \text{e} = \text{Cr}^{2+}$	-0,407
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M H}_2\text{SO}_4)$	1,44		$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr}(\text{OH})_3 + 5\text{OH}^-$	-0,13
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HNO}_3)$	1,61		$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 12\text{e} = 2\text{Cr} + 7\text{H}_2\text{O}$	0,294
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HClO}_4)$	1,70		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cr} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,366
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+}$	1,77		$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O}$	0,945
Cl	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + 2\text{OH}^-$	0,36	Cs	$\text{CrO}_2^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{Cr}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,188
	$2\text{ClO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{OH}^-$	0,40		$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,333
	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 8\text{OH}^-$	0,56		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr}^{3+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,477
	$\text{ClO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 6\text{OH}^-$	0,63	Cu	$\text{Cs}^+ + \text{e} = \text{Cs}$	-2,923
	$\text{ClO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,89
	$\text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{OH}^-$	0,88		$\text{CuS} + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,71
	$\text{ClO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{ClO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,15		$\text{Cu}(\text{CN})_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{CN}^-$	-0,43
	$\text{ClO}_4^- + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + \text{H}_2\text{O}$	1,189		$\text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,36
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{HCl} + \text{H}_2\text{O}$	1,351		$\text{Cu}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,22
	$\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Cl}^-$	1,3595		$\text{CuI} + \text{e} = \text{Cu} + \text{I}^-$	-0,185
	$\text{ClO}_4^- + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{H}_2\text{O}$	1,38		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{NH}_3$	-0,12
	$2\text{ClO}_4^- + 16\text{H}^+ + 14\text{e} = \text{Cl}_2 + 8\text{H}_2\text{O}$	1,39		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu} + 4\text{NH}_3$	-0,07
	$\text{ClO}_2 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{HCl} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,436		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + 2\text{NH}_3$	-0,01
	$\text{ClO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,451		$\text{CuI}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{I}^-$	0,00
	$2\text{ClO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{Cl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,47		$\text{CuBr} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Br}^-$	0,03
	$\text{HClO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	1,494		$\text{CuCl} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Cl}^-$	0,137
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,51		$\text{Cu}^{2+} + \text{e} = \text{Cu}^+$	0,153
	$2\text{ClO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,549		$\text{CuCl}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{Cl}^-$	0,177
	$\text{HClO}_2 + 3\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,57		$2\text{Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + 2\text{H}^+$	0,203
	$2\text{HClO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,63		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}$	0,345
	$2\text{HClO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,64		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}_2^-$	0,463
Co	$\beta\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-1,07		$\text{Cu}^+ + \text{e} = \text{Cu}$	0,520
	$\alpha\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-0,90		$\text{Cu}^{2+} + \text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}$	0,538
Cu	$\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$	0,570	Hg	$\text{HgBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Br}^-$	0,21

	$\text{Cu(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,609		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{K}^+ + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{KCl (TB)}$	0,2415
	$\text{Cu}^{2+} + \text{Br}^- + \text{e} = \text{CuBr}$	0,640		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^-$	0,268
	$2\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	0,669		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (1M KCl)}$	0,28
	$\text{Cu}^{2+} + \text{I}^- + \text{e} = \text{CuI}$	0,86		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (0,1M KCl)}$	0,334
	$\text{Cu}^{2+} + 2\text{CN}^- + \text{e} = \text{Cu(CN)}_2$	1,12		$\text{HgCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Cl}^-$	0,48
Dy	$\text{Dy}^{3+} + 3\text{e} = \text{Dy}$	-2,353		$\text{Hg}_2\text{SO}_4 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + \text{SO}_4^{2-}$	0,6151
Eu	$\text{Eu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Eu}$	-3,395		$\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{e} = 2\text{Hg}$	0,788
	$\text{Eu}^{3+} + \text{e} = \text{Eu}^{2+}$	-0,429		$\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}$	0,850
F	$\text{F}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{F}^- + \text{H}_2\text{O}$	2,1		$2\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}_2^{2+}$	0,920
	$\text{F}_2 + 2\text{e} = 2\text{F}^-$	2,87		$\text{HgO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{H}_2\text{O}$	0,926
Fe	$\text{FeS} + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{S}^{2-}$	-0,95	Ho	$\text{Ho}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ho}$	-2,319
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{OH}^-$	-0,877	I	$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,14
	$\text{FeCO}_3 + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,756		$2\text{IO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10\text{e} = \text{I}_2 + 12\text{OH}^-$	0,21
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{OH}^-$	-0,56		$\text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{I}^- + 6\text{OH}^-$	0,25
	$\text{Fe}^{2+} + 2\text{e} = \text{Fe}$	-0,440		$2\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = 3\text{Fe} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,085		$\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}^- + 2\text{OH}^-$	0,49
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Fe(OH)}_2$	-0,057		$\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{I}^-$	0,536
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,051		$\text{I}_3^- + 2\text{e} = 3\text{I}^-$	0,545
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,047		$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,56
	$\text{Fe}^{3+} + 3\text{e} = \text{Fe}$	-0,037		$\text{HIO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,99
	$\text{Fe(OH)}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,059		$2\text{ICl}_2^- + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{Cl}^-$	1,06
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,271		$\text{IO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{I}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,085
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-}$	0,356		$\text{IO}_3^- + 5\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{HIO} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,14
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	0,68		$2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{I}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,19
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M HCl)}$	0,70		$2\text{HIO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,45
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-} \text{ (1M HCl)}$	0,71		$\text{H}_5\text{IO}_6 + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,60
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+}$	0,771	Ir	$\text{IrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ir} + \text{H}_2\text{O}$	0,93
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{Fe}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Ir}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ir}$	1,15
Ga	$\text{Ga}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ga}$	-0,53	K	$\text{K}^+ + \text{e} = \text{K}$	-2,924
Gd	$\text{Gd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Gd}$	-2,397	La	$\text{La}^{3+} + 3\text{e} = \text{La}$	-2,522
Ge	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ge}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,363	Li	$\text{Li}^+ + \text{e} = \text{Li}$	-3,045
	$\text{GeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,15	Mg	$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{OH}^-$	-2,69
	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,13		$\text{Mg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mg}$	-2,363
	$\text{Ge}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ge}$	0,000		$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,862
H	$2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$	-0,828	Mn	$\text{MnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Mn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,48
	$2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2$	0,0000		$\text{Mn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mn}$	-1,18
	$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776		$\text{Mn(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,727
Hf	$\text{Hf}^{4+} + 4\text{e} = \text{Hf}$	-1,70		$\text{MnO}_4^- + \text{e} = \text{MnO}_4^{2-}$	0,564
	$\text{HfO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Hf} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,57		$\text{MnO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	0,60
Hg	$\text{HgS} + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{S}^{2-}$	-0,69		$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,228
	$\text{Hg(CN)}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{CN}^-$	-0,37		$\text{Mn}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Mn}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,443
	$\text{Hg}_2\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{I}^-$	-0,041		$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,507
	$\text{HgI}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{I}^-$	-0,04		$\text{Mn}^{3+} + \text{e} = \text{Mn}^{2+} \text{ (8M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	1,509
	$\text{HgO(красная)} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Hg} + 2\text{OH}^-$	0,098		$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,692
	$\text{Hg}_2\text{Br}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Br}^-$	0,140		$\text{MnO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	2,257
Mo	$\text{H}_2\text{MoO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,091	Nd	$\text{Nd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Nd}$	-2,431

	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Mo} + 8\text{OH}^-$	-1,05	Ni	$\gamma\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-1,04
	$\text{Mo}^{3+} + 3\text{e} = \text{Mo}$	-0,200		$\alpha\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-0,83
	$\text{MoO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Mo} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,072		$\text{Ni(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{OH}^-$	-0,72
	$\text{MoO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Mo} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,154		$\text{Ni(NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni} + 6\text{NH}_3$	-0,49
	$\text{MoO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,320		$\text{NiCO}_3 + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,45
	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,606		$\text{Ni}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni}$	-0,25
N	$3\text{N}_2 + 2\bar{\text{e}} = 2\text{N}_3^-$	-3,4	O	$\text{Ni(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,110
	$3\text{N}_2 + 2\text{H}^+ + 2\bar{\text{e}} = 2\text{HN}_3$	-3,1		$\text{NiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{H}_2\text{O}$	0,116
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{OH}^-$	-3,04		$\text{NiO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,68
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 4\bar{\text{e}} = \text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{OH}^-$	-1,16		$\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 4\text{OH}^-$	0,401
	$\text{N}_2 + 8\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 6\text{OH}^-$	-0,74		$\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{O}_2$	0,682
	$\text{NO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + \bar{\text{e}} = \text{NO} + 2\text{OH}^-$	-0,46		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e} = 3\text{OH}^-$	0,88
	$\text{NO}_2^- + 6\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 7\text{OH}^-$	-0,15		$\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,229
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{\text{e}} = \text{NO} + 4\text{OH}^-$	-0,14		$\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{O}_2 + 2\text{OH}^-$	1,24
	$\text{NO}_3^- + 7\text{H}_2\text{O} + 8\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 9\text{OH}^-$	-0,12		$\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 3\text{H}_2\text{O}$	1,511
	$\text{NO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NO}_2^- + 2\text{OH}^-$	0,01		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776
	$\text{N}_2 + 6\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_3$	0,057		$\text{O}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$	2,07
	$\text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,1	Os	$\text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Os} + 4\text{OH}^-$	-0,15
	$\text{N}_2 + 8\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4^+$	0,275		$\text{OsCl}_6^{3-} + \text{e} = \text{Os}^{2+} + 6\text{Cl}^-$	0,4
	$2\text{NO}_2^- + 4\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,41		$\text{OsO}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Os} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,85
	$\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,42		$\text{OsCl}_6^{2-} + \text{e} = \text{OsCl}_6^{3-}$	0,85
	$2\text{NO}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,53		$\text{Os}^{2+} + 2\text{e} = \text{Os}$	0,85
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,78		$\text{OsO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,80	P	$\text{H}_2\text{PO}_2^- + \text{e} = \text{P} + 2\text{OH}^-$	-2,05
	$2\text{NO} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{HPO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2\text{PO}_2^- + 3\text{OH}^-$	-1,57
	$\text{HNO}_2 + 7\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{NH}_4^+ + 2\text{H}_2\text{O}$	0,864		$\text{PO}_4^{3-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{HPO}_3^{2-} + 3\text{OH}^-$	-1,12
	$\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{NH}_4^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,87		$2\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,94
	$2\text{NO}_2 + 2\text{e} = 2\text{NO}_2^-$	0,88		$\text{P} + 3\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{PH}_3 + 3\text{OH}^-$	-0,89
	$\text{N}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{OH}^-$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{P} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,51
	$\text{NO}_3^- + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HNO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P(бел)} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,502
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,957		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P(кp)} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,454
	$\text{HNO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,00		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P(бел)} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,411
	$\text{NO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,03		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,39
	$\text{NO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{HNO}_2$	1,09		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P(кp)} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,383
	$2\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 5\text{H}_2\text{O}$	1,116		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	-0,276
	$2\text{NO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{N}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,246		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$2\text{HNO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,297		$\text{P} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{PH}_3$	0,06
	$2\text{NO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,36		$\text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_3\text{PO}_3$	0,38
	$2\text{HNO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,45	Pb	$\text{PbS} + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{S}^{2-}$	-0,93
	$2\text{NO} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,678		$\text{PbO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{OH}^-$	-0,58
	$\text{N}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,766		$\text{PbCO}_3 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,506
				$\text{PbI}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{I}^-$	0,365
Na	$\text{Na}^+ + \text{e} = \text{Na}$	-2,714	S		
Pb	$\text{PbSO}_4 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{SO}_4^{2-}$	-0,3563		$\text{S} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{S}$	0,141

	$\text{PbF}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{F}^-$	-0,350		$\text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,17
	$\text{PbBr}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Br}^-$	-0,280		$\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,231
	$\text{PbCl}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Cl}^-$	-0,268		$2\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 5\text{H}_2\text{O}$	0,29
	$\text{Pb}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pb}$	-0,126		$\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{H}_2\text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,311
	$\text{PbO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO}_2^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,2		$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,357
	$\text{PbO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,248		$2\text{H}_2\text{SO}_3 + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,40
	$\text{Pb}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,277		$\text{H}_2\text{SO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,449
	$\text{PbO}_2 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO} + 2\text{OH}^-$	0,28		$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,5
	$\text{Pb}_3\text{O}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{PbO} + \text{H}_2\text{O}$	0,972		$2\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,705
	$\text{PbO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,449-1,455		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{e} = 2\text{SO}_4^{2-}$	2,01
	$\text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,685	Sb	$\text{SbO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Sb} + 4\text{OH}^-$	-0,675
	$\text{Pb}^{4+} + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+}$	1,694		$\text{Sb} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbH}_3$	-0,51
Pd	$\text{Pd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pd} + 2\text{OH}^-$	0,07		$\text{SbO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SbO}_2^- + 2\text{OH}^-$	-0,43
	$\text{PdI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,623		$\text{Sb}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Sb} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,152
	$\text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pd} + 4\text{Cl}^-$	0,623		$\text{SbO}^+ + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + \text{H}_2\text{O}$	0,212
	$\text{PdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pd} + \text{H}_2\text{O}$	0,896		$\text{SbO}_3^- + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$	0,353
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Pd} + 6\text{Cl}^-$	0,96		$\text{SbO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,446
	$\text{Pd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pd}$	0,987		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{SbO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,581
	$\text{PdBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,993		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sb}_2\text{O}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,671
	$\text{PdO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PdO} + \text{H}_2\text{O}$	1,283	Sc	$\text{Sc}^{3+} + 3\text{e} = \text{Sc}$	-2,077
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	1,288	Se	$\text{Se} + 2\text{e} = \text{Se}^{2-}$	-0,92
Pt	$\text{PtS} + 2\text{e} = \text{Pt} + \text{S}^{2-}$	-0,95		$\text{Se} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Se}$	-0,40
	$\text{PtS}_2 + 2\text{e} = \text{PtS} + \text{S}^{2-}$	-0,64		$\text{SeO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Se} + 6\text{OH}^-$	-0,366
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{OH}^-$	0,15		$\text{SeO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SeO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,05
	$\text{PtI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,393		$\text{H}_2\text{SeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Se} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,741
	$\text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Br}^-$	0,58		$\text{SeO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SeO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	1,15
	$\text{PtBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,59	Si	$\text{SiO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{OH}^-$	-1,7
	$\text{PtCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	0,720		$\text{SiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{F}^-$	-1,2
	$\text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Cl}^-$	0,73		$\text{SiO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Si} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,455
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Si} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{SiH}_4$	0,102
	$\text{PtO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt}(\text{OH})_2$	1,045	Sn	$\text{SnS} + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{S}^{2-}$	-0,94
	$\text{Pt}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pt}$	1,188		$\text{Sn}(\text{OH})_6^{2-} + 2\text{e} = \text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 3\text{OH}^-$	-0,93
Ra	$\text{Ra}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ra}$	-2,925		$\text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Sn} + 3\text{OH}^-$	-0,91
S	$\text{Rb}^+ + \text{e} = \text{Rb}$	-2,925		$\text{SnF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Sn} + 6\text{F}^-$	-0,25
	$\text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	-0,93		$\text{Sn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sn}$	-0,136
	$2\text{SO}_4^{2-} + 5\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 10\text{OH}^-$	-0,76		$\text{SnO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{SnO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,108
	$\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S} + 6\text{OH}^-$	-0,66		$\text{SnO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,106
	$2\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{OH}^-$	-0,58		$\text{SnO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{H}_2\text{O}$	-0,104
	$\text{S}_2^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}^{2-}$	-0,524		$\text{Sn}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,091
	$\text{S} + 2\text{e} = \text{S}^{2-}$	-0,48		$\text{SnCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{SnCl}_4^{2+} + 2\text{Cl}^-$	0,14
	$2\text{S} + 2\text{e} = \text{S}_2^{2-}$	-0,476		$\text{Sn}^{4+} + 2\text{e} = \text{Sn}^{2+}$	0,151
	$\text{S} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HS}^-$	-0,065	Sr	$\text{Sr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sr}$	-2,888
	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 8\text{e} = 2\text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,006	Te	$\text{Te} + 2\text{e} = \text{Te}^{2-}$	-1,14
	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,08		$\text{Te} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Te}$	-0,72
	$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}^{2-} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,149		$\text{TeO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Te} + 6\text{OH}^-$	-0,57
	$\text{TeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Te} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,529		$\text{V}^{2+} + 2\text{e} = \text{V}$	-1,175

	$\text{TeO}_4^{2-} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$	0,892		$\text{V}^{3+} + \text{e} = \text{V}^{2+}$	-0,255
	$\text{H}_6\text{TeO}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,02		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{V} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,25
Ti	$\text{Ti}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ti}$	-1,63		$\text{VO}_2^{2+} + \text{e} = \text{VO}^+$	-0,044
	$\text{TiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti} + \text{H}_2\text{O}$	-1,306		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{V}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,360
	$\text{TiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Ti} + 6\text{F}^-$	-1,19	V	$\text{V}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,958
	$\text{TiO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,86		$\text{VO}_2^+ + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	1,004
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + \text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,666		$\text{VO}_4^{3-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{VO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,256
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,502		$\text{H}_2\text{VO}_4^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,314
	$\text{Ti}^{3+} + \text{e} = \text{Ti}^{2+}$	-0,368		$\text{WO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{W} + 8\text{OH}^-$	-1,05
	$\text{Ti}^{4+} + \text{e} = \text{Ti}^{3+} (5\text{M H}_3\text{PO}_4)$	-0,15	W	$\text{WO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{W} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,119
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	-0,135		$\text{WO}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,09
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{Ti}^{3+} + \text{H}_2\text{O}$	0,10		$\text{W}_2\text{O}_5 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{WO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,031
Tl	$\text{Tl}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Tl} + \text{S}^{2-}$	-0,93		$2\text{WO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + \text{H}_2\text{O}$	-0,029
	$\text{TlI} + \text{e} = \text{Tl} + \text{I}^-$	-0,753		$\text{WO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,049
	$\text{TlBr} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Br}^-$	-0,658		$2\text{WO}_4^{2-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$	0,801
	$\text{TlCl} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Cl}^-$	-0,557		$\text{ZnS} + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{S}^{2-}$	-1,405
	$\text{TlOH} + \text{e} = \text{Tl} + \text{OH}^-$	-0,344	Zn	$\text{Zn}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{CN}^-$	-1,26
	$\text{Tl}^+ + \text{e} = \text{Tl}$	-0,3363		$\text{Zn}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{OH}^-$	-1,245
	$\text{Tl}(\text{OH})_3 + 2\text{e} = \text{TlOH} + 2\text{OH}^-$	-0,05		$\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,22
	$\text{Tl}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 2\text{Tl}^+ + 6\text{OH}^-$	0,02		$\text{ZnO}_2^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,216
	$\text{TlOH} + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Tl} + \text{H}_2\text{O}$	0,778		$\text{ZnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,06
	$\text{Tl}^{3+} + 2\text{e} = \text{Tl}^+$	1,252		$\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{NH}_3$	-1,04
U	$\text{UO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{U} + 4\text{OH}^-$	-2,39		$\text{Zn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn}$	-0,763
	$\text{U}^{3+} + 3\text{e} = \text{U}$	-1,798		$\text{ZnO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441
	$\text{U}^{4+} + \text{e} = \text{U}^{3+}$	-0,607		$\text{ZrO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + \text{H}_2\text{O}$	-1,570
	$\text{UO}_2^{2+} = \text{UO}_2^+$	0,05	Zr	$\text{ZrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,553
	$\text{UO}_2^{2+} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,334		$\text{Zr}^{4+} + 4\text{e} = \text{Zr}$	-1,539
	$\text{UO}_2^+ + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,62			

Список литературы

Карпетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.А.Зайцевой

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.

Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.

Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ

620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

 УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров
14.10.2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Екатеринбург
2020
ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1	10
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»	10
Создание файла базы данных Access	10
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2	18
Работа с простыми запросами.....	18
Конструирование запросов на выборку с условием отбора.....	18
Вычисляемые поля в запросах	21
Параметры в запросах	23
Групповые операции в запросах	26
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3	29
Работа с многотабличными запросами	29
Запросы на изменение.....	33
Задание для самостоятельной работы	36
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4	37
Работа с формами.....	37
Условное форматирование элементов управления.....	38
Создание разделенной формы.....	40
Многотабличные формы.....	41
Создание многотабличной формы с помощью мастера	42
Одиночная многотабличная форма	45
Задание для самостоятельной работы	49
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5	49
Работа с отчетами.....	49
Задание для самостоятельной работы	51
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6	52
Создание главной кнопочной формы.....	52
с использованием макросов	52
Создание управляющих кнопок на экране	55
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ	60
Указания к выполнению работы	60
Варианты заданий	60
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	71

ВВЕДЕНИЕ

Система управления базами данных

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами*.

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление и удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с *заданным* критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования СУБД* включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA)*.
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
 - таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
 - запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
 - запросов на изменение данных базы;
 - экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
 - отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

Реляционная база данных

База данных является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержатся сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц,

соответствующих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации*) каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ*. По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:M). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:M предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:M, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

Схема данных

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdb-файле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных*, непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы и модули*, называемые *объектами приложения*.

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке VBA и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или

процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы.* Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобразить нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложении. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с

каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах. □ *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

Интерфейс пользователя Access

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации*. Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**.

Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи; □ *панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

Этапы проектирования базы данных:

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

Создание файла базы данных Access

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, *Реализация товаров*.

Щелчком по кнопке **Создать**, завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).

Новая база данных

Создание базы данных Microsoft Office Access, не содержащей существующих данных или объектов.

Имя файла:

Реализация товаров_ОГР_17_Попов



C:\Documents and Settings\Администратор\Мои документы\



Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «Заккрыть».



Рис. 1.2. Таблица1 в режиме таблицы

Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).

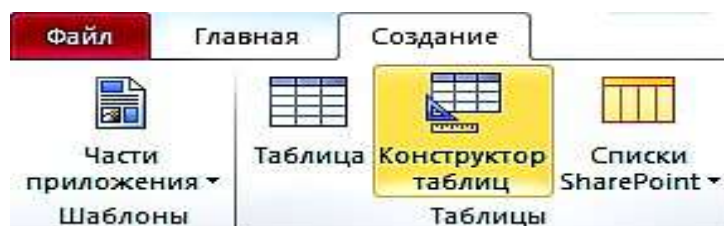


Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных**.

Товары	
Имя поля	Тип данных
Код товара	Счетчик
Наименование	Текстовый
Марка	Текстовый
Номер склада	Числовой
Количество	Числовой
Цена	Денежный
Свойства поля	
Общие	Подстановка
Формат поля	Денежный

Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «Конструктор»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара**», щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появится в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter**. По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары						
	Код товара ▾	Наименование ▾	Марка ▾	Номер склада ▾	Количество ▾	Цена ▾
⊕	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 Р
⊕	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 Р
⊕	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 Р
⊕	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 Р
⊕	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 Р
⊕	6	Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 Р
⊕	7	Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 Р
⊕	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 Р
⊕	9	Нивелир	4Н - 2КЛ	4	15	16 680,00 Р
⊕	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 Р
*	(№)					

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»

Для поля Телефон следует задать маску ввода: (###)###-##-##

Имя поля	Тип данных
Код фирмы	Числовой
Название	Текстовый
Адрес	Текстовый
Телефон	Текстовый
Контактное лицо	Текстовый
Должность	Текстовый

Свойства поля

Общие	Подстановка
Размер поля	255
Формат поля	
Маска ввода	(###)###-##-##

Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «Конструктор»

Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недр"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

Задание 3. Создание таблицы «Склады»

Имя поля	Тип данных
Номер склада	Числовой
Телефон	Текстовый
Адрес	Текстовый
Заведующий	Текстовый

Свойства поля

Общие	Подстановка
Размер поля	255
Формат поля	
Маска ввода	(###)###-##-##

Рис. 1.9. Таблица «Склады» в режиме «Конструктор»

Склады				
Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий	
1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.	
2	(343)379-51-62	В-Пышма, пер. Индустриальный, 1	Мясников Д.О.	
3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажных, 18а	Куликова А.Н.	
4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.	

Рис. 1.10. Таблица «Склады» в режиме «Таблицы»

Задание 4. Создание таблицы «Продажи»

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка**.
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

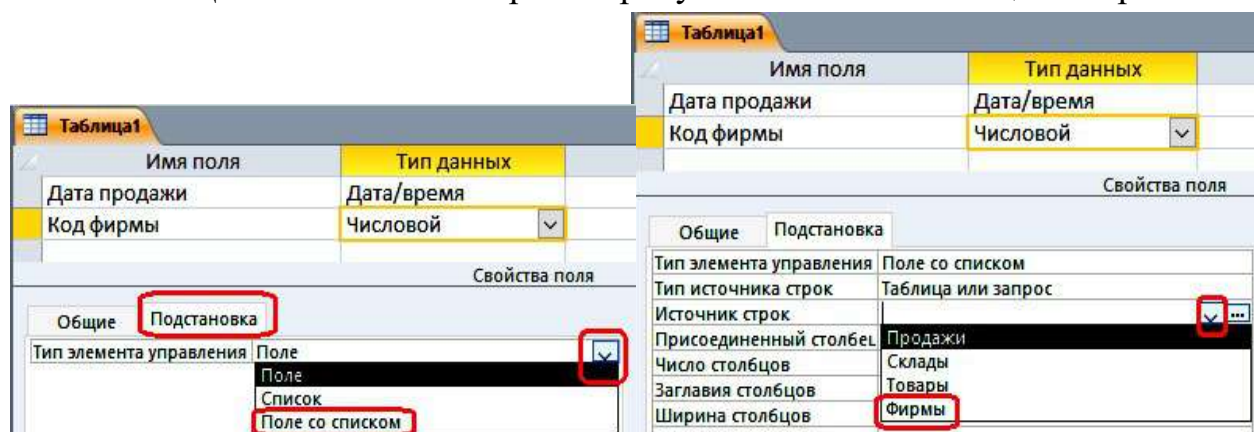


Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «Конструктора»

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой

Свойства поля

Общие Подстановка

Тип элемента управления: Поле со списком

Тип источника строк: Таблица или запрос

Источник строк: Товары

Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой
Количество	Числовой
Скидки	Числовой

Рис. 1.13. Окно таблицы «Продажи» в режиме «Конструктора»

Дата прода	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10
15.02.2018	3	5	8	10

Рис. 1.14. Таблица «Продажи» в режиме «Таблицы»

Задание 5. Создание схемы данных

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).

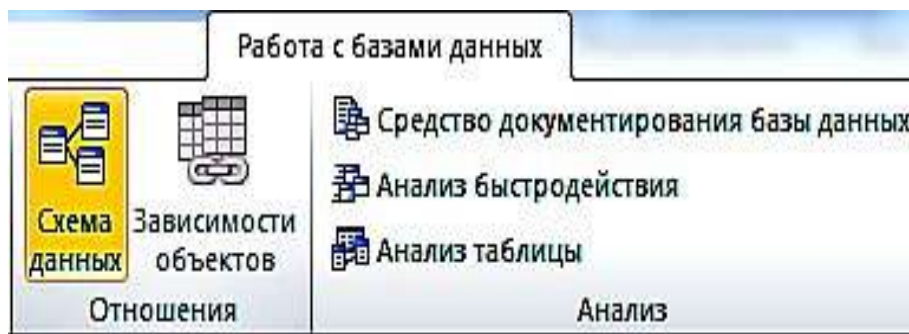


Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многочленные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи*.

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или **∞**. Это свидетельствует о том, что одно-многочленные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

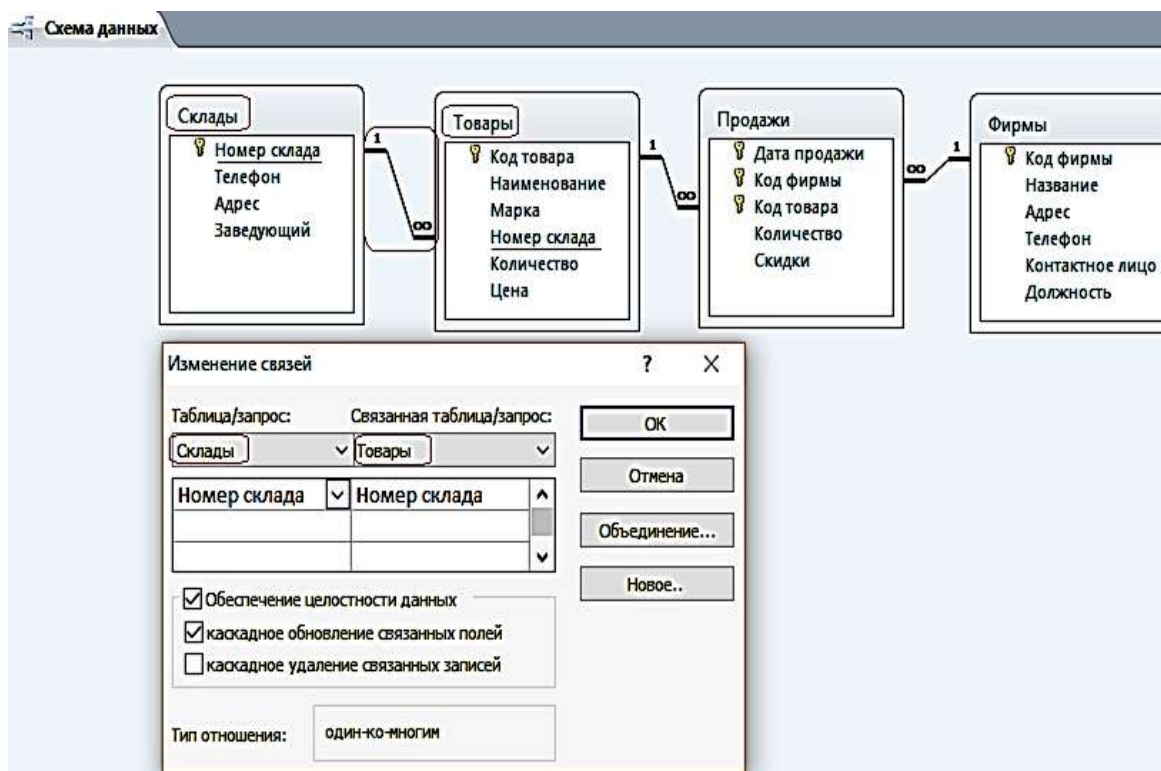


Рис. 1.16. Схема данных БД «Реализация товаров»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Работа с простыми запросами

Конструирование запросов на выборку с условием отбора

Задание 1. Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку **добавить**. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Заккрыть**. На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами / Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка**.

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование**, **Марка** и **Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

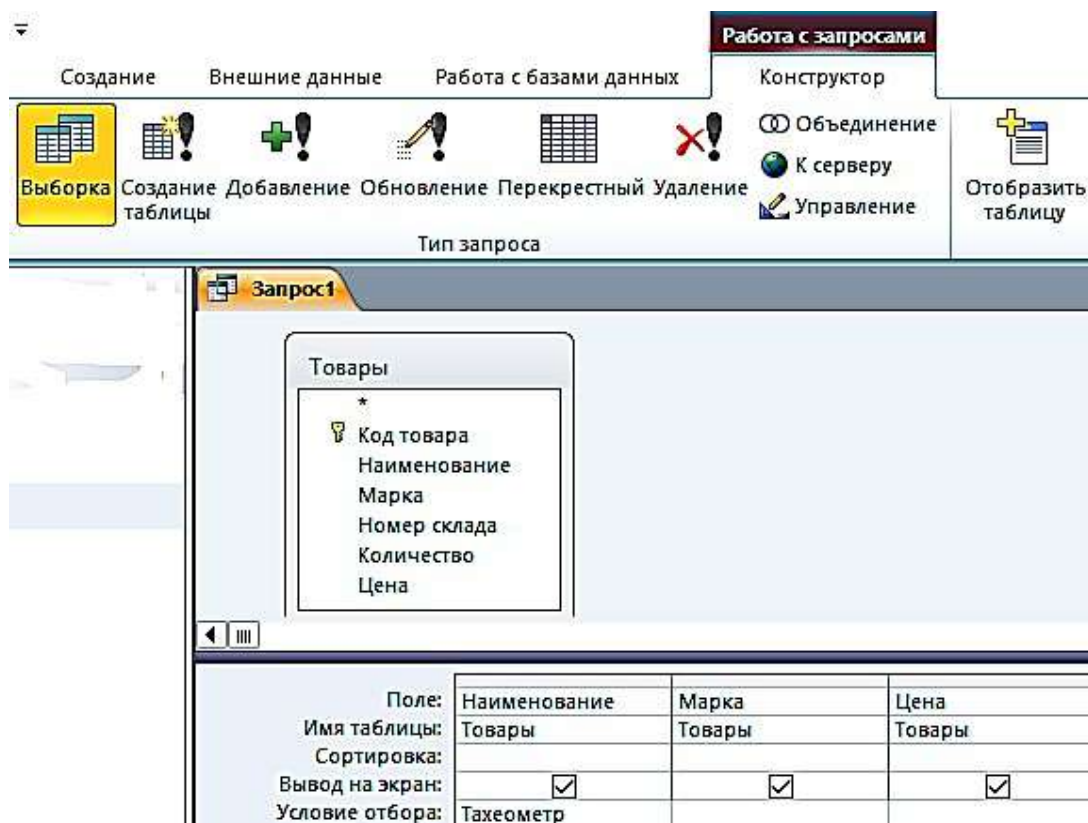


Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.

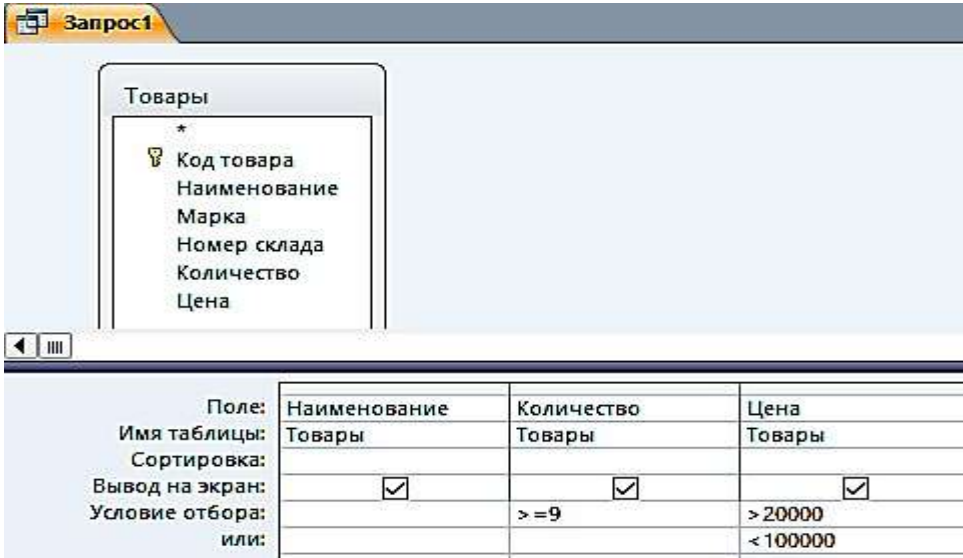


Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 ₽

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 2. Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).



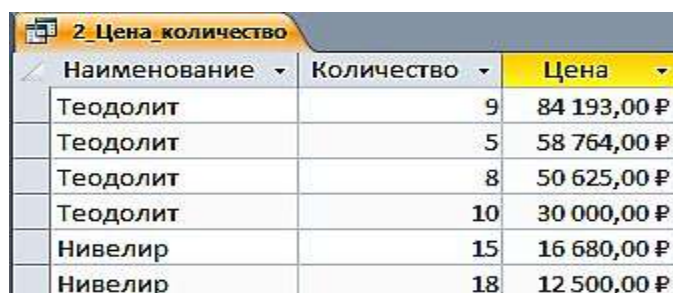
Поле:	Наименование	Количество	Цена
Имя таблицы:	Товары	Товары	Товары
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:		>=9	>20000
или:			<100000

Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция

AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

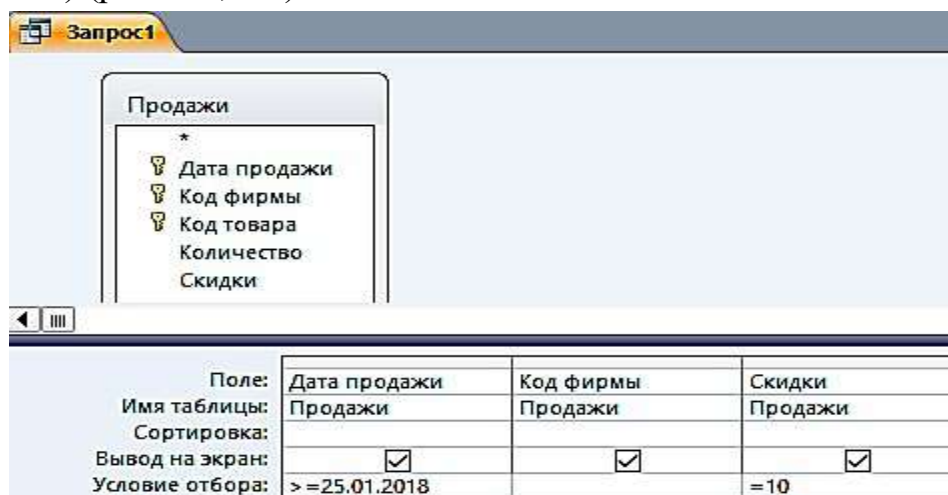
3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).



Наименование	Количество	Цена
Теодолит	9	84 193,00 ₽
Теодолит	5	58 764,00 ₽
Теодолит	8	50 625,00 ₽
Теодолит	10	30 000,00 ₽
Нивелир	15	16 680,00 ₽
Нивелир	18	12 500,00 ₽

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 3. Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)



Продажи

- *
 - Дата продажи
 - Код фирмы
 - Код товара
 - Количество
 - Скидки

Поле:	Дата продажи	Код фирмы	Скидки
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Продажи
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=25.01.2018		=10

Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора



Дата прода.	Код фирмы	Скидки
25.01.2018	2	10
30.01.2018	3	10
05.02.2018	4	10
10.02.2018	3	10
15.02.2018	3	10

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Вычисляемые поля в запросах

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

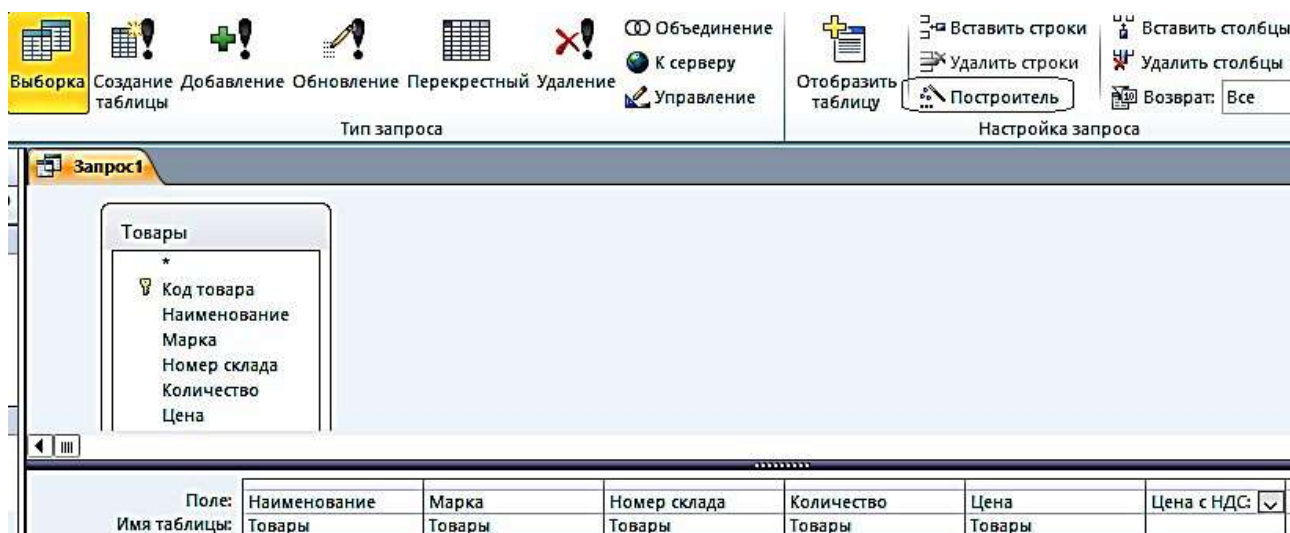


Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

Задание 4. В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

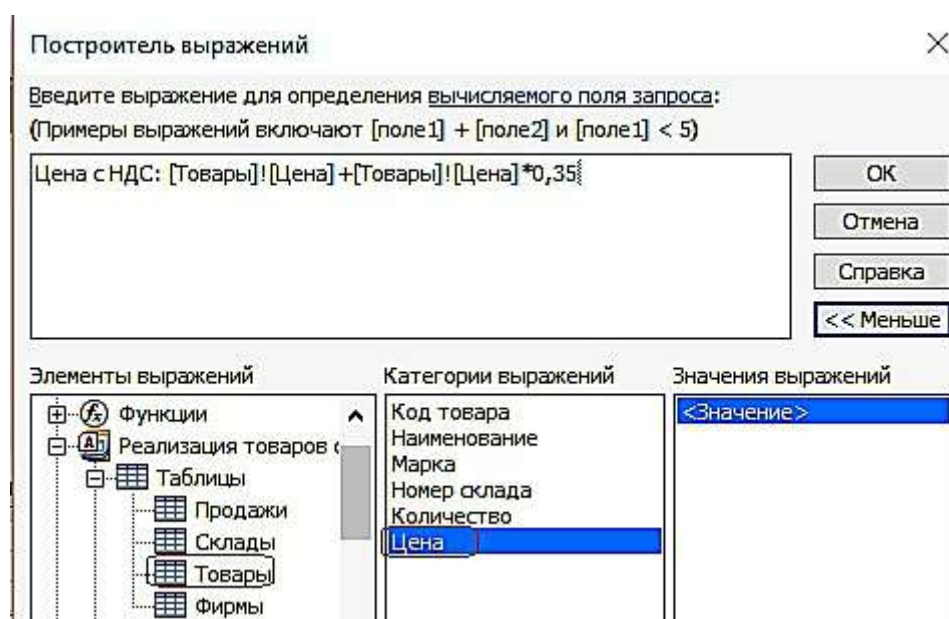


Рис. 2.8. Построитель выражений

Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

2. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

3. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

4. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «4_Цена с НДС» в режиме «**Таблицы**» изображен на рис. 2.9.

4_Цена с НДС					
Наименование ▾	Марка ▾	Номер склада ▾	Количество ▾	Цена ▾	Цена с НДС ▾
Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽
Теодолит	3T2КП	3	9	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽
Теодолит	4T15П	3	5	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽
Теодолит	4T30П	3	8	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽
Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽
Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽
Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽

Рис. 2.9. Просмотр запроса «4_Цена с НДС» в режиме «**Таблицы**»

Задание 5. В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: а `Format([Продажи].[Дата продажи];"mmmm")` – эта функция возвратит полное название месяца;

в или `Format([Продажи].[Дата продажи];"mm")` – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции `Format` (рис. 2.10, 2.11).

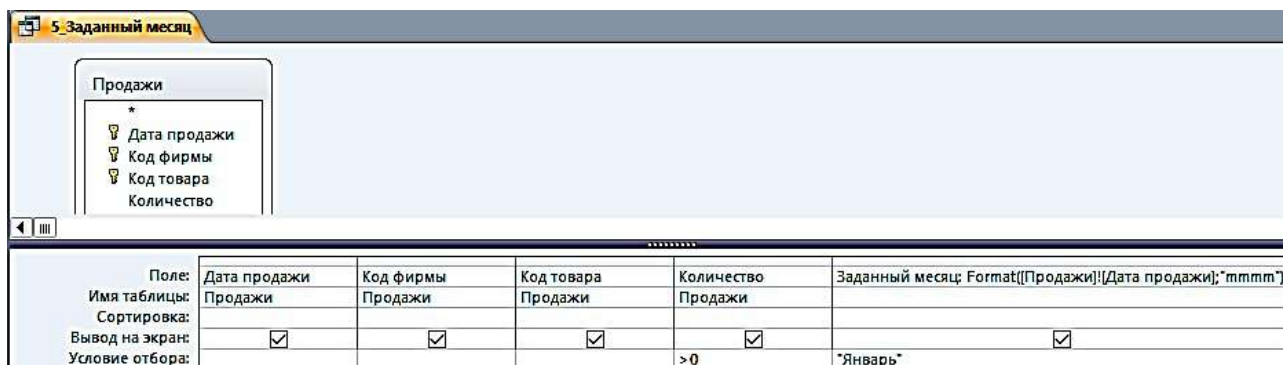


Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц
15.01.2018	4	10	10	Январь
19.01.2018	1	2	6	Январь
20.01.2018	3	5	8	Январь
25.01.2018	2	4	4	Январь
27.01.2018	1	1	4	Январь
30.01.2018	3	7	4	Январь

Рис. 2.11. Просмотр запроса «5_Заданный месяц» в режиме «Таблицы»

Параметры в запросах

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса*. Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра**.

Задание 6. Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].
2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.
3. Введите Январь и получите результат.

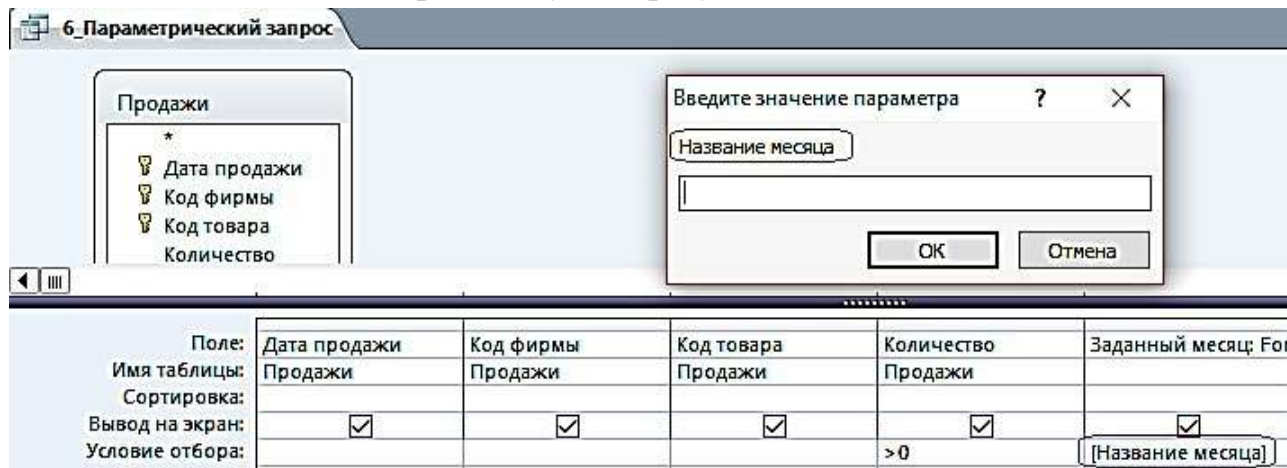


Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

Задание 7. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

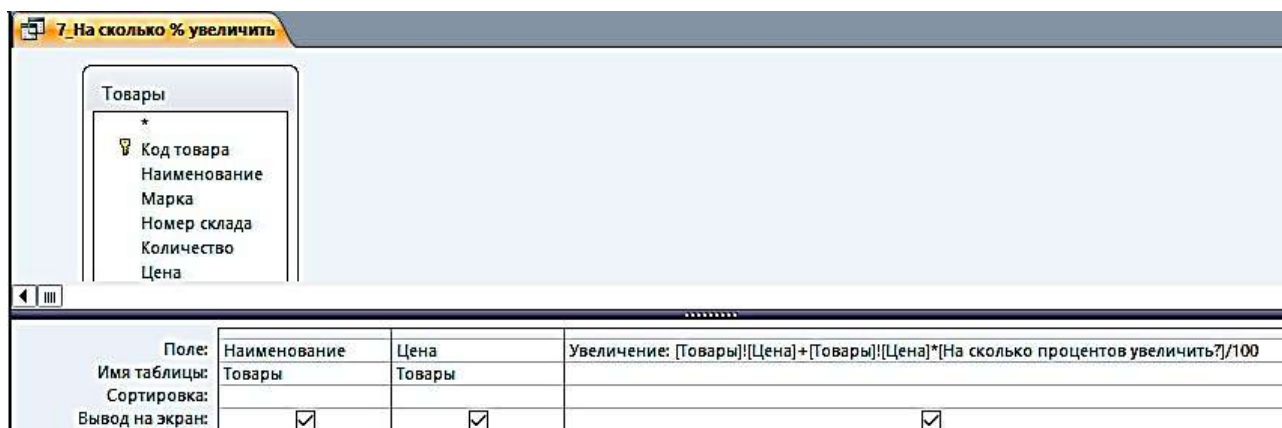


Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

Задание 8. Скопируйте запрос «7_На сколько % увеличить» и переименуйте его в «8_Проценты» (рис. 2.14)

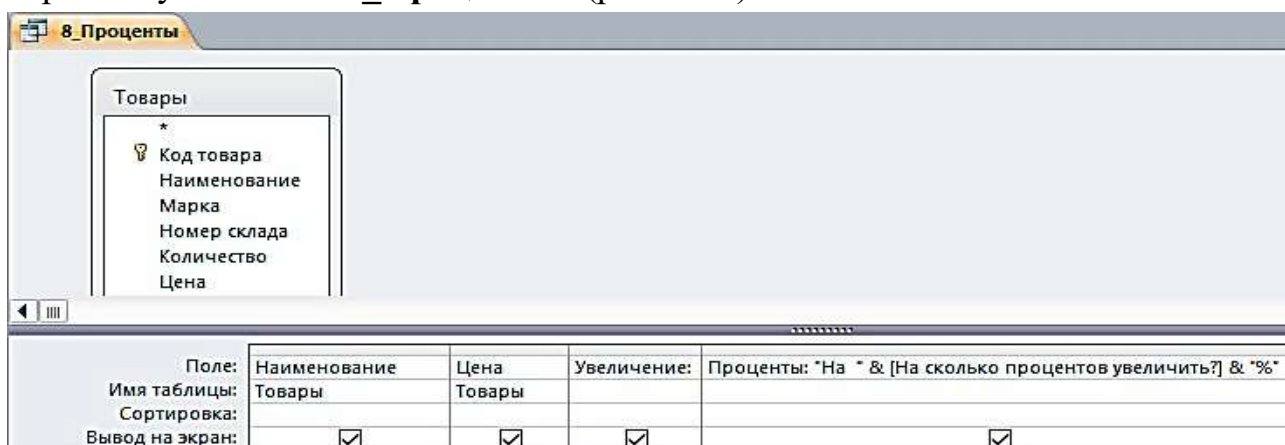


Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «Проценты»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «Проценты», в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).

Наименование	Цена	Увеличение	Проценты
Тахеометр	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽	На 35%
Тахеометр	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽	На 35%
Тахеометр	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽	На 35%
Тахеометр	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽	На 35%
Теодолит	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽	На 35%
Теодолит	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽	На 35%
Теодолит	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽	На 35%
Теодолит	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽	На 35%
Нивелир	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽	На 35%
Нивелир	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽	На 35%

Рис. 2.15. Просмотр запроса «8_Проценты» в режиме «Таблицы»

Групповые операции в запросах

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций. Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой**, **Денежный**, **Дата и время**.

Задание 9. Запрос с функцией Sum

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Товары».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «Наименование». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поля «Количество» и «Цена», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбцах «Количество» и «Цена» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

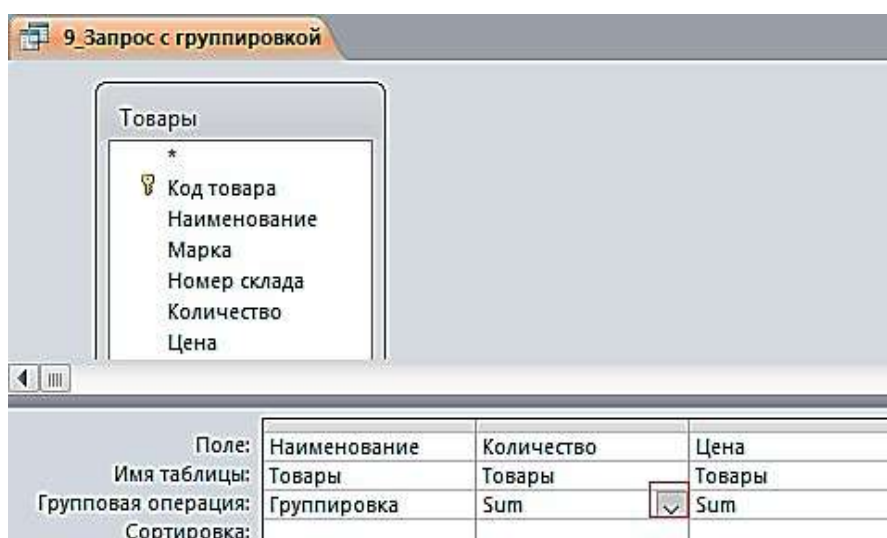


Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.



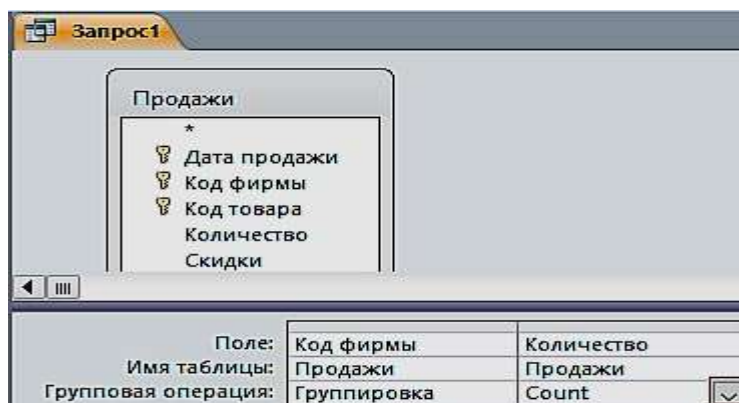
Наименование ▾	Sum-Количество ▾	Sum-Цена ▾
Нивелир	33	29 180,00 ₽
Тахеометр	23	1 141 950,00 ₽
Теодолит	32	223 582,00 ₽

Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

Задание 10. Запрос с функцией **Count**

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

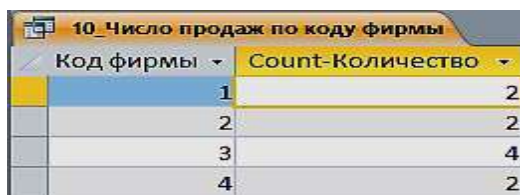
1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию **Count**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.18).



Поле:	Код фирмы	Количество
Имя таблицы:	Продажи	Продажи
Групповая операция:	Группировка	Count

Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «10_Число продаж по коду фирмы». Результат запроса показан на рис. 2.19.



Код фирмы	Count-Количество
1	2
2	2
3	4
4	2

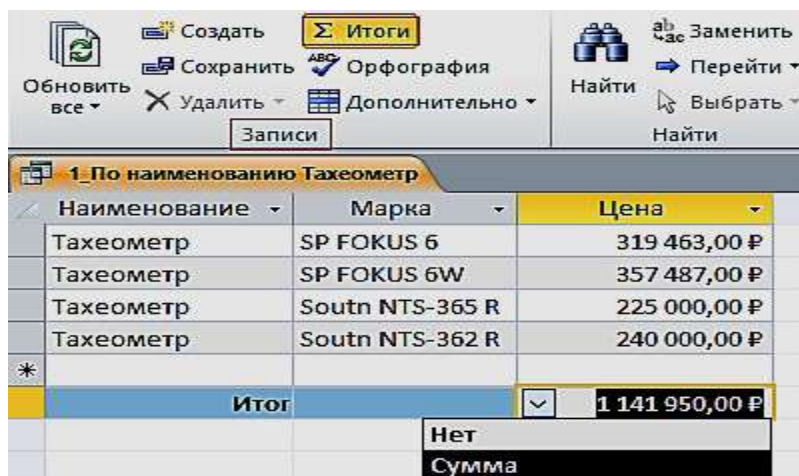
Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

Задание 11. Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «1_По наименованию тахеометр» в режиме таблицы. На вкладке ленты Главная в группе Записи выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «Цена», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).



Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 ₽
Итог		1 141 950,00 ₽

Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

Задание 1. Запрос с вычисляемым полем «Остаток»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «Товары» и «Продажи». Перетащите в бланк запроса из таблицы «Товары» поля «Наименование», «Марка», «Количество», и из таблицы «Продажи» поле «Количество».

2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «Количество», вычисляемое поле «Остаток» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

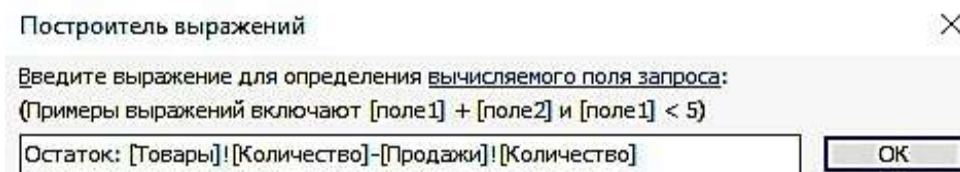


Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «Конструктор». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

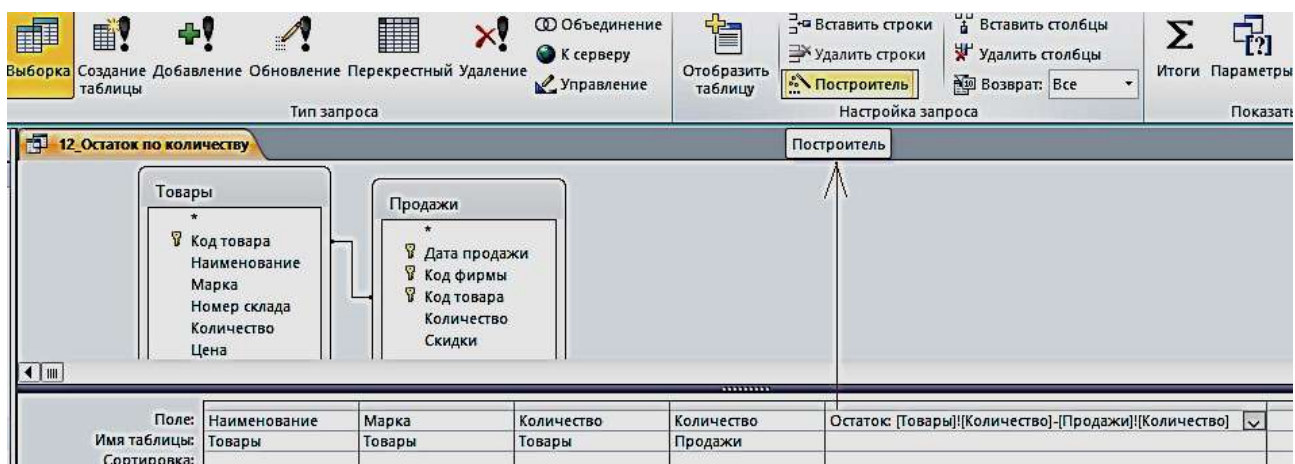


Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных «**Реализация товаров со складов**», далее выберите таблицу «**Товары**». Справа отобразится список её полей. Выберите поле «**Количество**» и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу «**Продажи**» и поле «**Количество**» (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству				
Наименование	Марка	Товары.Количество	Продажи.Количество	Остаток
Тахеометр	SP FOKUS 6	5	4	1
Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	6	1
Тахеометр	South NTS-365 R	6	5	1
Тахеометр	South NTS-362 R	5	4	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	4T30П	8	4	4
Теодолит	VEGA TEO 5	10	9	1
Нивелир	4Н -2КЛ	15	10	5
Нивелир	4Н-3КЛ	18	10	8

Рис. 3.3 Результат запроса «Остаток по количеству»

5. Слово «Выражение» удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

Задание 2. Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «Товары» и «Продажи». Перетащите в бланк запроса из таблицы «Продажи» поле «Дата продажи», а из таблицы «Товары» поля «Наименование», «Марка», «Номер склада», «Количество», «Цена».

2. Создайте новое поле «**Новая цена**». Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле «**Новая Цена**» (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне «**Построитель выражений**» выбрать «**Элементы выражений**», в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы «**Товары**» и в поле «**Категории выражений**» выбрать «**Цена**», а с клавиатуры набрать «*1,05».

4. В поле «**Дата продажи**» введите условие отбора $\geq 01.02.2018$ (рис. 3.4).

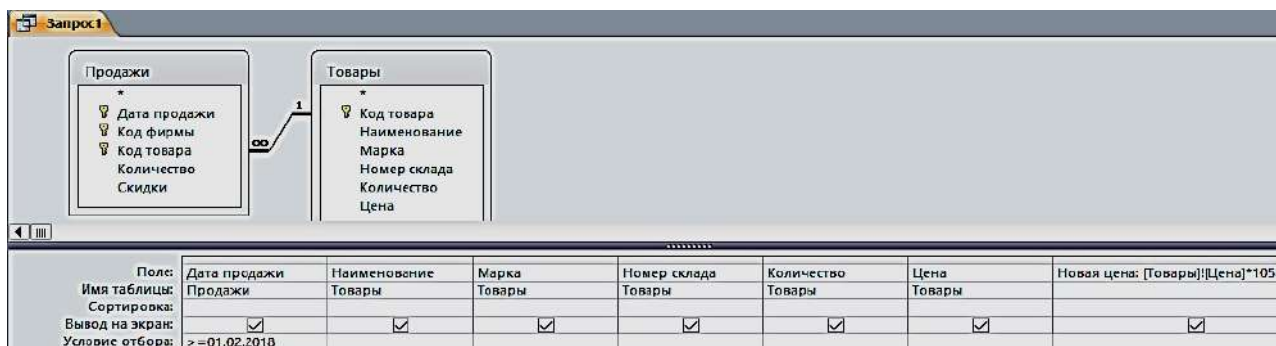


Рис. 3.4. Запрос «**Новая цена**» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «**Новая цена**» (рис. 3.5).

13. Цена в феврале							
Дата прода.	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена	
02.02.2018	Тахеометр	Soutn NTS-365 R		2	6	225 000,00 Р	23 625 000,00 Р
15.02.2018	Теодолит	3T2КП		3	9	84 193,00 Р	8 840 265,00 Р
10.02.2018	Теодолит	VEGA TEO 5		3	10	30 000,00 Р	3 150 000,00 Р
05.02.2018	Нивелир	4Н -2КЛ		4	15	16 680,00 Р	1 751 400,00 Р

Рис. 3.5. Результат запроса «**Новая цена**»

Задание 3. Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

14_Склад в Екатеринбурге

Склады

*
🔑 Номер склада
Телефон
Адрес
Заведующий

Товары

*
🔑 Код товара
Наименование
Марка
Номер склада
Количество
Цена

Поле:	Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Имя таблицы:	Товары	Склады	Склады	Склады	Склады
Сортировка:					
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:				E*	

Рис. 3.6. Запрос «Склад в Екатеринбурге» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге

Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 3.7. Результат запроса «Склад в Екатеринбурге»

Задание 4. Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «Сумма» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

Запрос1

Продажи

*
🔑 Дата продажи
Код фирмы
Код товара
Количество
Скидки

Товары

*
🔑 Код товара
Наименование
Марка
Номер склада
Количество
Цена

Поле:	Дата продажи	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма: [Товары].[Количество]*[Товары].[Цена]
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Товары	Товары	Товары	Товары	
Сортировка:							
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=01.02.2018						

Рис. 3.8. Запрос «Стоимость» в режиме Конструктора

15_Стоимость						
Дата прода	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма
02.02.2018	5	Тахеометр	South NTS-365 R	6	225 000,00 Р	1 350 000,00 Р
15.02.2018	10	Теодолит	ЗТ2КП	9	84 193,00 Р	757 737,00 Р
10.02.2018	10	Теодолит	VEGA TEO 5	10	30 000,00 Р	300 000,00 Р
05.02.2018	10	Нивелир	4Н -2КЛ	15	16 680,00 Р	250 200,00 Р
*						
Итого						2 657 937,00 Р
						Нет
						Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «Стоимость» и итог с расчетом суммы по столбцу

Задание 5. Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

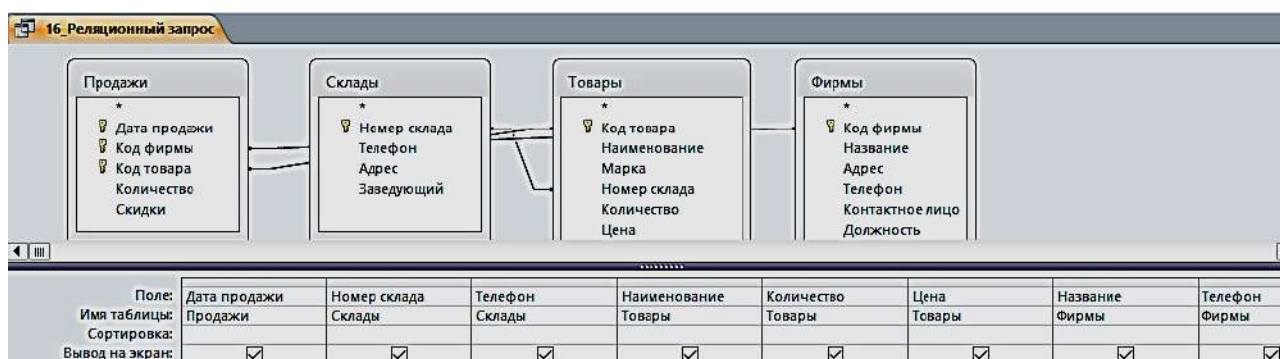


Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	12 500,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	357 487,00 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	240 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	319 463,00 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	50 625,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	225 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	16 680,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	30 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

Запросы на изменение

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

Задание 6. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «17_Обновление».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «**Обновление**» выражение для новых значений $[Цена] * 1,2$ (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

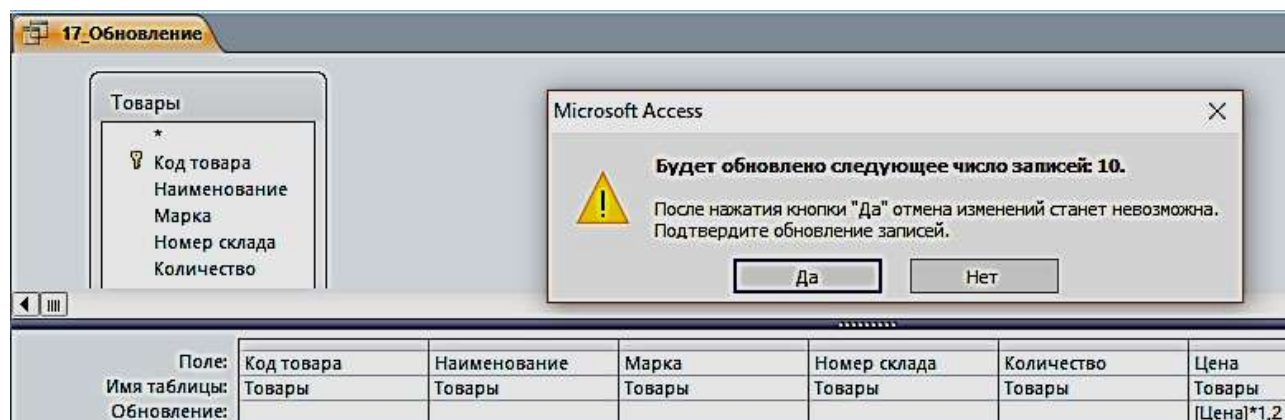


Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

Рис. 3.13. С правой стороны
результат
обновления таблицы

Цена	Цена
319 463,00 Р	383 355,60 Р
357 487,00 Р	428 984,40 Р
225 000,00 Р	270 000,00 Р
240 000,00 Р	288 000,00 Р
84 193,00 Р	101 031,60 Р
58 764,00 Р	70 516,80 Р
50 625,00 Р	60 750,00 Р
30 000,00 Р	36 000,00 Р
16 680,00 Р	20 016,00 Р
12 500,00 Р	15 000,00 Р

Задание 6. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.

2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.

3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы**.

4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).

5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

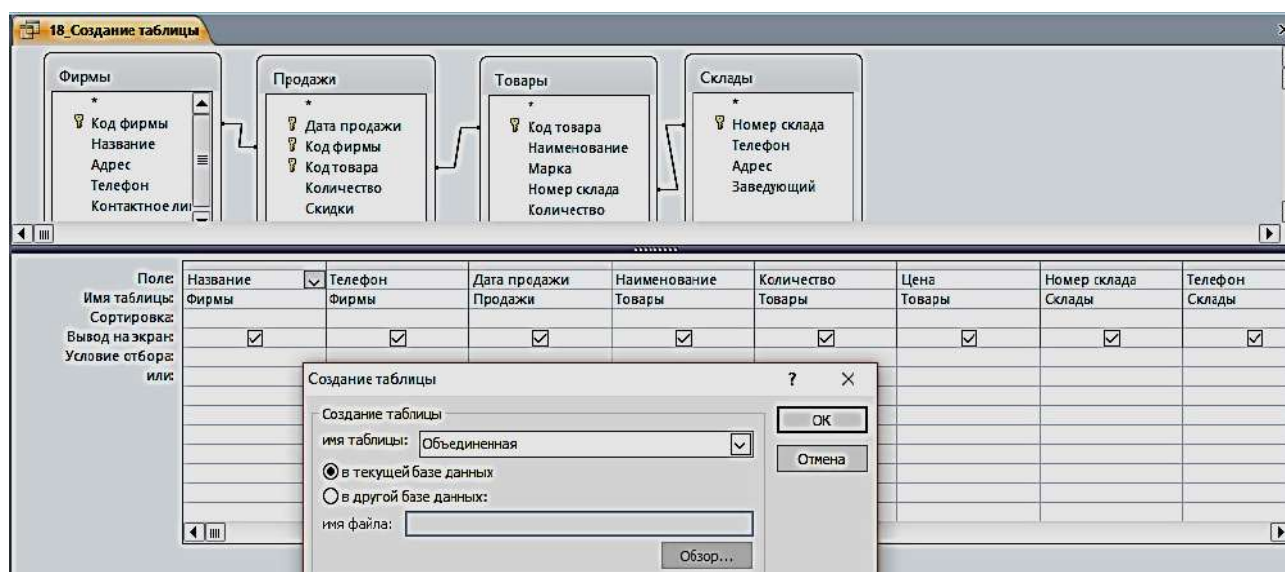


Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

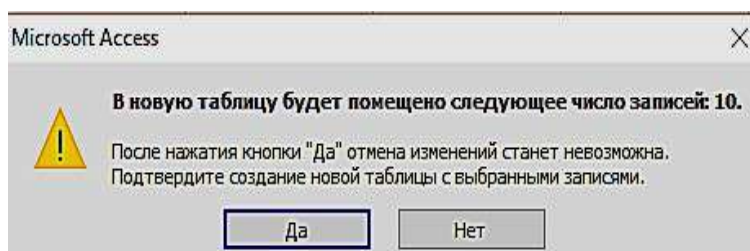


Рис. 3.15. Окно сообщений

Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
ООО "Геомар Недра"	4956180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р	1	3433818888
ООО "Геомар Недра"	4956180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р	1	3433818888
ООО "Навгеоком"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р	2	3433795162
ООО "Навгеоком"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р	2	3433795162
ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р	4	3433102222
ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р	4	3433102222

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

Задание для самостоятельной работы

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.
2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма**, **Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

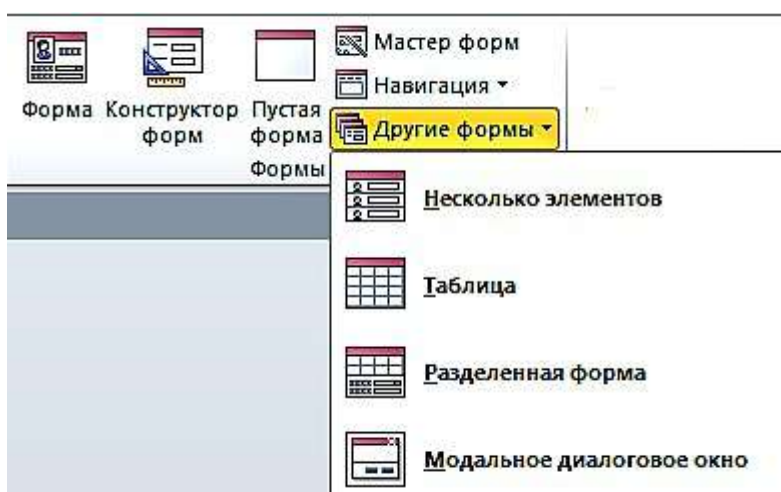


Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

Задание 1. Создать однотабличную форму «Товары для ввода, просмотра и корректировки данных» таблицы «Товары». Чтобы источником записей формы стала таблица «Товары», выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «Товары»

Условное форматирование элементов управления

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме, в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

Задание 2. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

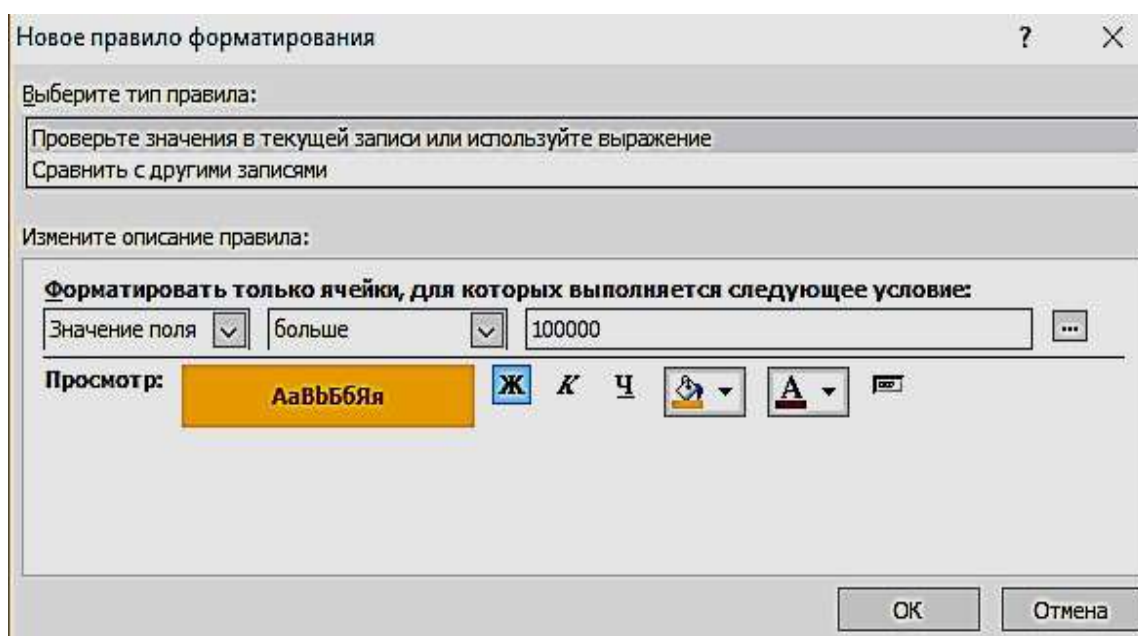


Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

Задание 3. Создать однотабличную форму «Склады». Для создания выбрать таблицу «Склады», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «Товары». Источником записей главной формы будет таблица «Склады». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «Склады» имеет подчиненную таблицу «Товары», с которой она находится в отношении 1:∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

Код товара	Наименование	Марка	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	5	383 355,60 Р
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	428 984,40 Р
*	(№)			

Рис. 4.5. Форма по таблице «Склады» с встроенной подчиненной «Товары»
Создание разделенной формы

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

Задание 4. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «Продажи». Выберите таблицу «Продажи» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

Дата прода.	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10

Рис. 4.6. Разделенная форма «Продажи»

Многотабличные формы

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

Задание 5. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «16_реляционный запрос» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовок.

Составная форма на основе Реляционного запроса

Дата продажи: 15.01.2018 Количество: 18

Номер склада: 4 Цена: 15 000,00 Р

Склады.Телефон: (343)310-22-22 Название: ГеоСтройПрибор

Наименование: Нивелир Фирмы.Телефон: (473)271-21-44

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	15 000,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	428 984,40 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	288 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	383 355,60 Р	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	60 750,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	270 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	20 016,00 Р	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	36 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 4.7. Составная форма

Создание многотабличной формы с помощью мастера

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

Задание 6. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

Создание форм

Выберите поля для формы.
Допускается выбор нескольких таблиц или запросов.

Таблицы и запросы
Таблица: Продажи

Доступные поля: Выбранные поля:

Дата продажи
Код фирмы
Код товара
Количество
Скидки

Оформление: > >> < <<

Отмена < Назад Далее > Готово

Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица **«Продажи»**, выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля**, в нашем случае все, кроме поля **«Скидки»** (рис. 4.9).

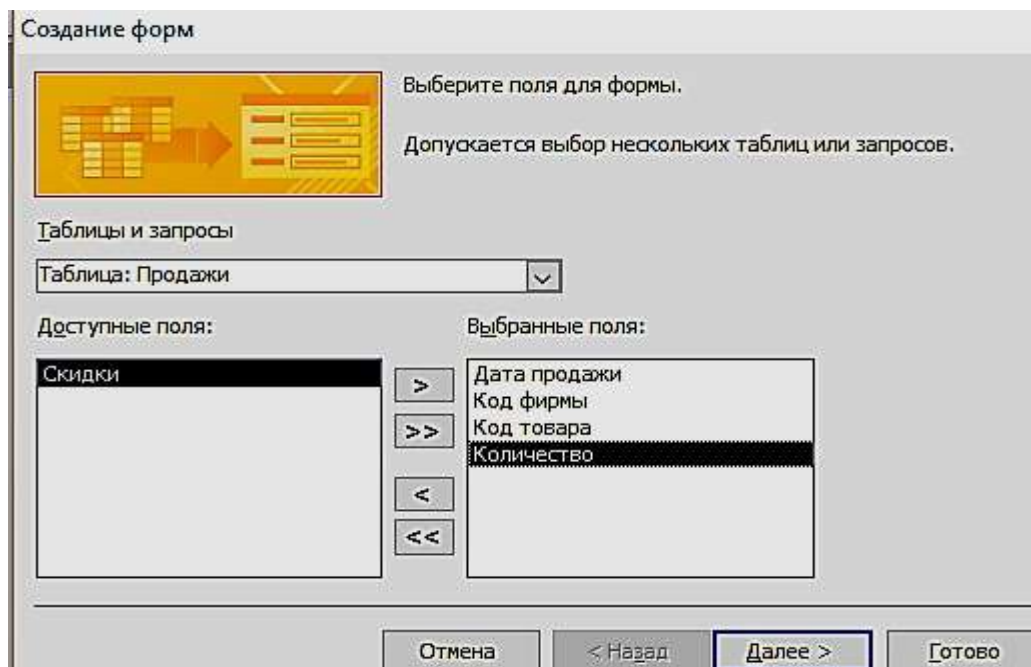


Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы **«Продажи»** для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы **«Товары»**. Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки **Далее** в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы **Продажи** и щелкнуть по кнопке **«Далее»** (рис. 4.10).

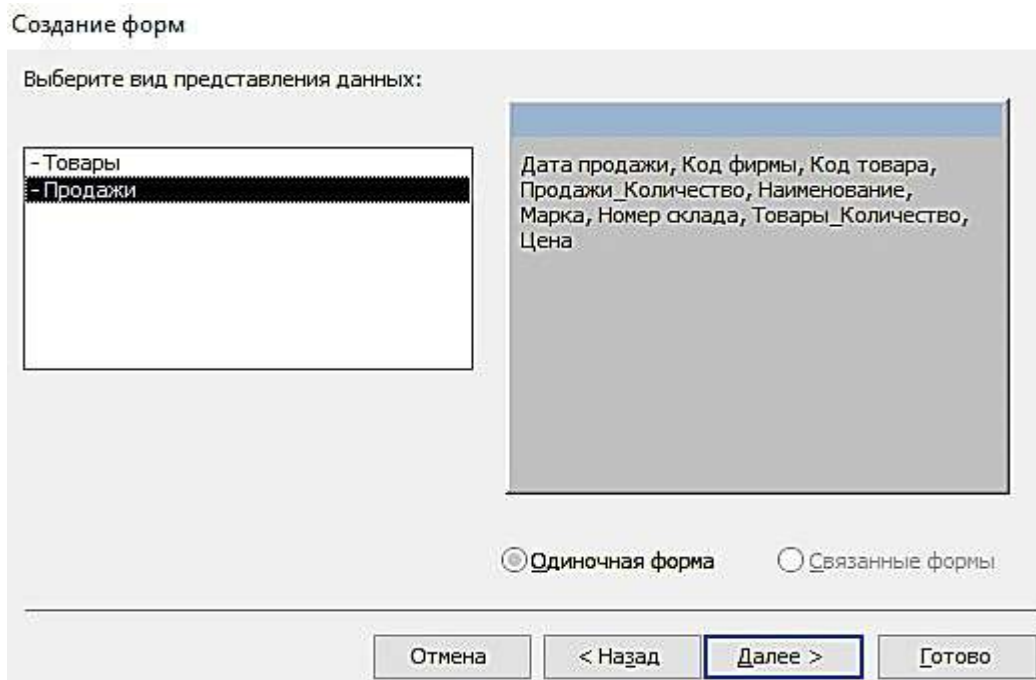


Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «**Готово**» (рис. 4.11).

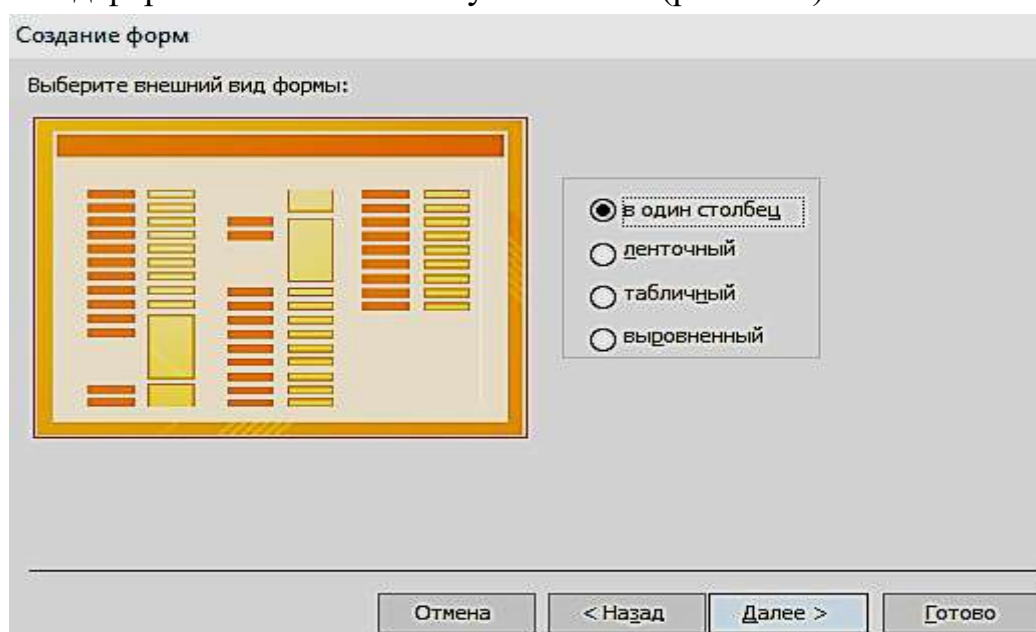


Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

Одиночная многотабличная форма

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма**. Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

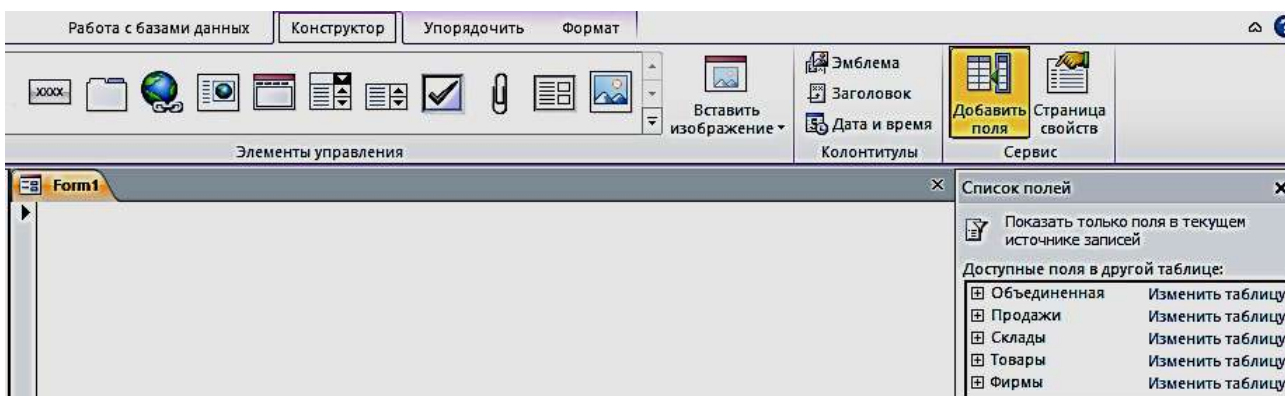


Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

Задание 7. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма**. В области **Список полей** откройте список полей таблицы «Продажи», щелкнув знак «Плюс»

рядом с её именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

The screenshot shows a software form titled "Form1" with a list of fields on the left and their corresponding values in text boxes on the right. The fields and values are as follows:

Дата продажи	15.01.2018
Код фирмы	4
Код товара	10
Количество	10
Наименование	Нивелир
Марка	4Н-ЗКЛ
Цена	15 000,00 Р
Номер склада	4
Телефон	(343)310-22-22
Адрес	Екатеринбург, Радищева, 4
Заведующий	Ромашенко К.Д.
Название	ГеоСтройПрибор
Адрес_Фирмы	Воронеж, Жуков, 3
Телефон_Фирмы	(473)271-21-44
Контактное лицо	Яковлева Ю.К.
Должность	менеджер

At the bottom of the form, there is a status bar with the following elements: "Записи: 1 из 10", navigation icons, "Нет фильтра", and a "Поиск" button.

Рис. 4.14. Форма «Общие данные», созданная с помощью инструмента Пустая форма

Задание 8. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «Товары». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).

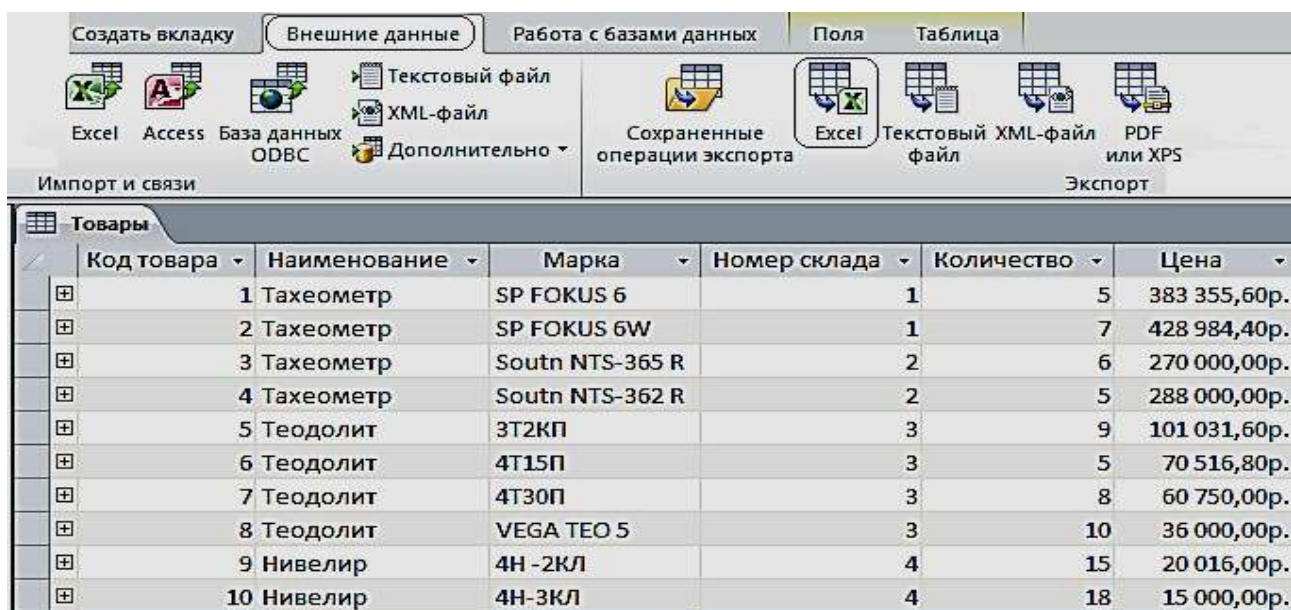


Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «Товары» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «Товары», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

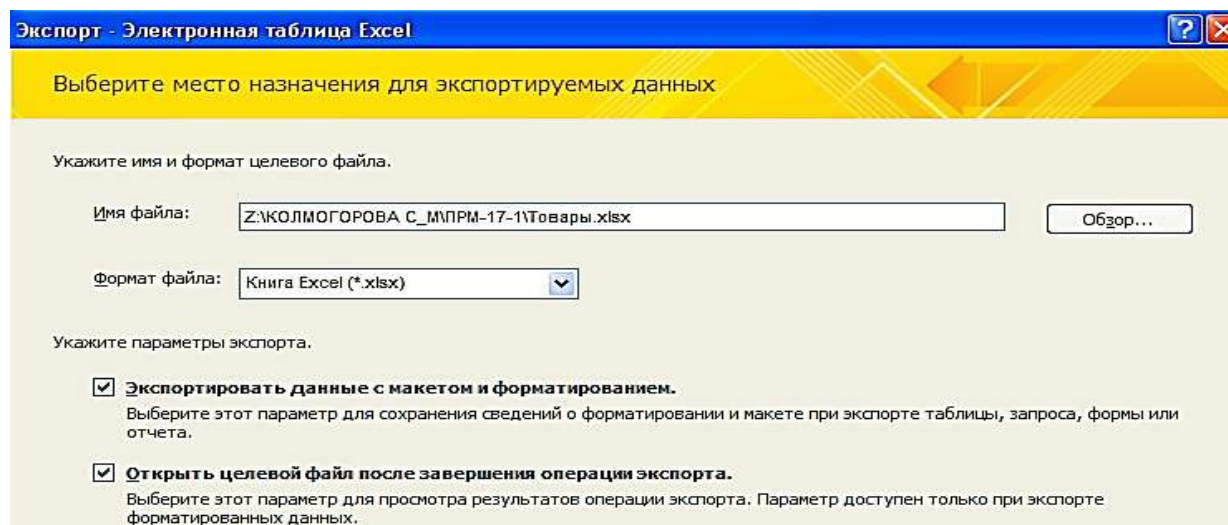


Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «Товары»

	A	B	C	D	E	F
1	Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
2	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
3	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
4	3	Тахеометр	South NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
5	4	Тахеометр	South NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
6	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
7	6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
8	7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
9	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
10	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
11	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.17. Таблица «Товары» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

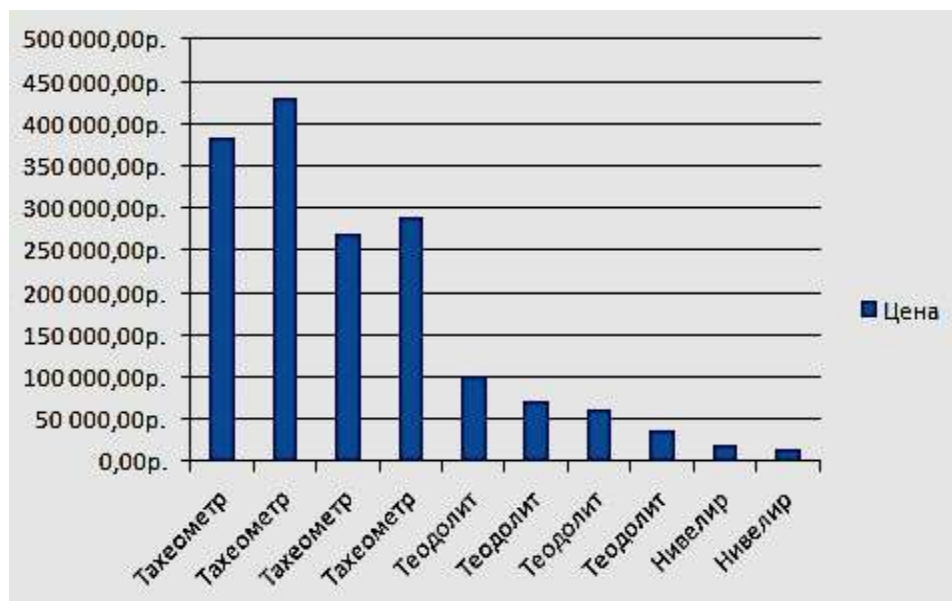


Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

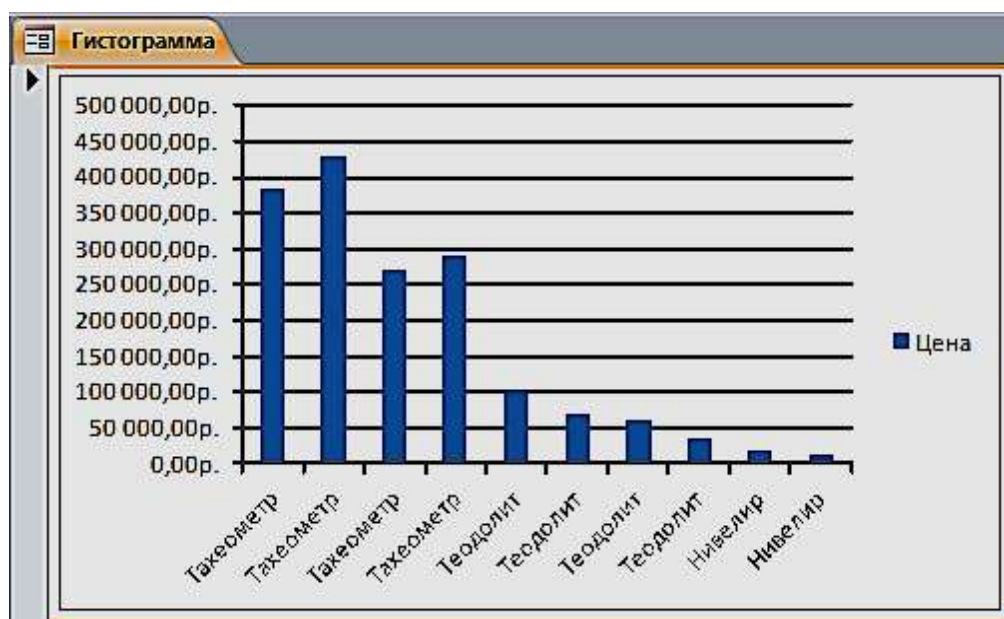


Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

Задание для самостоятельной работы

1. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «Фирмы» с подчиненной «Продажи».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

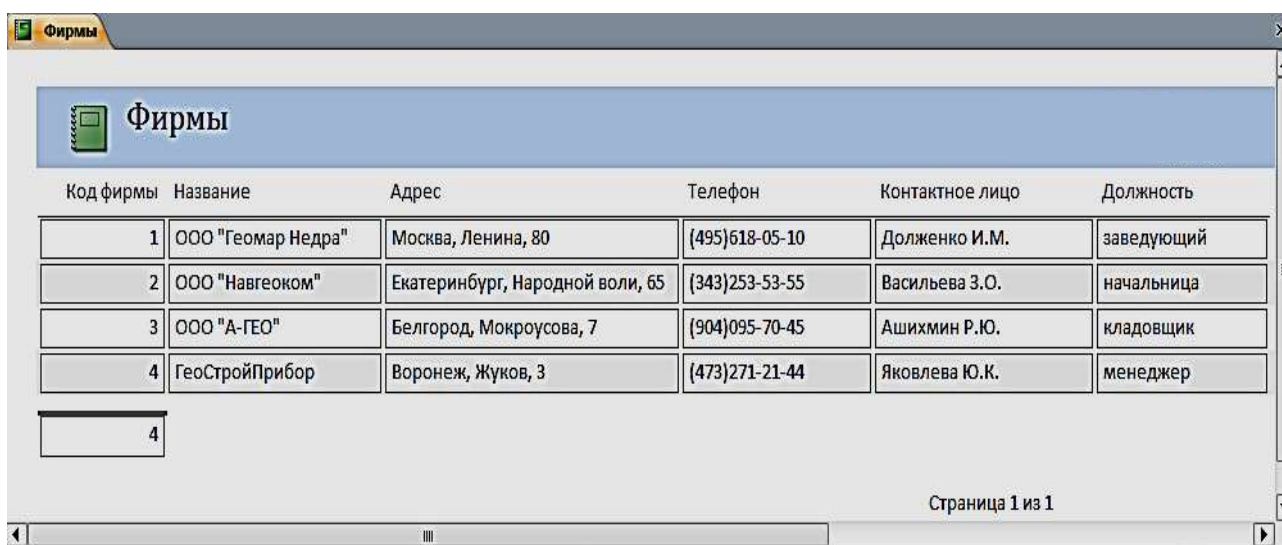
Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

Задание 1. Выберем в области навигации таблицу «Фирмы», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «Фирмы». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.



Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 5.1. Отчет в режиме «Макета»

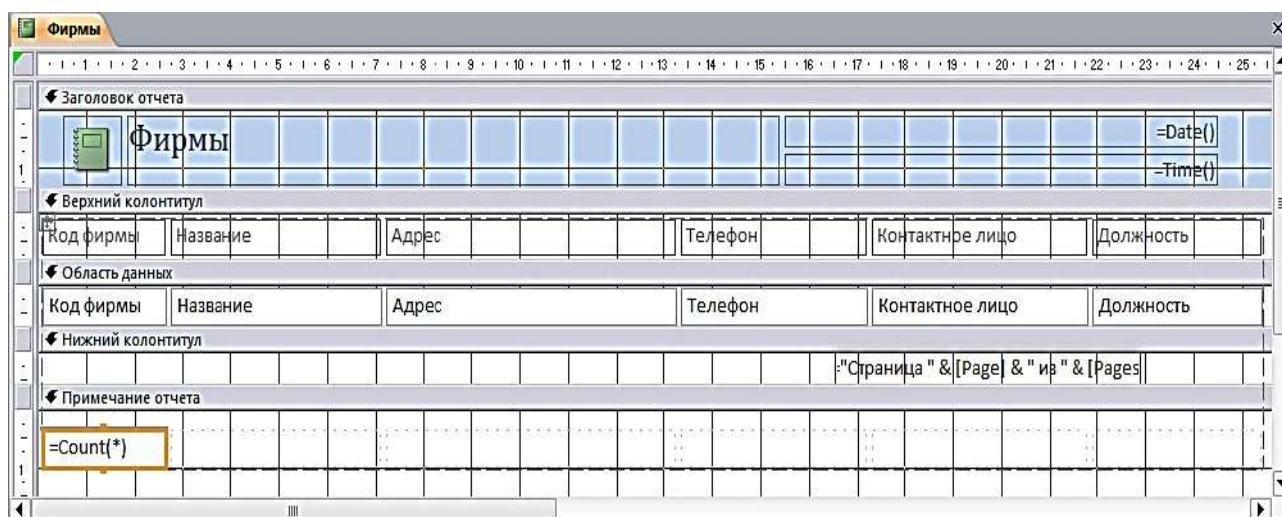


Рис. 5.2. Разделы однотобличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт**. Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы**. Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля**. На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

Работа с базами данных					
Конструктор					
Упорядочить					
Формат					
Параметры страницы					
Книжная Альбомная Колонки Параметры страницы					
Разметка страницы					
Фирмы					
Контакты					
Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер
4					
Страница 1 из 1					

Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

ОТЧЕТ ПРОДАЖИ								
Дата продажи - по месяцам	Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
Январь 2018								
	ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р	4	3433102222
	ООО "Геомар Недрз"	4556180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р	2	3433795162
	ООО "Геомар Недрз"	4556180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей)								
Сумма					52	1 277 121,60 Р		
Февраль 2018								
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р	2	3433795162
	ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р	4	3433102222
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р	3	3432751822
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей)								
Сумма					40	427 047,60 Р		
ИТОГО					92	1 704 169,20 Р		

Рис. 5.6. Результат отчета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Создание главной кнопочной формы с использованием макросов

Использование макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода VBA.

Макрос (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. *Макрокоманда* – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

Задание 1. Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим «**Конструктор**» (рис. 6.1).

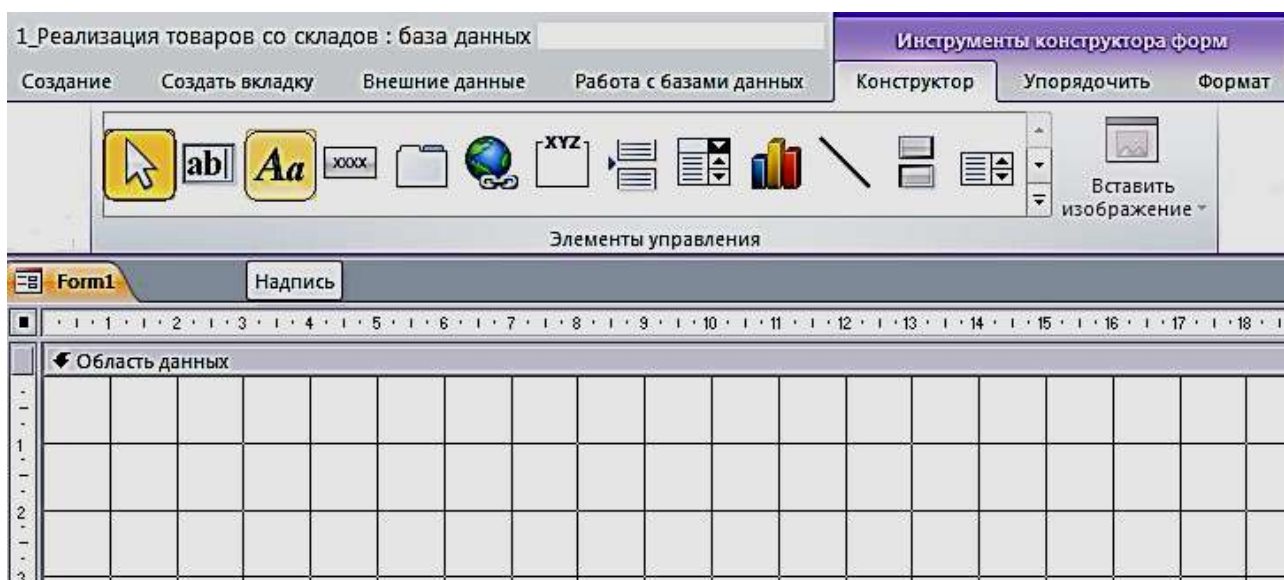


Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «Конструктор» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

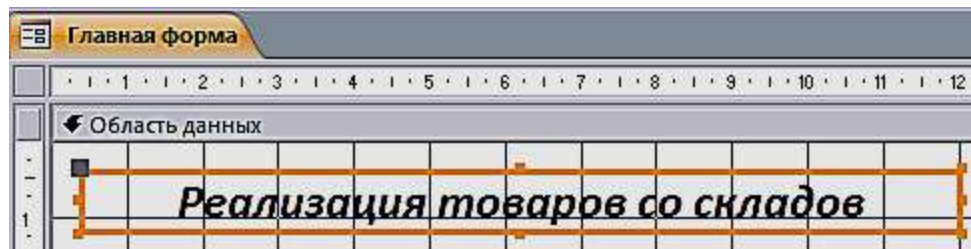


Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

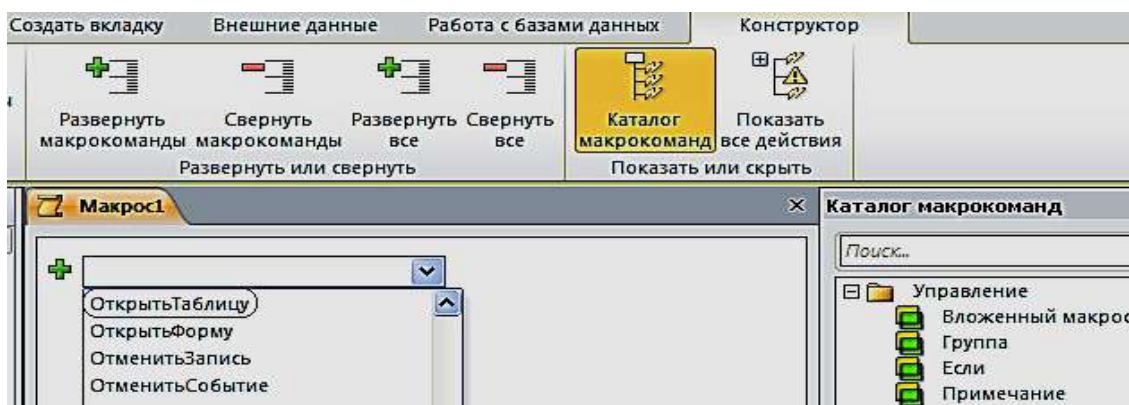


Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макроккоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

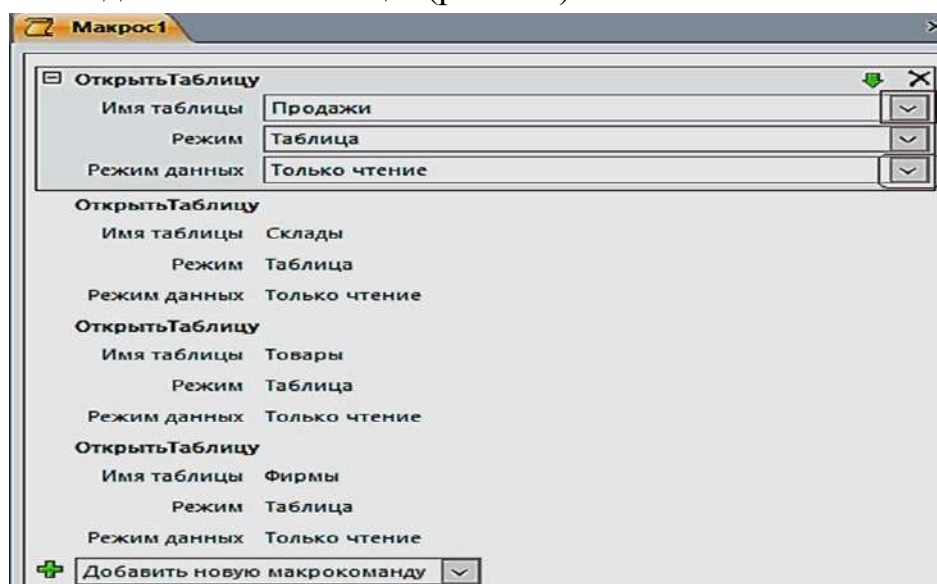


Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «Таблицы»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

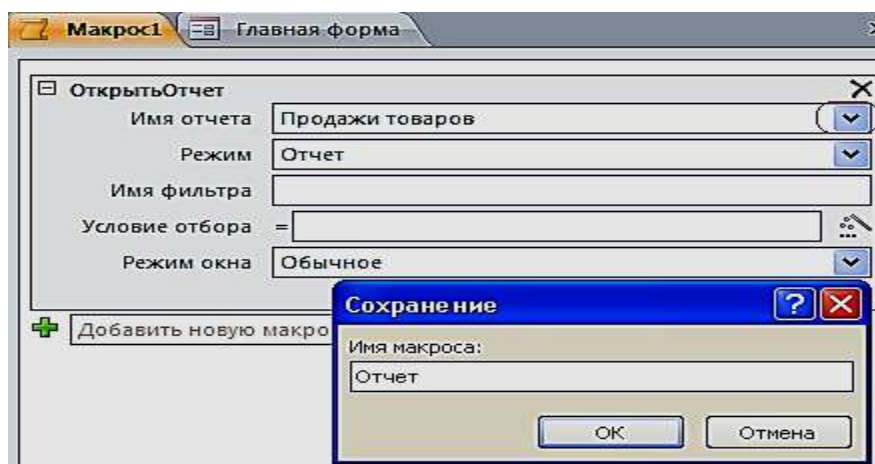


Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.

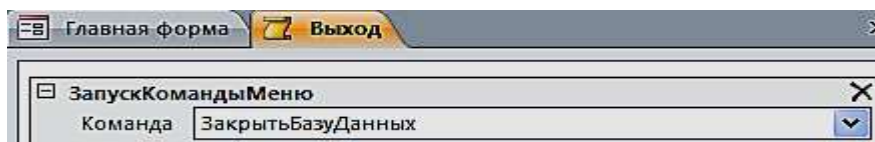


Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакретьБазуДанных**

Создание управляющих кнопок на экране

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД**. Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке **«Использовать мастера»**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

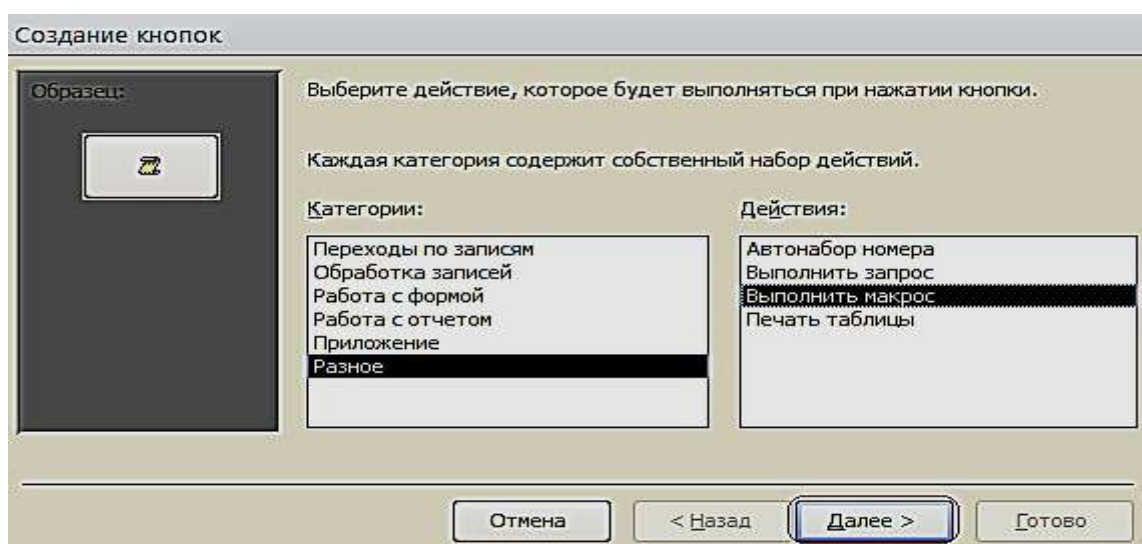


Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

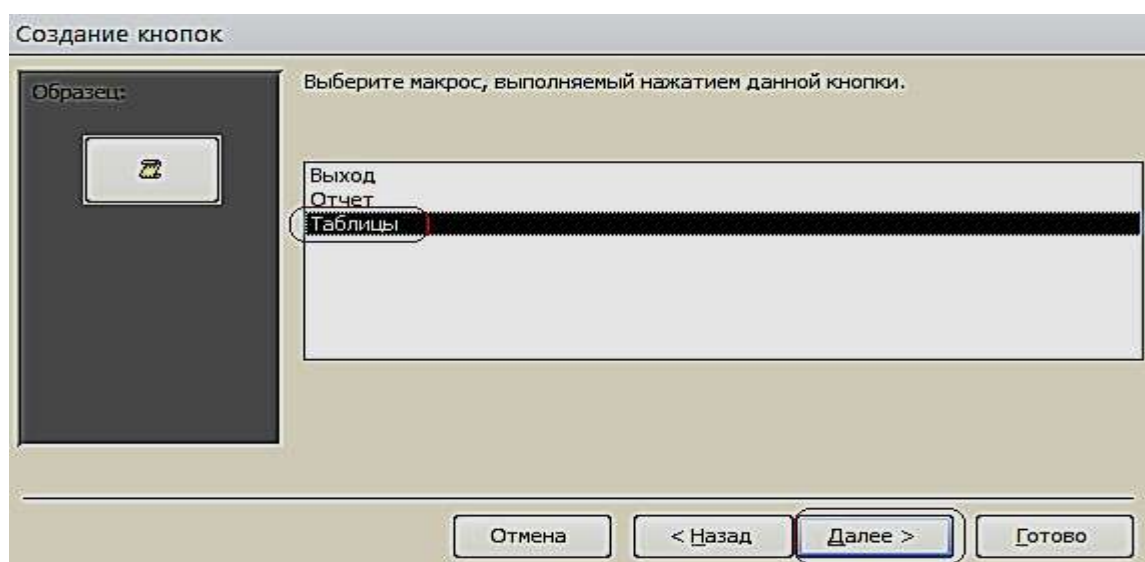


Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напишем название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

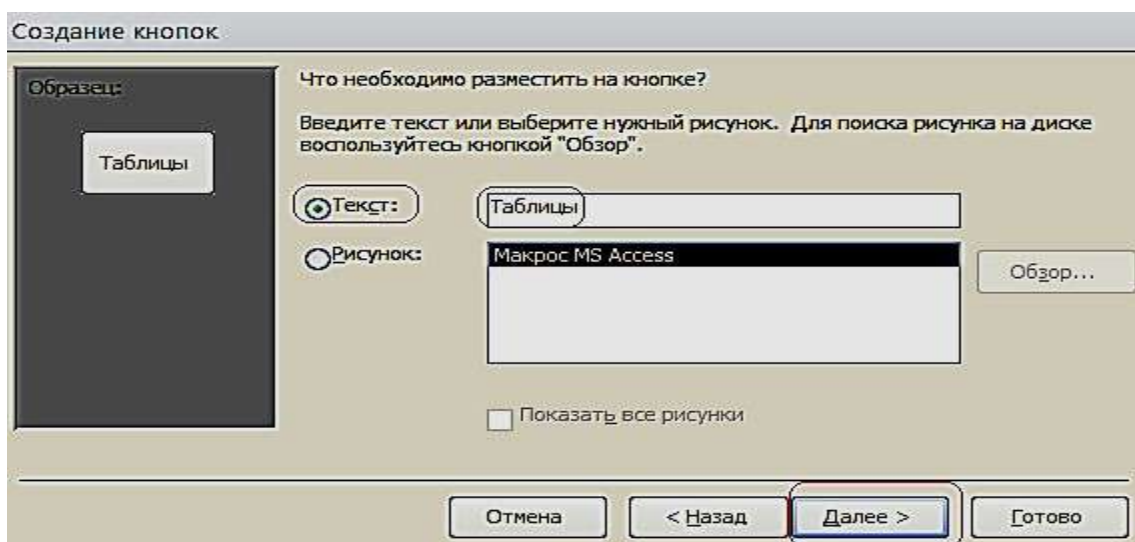


Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

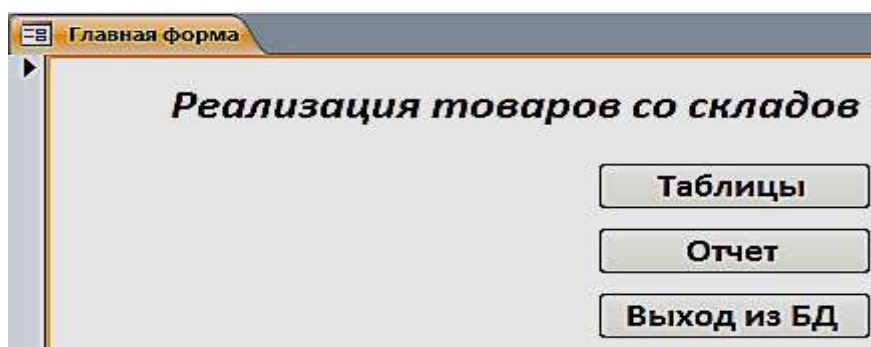


Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

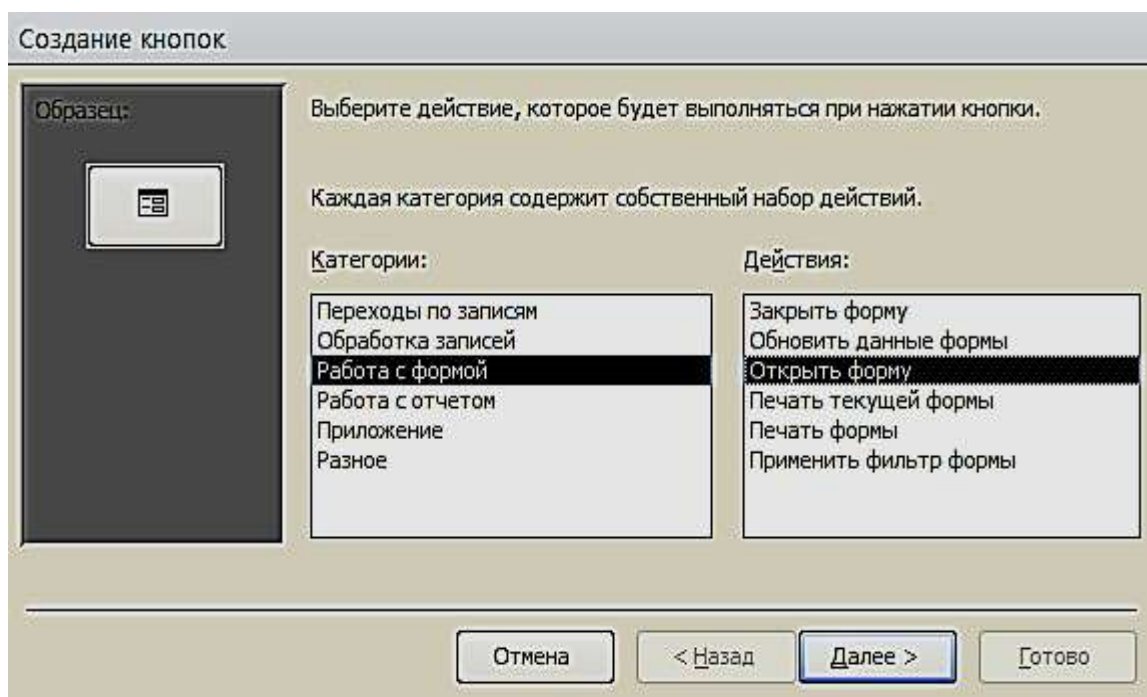


Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

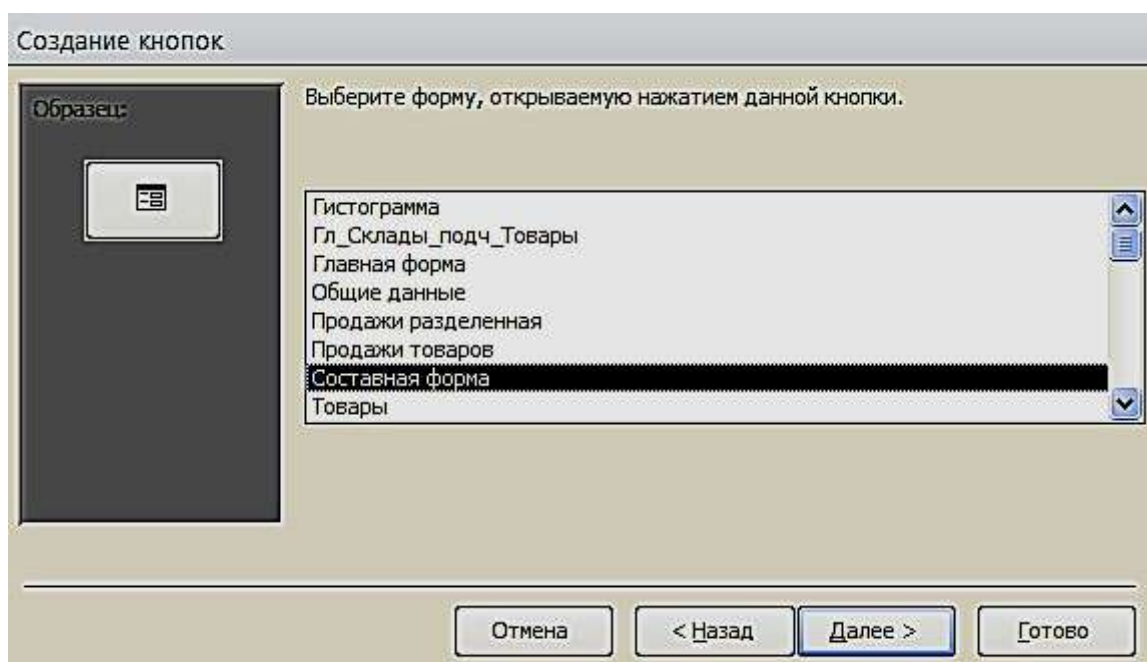


Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопке (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

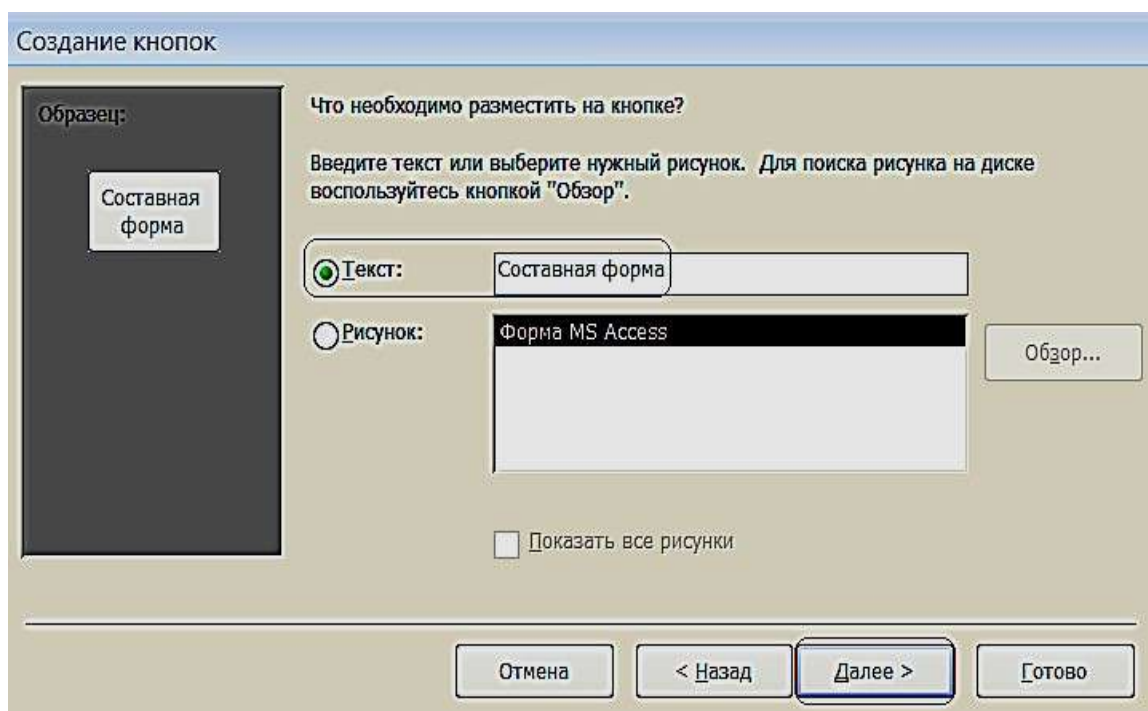


Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления «Рисунок».

8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).



Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «Формы»

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Указания к выполнению работы

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

Варианты заданий

Вариант № 1

Исходные данные:

- **Рабочие:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- **Цеха:** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
 - Вычислить общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а также среднемесячный заработок этого цеха.
 - Создать ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

Вариант № 2

Исходные данные:

- **Сотрудники:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- **Оплата труда:** должность, оклад
- **Отделы:** номер отдела, фамилия сотрудника *Определить:*
 - возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении на работу и на текущее время;
 - количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет;

- о минимальный размер оклада.
- **Создать таблицу**, которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы.

Вариант № 3

Исходные данные:

Работники: фамилия, имя, отчество, цех.

- **Изделия:** наименование изделия, категория изделия (А, В, С), стоимость изготовления.
- **Итоги:** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

Рассчитать: о общее количество изделий каждой категории;

о общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;

- **Создать ведомость** для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

Вариант № 4

Исходные данные:

• **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.

• **Расценки:** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, ...), цена 1 мин. разговора.

• **Заказ:** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.

о *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. о *Создать таблицу*, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

Вариант № 5

Исходные данные:

• **Поставка:** поставщик, дата поставки, объем поставки.

• **Игрушки:** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.

• **Чеки:** номер чека, дата продажи, сумма.

о *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению А, В и Х, выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают Х и подходят ребенку от А до В лет.

о *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию:

наименование игрушек, которые подходят детям от 1 до 3 лет и их цены.

Вариант № 6

Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- **Предметы:** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

Журнал: оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. о *Определить* общее число активистов в списке.

о *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «5» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «4» и «5», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «3», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

Вариант № 7

Исходные данные:

- **Авторы:** фамилия, имя отчество, название книги.
- **Книги:** год издания, количество экземпляров.
- **Местоположение:** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. о *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. о *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах заданного автора, которые находятся в коллекции.

Вариант № 8

Исходные данные:

- **Группа:** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- **Студент.** Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- **Результаты сессии:** оценки по 5-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет). о *Вычислить* средний балл, полученный

каждым студентом заданной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.

о *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

Вариант № 9

Исходные данные:

- **Рейсы:** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.

Самолеты: шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.

- **Билеты:** дата вылета, количество свободных мест в самолете.

Определить: о номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город; о по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс; о общее количество рейсов через сутки в заданный город. □ *Создать таблицу*, которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

Вариант № 10

Исходные данные:

- **Поставка:** артикул обуви (артикул начинается с буквы Ж – для женской обуви, М – для мужской, Д – для детской обуви, например: Д0321), наименование, объем поставки.

- **Обувь:** цвет, стоимость.

- **Наличие:** размер, количество.

Определить:

о стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в наличии; о общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

Вариант № 11

Исходные данные:

- **Игроки:** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.

- **Футбольный клуб:** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.

- **Результаты:** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. о *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой команды, и суммарное штрафное время. о *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

Вариант № 12

Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя, дата рождения дата поступления.

Выбор дисциплины: код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «1», иначе – пробел).

- **Успеваемость:** средний балл, наличие задолженности.

- о *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. о *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и средний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

Вариант № 13

Исходные данные:

- **Рейсы:** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.

- **Поезда:** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.

- **Билеты:** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

Определить:

- о количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером; о количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- *Создать таблицу*, содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, 13:00 и 18:30).

Вариант № 14

Исходные данные:

- **Сотрудники:** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.
- **Отделы:** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.
- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
о *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного.
о *Создать таблицу*, которая содержит список сотрудников пенсионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы.
о *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужчин пенсионного возраста.

Вариант № 15

Исходные данные:

- **Пациенты:** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, местожительство (город).
- **Палата:** количество мест в палате.
- **Учет:** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).
Определить: о количество иногородних граждан, прибывших в клинику; о количество пациентов с заданным диагнозом; о количество пациентов пенсионного возраста.
• *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

Вариант № 16

Исходные данные:

- **Пассажир:** фамилия, шифр багажа.
- **Багаж:** количество вещей, вес.
- **Учет:** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.
Определить: о общий средний вес одной вещи;
о багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи; о количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу*, содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

Вариант № 17

Исходные данные:

- **Компания:** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.
- **Курс:** дата, продажа, покупка.
- **Учет:** количество проданных акций, количество купленных акций.

Определить: о среднее количество проданных и купленных акций; о максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; о суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

Вариант № 18

Исходные данные:

- **Заказчик:** фамилия, адрес, телефон.
- **Ремонт:** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
- **Учет:** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.

Определить: о суммарную стоимость всех заказов; о количество заказов на ремонт заданного вида; о минимальная стоимость ремонта.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

Вариант № 19

Исходные данные:

- **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- **Расценки:** код города, стоимость 1 минуты разговора.
- **Заказ:** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах. *Определить:* о максимальную стоимость разговора; о суммарную стоимость всех разговоров; о общее количество разговоров в город с заданным кодом. □ *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

Вариант № 20

Исходные данные:

- **Товары:** шифр товара, наименование товара, категория (А, В, С), страна-производитель.
 - **Поставка:** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
 - **Учет:** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.
 - По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.
- Определить:* ◦ суммарную прибыль от продажи всех товаров;
◦ наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.
- *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

Вариант № 21

Исходные данные:

- **Продукция:** номер цеха изготовителя, наименование изделия
 - **Стоимость:** код изделия, себестоимость
 - **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных изделий, цена.
- Определить:* ◦ суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изготовленных изделий; ◦ общее количество изделий, изготовленных до заданной даты; ◦ цену изделия по заданному наименованию.
- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

Вариант № 22

Исходные данные:

- **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
 - **Расценки:** разряд, стоимость одного часа.
 - **Учет:** дата, количество отработанных часов.
- Определить:* ◦ среднее количество часов, отработанных за день; ◦ максимальную стоимость одного часа; ◦ по заданной дате количество отработанных часов.

- *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о работниках заданного цеха: о фамилия работника; о суммарная стоимость отработанного им времени.

Вариант № 23

Исходные данные:

- **Клиенты:** фамилия, адрес, телефон.
- **Заказ:** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.
- **Учет:** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

Определить: о количество заказов, выполненных мастером с заданной фамилией; о стоимость самого дорого заказа; о среднюю стоимость заказов.

- *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

Вариант № 24

Исходные данные:

- **Импортёры:** фирма-импортер, страна, наименование товара.
- **Поставка:** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость 1

штуки в условных единицах.

- **Учет:** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:* о суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;

о суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; о минимальную стоимость товара.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

Вариант № 25

Исходные данные:

- **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.

- **Оплата:** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.

- **Учет:** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. *Определить:* о общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми

мастерами заданного цеха; о сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая составляет 20 % от оплаты за качественную работу; о фамилию мастера, который изготовил максимальное количество качественных деталей.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

Вариант № 26

Исходные данные:

- **Отделение:** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.

- **Лечение:** шифр болезни, продолжительность.

- **Оплата:** диагностика, стоимость 1 дня лечения, затраты на лекарство.

- **Суммарная стоимость:** отработанного им времени.

Определить: о по названию болезни затраты на лекарство; о среднюю стоимость 1 дня лечения;

о рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

Вариант № 27

Исходные данные:

- **Книги:** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.

- **Магазины:** шифр книги, номер магазина, цена.

- **Учет продаж:** код продажи, продано, остаток.

Определить: о количество проданных книг в заданном магазине; о суммарную стоимость всех непроданных книг; о среднюю цену одной книги.

- *Создать таблицу*, которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

Вариант № 28

Исходные данные:

- **Детали:** наименование детали, цех-изготовитель
- **Изготовление:** шифр материала, шифр детали, затрата материала на 1 деталь.
- **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.

Определить: о для всех деталей суммарные затраты материала на брак; о количество качественных деталей; о деталь, на которую тратится более всего материала. □ *Создать таблицу*, которая содержит шифр детали и процент брака.

Вариант № 29

Исходные данные:

- **Лекарство:** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.

- **Стоимость:** шифр лекарства, код аптеки, цена за 1 упаковку.

- **Продажа:** количество проданных упаковок, остаток.

Определить: о суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми аптеками и принадлежащее заданной категории. о стоимость всех непроданных упаковок; о среднюю стоимость лекарства.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

Вариант № 30

Исходные данные:

- **Продавцы:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.

- **Товары:** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);

• **Журнал регистрации:** количество проданных товаров по дням недели (понедельник, вторник, ..., суббота); *Определить:* о общее количество товаров, проданных каждым продавцом; о фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.

- *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).
2. Гурвиц Г. Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере: М., 2012. 258 с.
3. Одиноккина С. В. Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

Дополнительная литература:

1. Домострой А. MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ>
2. Домострой А. MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q>
3. Домострой А. MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34>
4. Домострой А. MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s>
5. Домострой А. MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY>
6. Домострой А. MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE>
7. Домострой А. MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzyrOU>
8. Макарова Н. В. Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.