

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по молодежной политике и
развитию образования

А. В. Легостев

2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ВОСПИТАНИЯ ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

для всех направлений подготовки и специальностей

СОГЛАСОВАНО

Председатель Объединенного совета
обучающихся ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 25 от 15.11.2023)

 А. А. Кухарева

Председатель Первичной профсоюзной
организации ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 5 от 24.10.2023)

 П. А. Коновалов

Председатель Совета родителей
ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 3/1 от 04.10.2023)

 В. А. Пивова

Составитель: начальник управления по внеучебной
и социальной работе Шехтман Д.А.

Екатеринбург

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Наименование программы

Рабочая программа воспитания ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» (далее – УГГУ, университет).

Рабочая программа воспитания ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» представляет собой ценностно-нормативную, методологическую, методическую и технологическую основы организации воспитательной деятельности.

Рабочая программа воспитания (далее – Программа) ориентирована на организацию воспитательной деятельности субъектов образовательного и воспитательного процессов.

Воспитательная работа в университете направлена на создание благоприятных условий для личностного и профессионального развития студенческой молодёжи, формирование профессиональных и общекультурных/универсальных компетенций, таких как гражданственность, трудолюбие, ответственность, организованность, самостоятельность, инициативность, дисциплинированность.

Разработчик и координатор программы

Управление по внеучебной и социальной работе.

Нормативно-правовые основания программы

- Конституция Российской Федерации;
- Федеральный закон от 29.12.2012 №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Федеральный закон от 05.02.2018 № 15-ФЗ «О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации по вопросам добровольчества (волонтерства)»;
- Указ Президента Российской Федерации от 19.12. 2012 г. № 1666 «Стратегия государственной национальной политики Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 24.12.2014 № 808 «Основы государственной культурной политики»;
- Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 № 203 «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы»;
- Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2018 № 204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 02.07.2021 № 400 «Стратегия национальной безопасности Российской Федерации»;
- Указ Президента Российской Федерации от 09.11.2022 № 809 «Об утверждении основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей»;
- Постановление Правительства Российской Федерации от 26.12.2017 № 1642 «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие образования»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29.11.2014 № 2403-р «Основы государственной молодежной политики Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29.05.2015 № 996-р «Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 27.12.2018 № 2950-р «Концепция развития добровольчества (волонтерства) в Российской Федерации до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 12.11.2020 № 2945-р «Об утверждении Плана мероприятий по реализации в 2021-2025 годах Стратегии развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Устав ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет».

Сроки реализации программы - период реализации образовательной программы.

Ожидаемые результаты:

- исполнение положений Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» по вопросам воспитания обучающихся;
- реализация приоритетных направлений государственной молодежной политики по созданию условий для успешной социализации и эффективной самореализации обучающихся;
- привлечение к воспитательной работе в университете заинтересованных субъектов университетского сообщества;
- формирование у обучающихся духовных, социальных и профессиональных ценностей;
- обогащение личностного и социального опыта обучающихся;
- совершенствование форм и методов воспитательной работы;
- повышение степени вовлеченности обучающихся в организацию и проведение мероприятий воспитательного характера;
- совершенствование системы контроля и оценки воспитательной работы;
- расширение взаимодействия субъектов воспитательной работы с органами государственной власти и местного самоуправления, международными, всероссийскими, межрегиональными, региональными общественными объединениями, ключевыми стейкхолдерами;
- развитие традиций корпоративной культуры университета;
- повышение эффективности и качества реализуемых мероприятий;
- выпуск конкурентоспособных специалистов, обладающих высоким уровнем социально-личностных и профессиональных компетенций.

РАЗДЕЛ 1. ЦЕЛЕВОЙ

Воспитательная деятельность в университете, реализующем программы высшего и среднего профессионального образования, является одной из основных частей образовательного процесса, планируется и осуществляется в соответствии с приоритетами государственной политики в сфере воспитания.

Участниками образовательных отношений в части воспитания в университете являются:

- ректор;
- проректор по молодежной политике и развитию образования;
- начальник управления по внеучебной и социальной работе;
- заместители начальника управления по внеучебной и социальной работе;
- специалисты по социальной работе с молодежью;
- деканы факультетов;
- заведующие кафедрами;
- педагогические работники;
- академические кураторы;
- педагоги-психологи;
- члены Объединенного совета обучающихся;
- представители Совета родителей.

1.1 Цель и задачи воспитания обучающихся

Цель воспитания обучающихся ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» - развитие личности, создание условий для самоопределения и социализации на основе социокультурных, духовно-нравственных ценностей и принятых в российском обществе правил и норм поведения в интересах человека, семьи, общества и государства,

формирование у обучающихся чувства патриотизма, гражданственности, уважения к памяти защитников Отечества и подвигам Героев Отечества, закону и правопорядку, человеку труда и старшему поколению, взаимного уважения, бережного отношения к культурному наследию и традициям многонационального народа Российской Федерации, природе и окружающей среде.

Задачи воспитания:

- усвоение обучающимися знаний о нормах, духовно-нравственных ценностях, которые выработало российское общество (социально значимых знаний);
- формирование и развитие осознанного позитивного отношения к ценностям, нормам и правилам поведения, принятым в российском обществе (их освоение, принятие), современного научного мировоззрения, мотивации к труду, непрерывному личностному и профессиональному росту;
- приобретение социокультурного опыта поведения, общения, межличностных и социальных отношений, в том числе в профессионально ориентированной деятельности;
- подготовка к самостоятельной профессиональной деятельности с учетом получаемой квалификации (социально-значимый опыт) во благо своей семьи, народа, Родины и государства;
- подготовка к созданию семьи и рождению детей.

1.2 Направления воспитания

Рабочая программа воспитания УГГУ реализуется в единстве учебной и воспитательной деятельности с учётом направлений воспитания:

гражданское воспитание — формирование российской идентичности, чувства принадлежности к своей Родине, ее историческому и культурному наследию, многонациональному народу России, уважения к правам и свободам гражданина России; формирование активной гражданской позиции, правовых знаний и правовой культуры;

патриотическое воспитание — формирование чувства глубокой привязанности к своей малой родине, родному краю, России, своему народу и многонациональному народу России, его традициям; чувства гордости за достижения России и ее культуру, желания защищать интересы своей Родины и своего народа;

духовно-нравственное воспитание — формирование устойчивых ценностно-смысловых установок, обучающихся по отношению к духовно-нравственным ценностям российского общества, к культуре народов России, готовности к сохранению, преумножению и трансляции культурных традиций и ценностей многонационального российского государства;

эстетическое воспитание — формирование эстетической культуры, эстетического отношения к миру, приобщение к лучшим образцам отечественного и мирового искусства;

физическое воспитание, формирование культуры здорового

образа жизни и эмоционального благополучия — формирование осознанного отношения к здоровому и безопасному образу жизни, потребности физического самосовершенствования, неприятия вредных привычек;

профессионально-трудовое воспитание — формирование позитивного и добросовестного отношения к труду, культуры труда и трудовых отношений, трудолюбия, профессионально значимых качеств личности, умений и навыков; мотивации к творчеству и инновационной деятельности; осознанного отношения к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной деятельности, к профессиональной деятельности как средству реализации собственных жизненных планов;

экологическое воспитание — формирование потребности экологически целесообразного поведения в природе, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние окружающей среды, важности рационального природопользования; приобретение опыта эколого-направленной деятельности;

ценности научного познания — воспитание стремления к познанию себя и других людей, природы и общества, к получению знаний, качественного образования с учётом личностных интересов

и общественных потребностей.

1.3 Целевые ориентиры воспитания

1.3.1 Инвариантные целевые ориентиры

Согласно «Основам государственной политики по сохранению и укреплению духовно-нравственных ценностей» (Указ Президента Российской Федерации от 09.11.2022 № 809) ключевым инструментом государственной политики в области образования, необходимым для формирования гармонично развитой личности, является воспитание в духе уважения к традиционным ценностям, таким как патриотизм, гражданственность, служение Отечеству и ответственность за его судьбу, высокие нравственные идеалы, крепкая семья, созидательный труд, приоритет духовного над материальным, гуманизм, милосердие, справедливость, коллективизм, взаимопомощь и взаимоуважение, историческая память и преемственность поколений, единство народов России.

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» воспитательная деятельность направлена на формирование у обучающихся чувства патриотизма, гражданственности, уважения к памяти защитников Отечества и подвигам Героев Отечества, закону и правопорядку, человеку труда и старшему поколению, взаимного уважения, бережного отношения к культурному наследию и традициям многонационального народа Российской Федерации, природе и окружающей среде».

Эти законодательно закреплённые требования в части формирования у обучающихся системы нравственных ценностей отражены в инвариантных целевых ориентирах воспитания выпускников университета и соотносятся с общими/универсальными компетенциями, формирование которых является результатом освоения образовательных программ в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов.

Инвариантные целевые ориентиры воспитания выпускников университета

Гражданское воспитание
– Осознанно выражающий свою российскую гражданскую принадлежность (идентичность) в поликультурном, многонациональном и многоконфессиональном российском обществе, в мировом сообществе. – Сознующий своё единство с народом России как источником власти и субъектом тысячелетней российской государственности, с российским государством, ответственность за его развитие в настоящем и будущем на основе исторического просвещения, российского национального исторического сознания. – Проявляющий гражданско-патриотическую позицию, готовность к защите Родины, способный аргументированно отстаивать суверенитет и достоинство народа России и российского государства, сохранять и защищать историческую правду. – Ориентированный на активное гражданское участие в социально-политических процессах на основе уважения закона и правопорядка, прав и свобод сограждан. – Осознанно и деятельно выражающий неприятие любой дискриминации по социальным, национальным, расовым, религиозным признакам, проявлений экстремизма, терроризма, коррупции, антигосударственной деятельности. – Обладающий опытом гражданской социально значимой деятельности (в студенческом самоуправлении, добровольческом движении, предпринимательской деятельности, экологических, военно-патриотических и др. объединениях, акциях, программах).
Патриотическое воспитание
– Осознающий свою национальную, этническую принадлежность, демонстрирующий приверженность к родной культуре, любовь к своему народу.

– Сознающий причастность к многонациональному народу Российской Федерации, Отечеству, общероссийскую идентичность. – Проявляющий деятельное ценностное отношение к историческому и культурному наследию своего и других народов России, их традициям, праздникам. – Проявляющий уважение к соотечественникам, проживающим за рубежом, поддерживающий их права, защиту их интересов в сохранении общероссийской идентичности.
Духовно-нравственное воспитание
– Проявляющий приверженность традиционным духовно-нравственным ценностям, культуре народов России с учётом мировоззренческого, национального, конфессионального самоопределения. – Проявляющий уважение к жизни и достоинству каждого человека, свободе мировоззренческого выбора и самоопределения, к представителям различных этнических групп, традиционных религий народов России, их национальному достоинству и религиозным чувствам с учётом соблюдения конституционных прав и свобод всех граждан. – Понимающий и деятельно выражающий понимание ценности межнационального, межрелигиозного согласия, способный вести диалог с людьми разных национальностей и вероисповеданий, находить общие цели и сотрудничать для их достижения. – Ориентированный на создание устойчивой семьи на основе российских традиционных семейных ценностей, рождение и воспитание детей и принятие родительской ответственности. – Обладающий сформированными представлениями о ценности и значении в отечественной и мировой культуре языков и литературы народов России.
Эстетическое воспитание
– Выражающий понимание ценности отечественного и мирового искусства, российского и мирового художественного наследия. – Проявляющий восприимчивость к разным видам искусства, понимание эмоционального воздействия искусства, его влияния на душевное состояние и поведение людей, умеющий критически оценивать это влияние. – Проявляющий понимание художественной культуры как средства коммуникации и самовыражения в современном обществе, значение нравственных норм, ценностей, традиций в искусстве. – Ориентированный на осознанное творческое самовыражение, реализацию творческих способностей, на эстетическое обустройство собственного быта, профессиональной среды.
Физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия
– Понимающий и выражающий в практической деятельности понимание ценности жизни, здоровья и безопасности, значение личных усилий в сохранении и укреплении своего здоровья и здоровья других людей. – Соблюдающий правила личной и общественной безопасности, в том числе безопасного поведения в информационной среде. – Выражающий на практике установку на здоровый образ жизни (здоровое питание, соблюдение гигиены, режим занятий и отдыха, регулярную физическую активность), стремление к физическому совершенствованию. – Проявляющий сознательное и обоснованное неприятие вредных привычек (курения, употребления алкоголя, наркотиков, любых форм зависимостей), деструктивного поведения в обществе и цифровой среде, понимание их вреда для физического и психического здоровья. – Демонстрирующий навыки рефлексии своего состояния (физического, эмоционального, психологического), понимания состояния других людей. – Демонстрирующий и развивающий свою физическую подготовку, необходимую для избранной профессиональной деятельности, способности адаптироваться к стрессовым ситуациям в общении, в изменяющихся условиях (профессиональных, социальных, информационных, природных), эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях. – Использующий средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.
Профессионально-трудовое воспитание

– Понимающий профессиональные идеалы и ценности, уважающий труд, результаты труда, трудовые достижения российского народа, трудовые и профессиональные достижения своих земляков, их вклад в развитие своего поселения, края, страны. – Участвующий в социально значимой трудовой и профессиональной деятельности разного вида в семье, образовательной организации, на базе производственной практики, в своей местности. – Выражающий осознанную готовность к непрерывному образованию и самообразованию в выбранной сфере профессиональной деятельности. – Понимающий специфику профессионально-трудовой деятельности, регулирования трудовых отношений, готовый учиться и трудиться в современном высокотехнологичном мире на благо государства и общества. – Ориентированный на осознанное освоение выбранной сферы профессиональной деятельности с учётом личных жизненных планов, потребностей своей семьи, государства и общества. – Обладающий сформированными представлениями о значении и ценности выбранной профессии, проявляющий уважение к своей профессии и своему профессиональному сообществу, поддерживающий позитивный образ и престиж своей профессии в обществе.
Экологическое воспитание
– Демонстрирующий в поведении сформированность экологической культуры на основе понимания влияния социально-экономических процессов на природу, в том числе на глобальном уровне, ответственность за действия в природной среде. – Выражающий деятельное неприятие действий, приносящих вред природе, содействующий сохранению и защите окружающей среды. – Применяющий знания из общеобразовательных и профессиональных дисциплин для разумного, бережливого производства и природопользования, ресурсосбережения в быту, в профессиональной среде, общественном пространстве. – Имеющий и развивающий опыт экологически направленной, природоохранной, ресурсосберегающей деятельности, в том числе в рамках выбранной специальности, способствующий его приобретению другими людьми.
Ценности научного познания
– Деятельно выражающий познавательные интересы в разных предметных областях с учётом своих интересов, способностей, достижений, выбранного направления профессионального образования и подготовки. – Обладающий представлением о современной научной картине мира, достижениях науки и техники, аргументированно выражающий понимание значения науки и технологий для развития российского общества и обеспечения его безопасности. – Демонстрирующий навыки критического мышления, определения достоверности научной информации, в том числе в сфере профессиональной деятельности. – Умеющий выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам. – Используя современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности. – Развивающий и применяющий навыки наблюдения, накопления и систематизации фактов, осмысления опыта в естественнонаучной и гуманитарной областях познания, исследовательской и профессиональной деятельности.

1.3.2 Вариативные целевые ориентиры

Вариативные целевые ориентиры воспитания обучающихся университета сформулированы с учётом этнокультурных и региональных особенностей и не противоречат инвариантным целевым ориентирам.

Вариативные целевые ориентиры воспитания

Гражданское воспитание
– Осознающий себя членом общества на региональном и локальном уровнях, имеющим представление о родном крае как субъекте Российской Федерации.

– Демонстрирующий понимание значимости выбранной профессии для развития страны, проявляющий уважение к своей профессии и профессиональному сообществу. – Знающий и соблюдающий нормы профессиональной этики работника, поддерживающий благоприятный образ профессии в обществе. – Разделяющий традиционные российские ценности, проявляющий активную гражданскую позицию, готовый к защите Родины. – Знающий государственные устои и символику России, родного края, города, района и муниципальных образований. – Проявляющий нетерпимость к коррупционному поведению, умеющий принимать решения и нести за них ответственность. – Обладающий культурой межнационального общения в студенческой среде и обществе в целом. – Проявляющий уважительное отношение к национальному достоинству людей, их чувствам, религиозным убеждениям.
Патриотическое воспитание
– Понимающий свою сопричастность к прошлому, настоящему и будущему родного края, своей Родины — России, Российского государства. – Понимающий значение гражданских символов (государственная символика России, своего региона), праздников, мест почитания героев и защитников Отечества, проявляющий к ним уважение. – Изучающий и владеющий знаниями по истории родного края и своей малой родины.
Духовно-нравственное воспитание
– Уважающий духовно-нравственную культуру своей семьи, своего народа, семейные ценности с учётом национальной, религиозной принадлежности. – Сознательный ценность каждой человеческой жизни, признающий индивидуальность и достоинство каждого человека. – Умеющий оценивать поступки с позиции их соответствия нравственным нормам, осознающий ответственность за свои поступки.
Эстетическое воспитание
– Проявляющий ценностное отношение к культуре и искусству, к культуре речи и культуре поведения, к красоте и гармонии. – Обладающий знаниями о культурном наследии родного края. – Способный воспринимать и чувствовать прекрасное в быту, природе, искусстве, творчестве людей, профессиональном мастерстве. – Проявляющий стремление к самовыражению в разных видах художественной деятельности, искусстве, профессиональной деятельности.
Физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия
– Владеющий знаниями о физической культуре и спорте, их истории, современном развитии в родном крае. – Ведущий и пропагандирующий здоровый образ жизни. – Проявляющий интерес к самообучению умениям и навыкам физкультурно-оздоровительной и спортивно-оздоровительной деятельности. – Бережно относящийся к физическому здоровью, соблюдающий основные правила здорового и безопасного для себя и других людей образа жизни, в том числе в информационной среде. – Владеющий основными навыками личной и общественной гигиены, безопасного поведения в быту, природе, обществе. – Ориентированный на физическое развитие с учётом возможностей здоровья, занятия физкультурой и спортом
Профессионально-трудовое воспитание
– Проявляющий уважение к труду, людям труда, бережное отношение к результатам труда, ответственное потребление. – Проявляющий интерес к разным профессиям. – Участвующий в различных видах трудовой деятельности.

– Владеющий комплексом знаний, умений и навыков, качеств личности, обеспечивающих возможность профессионального роста. – Обладающий основами экономической культуры и финансовой грамотности.
Экологическое воспитание
– Понимающий ценность природы, зависимость жизни людей от природы, влияние людей на природу, окружающую среду. – Выражающий готовность в своей профессиональной деятельности придерживаться экологических норм. – Содействующий сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действующий в чрезвычайных ситуациях. – Демонстрирующий экологическую культуру. – Проявляющий интерес к экологической обстановке в родном крае, вносящий свой вклад в ее улучшение.
Ценности научного познания
– Ориентированный на ценности непрерывного образования, в том числе и на самообразование. – Проявляющий интерес к участию в поисковой и исследовательской деятельности, техническому творчеству.

РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ

2.1 Уклад университета

Уральский государственный горный университет был учрежден 3 (16) июля 1914 года законом, утвержденным российским Императором Николаем II, как Екатеринбургский горный институт, который стал первым высшим учебным заведением на Урале.

Собранием Узаконений и Распоряжений Правительства, издаваемым при Правительствующем Сенате, от 27 января 1917 г. № 28 горный институт в городе Екатеринбурге был переименован в Уральский горный институт Императора Николая II, который приказом Главного управления учебными заведениями Народного Комиссариата тяжелой промышленности СССР от 18 декабря 1934 г. № 26/644 переименован в Свердловский горный институт, которому постановлением Совета Министров СССР от 13 января 1947 г. № 52 присвоено имя В.В. Вахрушева.

Указом Президиума Верховного Совета СССР от 12 мая 1969 года Свердловский горный институт им. В.В. Вахрушева был переименован в Свердловский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. В.В. Вахрушева, который распоряжением Совета Министров РСФСР от 10 июля 1991 г. № 736-р и приказом Государственного Комитета СССР по народному образованию от 22 июля 1991 г. № 346 был переименован в Уральский ордена Трудового Красного Знамени горный институт имени В.В. Вахрушева, переименованный приказом Государственного Комитета Российской Федерации по высшему образованию от 28 октября 1993 г. № 298 в Уральскую государственную горно-геологическую академию.

11 февраля 2003 года Уральская государственная горно-геологическая академия была внесена в Единый государственный реестр юридических лиц как государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Уральская государственная горно-геологическая академия, которое приказом Федерального агентства по образованию от 5 октября 2004 г. № 156 было переименовано в государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет».

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 23 мая 2011 г. № 1724 государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет» переименовано в федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального

образования «Уральский государственный горный университет», которое приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 29 октября 2015 г. №1261 переименовано в федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уральский государственный горный университет».

За 106 лет своей деятельности вуз подготовил для работы на горнодобывающих и геологоразведочных предприятиях, в научно-исследовательских и проектно-конструкторских институтах отрасли более 110 000 горных инженеров, талантом и трудом которых создавался Уральский горнопромышленный комплекс.

В 2024 году УГГУ - первый вуз Урала празднует 110 лет со дня учреждения.

Университет реализует программы высшего, среднего профессионального, дополнительного и послевузовского профессионального образования в области геологии, геофизики, горного дела, экологии, экономики, информатики, автоматизации, горного машиностроения, художественного проектирования и обработки материалов.

В университете представлены все уровни высшего образования: бакалавриат, специалитет, магистратура и аспирантура.

В университете обучаются около 10 000 студентов.

Отличительной особенностью университета являются сильные связи с производством. Вуз сотрудничает более чем с 300 предприятиями – партнерами со всей России, в их числе — крупнейшие компании горнодобывающей отрасли. Подписаны договоры о совместной работе в рамках подготовки кадров с крупнейшими отраслевыми предприятиями страны и региона: Русской медной компанией, Уральской горно-металлургической компанией, Уралмашзаводом, ЕВРАЗ-холдингом и др. Ведется системная подготовка специалистов для предприятий зарубежных стран: Китая, Гвинеи, Македонии, Узбекистана, Таджикистана, Туркменистана, Монголии, Казахстана и др.

Университет славится своим сильным профессорско-преподавательским составом. На 38 кафедрах работают более 350 педагогических работников, из них более 250 кандидатов наук, порядка 60 докторов наук.

Вековая история позволила университету создать не только мощные образовательные традиции, но и научные школы. Их коллективы регулярно участвуют в масштабных государственных программах. С 1976 г. в диссертационных советах вуза защищено свыше 750 диссертаций.

В университете выпускается два журнала, внесенных Высшей аттестационной комиссией в Перечень научных журналов, публикация в которых является обязательной для защиты диссертаций.

Студенты вуза регулярно побеждают на Всероссийских олимпиадах и инженерных соревнованиях. Горняки трижды становились триумфаторами Международного чемпионата по решению инженерных кейсов «Case-In». Свыше сорока студентов УГГУ каждый год удостоиваются стипендий Президента РФ, Правительства РФ и Губернатора Свердловской области. Одним из знаковых научных мероприятий УГГУ является Уральская горнопромышленная декада. Сотни специалистов из России и зарубежных стран ежегодно приезжают в Горный университет, чтобы обсудить актуальные вопросы отрасли и найти партнеров для решения производственных задач.

В университете есть свои корпоративные знаки отличия – это герб, гимн, флаг и форменная одежда, которые используются при проведении мероприятий в масштабах университета, городского, регионального и всероссийского уровней с целью формирования корпоративного сознания у обучающихся.

Наиболее значимыми традиционными мероприятиями, событиями, составляющими основу воспитательной системы, являются День знаний, День солидарности в борьбе с терроризмом, День первокурсника, День Героев Отечества, День матери, День студента, День защитников Отечества, конкурс красоты «Мисс и Мистер Горный университет» и многие другие.

2.2 Воспитательные модули: виды, формы, содержание воспитательной деятельности

Модуль «Образовательная деятельность»

Реализация воспитательного потенциала образовательной деятельности предусматривает:

- использование воспитательных возможностей содержания учебных дисциплин и профессиональных модулей для формирования у обучающихся позитивного отношения к российским традиционным духовно-нравственным и социокультурным ценностям, подбор соответствующего тематического содержания, текстов для чтения, задач для решения, проблемных ситуаций для обсуждений и т. п., отвечающих содержанию и задачам воспитания;
- привлечение внимания обучающихся к ценностному аспекту изучаемых на аудиторных занятиях объектов, явлений, событий и т. д., инициирование обсуждений, высказываний обучающимися своего мнения, выработки личностного отношения к изучаемым событиям, явлениям;
- использование учебных материалов (образовательного контента, художественных фильмов, литературных произведений и проч.), способствующих повышению статуса и престижа рабочих профессий, прославляющих трудовые достижения, повествующих о семейных трудовых династиях;
- инициирование и поддержка исследовательской деятельности при изучении учебных дисциплин и профессиональных модулей в форме индивидуальных и групповых проектов, исследовательских работ воспитательной направленности;
- реализация курсов, дополнительных факультативных занятий исторического просвещения, патриотической, гражданской, экологической, научно-познавательной, краеведческой, историко-культурной, туристско-краеведческой, спортивно-оздоровительной, художественно-эстетической, духовно-нравственной направленности, а также курсов, направленных на формирование готовности обучающихся к вступлению в брак и осознанному родительству;
- организация и проведение экскурсий (в музеи, картинные галереи, технопарки, на предприятия и др.), экспедиций, походов.

Модуль «Кураторство»

Реализация воспитательного потенциала кураторства как особого вида педагогической деятельности, направленной в первую очередь на решение задач воспитания и социализации обучающихся, предусматривает:

- организацию социально-значимых совместных проектов, отвечающих потребностям обучающихся, дающих возможности для их самореализации, установления и укрепления доверительных отношений внутри учебной группы и между группой и куратором;
- сплочение коллектива группы через игры и тренинги на командообразование, походы, экскурсии, празднования дней рождения, тематические вечера и т. п.;
- организацию и проведение регулярных родительских собраний, информирование родителей об академических успехах и проблемах обучающихся, их положении в студенческой группе, о жизни группы в целом; помощь родителям и иным членам семьи во взаимодействии с педагогическим коллективом и администрацией;
- работа со студентами, вступившими в ранние семейные отношения, проведение консультаций по вопросам этики и психологии семейной жизни, семейного права;
- планирование, подготовку и проведение праздников, фестивалей, конкурсов, соревнований и т. д. с обучающимися.

Модуль «Наставничество»

Реализация воспитательного потенциала наставничества как универсальной технологии передачи опыта и знаний предусматривает:

- разработку программы наставничества;
- содействие осознанному выбору оптимальной образовательной траектории, в том числе для обучающихся с особыми потребностями (детей с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья, одаренных, обучающихся, находящихся в трудной жизненной ситуации);
- оказание психологической и профессиональной поддержки наставляемому в реализации им индивидуального маршрута и в жизненном самоопределении;
- определение инструментов оценки эффективности мероприятий по адаптации и стажировке наставляемого;
- привлечение к наставнической деятельности признанных авторитетных специалистов, имеющих большой профессиональный и жизненный опыт (работников предприятий и организаций-партнеров).

Модуль «Основные воспитательные мероприятия»

Реализация воспитательного потенциала основных воспитательных мероприятий предусматривает:

- проведение общих для всей образовательной организации праздников, ежегодных творческих (театрализованных, музыкальных, литературных и т. п.) мероприятий, связанных с общероссийскими, региональными, местными праздниками, памяtnыми датами;
- проведение торжественных мероприятий, связанных с завершением образования, переходом на следующий курс, а также совместных мероприятий с организациями-партнерами, направленных на знакомство и приобщение к корпоративной культуре предприятия, организации;
- разработку и реализацию обучающимися социальных, социально-профессиональных проектов, в том числе с участием социальных партнёров университета;
- организацию тематических мероприятий, нацеленных на формирование уважительного отношения к противоположному полу, понимания любви как основы таких отношений и готовности к вступлению в брак (День матери, День семьи, любви и верности и т. д.);

Модуль «Организация предметно-пространственной среды»

Реализация воспитательного потенциала предметно-пространственной среды предусматривает совместную деятельность педагогов, обучающихся, других участников образовательных отношений по её созданию, поддержанию, использованию в воспитании:

- организация в доступных для обучающихся и посетителей местах музейно-выставочного пространства, содержащего экспозиции об истории и развитии университета с использованием исторических символов государства, региона, местности в разные периоды, о значимых исторических, культурных, природных, производственных объектах России, региона, местности;
- размещение карт России, регионов, муниципальных образований (современных и исторических, точных и стилизованных, географических, природных, культурологических, художественно оформленных, в том числе материалами, подготовленными обучающимися) с изображениями значимых культурных объектов своей местности, региона, России; портретов выдающихся государственных деятелей России, деятелей культуры, науки, производства, искусства, военных деятелей, героев и защитников Отечества;
- размещение, обновление художественных изображений (символических, живописных, фотографических, интерактивных) объектов природного и культурного наследия региона, местности, предметов традиционной культуры и быта;
- организацию и поддержание в университете звукового пространства позитивной духовно-нравственной, гражданско-патриотической воспитательной направленности (звонки-мелодии, музыка, информационные сообщения), исполнение гимна Российской Федерации (в начале учебной недели);

- оформление и обновление «мест новостей», стендов в помещениях общего пользования (холл первого этажа, рекреации и др.), содержащих в доступной, привлекательной форме новостную информацию позитивного профессионального, гражданско-патриотического, духовно-нравственного содержания;
- размещение материалов, отражающих ценность труда как важнейшей нравственной категории, представляющих трудовые достижения в профессиональной области, прославляющих героев и ветеранов труда, выдающихся деятелей производственной сферы, имеющих отношение к УГГУ, предметов-символов профессиональной сферы, размещение информационных справочных материалов о предприятиях профессиональной сферы, имеющих отношение к профилю университета;
- размещение, поддержание, обновление на территории университета выставочных объектов, ассоциирующихся с профессиональными направлениями обучения;
- создание и обновление книжных выставок профессиональной литературы, пространства свободного книгообмена;
- оборудование, оформление, поддержание и использование спортивных и игровых пространств, площадок, зон активного и спокойного отдыха;
- совместная с обучающимися популяризация символики УГГУ (флаг, гимн, эмблема, логотип и т. п.), используемой как повседневно, так и в торжественных ситуациях;
- разработка и обновление материалов (стендов, плакатов, инсталляций и др.), акцентирующих внимание обучающихся на важных для воспитания правилах, традициях, укладе образовательной организации, актуальных вопросах профилактики и безопасности.

Модуль «Взаимодействие с родителями (законными представителями)»

Реализация воспитательного потенциала взаимодействия с родителями (законными представителями) обучающихся предусматривает:

- организацию взаимодействия между родителями обучающихся и преподавателями, администрацией в области воспитания и профессиональной реализации студентов;
- проведение родительских собраний по вопросам воспитания, взаимоотношений обучающихся и педагогов, условий обучения и воспитания;
- привлечение родителей к подготовке и проведению мероприятий воспитательной направленности.

Модуль «Самоуправление»

Реализация воспитательного потенциала самоуправления обучающихся в университете, реализующем образовательные программы высшего и среднего профессионального образования, предусматривает:

- организацию и деятельность в университете органов самоуправления обучающихся (совет обучающихся и др.);
- представление органами самоуправления интересов обучающихся в процессе управления образовательной организацией, защита законных интересов, прав обучающихся;
- участие представителей органов самоуправления обучающихся в разработке, обсуждении и реализации рабочей программы воспитания, в анализе воспитательной деятельности;
- привлечение к деятельности студенческого самоуправления выпускников, работающих по специальности, добившихся успехов в профессиональной деятельности и личной жизни.

Модуль «Профилактика и безопасность»

Реализация воспитательного потенциала профилактической деятельности в целях формирования и поддержки безопасной и комфортной среды предусматривает:

- организацию деятельности педагогического коллектива по созданию в университете безопасной среды как условия успешной воспитательной деятельности;
- вовлечение обучающихся в проекты, программы профилактической направленности, реализуемые в УГГУ и в социокультурном окружении (антинаркотические, антиалкогольные, против курения, вовлечения в деструктивные детские и молодёжные объединения, культы, субкультуры, группы в социальных сетях; по безопасности в цифровой среде, на транспорте, на воде, безопасности дорожного движения, противопожарной безопасности, антитеррористической и антиэкстремистской безопасности, гражданской обороне и т. д.);
- сбор информации и регулярный мониторинг семей обучающихся, находящихся в сложной жизненной ситуации, профилактическая работа с неблагополучными семьями;
- организация психолого-педагогической поддержки обучающихся групп риска;
- организацию работы по развитию у обучающихся навыков саморефлексии, самоконтроля, устойчивости к негативному воздействию, групповому давлению;
- поддержку инициатив обучающихся, педагогов в сфере укрепления безопасности жизнедеятельности.

Модуль «Социальное партнёрство и участие работодателей»

Реализация воспитательного потенциала социального партнёрства университетом, реализующем образовательные программы высшего и среднего профессионального образования, в том числе во взаимодействии с предприятиями рынка труда, предусматривает:

- участие представителей организаций-партнёров, предприятий (организаций) и работодателей, в том числе в соответствии с договорами о сотрудничестве, в проведении отдельных производственных практик и мероприятий в рамках рабочей программы воспитания и календарного плана воспитательной работы (дни открытых дверей, ярмарки вакансий, государственные, региональные праздники, торжественные мероприятия и т. п.);
- участие представителей организаций-партнёров в проведении мастер-классов, аудиторных и внеаудиторных занятий, мероприятий профессиональной направленности;
- проведение на базе организаций-партнёров отдельных аудиторных и внеаудиторных занятий, презентаций, лекций, акций воспитательной направленности;
- проведение открытых дискуссионных площадок (студенческих, педагогических, родительских, совместных), куда приглашаются представители организаций-партнёров, на которых обсуждаются актуальные проблемы, касающиеся профессиональной сферы и рынка труда, жизни университета, муниципального образования, региона, страны;
- реализация социальных проектов, разрабатываемых и реализуемых обучающимися и педагогами совместно с организациями-партнёрами (профессионально-трудовой, благотворительной, экологической, патриотической, духовно-нравственной и т. д. направленности), ориентированных на воспитание обучающихся, преобразование окружающего социума, позитивное воздействие на социальное окружение.

Модуль «Профессиональное развитие, адаптация и трудоустройство»

Реализация воспитательного потенциала работы по профессиональному развитию, адаптации и трудоустройству в университете предусматривает:

- участие в конкурсах, фестивалях, олимпиадах профессионального мастерства (в т. ч. международных), работе над профессиональными проектами различного уровня (регионального, всероссийского, международного) и др.;
- циклы мероприятий, направленных на подготовку обучающихся к осознанному планированию своей карьеры, профессионального будущего (посещения центра содействия профессиональному трудоустройству выпускников, профессиональных выставок, ярмарок вакансий, дней открытых дверей на предприятиях и др.);
- экскурсии (на предприятия, в организации), дающие углублённые представления о выбранной специальности и условиях работы;

- организацию мероприятий, посвященных истории организаций/предприятий-партнёров; встреч с представителями коллективов, с работниками-стажистами, представителями трудовых династий, авторитетными специалистами, героями и ветеранами труда, представителями профессиональных династий;
- использование обучающимися интернет-ресурсов, способствующих более глубокому изучению отраслевых технологий, способов и приёмов профессиональной деятельности, профессионального инструментария, актуального состояния профессиональной области; онлайн курсов по интересующим темам и направлениям профессионального образования;
- консультирование обучающихся по вопросам построения ими профессиональной карьеры и планов на будущую жизнь с учётом индивидуальных особенностей, интересов, потребностей;
- проведение тренингов, нацеленных на формирование рефлексивной культуры, совершенствование умений в области анализа и оценки результатов деятельности.

Дополнительные модули

Модуль «Воспитание здорового образа жизни»

Реализация воспитательного потенциала работы по созданию условий для сохранения, укрепления и развития духовного, эмоционального, интеллектуального, личностного и физического здоровья обучающихся предусматривает:

- воспитание здоровой личности, формирование способности ставить цели и строить жизненные планы;
- формирование у обучающихся ответственного отношения к своему здоровью и потребности в здоровом образе жизни, физическом самосовершенствовании, занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью, развитие культуры безопасной жизнедеятельности, профилактику наркотической и алкогольной зависимости, табакокурения и других вредных привычек;
- формирование бережного, ответственного и компетентного отношения к физическому и психологическому здоровью – как собственному, так и других людей, развитие культуры здорового питания.

Модуль «Художественно-эстетическое воспитание»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию культурно-эстетических взглядов, нравственных принципов обучающихся, повышению общего уровня культуры, формированию способности воспринимать и понимать произведения искусства во взаимосвязи с окружающим миром предусматривает:

- воспитание эстетического отношения к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений;
- формирование способности к общему развитию, реализации творческого потенциала в учебной, профессиональной деятельности, самовоспитания и универсальной духовно-нравственной компетенции – «становиться лучше»;
- формирование чувства любви к Родине на основе изучения культурного наследия многонационального народа России;
- формирование художественно-эстетического мировоззрения, основанного на диалоге культур.

Модуль «Экологическое воспитание»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию экологической культуры, содействию сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, воспитанию и развитию у обучающихся любви к окружающей природе предусматривает:

- развитие у обучающихся экологической культуры, бережного отношения к родной земле, природным богатствам России и мира, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды;
- воспитание чувства ответственности за состояние природных ресурсов, формирование умений и навыков разумного природопользования, нетерпимого отношения к действиям, приносящим вред экологии; приобретение опыта эколого-направленной деятельности.

Модуль «Волонтерское движение»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию готовности к добровольчеству (волонтерству) предусматривает:

- развитие навыков волонтерской деятельности через участие в подготовке и проведении социально-значимых мероприятий;
- развитие мотивации к активному и ответственному участию в общественной жизни страны, региона, университета, государственному управлению через организацию добровольческой деятельности;
- развитие способностей к сопереживанию и формированию позитивного отношения к людям, в том числе к лицам с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

РАЗДЕЛ 3. ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ

3.1 Кадровое обеспечение

Реализация рабочей программы воспитания осуществляется квалифицированными специалистами университета, в частности Управления по внеучебной и социальной работе, которое несёт ответственность за организацию воспитательной работы в университете; Студенческого культурного центра, Студенческого спортивного клуба «Горная машина», Студенческого центра патриотического воспитания «Святогор», Волонтерского центра УГГУ, которые проводят с обучающимися мероприятия воспитательного характера; психолого-педагогической службы, кураторами, педагогом-психологом, преподавателями, функционал которых регламентируется требованиями профессиональных стандартов, должностными инструкциями и иными нормативными документами.

3.2 Нормативно-методическое обеспечение

Нормативно-методическое обеспечение воспитательной деятельности осуществляется следующим образом: воспитательная деятельность ведется в соответствии с нормативно-правовыми документами федеральных органов исполнительной власти в сфере образования, требованиями федеральных государственных образовательных стандартов, Уставом университета и локальными актами университета с учетом сложившегося опыта воспитательной деятельности, и имеющимися ресурсами в университете.

3.3 Требования к условиям работы с обучающимися с особыми образовательными потребностями

В воспитательной работе с категориями обучающихся, имеющих особые образовательные потребности: обучающиеся с инвалидностью, ограниченными возможностями здоровья, из социально уязвимых групп (воспитанники детских домов, обучающиеся из семей мигрантов, билингвы и др.), одарённые, с отклоняющимся поведением, создаются особые условия.

В системе организации воспитательной деятельности с категориями обучающихся, имеющих особые образовательные потребности, устанавливаются сотрудничество преподавателей и обучающихся.

давателей, кураторов, педагогов-психологов, родителей (законных представителей) обучающихся с целью устранения нарушенных функций, развития функциональных систем обучающихся, коррекции поведения, формирования социально-значимых качеств.

При организации воспитательного пространства создаются благоприятные условия для развития социально значимых отношений обучающихся, и, прежде всего, ценностных отношений к семье, труду, своему отечеству, своей малой и большой Родине, природе, миру, знаниям, культуре, здоровью, окружающим людям, к самим.

Формирование доброжелательного отношения к обучающимся, имеющим особые образовательные потребности и их семьям со стороны всех участников образовательных отношений, а также индивидуальный подход позволяет получить им необходимые социальные навыки, знания и умения необходимые для дальнейшей профессиональной деятельности.

При организации воспитания обучающихся с особыми образовательными потребностями осуществляется ориентация на:

- налаживание эмоционально-положительного взаимодействия с окружающими для их успешной социальной адаптации и интеграции как в университете, так и в профессиональной деятельности;
- формирование доброжелательного отношения к обучающимся и их семьям со стороны всех участников образовательных отношений;
- построение воспитательной деятельности с учётом индивидуальных особенностей и возможностей каждого обучающегося;
- обеспечение психолого-педагогической поддержки семей обучающихся, содействие повышению уровня их педагогической, психологической, социальной компетентности;
- формирование личности обучающегося с особыми образовательными потребностями с использованием адекватных физическому и психическому состоянию методов воспитания;
- создание оптимальных условий совместного воспитания и обучения обучающихся с особыми образовательными потребностями и их сверстников, с использованием адекватных вспомогательных средств и педагогических приёмов, организацией совместных форм работы с педагогом-психологом и другими специалистами университета;
- личностно-ориентированный подход в организации всех видов деятельности обучающихся с особыми образовательными потребностями.

3.4 Система поощрения профессиональной успешности и проявлений активной жизненной позиции обучающихся

Поощрение профессиональной успешности и проявлений активной жизненной позиции обучающихся осуществляется следующим образом:

- выплачивается повышенная государственная академическая стипендия;
- предоставляются путевки на летний отдых и оздоровление;
- представляются кандидатуры обучающихся на стипендию Правительства Российской Федерации;
- представляются кандидатуры обучающихся на стипендию Губернатора Свердловской области;
- вручаются благодарственные письма, письма участников.

Основания для поощрения обучающихся:

- успехи в учебной деятельности;
- успехи научной деятельности;
- успехи в культурно-творческой деятельности;
- успехи в общественной деятельности;
- успехи в физкультурной деятельности;
- победы в конкурсах, олимпиадах, фестивалях, соревнованиях различного уровня;

- активное участие в культурно-массовых мероприятиях на уровне университета, округа, региона, Российской Федерации, на международном уровне;
- спортивные достижения на различных уровнях.

3.5 Анализ воспитательного процесса

Основные направления анализа воспитательного процесса:

3.5.1 Анализ условий воспитательной деятельности

Анализ воспитательной деятельности проводится по следующим позициям:

- кадровое обеспечение воспитательной деятельности (наличие специалистов, прохождение курсов повышения квалификации);
- наличие и количество студенческих объединений, клубов, предметных кружков, кружков технического творчества, спортивных секций и кружков;
- количество социальных партнеров, вовлечённых в воспитательную деятельность (предприятия, учреждения культуры, здравоохранения, правоохранительные органы, образовательные организации др.);
- участие педагогических работников университета в конкурсах, семинарах, конференциях, вебинарах по направлениям воспитательной деятельности;
- оформление предметно-пространственной среды университета.

3.5.2 Анализ состояния воспитательной деятельности

Анализ состояния воспитательной деятельности проводится по следующим позициям:

- проводимые в университете дела и реализованные проекты;
- уровень вовлеченности обучающихся в проекты и мероприятия на уровне университета, районном, городском, региональном и федеральном уровнях;
- включенность обучающихся и преподавателей в деятельность различных объединений;
- участие обучающихся в конкурсах различного уровня и направленности;
- профессионально-личностное развитие обучающихся (анализ портфолио);
- снижение негативных факторов (уменьшение числа обучающихся, состоящих на различных видах профилактического учета/контроля, снижение/отсутствие совершенных правонарушений и преступлений).

Основным способом получения информации являются: педагогическое наблюдение, анкетирование, тестирование, беседы с обучающимися и их родителями (законными представителями), педагогическими работниками, представителями студенческого совета.

Анализ проводится проректором по молодежной политике и развитию образования, начальником управления по внеучебной и социальной работе, педагогом-психологом, кураторами академических групп.

Итогом самоанализа является перечень выявленных проблем, над решением которых предстоит работать коллективу университета.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВОСПИТАТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ на 2024-2025 учебный год

В ходе планирования воспитательной деятельности университет учитывает воспитательный потенциал участия обучающихся в мероприятиях, проектах, конкурсах, акциях, проводимых на уровне:

Российской Федерации, в том числе:

«
Р «Большая перемена» <https://bolshayaperemena.online/>;
о «Лидеры России» <https://лидерыроссии.рф/>;
с «Мы Вместе» (волонтерство) <https://onf.ru/>;
с отраслевые конкурсы профессионального мастерства;
и движения «Ворлдскиллс Россия»;
я движения «Абилимпикс»;

субъектов Российской Федерации, а также **отраслевые профессионально значимые события и праздники.**

№	Модуль	Курсы, группы	Сроки	Ответственные
<i>1. Образовательная деятельность</i>				
1	Дисциплина «Основы российской государственности»	I,II,III	01.09.2024-31.05.2025	Зубов В. В.
<i>2. Кураторство</i>				
1	Воспитательное мероприятие «Час куратора»	I	01.09.2024-31.05.2025	Шехтман Д. А.
<i>3. Наставничество</i>				
1	Подготовка и проведение адаптационного мероприятия «Неделя первокурсника 2024»	I	30.08.2024 - 04.09.2024	Шехтман Д. А.
<i>4. Основные воспитательные мероприятия</i>				
1	Презентация студенческих общественных, спортивных, научных, творческих объединений	I	30.08.2024-04.09.2024	Шехтман Д. А.
2	Профориентационные мероприятия для студентов I курса	I	12.08.2024-17.08.2024	Коновалов П. А.
3	Спортивно-массовое мероприятие «Неделя футбола» и международный футбольный турнир к Дню народного единства	I-V	01.11.2024-05.11.2024	Сухомлин С. Д.
4	Культурно-массовое мероприятие «Новогодний ректорский прием»	I-V	23.12.2024	Нижников Е. В.
5	Празднование дня Российского студенчества, Молебен святой мученице Татьяне	I-V	25.01.2025	Бачинин И. В.
6	Организация игры «Патриот»	I-V	19.02.2025-23.02.2025	Комаров А. А.
7	Праздничный концерт «День защитника отечества»	I-V	22.02.2025	Нижников Е. В.
8	Праздничный концерт «Международный женский день»	I-V	07.03.2025	Нижников Е. В.

9	Участие в первомайской демонстрации	I-V	01.05.2025	Коновалов П. А.
10	Патриотическая акция «Бессмертный полк Горного»	I-V	08.05.2025	Комаров А. А.
11	Праздничные мероприятия, посвященные 80 годовщине Победы в ВОВ	I-V	09.05.2025	Нижников Е. В.
12	Легкоатлетическая эстафета «Горняк»	I-V	17.05.2025	Сидоров С. Г.
<i>5. Организация предметно-пространственной среды</i>				
13	Оформление и обновление новостных стендов	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Пономарева Т. В.
14	Популяризация символики образовательной организации	I-V	01.09.2024-10.11.2024	Пономарева Т. В.
15	Подготовка и обновление тематических экспозиций в библиотеке университета	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Справцева Е. А.
16	Разработка и реализация коворкинг зон для студентов	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Коновалов П. А.
17	Оформление зданий университета, холлов, с использованием государственной символики России	I-V	10.09.2024	Комаров А. А.
<i>6. Взаимодействие с родителями (законными представителями)</i>				
18	Деятельность Службы примирения университета и работа с конфликтными ситуациями	I-V	01.09.2024 – 30.05.2025	Первушина А. А.
<i>7. Самоуправление</i>				
19	Обучающие мероприятия для студенческого актива УГГУ	I-V	01.09.2024-20.11.2024	Шехтман Д. А.
20	Обучающие мероприятия для активистов организационно-массовой комиссии ПСО УГГУ	I-V	14.09.2024-16.09.2024	Коновалов П. А.
21	Отчетно – выборные конференции профбюро факультетов	I-V	10.10.2024-25.10.2024	Коновалов П. А.
22	Проведение мероприятия среди студенческой молодежи, направленного на повышение уровня медиа грамотности "Медиадиктант"	I-V	18.10.2024	Пономарева Т. В.
23	Обучающее мероприятие «ПРОФшкола Горно-механического факультета»	I-V	08.11.2024-12.11.2024	Коновалов П. А.
24	Обучающие мероприятия для активистов ФГХ	I-V	08.11.2024-12.11.2024	Коновалов П. А.
25	Интеллектуальная игра для обучающихся УГГУ «Интуиция»	I-V	10.11.2024	Коновалов П. А.

26	Интеллектуальная игра для обучающихся УГГУ «Квиз-турнир»	I-V	16.12.2024	Коновалов П. А.
27	Новогодняя студенческая елка «Елка желаний»	I-V	24.12.2024	Коновалов П. А.
28	Традиционная новогодняя лотерея среди членов профсоюза	I-V	25.12.2024	Коновалов П. А.
29	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Турнир по киберспорту»	I-V	25.12.2024	Коновалов П. А.
30	Образовательный проект «MediaLife»	I-V	10.01.2025–28.03.2025	Сухомлин С. Д.
31	Интеллектуальная онлайн игра «Что? Где? Когда?», посвященная Всероссийскому дню студента	I-V	25.01.2025	Коновалов П. А.
32	Встреча ректора университета со студенческим активом	I-V	25.01.2025	Шехтман Д. А.
33	Традиционное исполнение студенческих желаний ректором УГГУ А.В. Душиным	I-V	25.01.2025	Шехтман Д. А.
34	Образовательный проект АССК.про	I-V	15.02.2025-01.04.2025	Сухомлин С. Д.
35	Образовательный проект «GM School» для студентов и активистов УГГУ	I-V	04.04.2025-08.04.2025	Сухомлин С. Д.
36	Очный этап образовательного проекта АССК.про	I-V	01.05.2025-30.05.2025	Сухомлин С. Д.
<i>8. Профилактика и безопасность</i>				
37	Подготовка к социально-психологическому тестированию (сбор сведений, проверка технических возможностей)	I-V	01.08.2024-31.08.2024	Первушина А. А.
38	Размещение информационных материалов по вопросам антитеррористической защищённости	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Волков С. А., Пономарева Т. В.
39	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде (подготовка и размещение публикаций на сайте ФГХ, в сообществе «Педагог-психолог УГГУ» и подготовка информационных листов-вкладышей)	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Первушина А.А.
40	Подготовка к социально-психологическому тестированию	I-V	01.09.2024-30.09.2024	Первушина А .А.

	(подготовка списков, генерация паролей, информационная кампания)			
41	Размещение информационных материалов об антикоррупционных мероприятиях и нормативной базе в сфере противодействия коррупции	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Волков С. А., Пономарева Т. В.
42	Патриотическая акция, посвященная Дню солидарности в борьбе с терроризмом	I-V	03.09.2024	Старостин А. Н. Суслонов П. Е
43	Проведение социально-психологического тестирования	I-V	01.10.2024-30.10.2024	Первушина А. А.
44	Основы безопасного общения и способы защиты от негативного влияния со стороны лиц и групп деструктивной и экстремистской направленности (беседа-тренинг с обучающимися)	I-V	01.10.2024-30.10.2024	Старостин А. Н. Суслонов П. Е
45	Подготовка документации по итогам социально-психологического тестирования	I-V	01.11.2024-30.11.2024	Первушина А. А.
46	Разговор на равных (Тема: профилактика межнациональных и межконфессиональных конфликтов)	I-V	12.11.2024	Старостин А. Н.
47	Организация процедуры получения результатов социально-психологического тестирования и подготовка плана работы с лицами «группы риска»	I-V	01.12.2024-30.12.2024	Первушина А. А.
48	Профилактика деструктивных явлений в период сессии: публикация «От сессии до сессии... Продолжение»	I-V	10.01.2025	Первушина А. А.
49	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде: публикации информационно-просветительского, профилактического характера на психологическую тематику: «Моя свобода и/или свобода другого?» (профилактика буллинга/кибербуллинга)	I-V	01.03.2025-31.03.2025	Первушина А. А.

50	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде: публикации информационно-просветительского, профилактического характера на психологическую тематику: «Кому выгодно кормить наше ЭГО?» (профилактика правонарушений и экстремистских проявлений)	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Первушина А. А.
<i>9. Социальное партнёрство и участие работодателей</i>				
51	Уральский горнопромышленный форум	I-V	01.10.2024-31.10.2024	Костюк П. А.
52	Экскурсионные мероприятия (Альфа-банк)	I-V	04.12.2024	Коновалов П. А.
53	VIII Международный инженерный чемпионат Case-in	I-V	01.03.2025-31.03.2025	Костюк П. А.
54	Экскурсионные мероприятия (Екатеринбургский метрополитен)	I-V	29.03.2025	Коновалов П. А., Коренькова М. А.
55	Всероссийский фестиваль по робототехнике	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Кухарева А. А.
56	Ярмарка студентов	I-V	20.04.2025	Коренькова М. А.
57	Уральская горнопромышленная декада	I-V	01.05.2025-30.05.2025	Валиев Н. Г. Лебзин М. С.
<i>10. Профессиональное развитие, адаптация и трудоустройство</i>				
58	Профориентационные презентации для абитуриентов	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Кухарева А. А.
59	Экскурсии по УГГУ для абитуриентов	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Кухарева А. А.
60	Культурно-массовое мероприятие «Межвузовский Since-Slame»	I-V	02.11.2024-03.11.2024	Шехтман Д. А.
61	День памяти погибших при исполнении служебных обязанностей сотрудников органов внутренних дел	I-V	08.11.2024	Мальцев Н. В.
62	Культурно-массовое мероприятие «Экскурсия в Уральский геологический музей»	I-V	17.11.2024	Иванова Н. С.
63	Отборочный этап студенческих проектов «Проектный конвейер»	I-V	19.11.2024	Шехтман Д. А.
64	Лекция от приглашенного спикера для обучающихся о развитии личностных качеств	I-V	24.11.2024	Коновалов П. А.
65	День юриста	I-V	03.12.2024	Мальцев Н. В.

66	Тематическая выставка «Пожарное и спасательное дело в России»	I-V	09.01.2025-31.01.2025	Справцева Е. А.
67	Конкурс профессионального мастерства «Студенческий лидер УГГУ»	I-V	25.03.2025	Коновалов П. А.
68	День открытых дверей УГГУ	I-V	26.03.2025	Гензель О. В.
69	Организация и проведение мероприятия «Встреча выпускников всех поколений и День геолога»	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Нижников Е. В.
70	Тематическая выставка «Нефтегазовая отрасль – поле для инноваций»	I-V	01.04.2025-15.04.2025	Справцева Е. А.
71	Поход студентов геологов «Тур де ФГиГ»	I-V	04.05.2025	Коновалов П. А.
72	Организация и проведение мероприятия «Торжественное вручение дипломов выпускникам УГГУ»	I-V	01.07.2025-10.07.2025	Нижников Е. В.
<i>II. Воспитание здорового образа жизни</i>				
73	Проект «Уральская студенческая баскетбольная лига»	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Сухомлин С. Д.
74	Психологическое консультирование	I-V	01.09.2024-25.06.2025	Первушина А. А.
75	Спортивно-массовое мероприятие «Турнир по Пейнтболу среди обучающихся УГГУ»	I-V	20.09.2024-24.09.2024	Сухомлин С. Д.
76	Осенний турслет	I-V	24.09.2024-26.09.2024	Комаров А. А.
77	Чемпионат УГГУ по стрельбе «Меткий стрелок»	I-V	25.10.2024-31.10.2024	Комаров А. А.
78	Спортивно-массовое мероприятие «День Рождение ССК УГГУ «Горная Машина»	I-V	07.11.2024	Сухомлин С. Д.
79	Профилактическое мероприятие «Экспресс-тестирование на ВИЧ»	I-V	18.11.2024-19.11.2024	Медяникова Н. Г.
80	Спортивно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Неделя баскетбола»	I-V	13.12.2024-20.12.2024	Сухомлин С. Д.
81	Студенческий спортивный баттл	I-V	17.12.2024	Сухомлин С. Д.
82	Фестиваль зимних видов спорта, посвященный Всемирному дню снега	I-V	15.01.2025-16.01.2025	Сухомлин С. Д.
83	Внутривузовский отборочный этап чемпионата АССК России по 5-и видам спорта	I-V	15.02.2025–01.03.2025	Сухомлин С. Д.

84	Спортивно-массовое мероприятие Турнир по страйк-болу среди факультетов УГГУ, посвященный 23 февраля	I-V	21.02.2025	Коновалов П. А.
85	Спортивный турнир среди женских команд факультетов УГГУ, посвященный «Международному женскому дню»	I-V	04.03.2025	Коновалов П. А.
86	Проект «От Студзачета к знаку отличия ГТО»	I-V	14.03.2025-21.03.2025	Сухомлин С. Д.
87	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по баскетболу	I-V	15.03.2025	Коновалов П. А.
88	Профилактическое мероприятие для обучающихся УГГУ «Экспресс-тестирование на ВИЧ»	I-V	16.03.2025	Медяникова Н. Г.
89	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по настольному теннису	I-V	16.03.2025	Коновалов П. А.
90	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по стрельбе из пневматического ружья	I-V	17.03.2025	Коновалов П. А.
91	Спортивное мероприятие туристического клуба «Скалы Петра Гронского»	I-V	19.03.2025	Комаров А. А.
92	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по мини-футболу	I-V	22.03.2025	Коновалов П. А.
93	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по волейболу	I-V	23.03.2025	Коновалов П. А.
94	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по шахматам	I-V	24.03.2025	Коновалов П. А.
95	Оценка уровня информированности и отношение к проблеме эпидемии ВИЧ-инфекции среди студентов	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Медяникова Н. Г.
96	Поход туристического клуба «Авантюрин» - «Покорение скал»	I-V	02.04.2025-03.04.2025	Комаров А. А.
97	Мероприятие, приуроченное к Всемирному дню здоровья	I-V	07.04.2025	Коновалов П. А.
98	Профилактическая акция для обучающихся УГГУ «Что выберешь ты?»	I-V	14.04.2025	Коновалов П. А.
99	Фестиваль летних уличных видов спорта «Горный X-games»	I-V	06.06.2025	Сухомлин С. Д.
12. Художественно-эстетическое воспитание				

100	Культурно-массовое мероприятие «День знаний»	I-V	01.09.2024	Нижников Е. В
101	Участие университетской команды КВН в центральной/официальной лиге МС КВН (полуфинал)	I-V	01.09.2024 30.10.2024	Нижников Е. В
102	Участие коллектива УГГУ «ГрандМажор» в Международном фестивале по «Мажореткам»	I-V	01.10.2024- 30.10.2024	Нижников Е. В.
103	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Литературный вечер»	I-V	07.10.2024	Коновалов П. А.
104	Культурно-массовое мероприятие «День культуры африканских стран»	I-V	12.10.2024	Иванова Н. С.
105	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ – Флешмоб, посвященный Дню первокурсника	I-V	14.10.2024- 21.10.2024	Коновалов П. А.
106	Культурно-массовое мероприятие Смотр Художественной Самостоятельности для обучающихся первого курса	I-V	20.10.2024	Коновалов П. А.
107	Культурно-массовое мероприятие «День первокурсника»	I-V	21.10.2024	Нижников Е. В.
108	Международная просветительская акция «Большой этнографический диктант»	I-V	01.11.2024- 30.11.2024	Старостин А. Н., Суслонов П. Е.
109	Участие университетской команды КВН в центральной/официальной лиге МС КВН (финал)	I-V	01.11.2024- 30.11.2024	Нижников Е. В.
110	Фестиваль команд КВН «Уральские горы юмора»	I-V	25.11.2024	Нижников Е. В.
111	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Зимний бал 2024»	I-V	23.12.2024	Коновалов П. А.
112	Культурно-массовое мероприятие «Новый Год для детей работников УГГУ»	I-V	23.12.2024	Шехтман Д. А.
113	Культурно-массовое мероприятие «Новый год для иностранных студентов УГГУ». Конкурс рассказов о национальных новогодних традициях	I-V	24.12.2024	Иванова Н. С.
114	Конкурс красоты «Мисс и Мистер УГГУ-2025»	I-V	24.03.2025	Нижников Е. В.
115	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся	I-V	21.04.2025	Коновалов П. А.

	УГГУ «Смотр художественной самодеятельности»			
116	Отчетный концерт студенческого культурного центра	I-V	26.05.2025	Нижников Е. В.
	<i>13. Экологическое воспитание</i>			
117	Экологическая акция по сбору отработанных батареек и пластиковых крышечек	I-V	01.09.2024-30.09.2024	Ершова А. А.
118	Реализация проекта «Экодворы» с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	01.09.2024-30.12.2024	Ершова А. А.
119	Проведение субботников, совместно с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	20.09.2024-20.10.2024	Ершова А. А.
120	Посадки саженцев деревьев с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	20.09.2024-20.11.2024	Ершова А. А.
121	Экологические занятия в школах г. Екатеринбург	I-V	01.01.2025-30.04.2025	Ершова А. А.
122	Выезд эковолонтеров университета ИЭФ-TRIP “Источники”	I-V	17.02.2025	Коновалов П. А.
123	Проведение субботников, совместно с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Ершова А. А.
124	Выезд эковолонтеров университета ИЭФ-TRIP «Челябинская область»	I-V	11.05.2025	Коновалов П. А.
	<i>14. Волонтерское движение</i>			
125	Ежегодная благотворительная акция «Полезная макулатура»	I-V	01.11.2024-01.12.2024	Коновалов П. А., Ершова А. А.
126	День добровольца (волонтера) в России	I-V	05.12.2024	Ершова А. А.
127	Акция, приуроченная к национальному дню донора в России	I-V	26.04.2025	Коновалов П. А.
128	Посещение волонтерами ветеранов ВОВ и тружеников тыла, приуроченное ко «Дню Победы»	I-V	02.05.2025-11.05.2025	Ершова А. А.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



Проректор по учебно-методическому комплексу

С.А. Упоров

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания по дисциплине

Б1.В.03 ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Направленность

Материалы и технологии цифровых производств

Автор: Зубов В.В., к.т.н., Адас В.Е.

Одобен на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург
2023

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день при разработке технологических систем и процессов все чаще используется методика инновационного проектирования. Это связано в первую очередь с тем, что идет рост функциональности CAD/CAE-инструментов, а также с их доступностью. Данные средства реализуют анализ изделия не через чертеж, а с помощью параметрической трехмерной модели, работу которой симулируют с помощью CAE-пакета. По результатам анализа проводится оптимизация конструкции путем корректировки исходной CAD-модели. Поэтому при отработке виртуальной модели первый же созданный рабочий образец будет работоспособен и надежен.

Цель данного практикума – помочь студентам приобрести навыки в подготовке чертежей, спецификаций, схем, а также в моделировании и численном исследовании с применением CAE- и CAD-пакетов таких программ, как КОМПАС и Ansys, при выполнении следующих лабораторных работ.

1. Создание и оформление сборочного чертежа и спецификации в программе КОМПАС-3D.
2. Создание и оформление технологической схемы в программе КОМПАС-3D.
3. Построение трехмерной модели в программе КОМПАС-3D.
4. Прочностной анализ в программе ANSYS.
5. Газодинамический анализ турбины в программе ANSYS.

1. ИЗУЧЕНИЕ КОМПАС-3D

КОМПАС – является программой автоматизированного проектирования, включающей две системы: **КОМПАС-График** и **КОМПАС-3D**. Связка этих систем позволяет реализовывать большинство задач машиностроения, таких как трехмерное моделирование агрегатов, разработка чертежей, проектирование кабельных систем и создание документов для инженерных проектов.

1.1. КОМПАС-График

КОМПАС-График – это универсальная система автоматизированного проектирования, предназначенная для автоматизированного создания проектно-конструкторской документации на основе стандартов ЕСКД.

Программа имеет понятный и простой интерфейс, который способствует быстрому освоению функциональных возможностей для выполнения поставленной задачи. Для того чтобы первые шаги в системе были наиболее простыми и понятными, **КОМПАС-График** оснащен интерактивными уроками для изучения основных инструментов, которые собраны в «Азбуке КОМПАС-График». Рабочее окно **КОМПАС-График** представлено на рис. 1.1.

Приведем более развернутое описание основных элементов.

Главное меню (1) – содержит все основные меню системы. В каждом из них хранятся команды, сгруппированные по темам.

Строка поиска команд (2) – позволяет осуществлять поиск имеющихся команд.

Строка закладок документов (3) – отображает все открытые документы.

Инструментальная область (4) – в ней видимы команды, пиктограммы которых расположены на трех строках. Команды распределены по

панелям в соответствии с их назначением: Системная, Геометрия, Правка, Размеры и другие. Для компактности некоторые команды объединены в группы, и на панели представлена только одна команда группы. Рядом с пиктограммой команды группы изображен треугольник.

Панель управления (5) – предназначена для изменения параметров документа. Она включает в себя несколько панелей – по умолчанию **Панель параметров** и **Панель дерева чертежа**.

Графическая область документа (6) – демонстрирует текущий прогресс проекта.

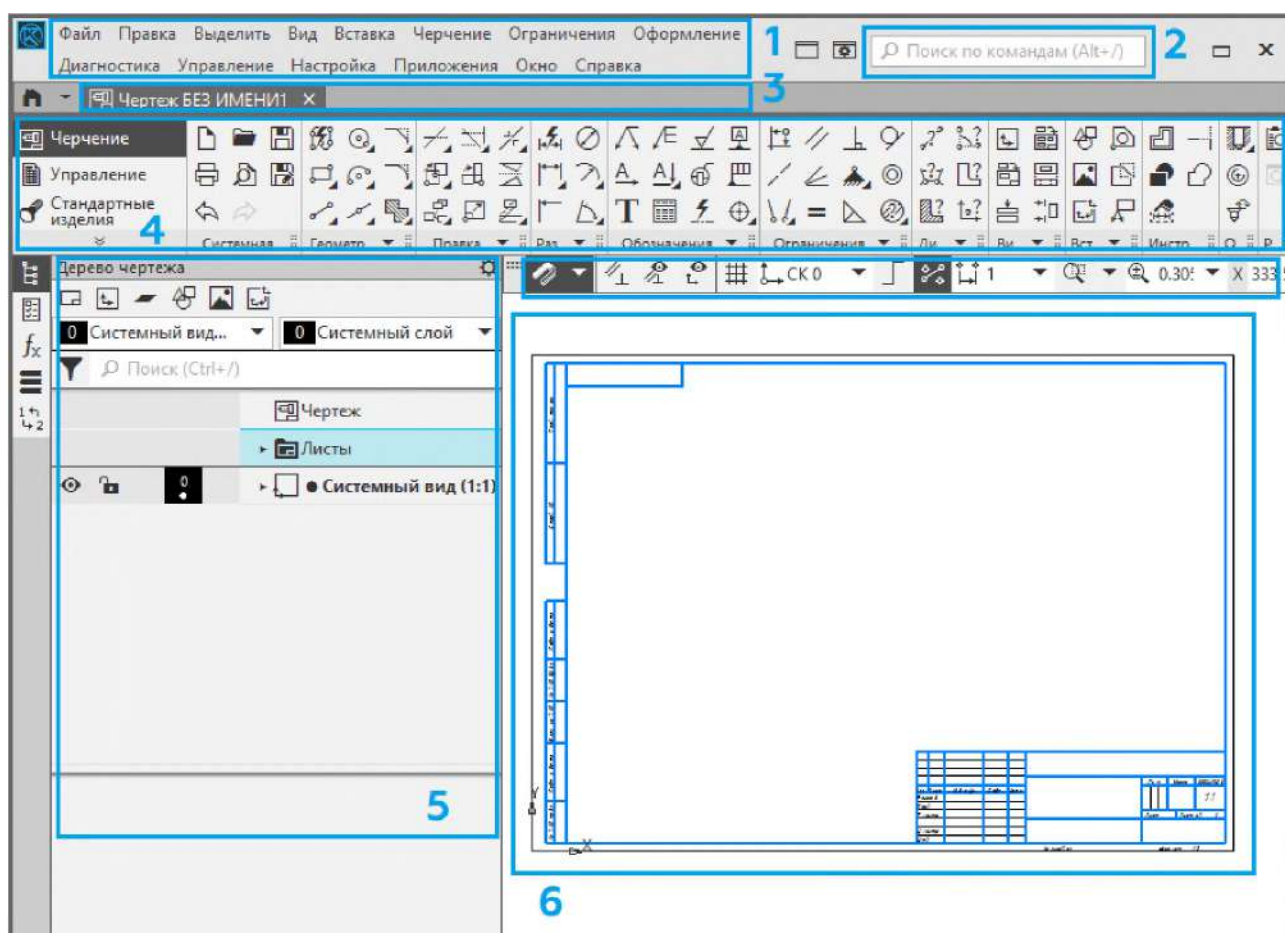


Рис. 1.1. Рабочее окно КОМПАС-График:

1 – главное меню; 2 – строка поиска команд;

3 – строка закладок документов;

4 – инструментальная область; 5 – панель управления;

6 – графическая область документа

Чертежи и спецификация

Общие требования к чертежам:

1. **Формат.** Графические работы выполняются на чертежных листах, форматы которых устанавливает ГОСТ 2.301 (А4, А3, А2, А1 и другие менее распространенные). Листы могут быть расположены вертикально или горизонтально (кроме листа А4, он всегда размещается горизонтально).

2. **Виды.** Чертеж обязательно содержит изображение изделия. Количество изображений (видов, разрезов, сечений) должно быть наименьшим, но обеспечивающим полное представление об изделии. Дополнительный вид на чертеже должен быть отмечен прописной буквой. Возле изображения, связанного с дополнительным видом, должна быть проставлена стрелка, указывающая направление взгляда. Над стрелкой и над полученным изображением следует нанести одну и ту же прописную букву. В случае выполнения разреза он должен быть отмечен надписью по типу «А-А» (всегда двумя буквами через тире).

3. **Штриховка.** При использовании разрезов или сечений на чертеже применяется штриховка. Для смежных сечений двух деталей следует применять встречную штриховку. Графическое обозначение материалов в сечениях в зависимости от вида материала подразумевает использование разной штриховки (ГОСТ 2.306).

4. **Размеры.** При выполнении чертежа детали необходимо указывать размеры всех элементов, выполняемых по данному чертежу. В случае работы со сборочным чертежом указывают габаритные и контактные размеры.

При нанесении размеров стоит придерживаться следующих правил:

- размерные линии предпочтительно наносить вне контура изображения;
- размерные числа и предельные отклонения не допускается разделять или пересекать какими бы то ни было линиями чертежа. На месте нанесения размерного числа осевые, центровые и линии штриховки прерываются;
- необходимо избегать пересечения размерных и выносных линий;

- размерные числа линейных размеров при различных наклонах размерных линий располагают всегда вдоль размерных линий;
- размеры нескольких одинаковых элементов изделия наносят один раз с указанием на полке линии-выноски количества этих элементов;
- при недостатке места для стрелок на размерных линиях, расположенных цепочкой, стрелки допускается заменять насечками или четко наносимыми точками.

5. **Отклонение** – это алгебраическая разность между размером (действительным, предельным и т. д.) и соответствующим номинальным размером. Различают верхнее и нижнее предельные отклонения. Предельные отклонения размеров следует указывать непосредственно после номинальных размеров.

6. **Допуск** – это разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или абсолютная величина алгебраической разности между верхним и нижним отклонениями.

7. **Квалитет** (степень точности) – совокупность допусков, соответствующих одинаковой степени точности для всех номинальных размеров.

8. **Посадка** – характер соединения двух деталей, определяемый разностью их размеров до сборки. Посадку обозначают дробью, в числителе которой указывают обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе – обозначение поля допуска вала.

Примеры оформления допусков, посадок, квалитетов и отклонений представлены на рис. 1.2.

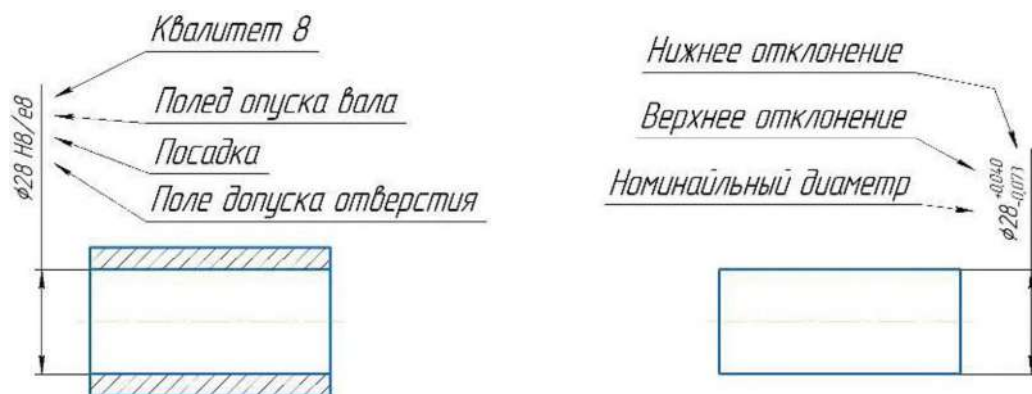


Рис. 1.2. Примеры оформления допусков, посадок, квалитетов и отклонений

9. **Шероховатость** поверхности характеризуется величиной микронеровностей реальной поверхности (в мкм), определяющей ее отклонение от идеально гладкой поверхности. Качество поверхности оценивается по шести способам измерения предельного отклонения профиля (пример: Ra и Rz). В обозначении шероховатости поверхности применяют один из знаков: $\sqrt{}$ – без указания способа обработки; $\sqrt{}/$ – со снятием материала; ∇ – без снятия материала.

При указании одинаковой шероховатости для всех поверхностей изделия обозначение шероховатости помещают в правом верхнем углу чертежа и на изображении не наносят.

10. **Техническая характеристика** содержит в себе основные характеристики изделия: мощность; число оборотов; коэффициент полезного действия и другие параметры, характеризующие изделие.

11. **Технические требования** размещают над основной надписью (или штампом). Технические требования содержат в себе следующую информацию: характеристики изделия; требования к качеству поверхностей; требования, предъявляемые к настройке и регулированию изделия, и т. д. В случае если на чертеже техническая характеристика не указана, то заголовков технических требований не указывается.

12. **Штамп** содержит информацию о самом документе; об изделии; об организации, выпустившей документ; о характере работы лиц, ответственных за выпуск документа, и т. п. Эти сведения вписываются в соответствующие графы.

Сборочные чертежи зачастую сопровождаются спецификацией, создание которой можно выполнить в программном продукте **КОМПАС**. **Спецификация** – это конструкторский документ, определяющий состав сборочной единицы, комплекса или комплекта и являющийся обязательным основным документом для всех изделий, кроме деталей.

Схемы

Помимо чертежей **КОМПАС-График** позволяет создавать различные виды схем: технологические, электрические, пневматические и т. д. **Схема**

– это документ, на котором показаны в виде условных изображений или обозначений составные части изделия и связи между ними.

Условные графические обозначения (УГО) элементов, устройств, функциональных групп и соединяющие их линии взаимосвязи следует располагать на схеме таким образом, чтобы обеспечивать наилучшее представление о структуре изделия и взаимодействии его составных частей.

При выполнении схем применяют следующие графические обозначения:

- УГО, установленные в стандартах Единой системы конструкторской документации, а также построенные на их основе;
- прямоугольники;
- упрощенные внешние очертания (в том числе аксонометрические).

При необходимости могут быть использованы нестандартизованные УГО.

УГО, для которых установлено несколько допустимых вариантов выполнения, различающихся геометрической формой или степенью детализации, следует применять исходя из вида и типа разрабатываемой схемы в зависимости от информации, которую необходимо передать на схеме графическими средствами;

Линии взаимосвязи выполняют толщиной от 0,2 до 1,0 мм в зависимости от форматов схемы и размеров УГО. Рекомендуемая толщина линий – от 0,3 до 0,4 мм;

УГО на схемах следует выполнять линиями той же толщины, что и линии взаимосвязи.

Все размеры УГО допускается пропорционально изменять. На рис. 1.3 приведен ряд стандартных элементов с рекомендованными к ним размерами при выполнении лабораторной работы № 2.

На схемах допускается помещать различные технические данные, характер которых определяется назначением схемы. Такие сведения указывают либо около УГО (по возможности справа или сверху), либо на свободном поле схемы.

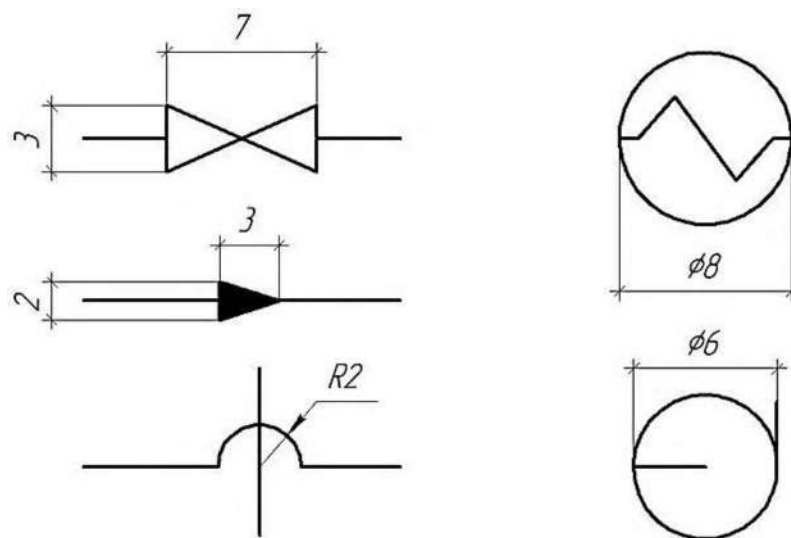


Рис. 1.3. Размеры стандартных элементов

Над основной надписью допускается помещать необходимые технические указания.

При выполнении чертежей и схем студенту могут быть полезны следующие ГОСТы системы ЕСКД:

- 1) ГОСТ 2.301-68. Форматы;
- 2) ГОСТ 2.302-68. Масштабы;
- 3) ГОСТ 2.305-2008. Изображения – виды, разрезы, сечения;
- 4) ГОСТ 2.303-68. Линии;
- 5) ГОСТ 2.304-81. Шрифты чертежные;
- 6) ГОСТ 2.307-2011. Нанесение размеров и предельных отклонений;
- 7) ГОСТ 2.309-73. Обозначения шероховатости поверхностей;
- 8) ГОСТ 25346-89. Основные нормы взаимозаменяемости. Единая система допусков и посадок. Общие положения, ряды допусков и основных отклонений;
- 9) ГОСТ 2.310-68. Нанесение на чертежах обозначений покрытий, термической и других видов обработки;
- 10) ГОСТ 2.316-2008. Правила нанесения надписей, технических требований и таблиц на графических документах;
- 11) ГОСТ 2.701-2008. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению.

Лабораторная работа № 1

СОЗДАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ СБОРОЧНОГО ЧЕРТЕЖА И СПЕЦИФИКАЦИИ В ПРОГРАММЕ КОМПАС-3D

Цель работы: приобретение и закрепление студентами навыков использования *КОМПАС-3D* при построении и оформлении сборочного чертежа, чертежа детали № 1 и спецификации выданной трехмерной модели сборочной единицы.

Описание работы: используя выданную модель сборочной единицы (табл. 1.1), необходимо построить и оформить в соответствии с нормативными требованиями сборочный чертеж, чертеж детали № 1 и спецификацию.

Таблица 1.1

Исходные данные

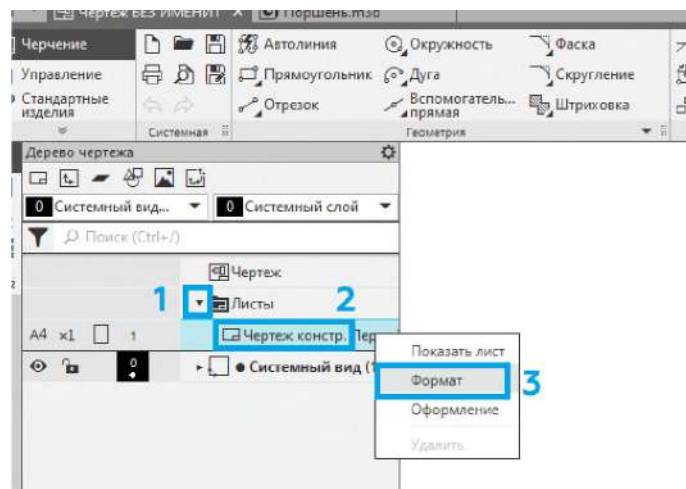
Вариант	Номер схемы	Вариант	Номер схемы	Вариант	Номер схемы
1	1	11	11	21	6
2	2	12	12	22	7
3	3	13	13	23	8
4	4	14	14	24	9
5	5	15	15	25	10
6	6	16	1	26	11
7	7	17	2	27	12
8	8	18	3	28	13
9	9	19	4	29	14
10	10	20	5	30	15

Порядок выполнения лабораторной работы

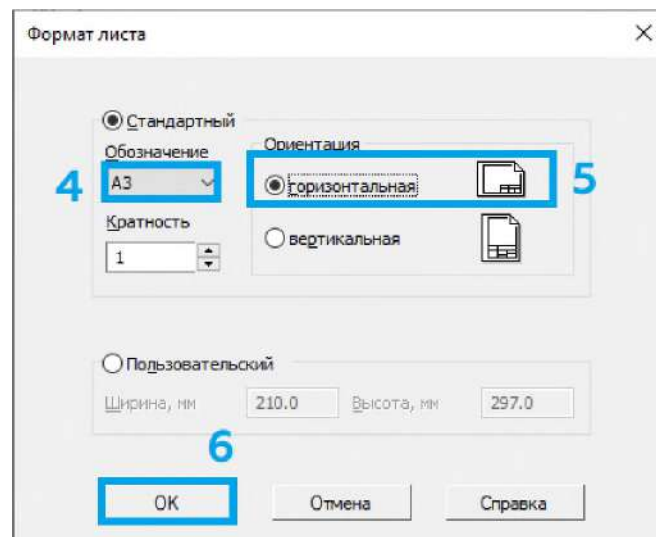
Построение чертежа модели сборочной единицы

1. Настраиваем формат листа (рис. 1.4). Для этого в *Дереве чертежа* раскрываем раздел *Листы* (1), нажимаем правой кнопкой мыши (ПКМ) на *Чертеж констр.* (2) и выбираем *Формат* (3). После этого выбираем формат листа *A3* (4) и ориентацию *Горизонтальную* (5), после чего нажимаем *Применить* (6).

Примечание: формат и расположение листа подбираются под каждую деталь индивидуально.



а

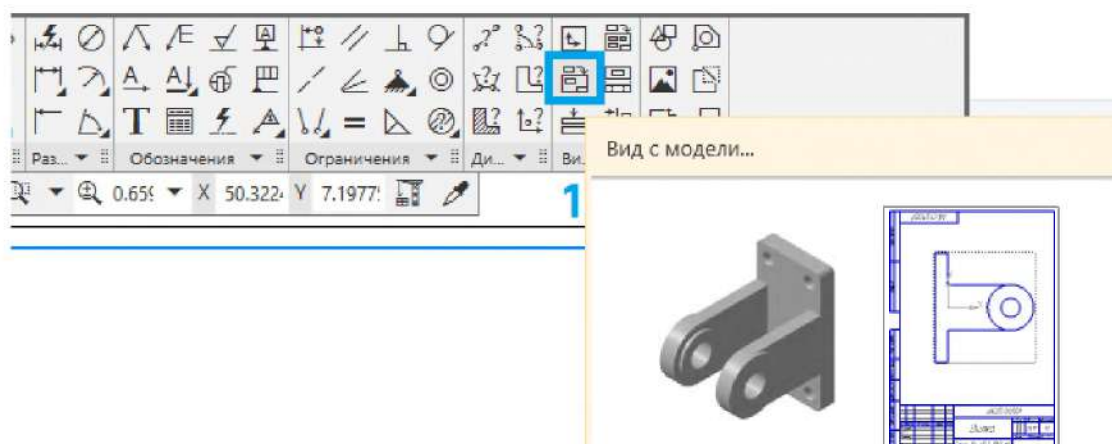


б

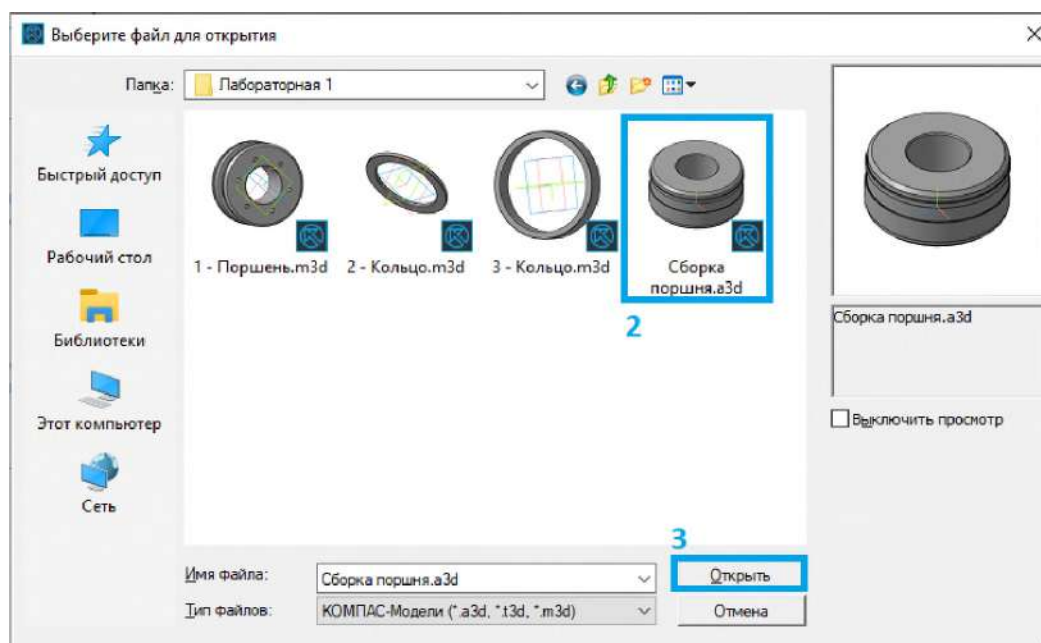
Рис. 1.4. Изменение формата листа

2. Добавляем основной вид модели (рис. 1.5). Для этого нажимаем кнопку **Вид с модели...** (1) на панели инструментов, выбираем модель сборочной единицы (2) и нажимаем **Открыть** (3). После этого в окне параметров выбираем ориентацию модели **Слева** (4), масштаб **1:1** (5) и располагаем изображение модели в верхнем левом углу (6) нажатием левой кнопки мыши (ЛКМ) в нужную область.

Примечание: масштаб и ориентация модели подбираются под каждую деталь индивидуально.

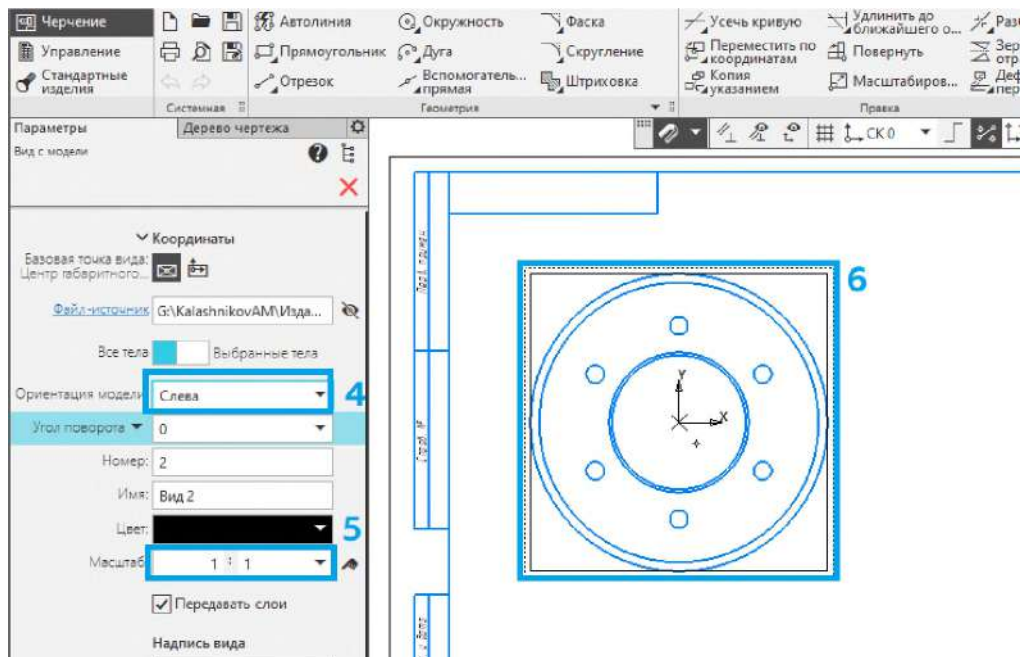


а



б

Рис. 1.5. Добавление основного вида (начало)



6

Рис. 1.5. Добавление основного вида (окончание)

3. Добавляем осевые линии (рис. 1.6). Для этого нажимаем на кнопку **Автоосевая** (1) и выбираем нужную окружность (2), после чего размещаем осевые линии.

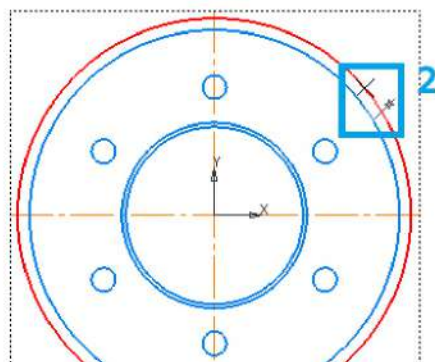
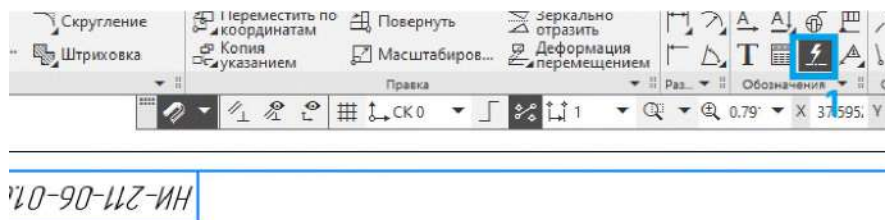


Рис. 1.6. Создание осевых линий

4. Добавляем сечение сборочной модели (рис. 1.7). Для этого нажимаем на кнопку *Линия разреза/сечения* (1), устанавливаем линию разреза (2) и смещаем вид в сторону (3).

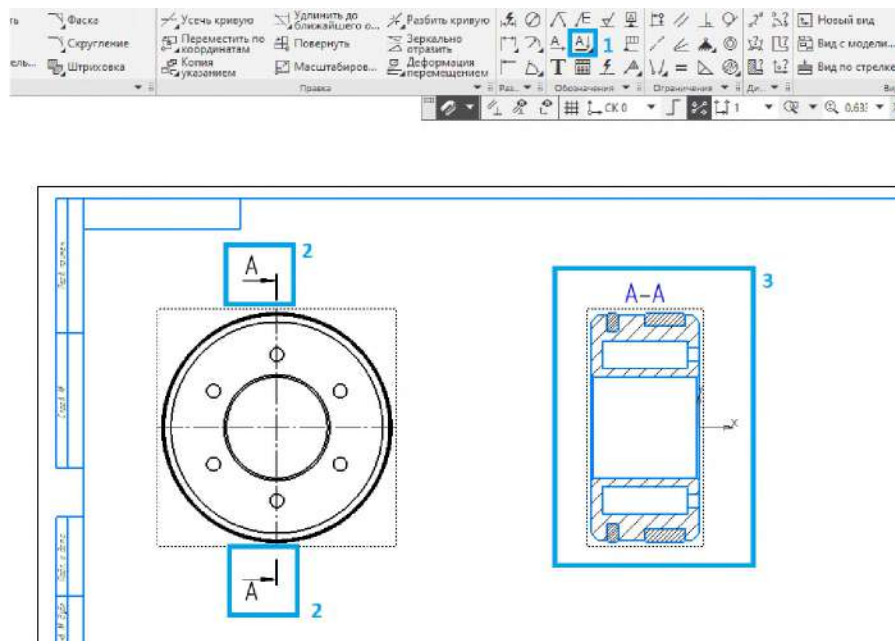


Рис. 1.7. Создание вида в разрезе

5. С помощью команды *Автоосевая* достраиваем необходимые осевые линии (рис. 1.8).

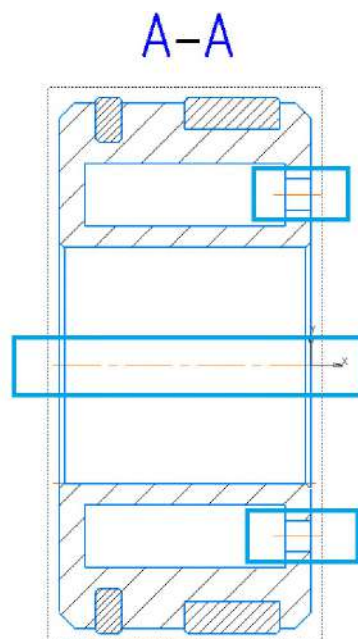


Рис. 1.8. Создание осевых линий

6. Возвращаемся к первому виду и с помощью операций **Отрезок** (1), **Окружность** (2) и **Копия по окружности** (3) достраиваем необходимые осевые линии (рис. 1.9).

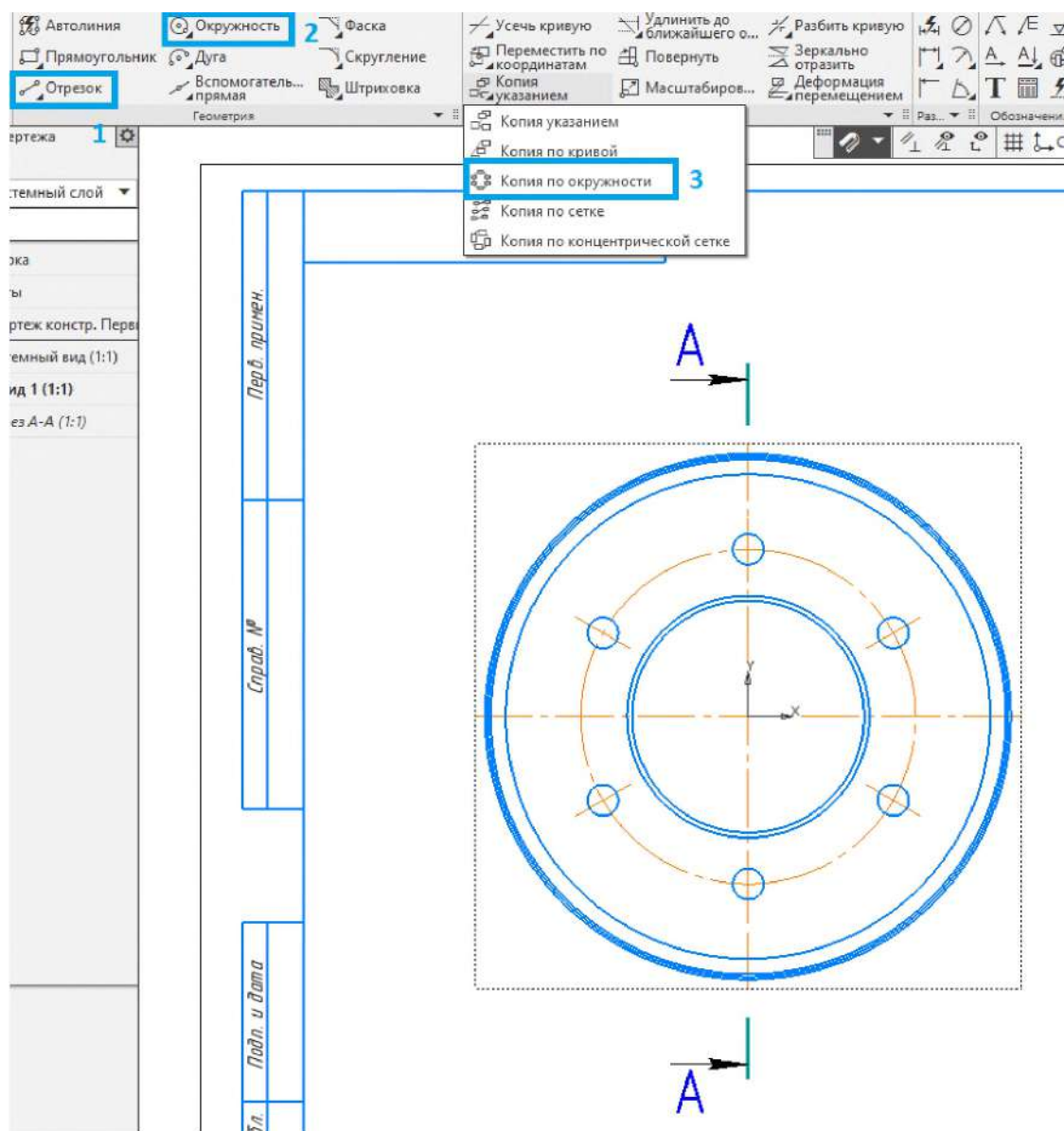


Рис. 1.9. Создание осевых линий

7. Проставляем позиционные линии – выноски. Для этого нажимаем кнопку **Обозначение позиций** (1) и указываем точку, на которую указывает выноска. После чего указываем точку начала полки (2). Очередной номер позиции присваивается автоматически. Построение объекта заканчивается щелчком на галочку (3) (рис. 1.10).

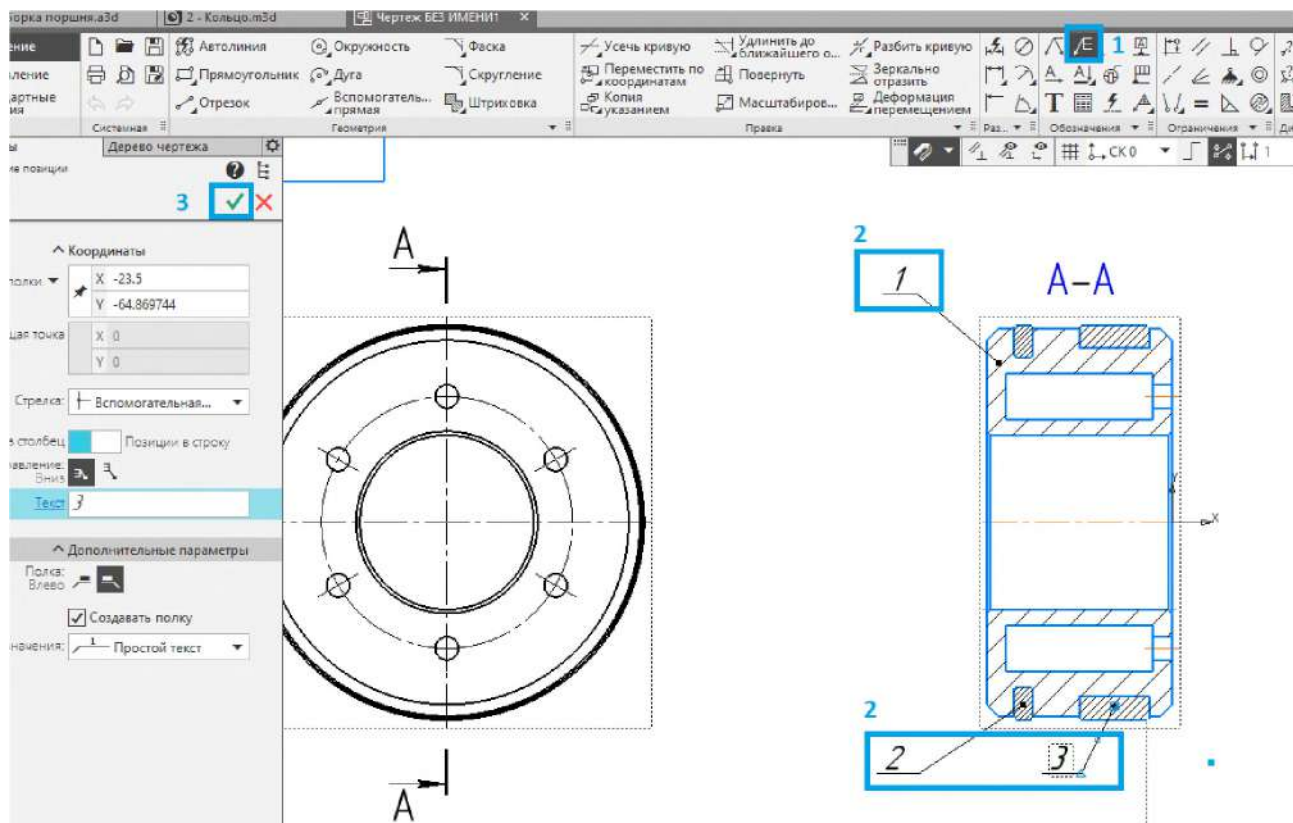
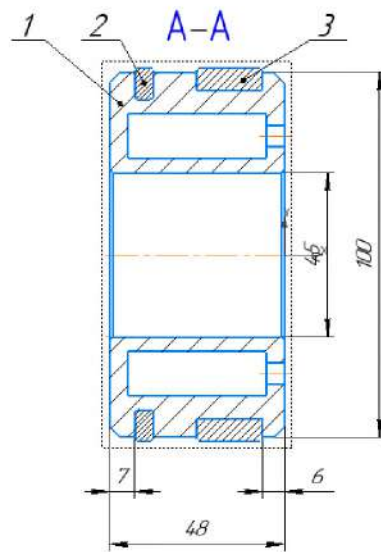
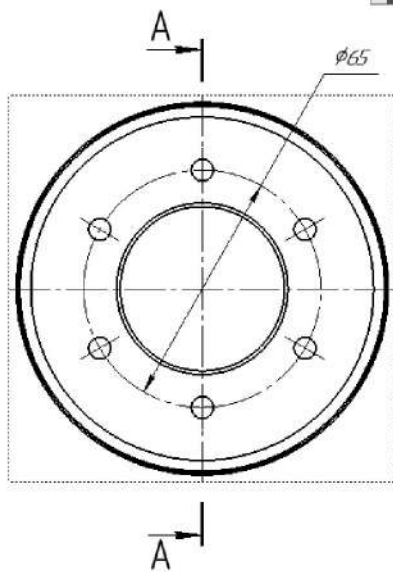


Рис. 1.10. Указание позиций

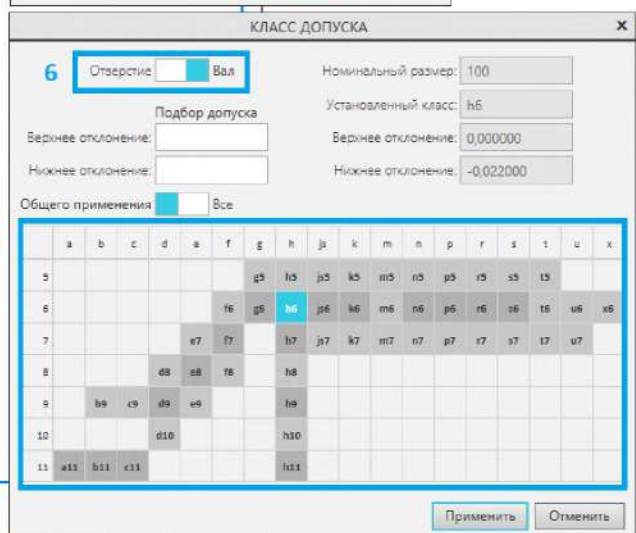
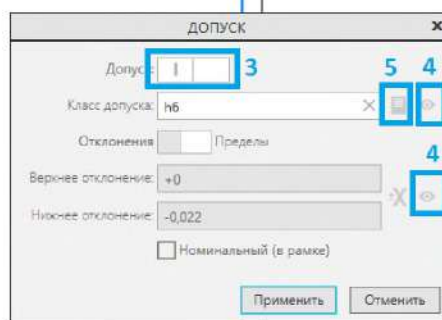
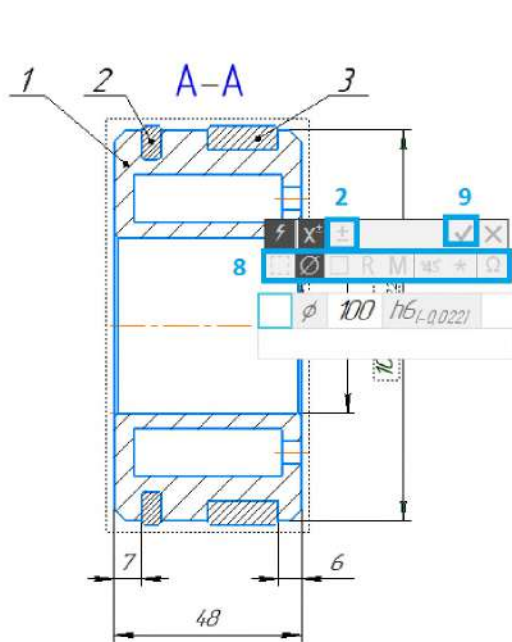
8. С помощью операции **Авторамер** (1) проставляем габаритные и соединительные размеры на созданных видах (рис. 1.11, а). Чтобы добавить допуски, дважды нажимаем ЛКМ на необходимый размер и выполняем следующие операции (рис. 1.11, б):

- нажимаем на кнопку настройки допусков (2);
- включаем допуски (3);
- делаем видимыми класс допуска и отклонение (4);
- заходим в библиотеку допусков (5);
- выбираем тип поверхности: вал или отверстие (6);
- выбираем необходимый класс допуска (7);
- при необходимости добавляем знаки: диаметр, квадрат, радиус, метрическая резьба и т. д. (8);
- чтобы применить изменения, нажимаем галочку (9).

Примечание: размер шрифта рекомендуется использовать 3,5 или 5 мм.



а



б

Рис. 1.11. Указание размеров и допусков

9. Для того чтобы добавить технические требования, переходим в раздел **Оформление** (1) – **Технические требования** (2) – **Задать/изменить** (3) (рис. 1.12). После чего вводим необходимый текст и применяем изменения (4). Для того чтобы изменить расположение текста на листе, необходимо нажать на него ПКМ и выбрать **Разместить**.

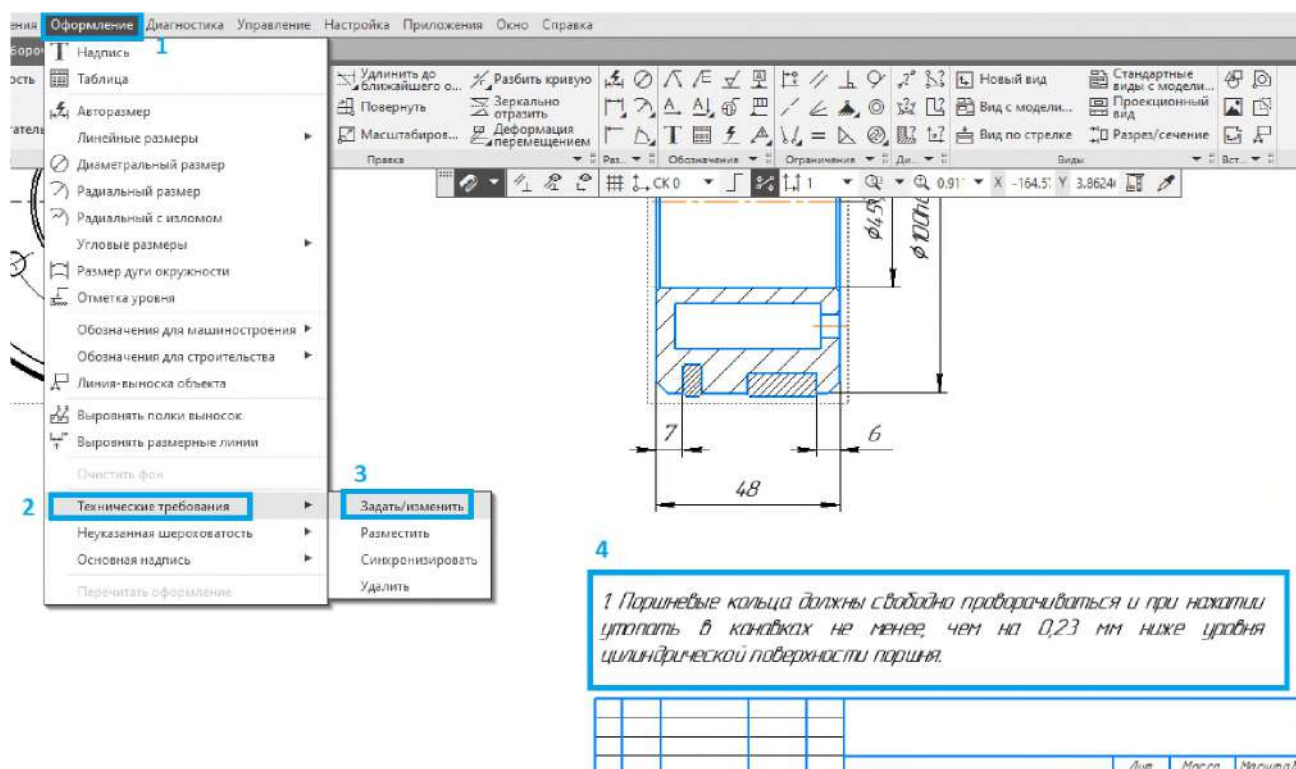


Рис. 1.12. Добавление технических требований

10. Заполняем штамп чертежа. Для этого нажмем на него дважды ЛКМ и введем необходимые данные (рис. 1.13):

- шифр, который должен содержать следующую информацию: группа (**ПБ-211**), вариант (**05**), номер лабораторной работы (**01**), номер детали (**01.00.000**) и тип чертежа (**СБ** – сборочный чертеж);
- ФИО студента и преподавателя;
- название детали и вид чертежа;
- данные о группе и вузе.

				ТМ0-191-05-01.00.000 СБ		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лит	Масса
Разраб.	Ражков И.И.					1,65
Проб.	Калашников А.М.					11
Т.контр.					Лист	Листов
Н.контр.					ТМ0-191, ОмГТУ	
Утв.						

Рис. 1.13. Заполнение штампа

11. Сохраняем чертеж в формате JPEG. Для этого переходим **Файл – Сохранить как...** – **Тип файла – JPEG (*.jpg)**, задаем место сохранения, имя файла и нажимаем Сохранить. В появившемся окне выбираем Разрешение, равное **150** точкам на дюйм, и ставим галочку напротив **Оттенки серого** (рис. 1.14). Пример готового сборочного чертежа представлен на рис. 1.15.

Примечание: если есть необходимость изменить толщину всех линий, то можно изменить **Масштаб** листа.

Настройка записи в формат JPG

Параметры документа

Размер, мм

420.0 x 297.0

Настройка

Цвет

установленный для вида

☐ Все линии тонкие

Масштаб

1.000

Параметры растра

Цветность

24 разряда

Разрешение, точек на дюйм

150

☒ Оттенки серого

Размер изображения

2486 x 1759 точек

ОК

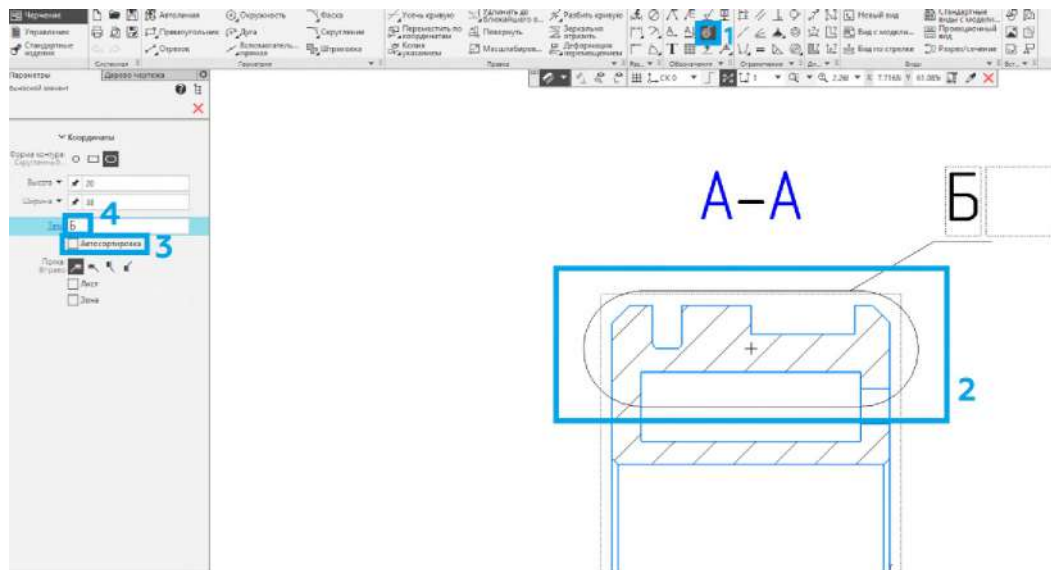
Отмена

Справка

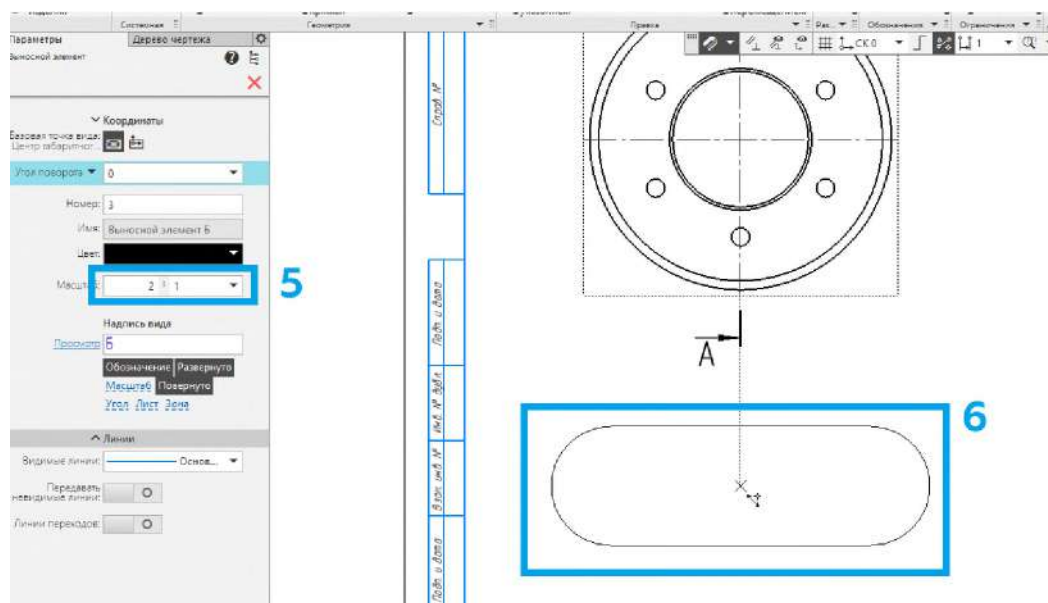
Рис. 1.14. Настройка изображения

2. Создаем выносной вид (рис. 1.17). Для этого нажимаем на кнопку **Выносной элемент** (1), выбираем выносимую область (2), убираем галочку напротив пункта **Автосортировка** (3), вписываем свое значение (4) и обозначаем границы выносного элемента. После этого выставляем масштаб 2:1 (5) и убираем выносимый вид вниз (5), зафиксировав положение, нажатием ЛКМ в нужную точку.

Примечание: масштаб подбирается с учетом габаритов детали.



а



б

Рис. 1.17. Создание выносного элемента

3. При необходимости изменяем шаг штриховки сечений (рис. 1.18). Для этого выделяем необходимые области (1) и в разделе параметров выбираем значение 3 (2).

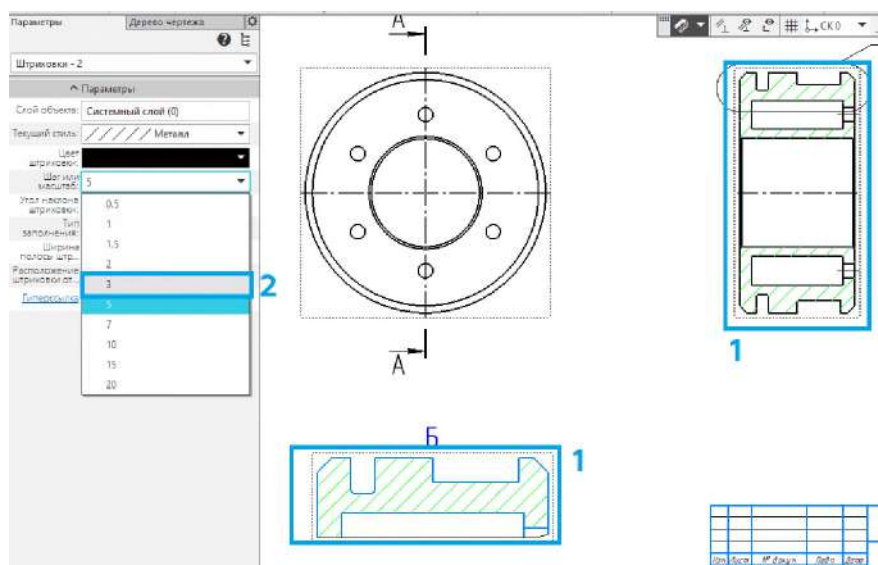


Рис. 1.18. Изменение шага штриховки

4. Указываем все линейные размеры и проставляем допуски, как делали это в п. 8 сборочного чертежа. Рекомендованный размер шрифта для данной работы – 3,5 или 5 мм. Пример готового чертежа представлен на рис. 1.19.

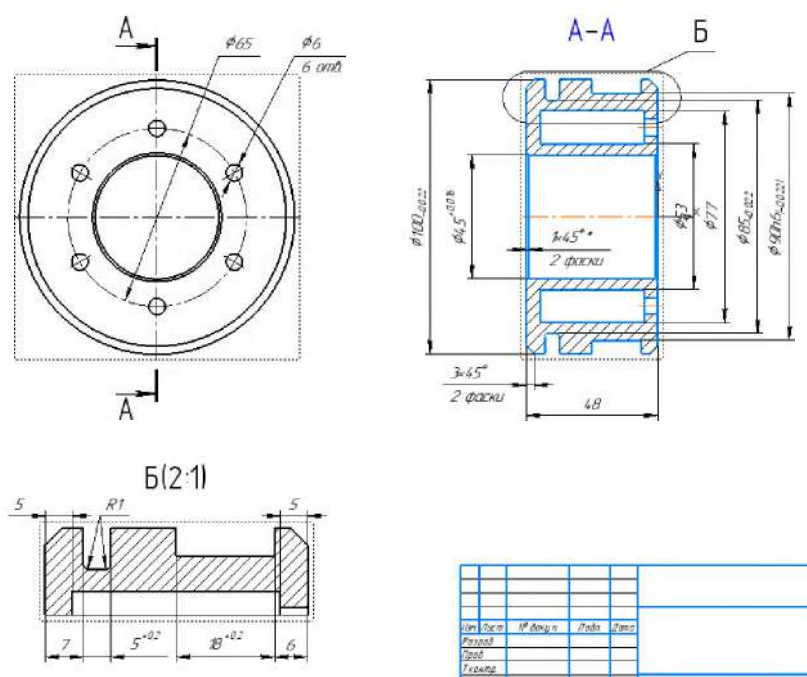


Рис. 1.19. Указанные размеры и допуски

5. Указываем шероховатости (рис. 1.20).

5.1. Указываем неуказанные шероховатости (рис. 1.20, *а*). Для этого выбираем **Оформление** (1) – **Неуказанная шероховатость** (2) – **Задать/изменить** (3). После этого слева откроется меню, в котором необходимо выбрать следующие настройки:

- включаем **Авторазмещение** (4), чтобы ограничить перемещение неуказанной шероховатости;
- устанавливаем необходимый **Способ обработки** (5): не устанавливается, с удалением слоя материала или без удаления слоя материала;
- вводим необходимое значение шероховатости (6);
- ставим галочку напротив ячейки **Добавить знак в скобках** (7) для того, чтобы показать, что неуказанная шероховатость действительна только для тех поверхностей, у которых не обозначена шероховатость на самом чертеже.

После этого нажимаем на галочку (8) и в правом верхнем углу появится обозначение неуказанной шероховатости (9).

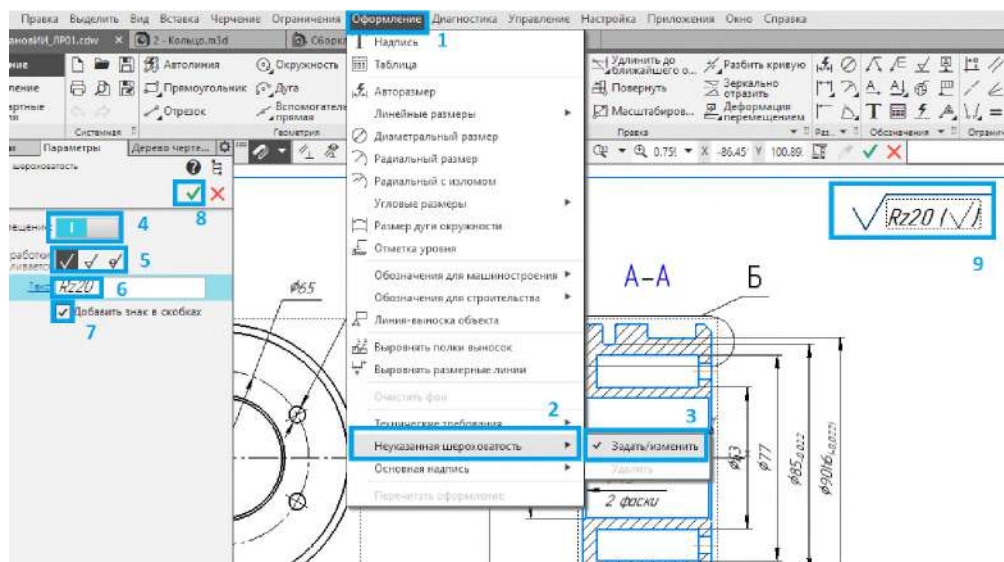
5.2. Указываем шероховатости на чертеже (рис. 1.20, *б*). Для этого нажимаем на кнопку **Шероховатость** (10) и выбираем следующие настройки:

- устанавливаем необходимый **Способ обработки** (11): не устанавливается, с удалением слоя материала или без удаления слоя материала;
- вводим необходимое значение шероховатости (6).

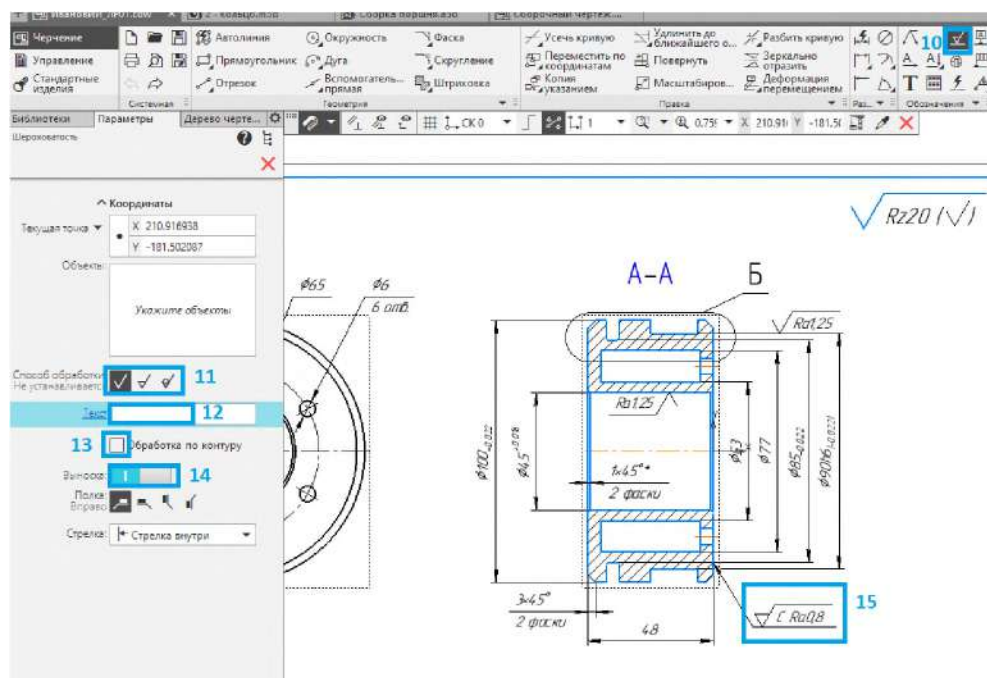
Примечание: при необходимости указывается направление неровностей: **С** – кругообразное, **Р** – радиальное, **М** – произвольное и т. д.;

- при необходимости ставим галочку напротив **Обработка по контуру** (13);
- при необходимости включаем **Выноску** (14) для того, чтобы сдвинуть обозначение шероховатости.

После этого шероховатость можно разместить на чертеже (15).



а



б

Рис. 1.20. Указанные шероховатости

6. Указываем базу и допуск формы (рис. 1.21).

6.1. Для указания базы нажимаем кнопку **База** (1) и устанавливаем её на чертеже (2). При необходимости буквенное значение может быть изменено.

6.2. Для указания допуска формы нажимаем кнопку **Допуск формы** (3) и вводим необходимые значения (4). Для того чтобы изменить знак биения, нажимаем на иконку **Спецзнак** (5) и выбираем необходимое значение в открывшемся окне (6).

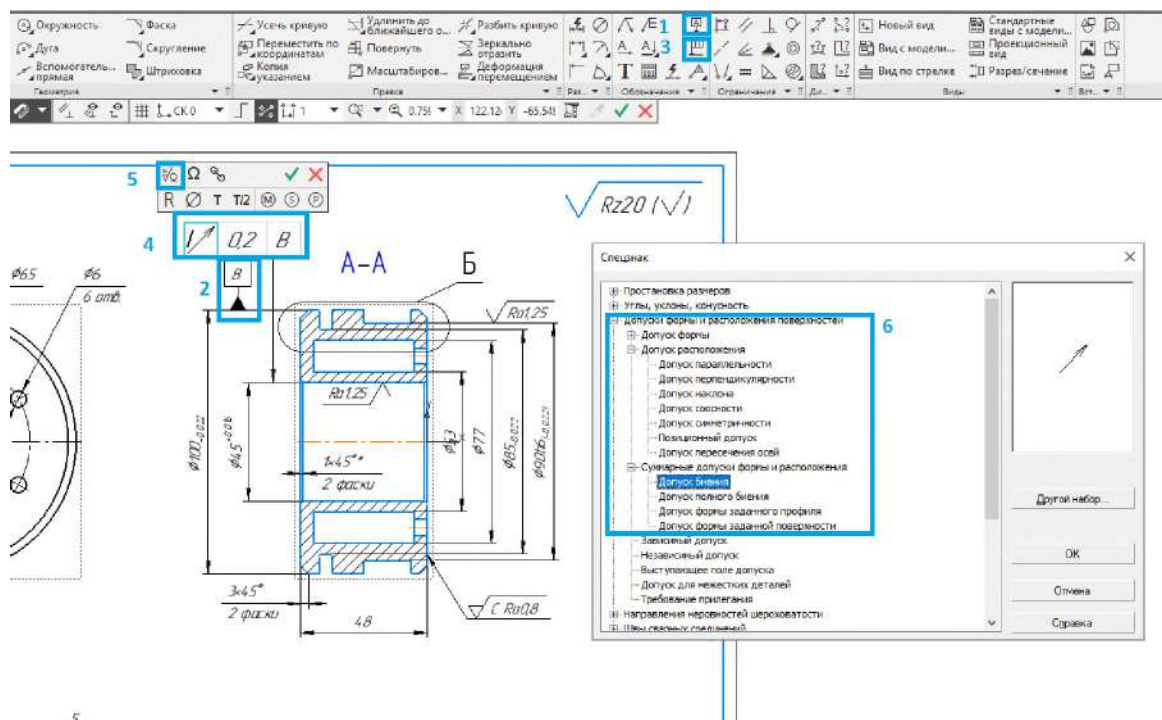


Рис. 1.21. Указанные базы и допуск формы

7. Указываем технические требования и заполняем штамп, как это выполнялось в пп. 9 и 10 сборочного чертежа (рис. 1.22).

1 * Размер для справок.
 2. HRC 32...36.
 3. Неуказанные радиусы скруглений 0,1; 0,4.

				ТБ-212-06-0100.001			
Изм./Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Поршень	Лит.	Масса	Масштаб
Разраб.	Иванов И.И.					13	11
Проб.	Исаев А.В.						
Т.контр.					Лист	Листов	1
Н.контр.				СЧ 15 ГОСТ 1412-85	ОМГТУ, ТБ-212		
Утв.				Калинин	Филипп 12		

Рис. 1.22. Заполнение технических требований и штампа

8. Сохраняем чертеж, как это делали в п. 11 сборочного чертежа. Отличительной чертой чертежа детали является то, что у него указывается

[illegible]

9. Сохраняем проект сборочного чертежа в персональную папку.

1. Начинаем формирование спецификации с создания среды. Выполняем последовательно команды **Файл – Создать** и нажимаем кнопку на панели управления **Спецификация**, после чего на экране появится новый лист по умолчанию формата А4.

27

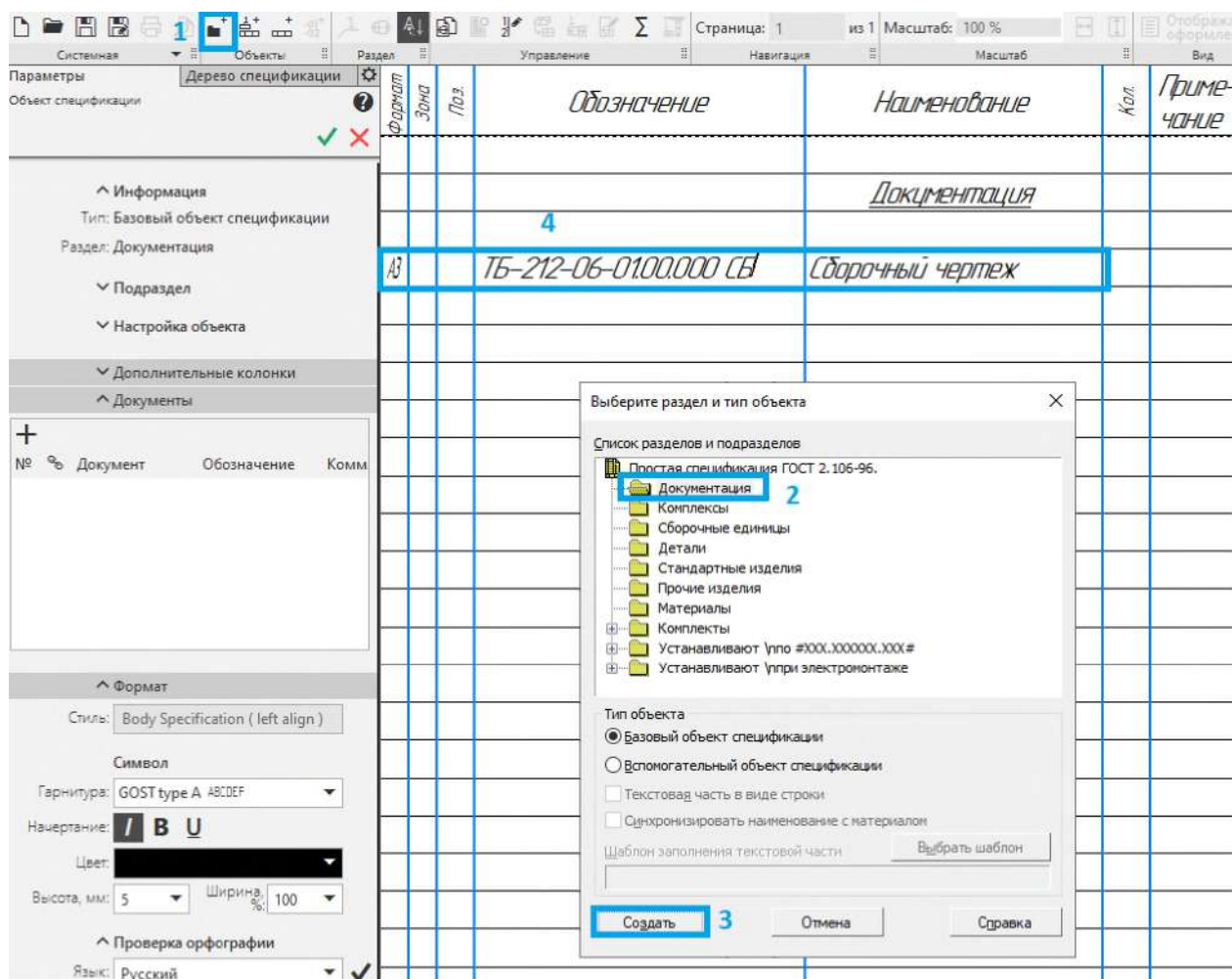


Рис. 1.24. Раздел «Документация»

3. Создаем аналогичным образом разделы «Детали» и «Стандартные изделия» и заполняем необходимые поля (рис. 1.25). Для того чтобы добавить новые поля в пределах одного раздела, необходимо нажать на кнопку **Добавить базовый объект** (1), а для того чтобы удалить лишний базовый объект, необходимо нажать на кнопку **Правка** (2) и выбрать **Удалить объект**.

Примечания: 1) помимо этих разделов могут быть использованы и другие, в зависимости от рассматриваемой конструкции;

2) если для детали не делался чертеж, то в столбце «Формат» пишется «БЧ» – без чертежа. Для стандартных изделий формат указывать не нужно, так как для них чертежи не делаются.

Спецификация БЕЗ И... x 2 - Кольцо.m3d Сборка поршня.а3d ИвановИИ_ПР01.cdw Сборочный чертеж...

Страница: 1 из 1 Масштаб: 100 %

Отображать оформление

Информация
Тип: Пустая строка
Раздел: Стандартные изделия

Зона	Лист	Обозначение	Наименование	Кол.	Примечание
			Документация		
А3		ТБ-212-06-0100.000 СБ	Сборочный чертеж		
			Детали		
А3	1	ТБ-212-06-0100.001	Поршень	1	
			Стандартные изделия		
	2		Кольцо М102х5 ГОСТ 9515-81	1	
	3		Кольцо 4102х18 ГОСТ 9515-81	1	

Рис. 1.25. Разделы «Детали» и «Стандартные изделия»

4. Настраиваем штамп, для этого нажимаем на кнопку **Отобразить оформление** (1) (рис. 1.26, а) и заполняем необходимые поля (рис. 1.26, б).

Настройка Приложения Окно Справка

3d Сборка поршня.а3d ИвановИИ_ПР01.cdw Сборочный чертеж...

Страница: 1 из 1 Масштаб: 100 %

Отображать оформление

Зона	Лист	Обозначение	Наименование	Кол.	Примечание
			Документация		
А3		ТБ-212-06-0100.000 СБ	Сборочный чертеж		

а

				ТБ-212-06-0100.000		
Изм./Лист	№ докум.	Подп.	Дата			
Разраб.	Иванов И.И.					
Проб.	Исаев А.В.					
Н.контр.						
Утв.						
				Поршень		
				Лист	Лист	Листов
						1
				ОМГТУ, ТБ-212		

б

Рис. 1.26. Заполнение штампа

5. Сохраняем спецификацию, как это делали в п. 11 сборочного чертежа. Пример готовой спецификации представлен на рис. 1.27.

Формат		Зона	Лист	Обозначение	Наименование	Кол.	Примечание
Перед. примеч.							
					Документация		
А3				ТБ-212-06-0100.000 СБ	Сборочный чертеж		
					Детали		
А3				1 ТБ-212-06-0100.001	Поршень	1	
					Стандартные изделия		
				2	Кольцо М102х5 ГОСТ 9515-81	1	
				3	Кольцо У102х18 ГОСТ 9515-81	1	
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Изд. № докум.							
Взам. инв. №							

Рис. 1.27. Готовый чертеж

6. Сохраняем проект сборочного чертежа в персональную папку.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Описание работы (с исходной схемой и таблицей для своего варианта).
4. Этапы построения.
5. Результаты работы (готовый сборочный чертеж, чертеж детали № 1 и спецификация на отдельных листах).
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Как изменить формат листа?
2. Для чего используется операция «Выносной элемент»?
3. Для чего нужны «Технические требования» и как их добавить на чертеж в КОМПАС-3D?
4. Что такое допуски и квалитеты? Как они обозначаются на чертеже?
5. Что такое шероховатость и для чего она обозначается? При обозначении шероховатости что означают Ra, Rz и какие варианты еще существуют? Как обозначается шероховатость с удалением и без удаления слоя материала? При добавлении шероховатости как указывается условное обозначение «направление неровностей»?
6. Что такое допуск формы и как он обозначается на чертеже?
7. Основные этапы выполнения работы.

Лабораторная работа № 2

СОЗДАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ В ПРОГРАММЕ КОМПАС-3D

Цель работы: приобретение и закрепление студентами навыков использования *КОМПАС-3D* при построении схемы технологической установки и её оформление.

Описание работы: используя рисунок в Приложении А, согласно своему варианту (табл. 1.2), необходимо в *КОМПАС-3D* повторить схему технологической установки и выполнить её оформление.

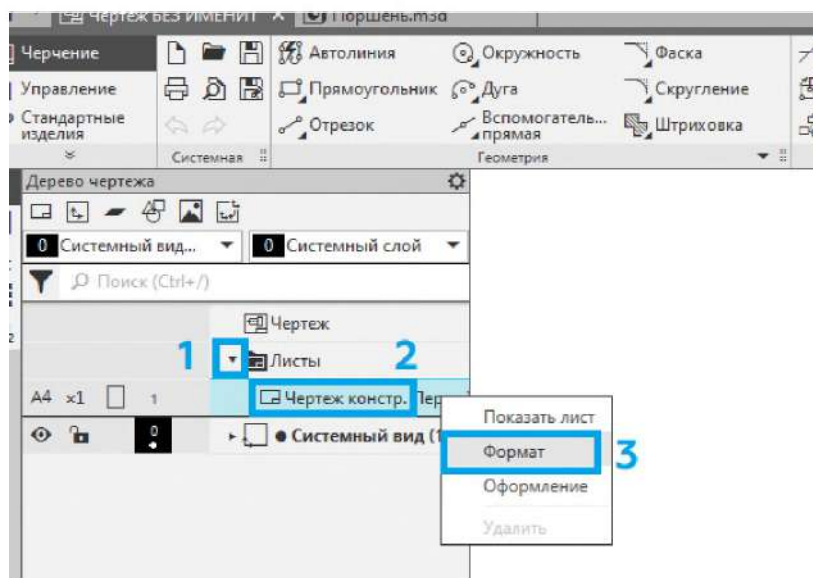
Таблица 1.2

Исходные данные

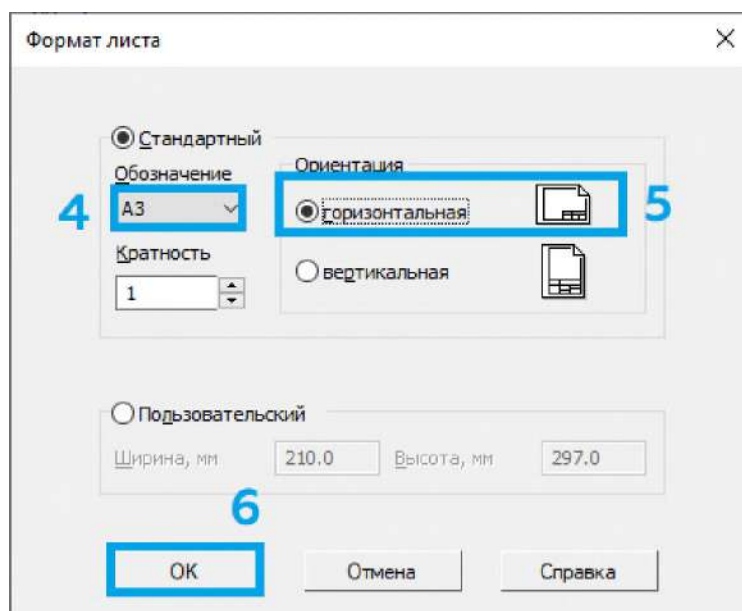
Вариант	Номер схемы	Вариант	Номер схемы	Вариант	Номер схемы
1	1	11	1	21	1
2	2	12	2	22	2
3	3	13	3	23	3
4	4	14	4	24	4
5	5	15	5	25	5
6	6	16	6	26	6
7	7	17	7	27	7
8	8	18	8	28	8
9	9	19	9	29	9
10	10	20	10	30	10

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Настраиваем формат листа. Для этого в *Дереве чертежа* раскрываем раздел *Листы* (1), нажимаем правой кнопкой мыши (ПКМ) на *Чертеж констр.* (2) и выбираем *Формат* (3) (рис. 1.28, а). После этого выбираем формат листа *A3* (4) и ориентацию *Горизонтальную* (5), после чего нажимаем *Применить* (6) (рис. 1.28, б).



а



б

Рис. 1.28. Изменение формата листа

2. Добавляем вспомогательные прямые для ограничения габаритов технологической схемы. Для этого на панели инструментов нажимаем на кнопку **Вспомогательная прямая** (1) и нажатием на ЛКМ по рабочему полю указываем габариты схемы (рис. 1.29).

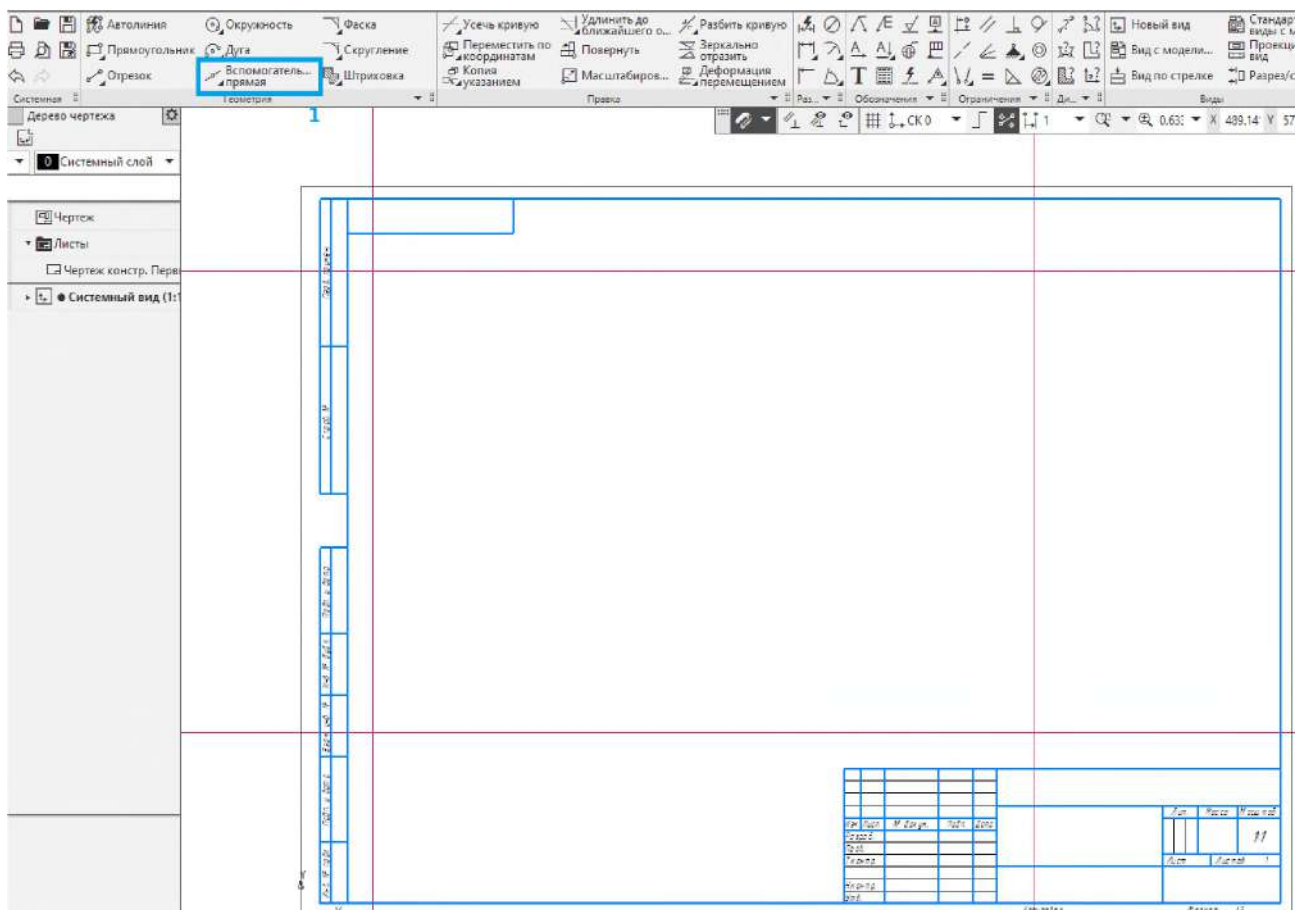


Рис. 1.29. Вспомогательные прямые

3. Используя стандартные инструменты, размещаем основные элементы схемы, такие как колонна, печь, реактор, сепаратор, насос и т. д., на схеме (рис. 1.30).

Примечание: одинаковые элементы схемы должны иметь аналогичные размеры.

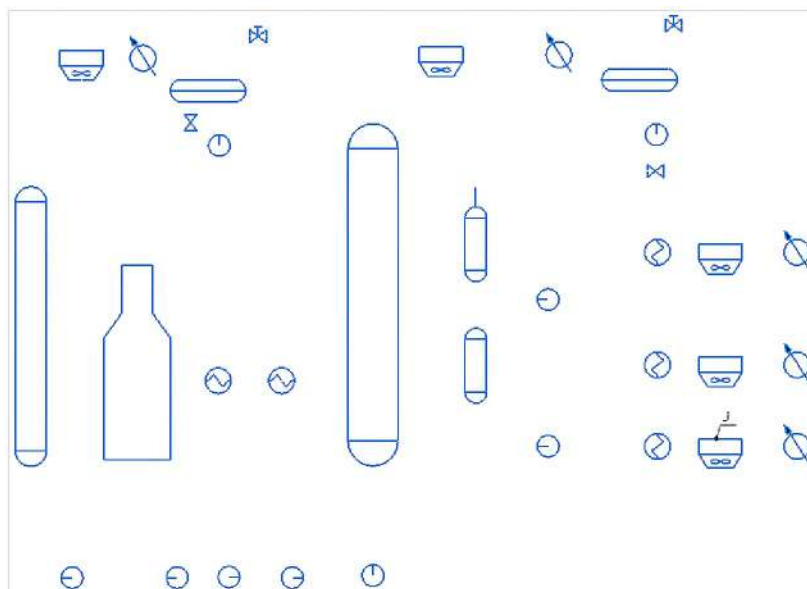


Рис. 1.30. Добавление основных элементов

4. С помощью операции *Отрезок* добавляем линии потоков и стрелками (при необходимости внутри стрелки используется *Заливка*) обозначаем их направление (рис. 1.31). В точке пересечения потоков добавляется дуга (для этого можно использовать операцию *Дуга* или *Окружность*, у которой с помощью операции *Усечь кривую* удаляется половина).

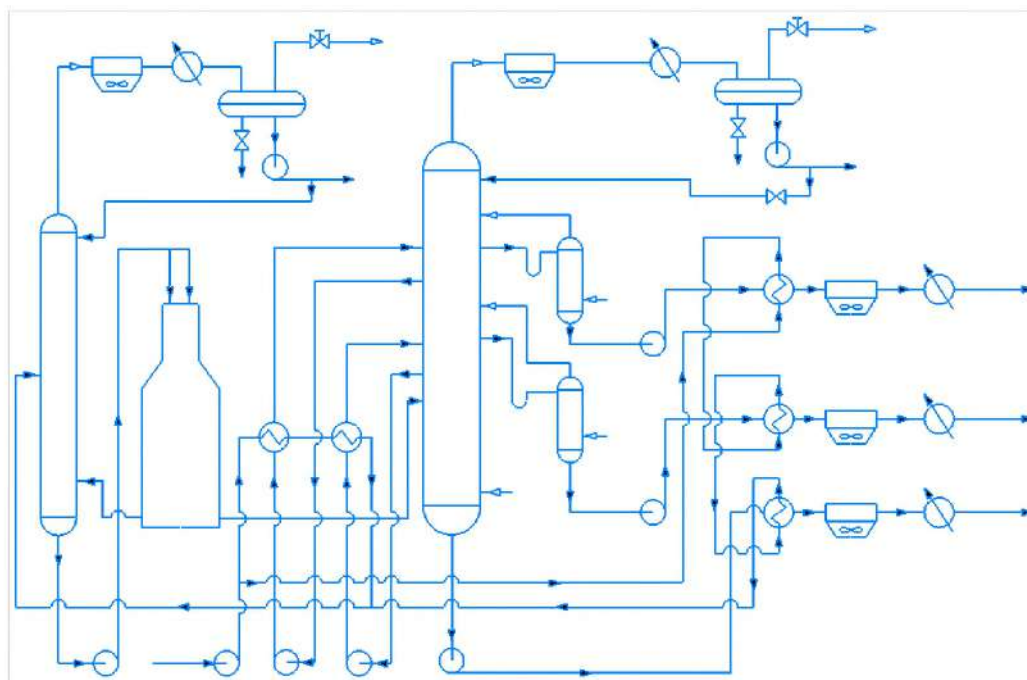


Рис. 1.31. Добавление потоков

5. С помощью инструмента **Марка/позиционное обозначение с линейной выноской** (1) добавляем позиции элементов схемы, а с помощью инструмента **Надпись** (2) – подписи на схеме (рис. 1.32). Рекомендуемый размер шрифта при выполнении данной работы – 3,5 мм.

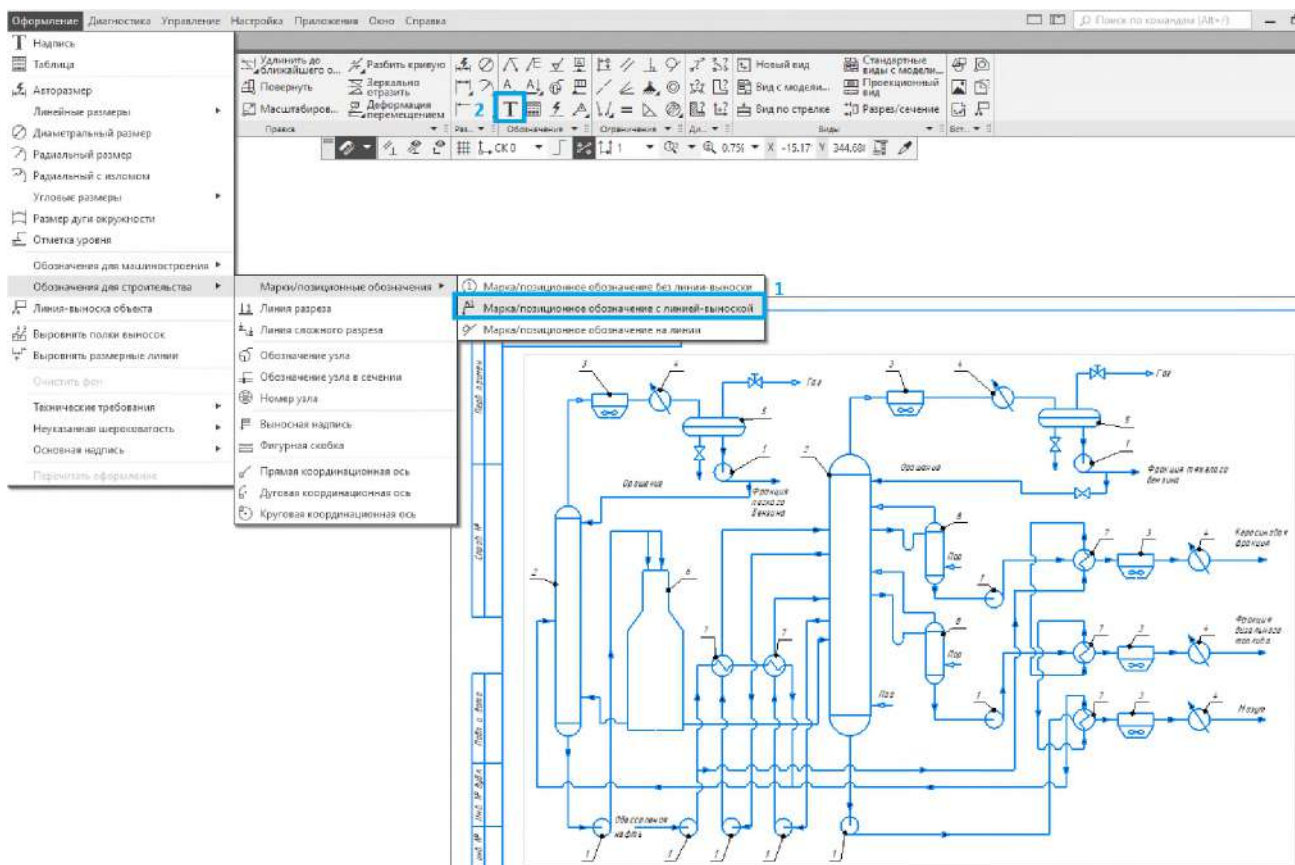


Рис. 1.32. Добавление позиций и подписей

6. С помощью инструмента **Таблица** (1) добавляем экспликацию в нижнем правом углу схемы (2) (рис. 1.33). При настройке экспликации указываем число столбцов и строк (3), ширину и высоту ячеек (4), после чего нажимаем **Создать** (5). Размер шрифта – 3,5 мм, выравнивание – по центру.

Примечание: позже можно будет изменить ширину ячеек до нужного размера, удерживая их поля.

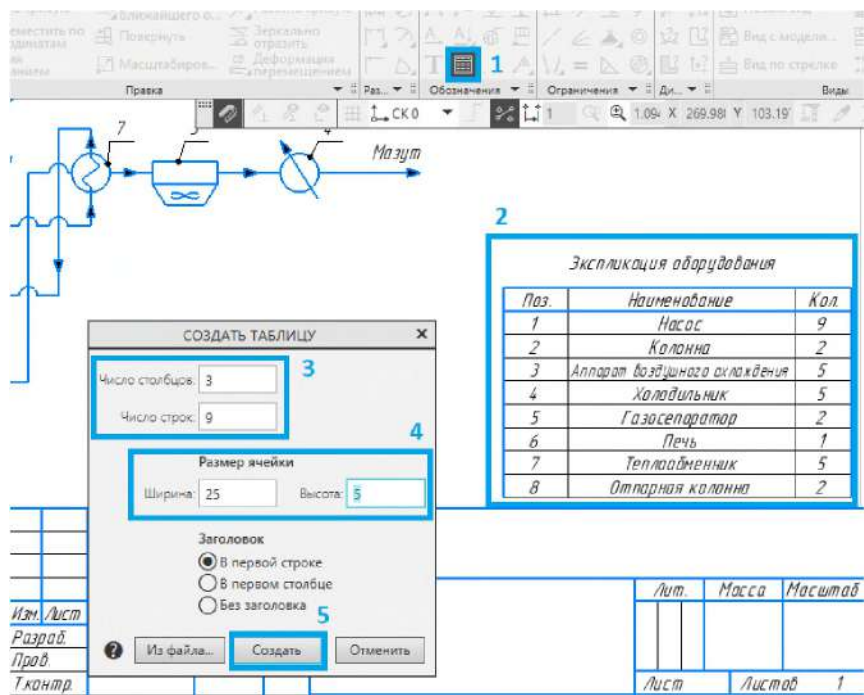


Рис. 1.33. Добавление экспликации

7. В нижнем левом углу добавляется расшифровка обозначения основного оборудования (рис. 1.34).

Примечание: при работе со схемами, как правило, используется один из способов обозначения – графический или в виде экспликации, но в рамках освоения дисциплины продемонстрированы оба.

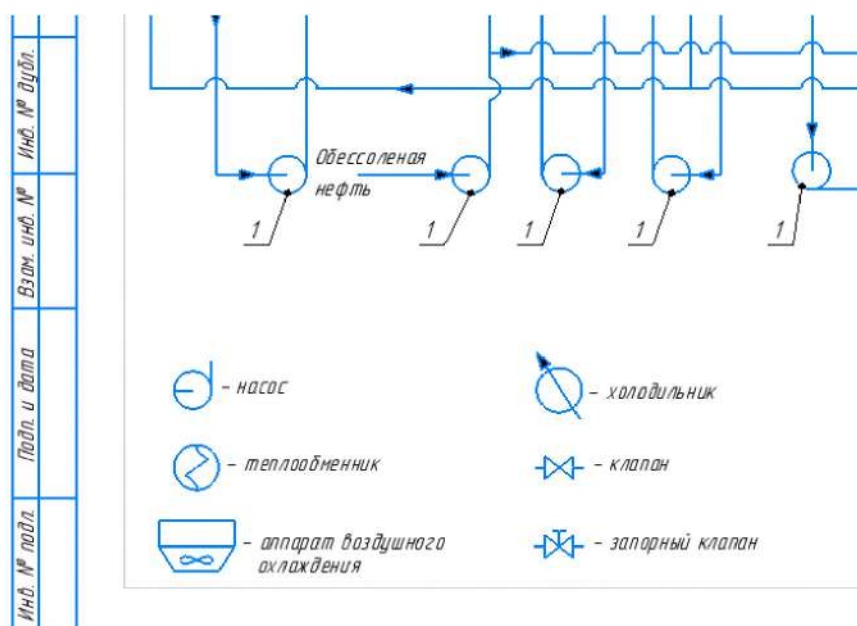


Рис. 1.34. Добавление обозначения элементов

8. Заполняем штамп чертежа. Для этого нажимаем на него дважды ЛКМ и вводим необходимые данные (рис. 1.35):

- шифр, который должен содержать следующую информацию: группа (**ПБ-211**), вариант (**05**), номер лабораторной работы (**02**), номер детали (**01.00.000**) и тип чертежа (**С2** – схема технологическая функциональная);
- ФИО студента и преподавателя;
- название схемы и её тип;
- данные о группе и вузе.

				ПБ-211-05-02.00.000 С2		
Изм./Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Установка атмосферной перегонки нефти.	Лист	Масса
Разраб.	Иванов ИИ			Схема технологическая		Масштаб
Проб.	Исачев АВ			функциональная		1:1
Т.контр.					Лист	Листов
Н.контр.					ОМГТУ, ПБ-211	
Утв.						

Рис. 1.35. Заполнение штампа

9. Сохраняем чертеж в формате JPEG. Для этого переходим **Файл – Сохранить как...** – **Тип файла – JPEG (*.jpg)**, задаем место сохранения, имя файла и нажимаем **Сохранить**. В появившемся окне выбираем Разрешение, равное **150** точкам на дюйм, и ставим галочку напротив **Оттенки серого** (рис. 1.36). Пример готового сборочного чертежа представлен на рис. 1.37.

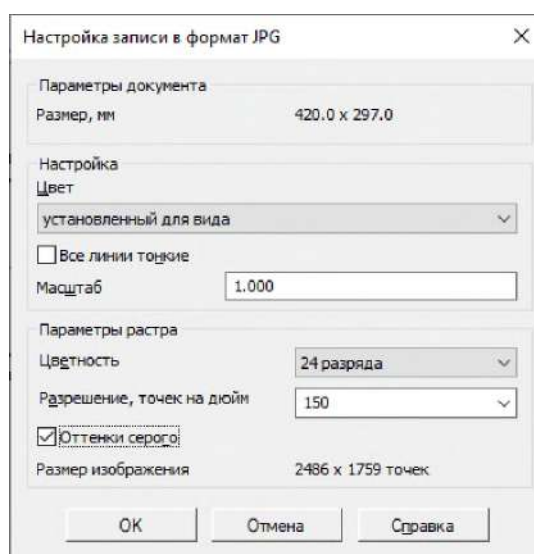


Рис. 1.36. Настройка изображения

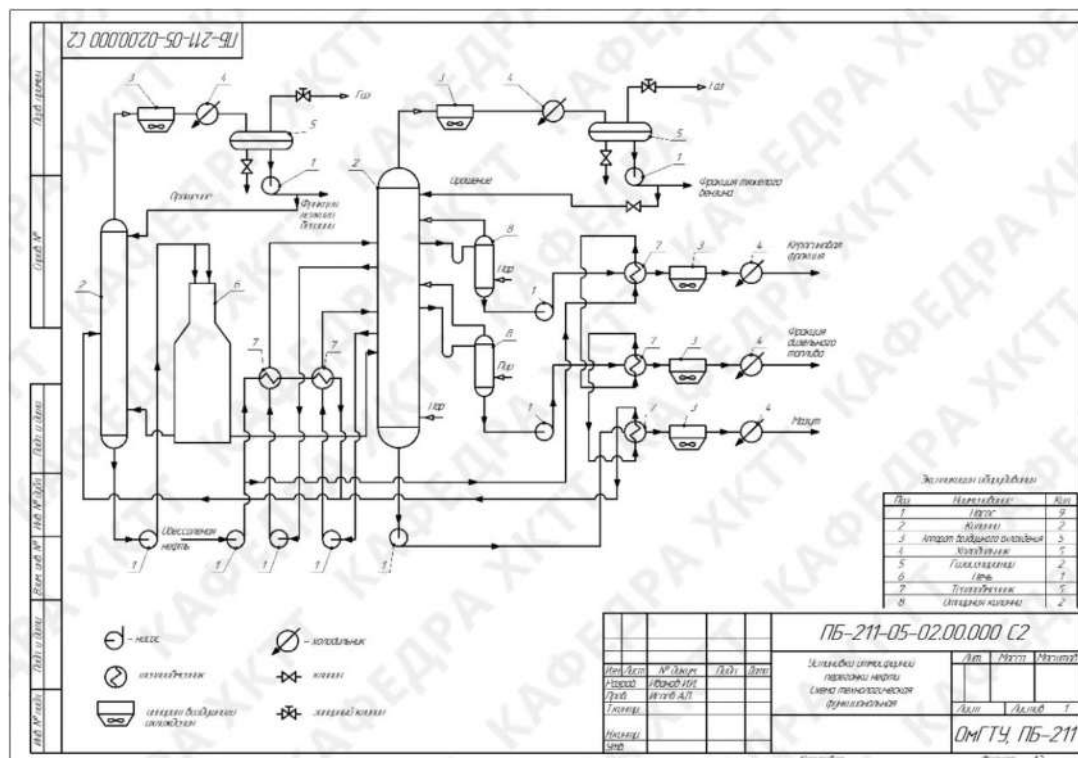


Рис. 1.37. Сборочный чертеж поршня

10. Сохраняем проект сборочного чертежа в персональную папку.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Описание работы (с исходной схемой и таблицей для своего варианта).
4. Этапы построения.
5. Результаты работы (готовый чертеж на отдельном листе).
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Как изменить формат листа?
2. Для чего используется операция «Экспликация оборудования»?
3. Как на технологической схеме обозначается центробежный насос?
4. Как на технологической схеме обозначается теплообменник?
5. Как на технологической схеме обозначается пересечение потоков?

1.2. КОМПАС-3D

КОМПАС-3D – это система, позволяющая проектировать трехмерные модели для машиностроения и строительства. В **КОМПАС-3D** реализованы возможности, позволяющие скрывать или исключать из расчета деталь сборочной единицы, выполнять её индивидуальное редактирование или разрез любой сложности. Трехмерные модели и плоские чертежи ассоциированы между собой, поэтому редактирование элемента модели повлечет за собой изменение в созданных по данной модели чертеже и сборке.

Трехмерные модели могут задаваться различными способами: каркасные задаются вершинами и ребрами, объемные (твердотельные) формируются из элементарных объектов с использованием логических операций объединения, вычитания, пересечения. По таким моделям можно не только построить их графические изображения (виды, разрезы, сечения), но и рассчитать их масс-инерционные характеристики, такие как масса, объем, момент инерции и т. д., если указать материал, из которого выполнено изделие.

Для моделирования деталей сложной формы в **КОМПАС-3D** реализована возможность поверхностного моделирования. Данные задачи могут встречаться при проектировании лопаток и корпусов приборов, изготавливаемых из пластика. Использование поверхностного моделирования позволяет получать детали сложной формы и тем самым обеспечивает требования, выдвигаемые к данным изделиям.

Структура интерфейса **КОМПАС-3D** полностью повторяет **КОМПАС-График**. Отличительной чертой является дерево модели, которое позволяет увидеть последовательность всех операций создания трехмерной модели детали (рис. 1.38).

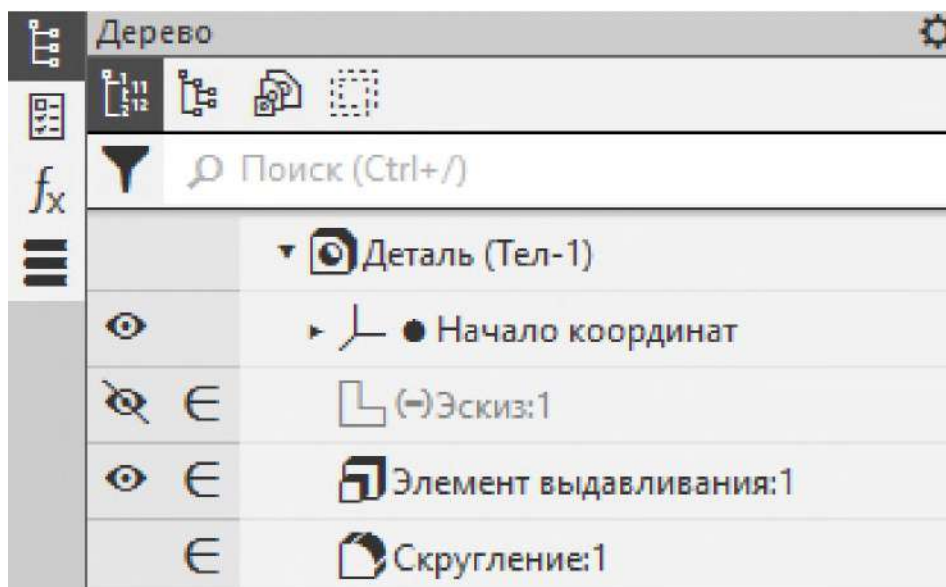


Рис. 1.38. Панель Дерева модели

Ниже представлено описание некоторых команд на инструментальной области.

Кнопка **Редактирование детали**  на инструментальной панели содержит операции для работы с объемными формами детали.

Кнопка **Слайн по точкам**  открывает доступ к панели, позволяющей создать цилиндрические, конические, винтовые и пространственные ломаные линии, а также сплайны.

Кнопка **Поверхности**  открывает доступ к панели, которая содержит ряд кнопок, позволяющих импортировать поверхности.

Кнопка **Массивы**  открывает доступ к панели, позволяющей создавать массивы: массив по сетке, массив по концентрической сетке и т. д.

Некоторые команды имеют несколько операций, они отмечены черным треугольником в правом нижнем углу. Одной из таких операций является **Операция выдавливания**, она может быть выполнена несколькими различными способами .

Виртуальную модель можно расположить на экране в соответствии с шестью основными видами: вид спереди, вид сверху, вид снизу, вид слева, вид справа, вид сзади. Для получения на экране соответствующего вида необходимо воспользоваться кнопкой **Ориентация вида** .

При работе с моделью пользователь может в любой момент времени изменить способ ее отображения. Для выбора способа отображения необходимо воспользоваться рядом кнопок на панели управления.

Кнопка **Каркас**  отображает модель в виде ребер и вершин.

Кнопка **Без невидимых линий**  позволяет увидеть модель в виде каркаса, но с удаленными невидимыми линиями.

Если в процессе формирования модели детали необходимо видеть скрытые от взгляда линии, используют кнопку **Невидимые линии тонкие** .

Наиболее реалистично будет выглядеть модель, если включить кнопку **Полутонное**  или **Полутонное с каркасом** .

В КОМПАС-3D плоскую фигуру, с помощью которой формируется тело, принято называть **эскизом**, а способ перемещения – **операцией**.

Операция **Эскиз** располагается в одной из стандартных плоскостей проекции, на одной из плоских граней, принадлежащих модели, или на вспомогательной плоскости, положение которой определено пользователем.

Для построения эскиза используется среда создания графического документа, соответственно инструментальная панель геометрии, редактирования, параметризации и т. д. Эскиз представляет собой набор геометрических объектов. При создании эскиза можно скопировать ранее созданный фрагмент графического документа.

Основными операциями на **Инструментальной панели** являются следующие.

Элемент выдавливания  – выдавливание плоского контура (эскиза) в направлении нормали к этому контуру.

Элемент вращения  – вращение контура вокруг оси (ось выполняется типом линии Осевая), лежащей в плоскости контура.

Элемент по траектории  – перемещение контура вдоль направляющей.

Элемент по сечениям  – построение трехмерного объекта по нескольким контурам (сечениям), плоскости которых расположены параллельно друг другу.

Необходимо обратить внимание на то, что каждая операция имеет различные модификации, которые позволяют расширить возможности конструирования модели. Например, в процессе выдавливания многоугольника можно дополнительно задать направление и угол уклона, тогда вместо призмы можно получить усеченную пирамиду.

Если конструкция модели слишком сложная, то основных операций для ее создания бывает недостаточно. Такая конструкция получается объединением (добавлением) и вычитанием дополнительных объемов. Построению каждого дополнительного объема предшествует создание нового контура (эскиза). Примерами добавления объема могут служить выступы, ребра жесткости, бобышки, а примерами вычитания объема – отверстия, вырезы, канавки, проточки и т. д.

При конструировании объемных моделей удобно пользоваться следующей терминологией.

Грань – гладкая часть поверхности (плоская или криволинейная).

Ребро – прямая или кривая линия пересечения двух соседних граней.

Вершина – точка пересечения ребер.

Тело модели – область пространства, ограниченная гранями модели.

Телу модели могут быть присвоены свойства материала, из которого впоследствии будет изготовлена деталь. По созданной таким образом модели можно легко определить масс-инерционные характеристики, выполнить прочностные, тепловые и другие расчеты.

Нужно помнить, что создание новой модели необходимо начинать с анализа информационной модели и мысленного расчленения ее на отдельные простые тела (призму, цилиндр, конус и т. д.). Далее следует определить базовое тело, к которому затем будут добавляться и вычитаться другие элементы конструкции.

Большинство моделей строятся путем выдавливания некоторого эскиза, из-за этого при формировании контура необходимо соблюдать следующие правила:

- под эскизом понимается любой линейный объект или совокупность последовательно соединенных линейных объектов (отрезков, дуг и т. д.);
- контур эскиза всегда выполняется типом линии *Основная* (ось вращения выполняется типом линии *Осевая*);
- контур эскиза не должен иметь точек самопересечения, пересечения с другим контуром или линий наложения;
- при построении сплошного тела с помощью операции выдавливания контур должен быть замкнутым, в противном случае компьютер создаст тонкостенную оболочку.

Эскиз детали может состоять из одного или нескольких контуров. Если контур один, то он может быть незамкнутым, а если контуров несколько, то все они должны быть замкнутыми. Причем один контур наружный, а все остальные вложены в него.

Лабораторная работа № 3

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ В ПРОГРАММЕ КОМПАС-3D

Цель работы: приобретение и закрепление студентами навыков использования *КОМПАС-3D* при построении 3D-модели змеевикового теплообменного аппарата.

Описание работы: используя чертеж (рис. 1.39) и размеры из своего варианта (табл. 1.3), необходимо построить трехмерную модель змеевикового теплообменного аппарата в *КОМПАС-3D*.

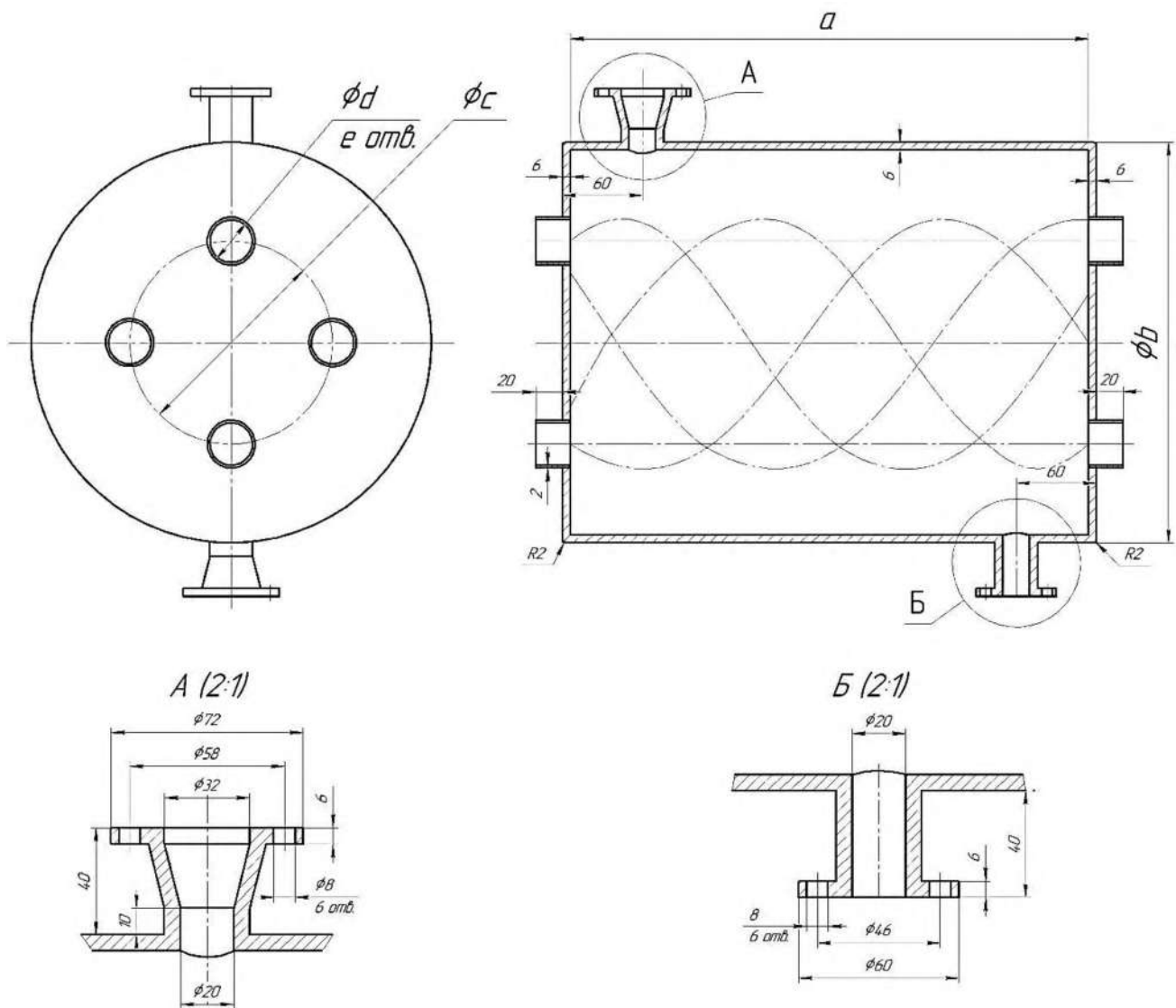


Рис. 1.39. Модель теплообменника

Исходные данные

Вариант	a, мм	b, мм	c, мм	d, мм	e, шт.
1	400	300	200	36	4
2	400	360	240	40	6
3	440	390	260	30	2
4	380	300	200	44	6
5	360	290	190	34	4
6	400	360	240	32	4
7	420	340	220	42	2
8	420	300	200	36	6
9	460	400	260	40	6
10	420	380	250	30	4
11	350	310	200	44	2
12	360	320	210	34	2
13	340	300	200	32	4
14	390	360	240	42	6
15	430	390	260	36	2
16	340	300	200	40	6
17	330	290	190	30	4
18	390	360	240	44	4
19	380	340	220	34	2
20	340	300	200	32	6
21	430	400	260	42	6
22	420	380	250	36	4
23	340	300	200	40	2
24	400	360	240	30	2
25	420	390	260	44	4
26	340	300	200	34	4
27	330	290	190	32	6
28	390	360	240	42	2
29	380	340	220	40	6
30	340	300	200	36	4

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Создаем эскиз окружности (рис. 1.40):

- выбираем **Плоскость XY** (1) в Дереве построения, запускаем режим **Эскиз** (2), используя инструмент **Окружность** (3);
- размещаем её в точке начала координат и при помощи инструмента **Автора размер** (4) задаем диаметр 400 мм (в таблице это значение «b»);
- после этого выходим из эскиза, нажав кнопку **Эскиз** (2).

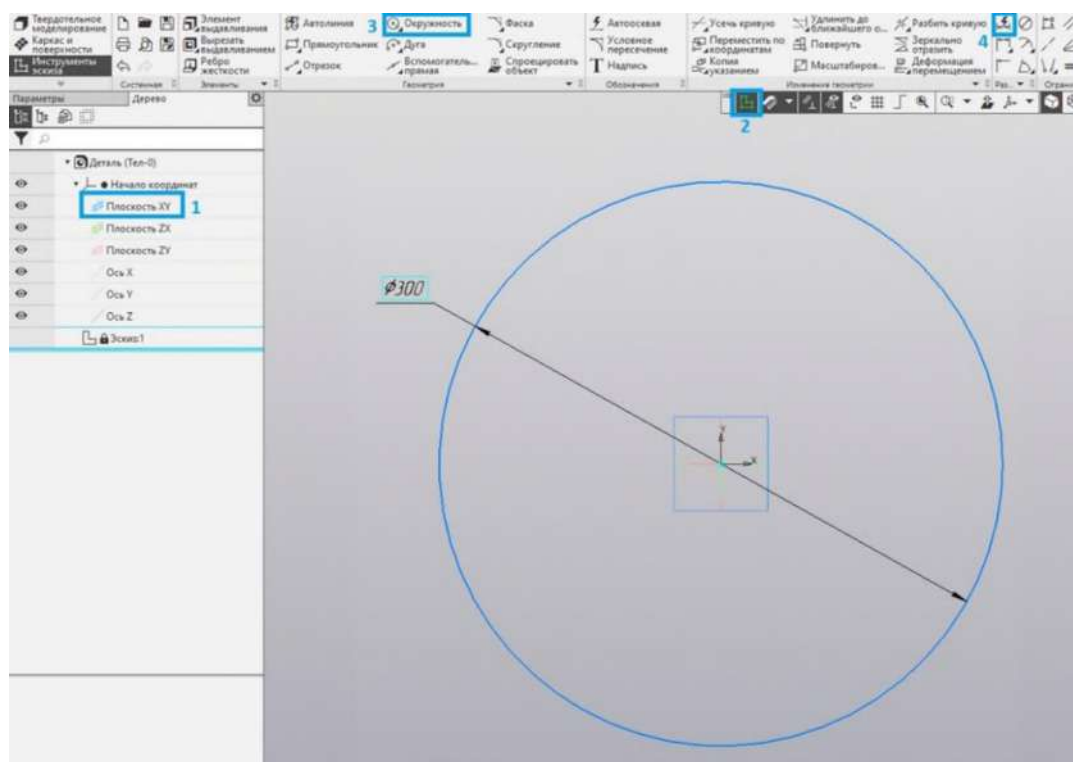


Рис. 1.40. Создание окружности

2. Выдавливаем полый цилиндр (рис. 1.41):

- нажимаем ЛКМ на созданный эскиз в Дереве построения и выбираем **Элемент выдавливания** (1);
- вводим значение из таблицы «а» в строке **Расстояние** (2);
- включаем опцию **Тонкостенный элемент** (3) и вводим значение 6 мм (4), при этом необходимо проконтролировать, чтобы выдавливание происходило вовнутрь с помощью операции **Поменять местами** (5);
- нажимаем галочку (6).

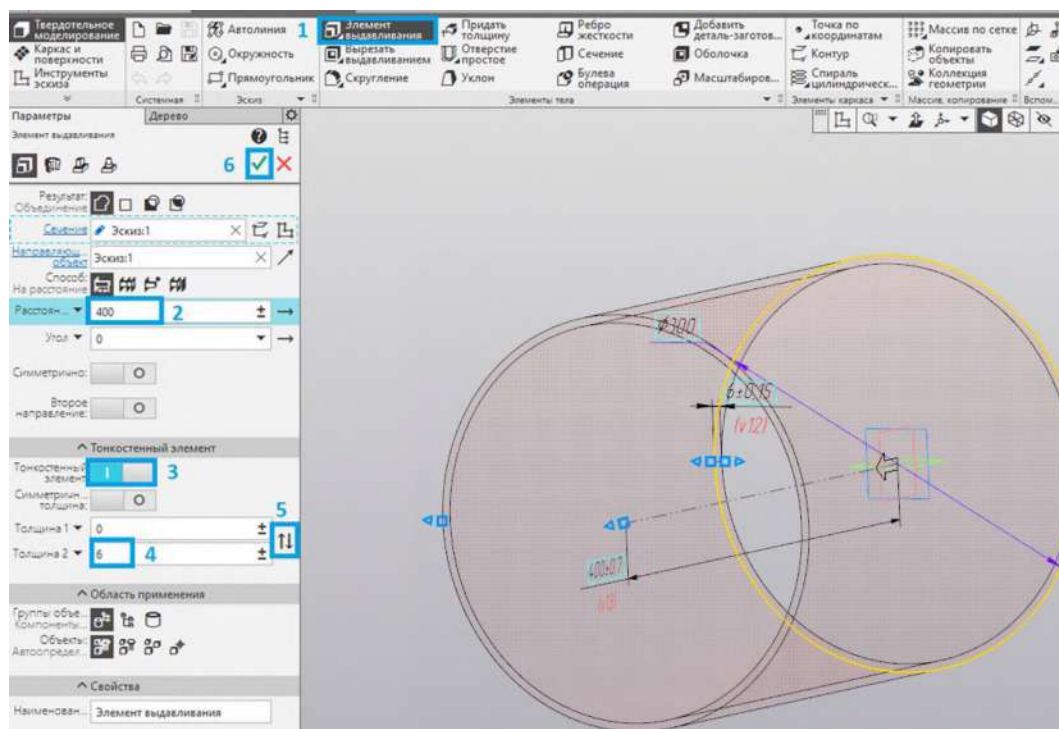


Рис. 1.41. Создание полого цилиндра

3. Создаем выходной патрубок под видом «А» (рис. 1.42).

3.1. Выделяем **Плоскость ZX** и создаем несколько смещенных плоскостей с помощью инструмента **Смещенная плоскость** (1) на следующих расстояниях: « $b/2-10$ »; « $b/2+10$ »; « $b/2+34$ ». С помощью кнопки **Смена направления** (3) контролируем направление смещения плоскостей.

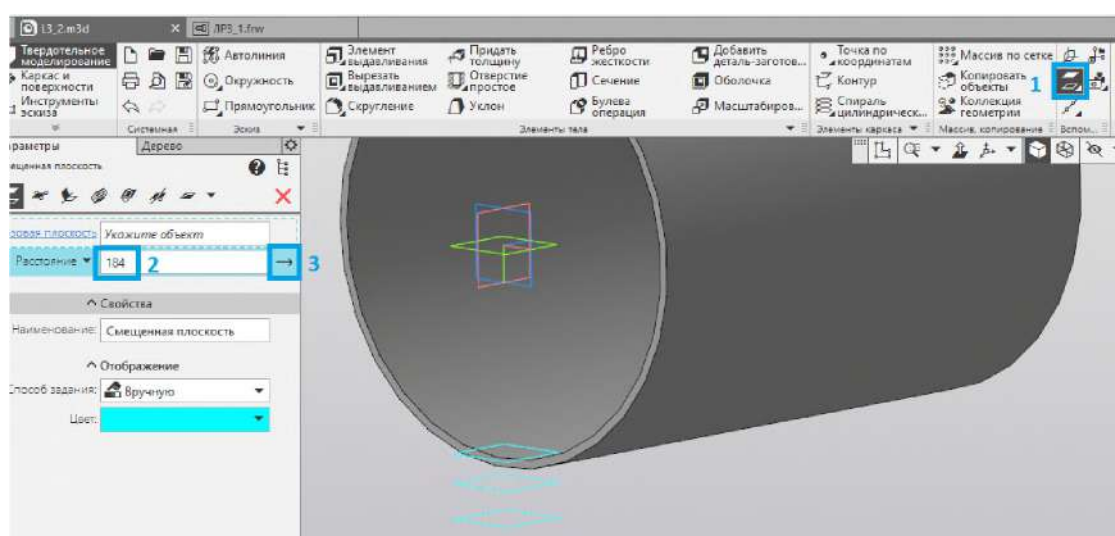


Рис. 1.42. Создание смещенных плоскостей

3.2. На смещенных плоскостях создаем от центра на 60 мм три смещенные окружности диаметрами 32, 32 и 44 мм (рис. 1.43).

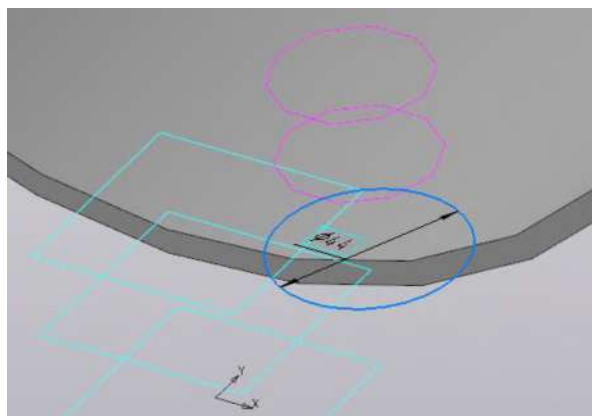


Рис. 1.43. Создание окружностей

3.3. Используя инструмент *Элемент по сечениям* (1), выделяем вторую и третью окружности (2) и нажимаем галочку (3) (рис. 1.44).

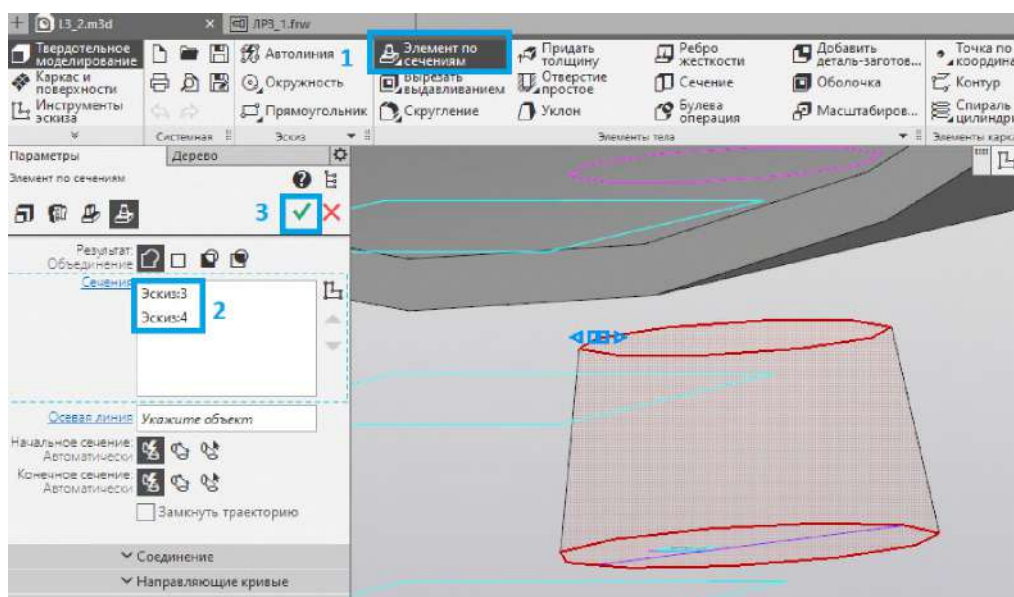


Рис. 1.44. Создание элемента по сечениям

3.4. Снова используем инструмент *Элемент по сечениям* (1), выделяем первую окружность и ближайшее ребро образовавшегося в прошлой операции усеченного конуса (2) и нажимаем галочку (3) (рис. 1.45).

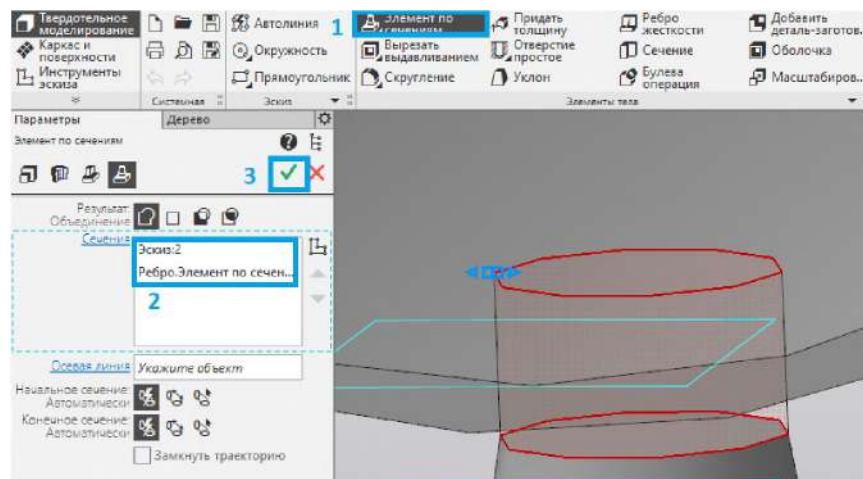


Рис. 1.45. Создание элемента по сечениям

3.5. Создаем финальный элемент выходного патрубка:

– строим эскиз, как показано на рис. 1.46. Для этого выделяем торцевую поверхность (1) и с помощью инструмента **Окружность** (2) строим эскиз согласно размерам на чертеже (рис. 1.39). Применяем инструмент **Копия по окружности** (3), чтобы построить шесть отверстий под болты.

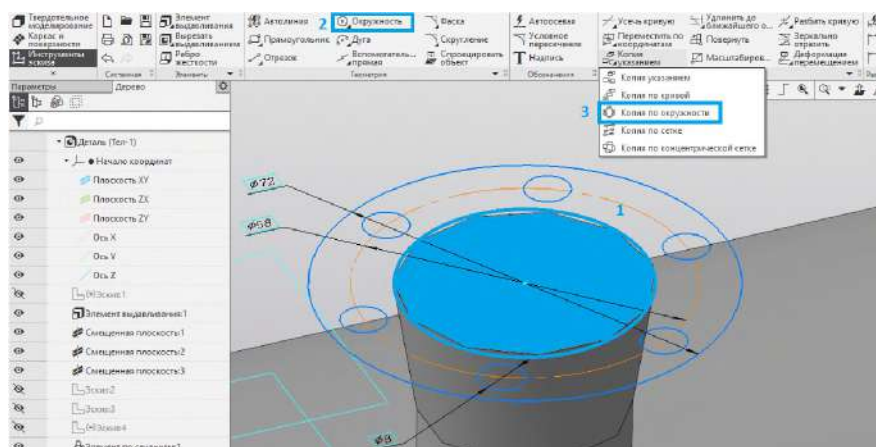


Рис. 1.46. Создание эскиза

Примечание: чтобы сделать **Основную** линию **Осевой**, необходимо нажать на неё ЛКМ и в появившемся окне изменить стиль линии;

– выделяем полученный эскиз и выдавливаем его с помощью инструмента **Элемент выдавливания** (1) на 6 мм (2), после чего нажимаем галочку (3) (рис. 1.47).

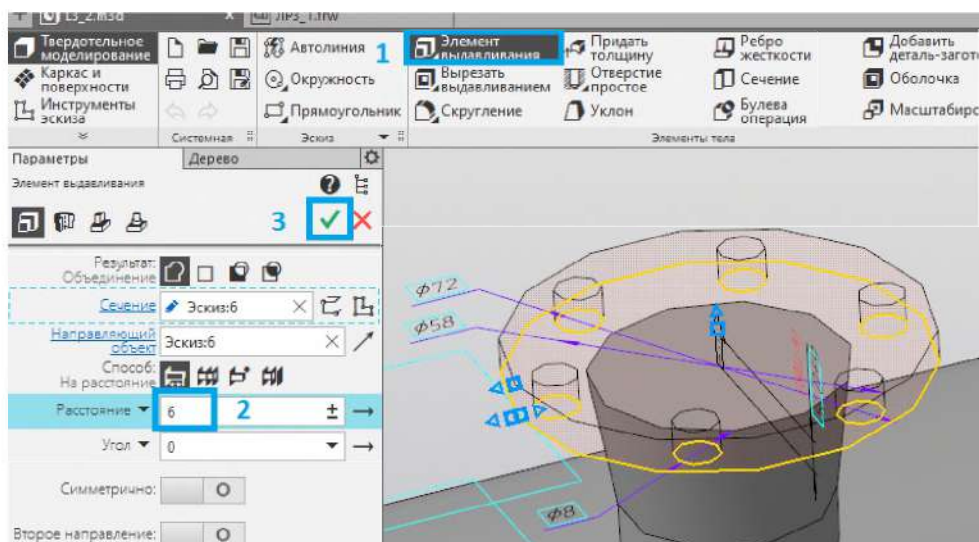


Рис. 1.47. Выдавливание эскиза

3.6. Вырезаем отверстие внутри выходного патрубка:

– создаем эскиз на *Плоскости ZY*, как показано на рис. 1.48 (согласно размерам на рис. 1.39);

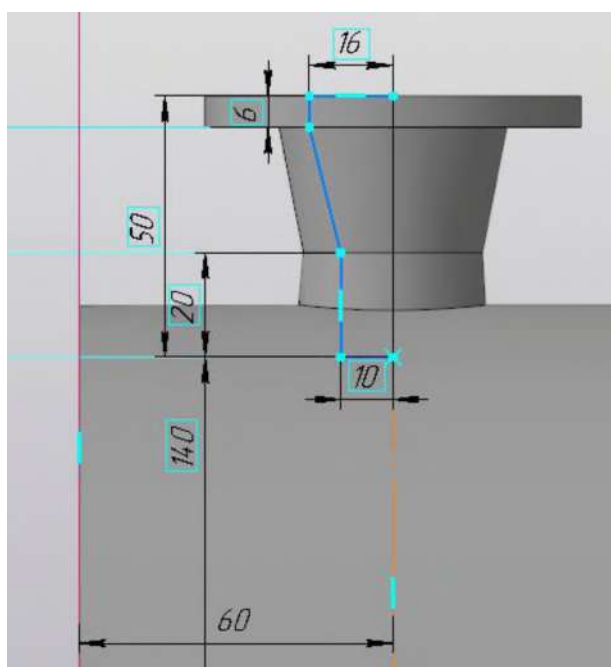


Рис. 1.48. Создание эскиза

Примечание: чтобы операция **Вырезать вращением** работала корректно, необходимо создать осевую линию;

– выделяем созданный эскиз и используем инструмент **Вырезать вращением** (1), после чего нажимаем галочку (3) (рис. 1.49).

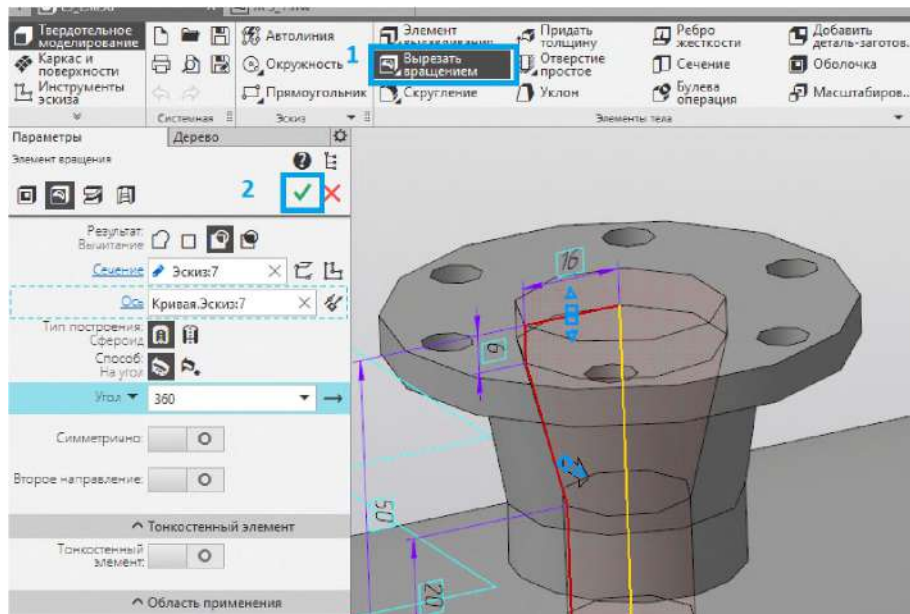


Рис. 1.49. Вырезание эскиза

4. Создаем входной патрубок теплообменного аппарата:

– выделяем **Плоскость ZY** и строим эскиз, как показано на рис. 1.50 (согласно размерам на рис. 1.39);

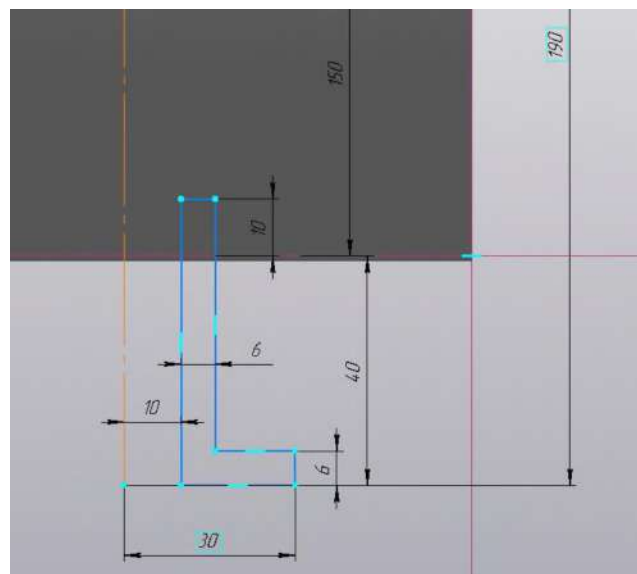


Рис. 1.50. Построение эскиза

– выделяем созданный эскиз и используем инструмент *Элемент вращения* (1), после чего нажимаем галочку (2) (рис. 1.51);

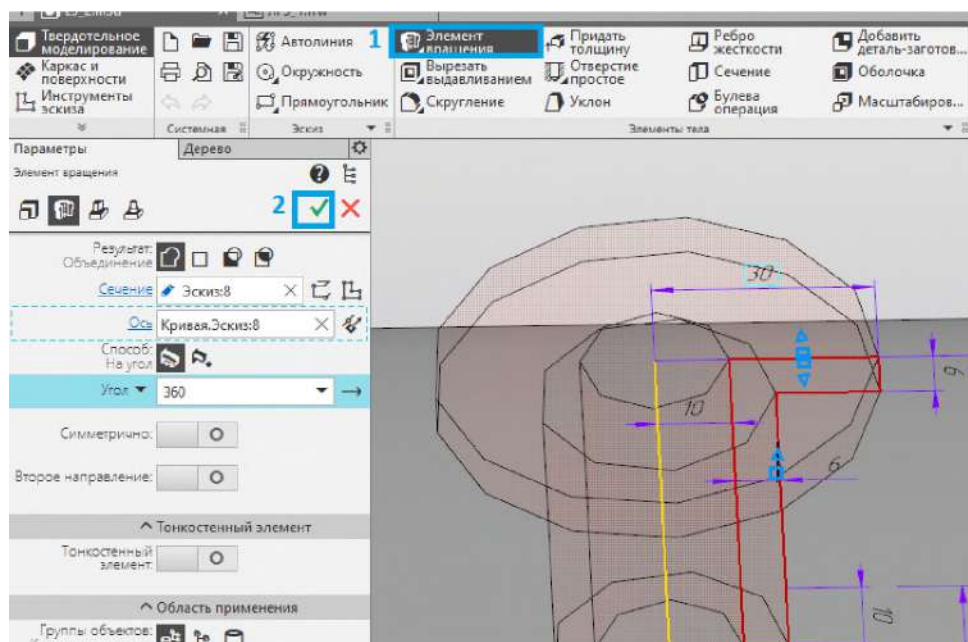


Рис. 1.51. Выдавливание вращением

– выделяем торцевую поверхность входного патрубка (1) и создаем на неё эскиз с отверстием для потока чтобы сделать отверстие в корпусе теплообменника (согласно размерам на рис. 1.39). После чего используем операцию *Вырезать выдавливанием* (2), вводим расстояние 60 мм (3) и нажимаем галочку (4) (рис. 1.52).

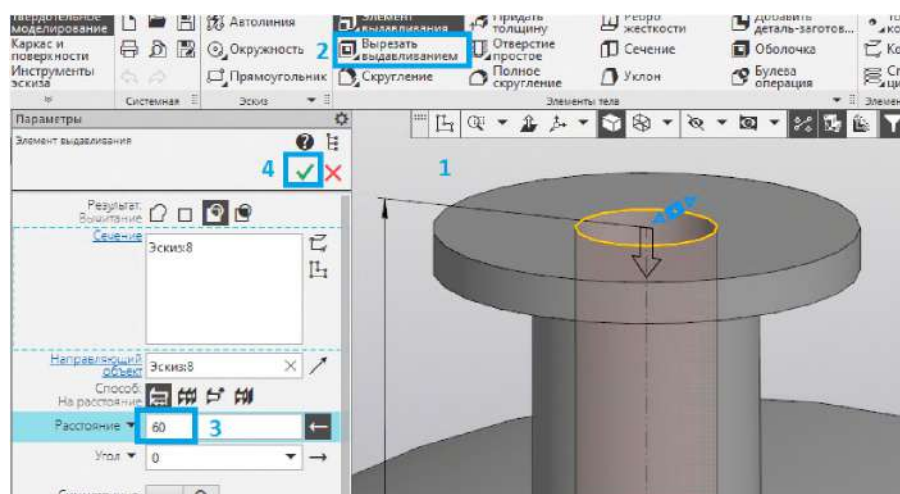


Рис. 1.52. Вырезание отверстия под болты

– выделяем торцевую поверхность входного патрубка (1) и создаем на неё эскиз с отверстиями под болты (согласно размерам на рис. 1.39). После чего используем операцию **Вырезать выдавливанием** (2) и нажимаем галочку (3) (рис. 1.53).

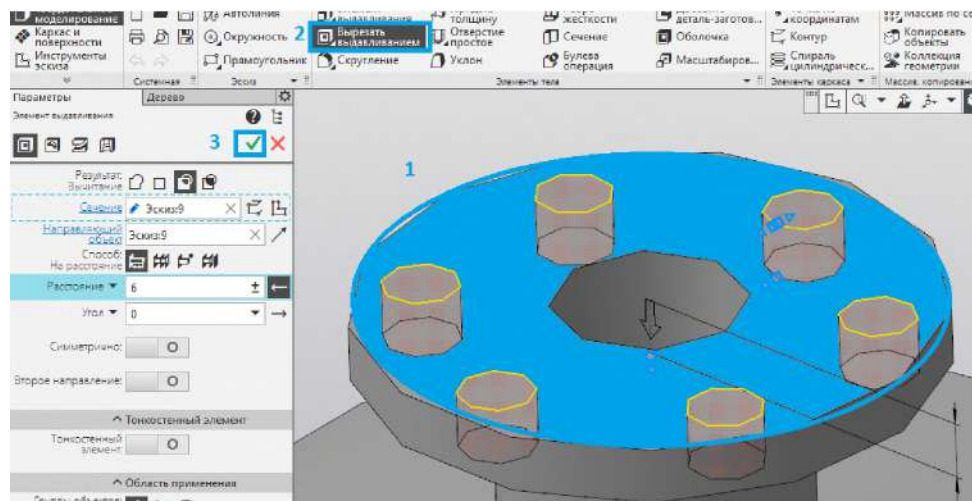


Рис. 1.53. Вырезание отверстия под болты

5. Удаляем лишние элементы патрубков внутри теплообменного аппарата (рис. 1.54):

- выделяем **Плоскость XY** и строим окружность диаметром « $b-12$ »;
- выделяем созданный эскиз и используем инструмент **Вырезать выдавливанием** (1), после чего указываем расстояние вырезания равное « a » (2). С помощью кнопки **Смена направления** (3) контролируем направление вырезания. Нажимаем галочку (4).

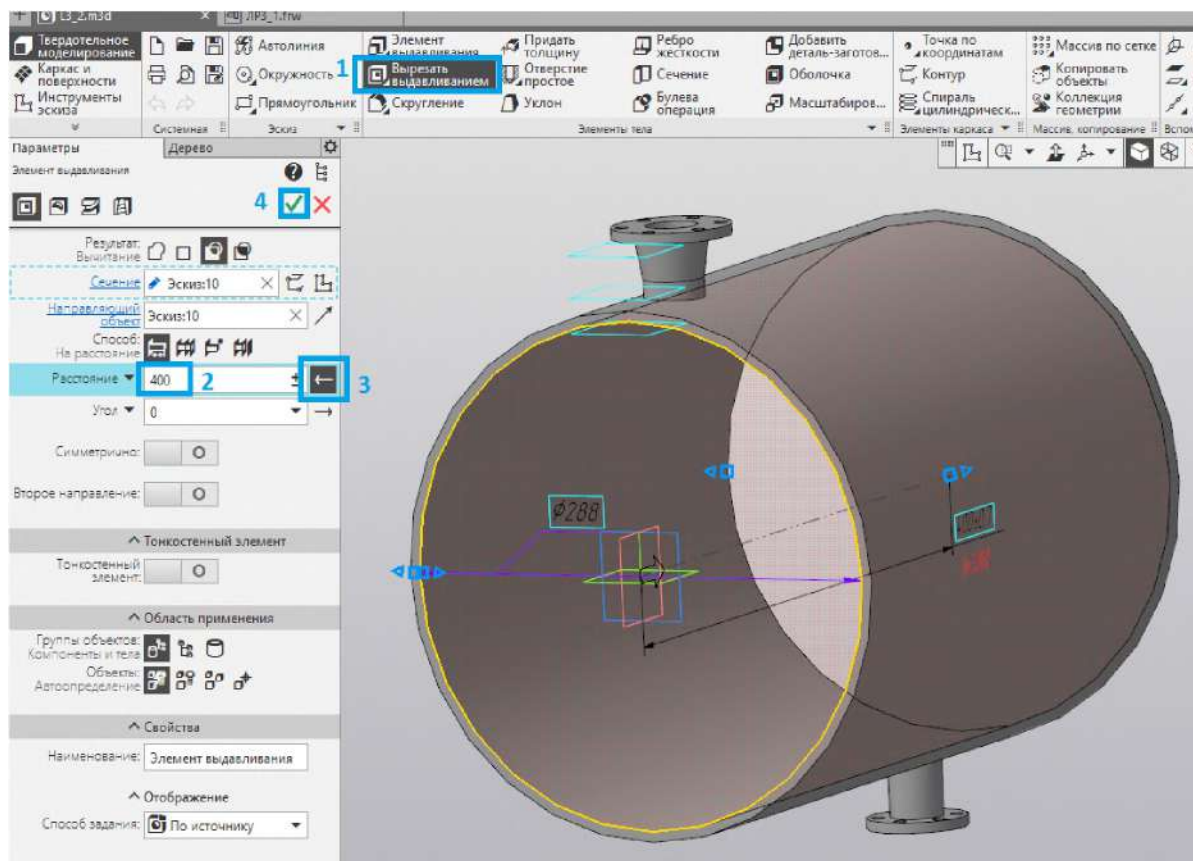


Рис. 1.54. Вырезание отверстия

6. Создаем змеевиковые трубки внутри теплообменного аппарата.

6.1. Выделяем **Плоскость XY** и строим эскиз, согласно условиям своего варианта, как показано на рис. 1.55.

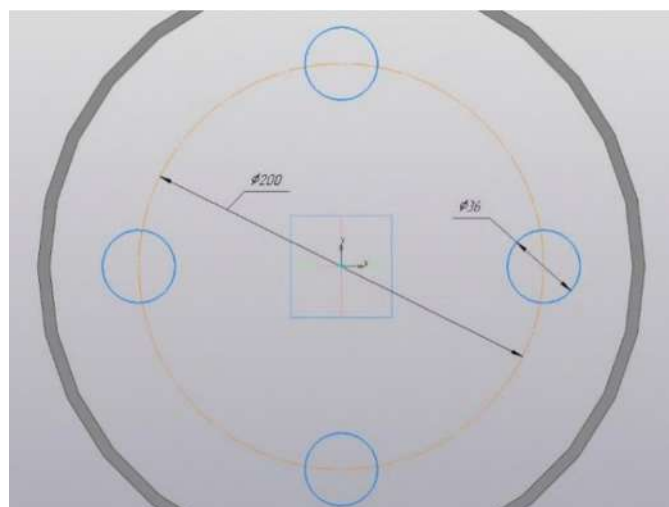


Рис. 1.55. Создание эскиза

6.2. Строим спираль (рис. 1.56)

- выделяем **Плоскость XY** (1) и нажимаем **Спираль цилиндрическая** (2);
- вводим значение диаметра, равное « **b** »;
- выбираем способ построения «**По шагу и высоте**» **t, h** (3);
- указываем значение шага, равное « **$b \times 2$** » (4);
- указываем значение высоты спирали, равное « **b** » (5);
- нажимаем галочку (6).

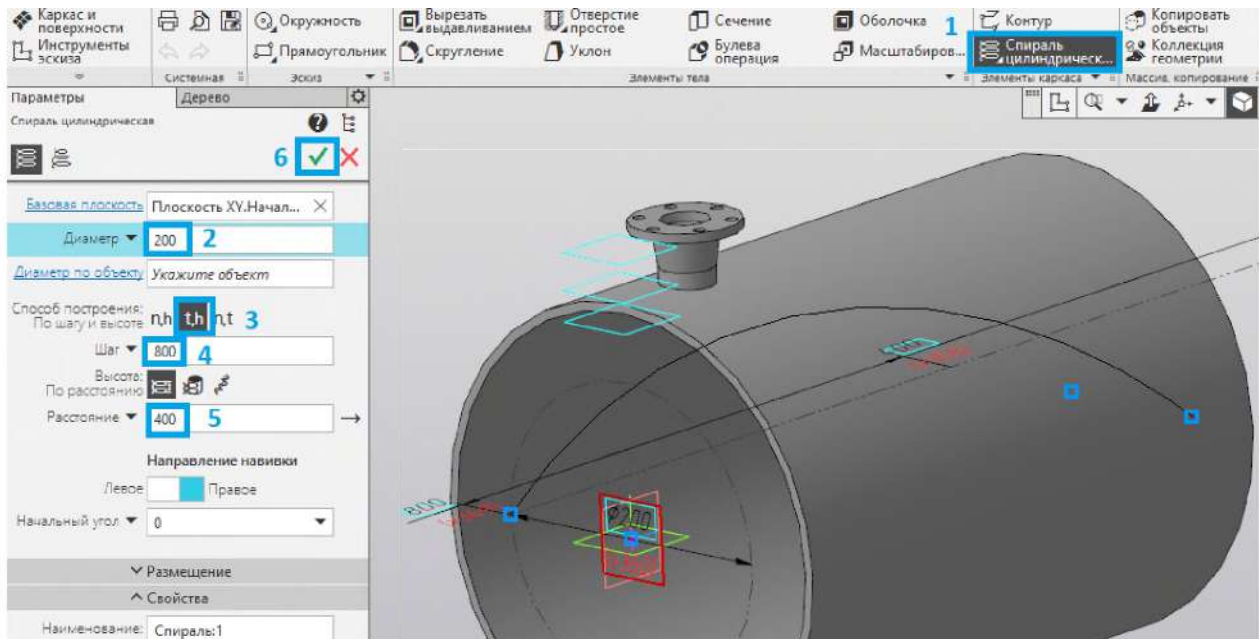


Рис. 1.56. Создание спирали

6.3. Выдавливаем трубки (рис. 1.57):

- нажимаем кнопку **Элемент по траектории** (1);
- напротив **Сечения** (2) выбираем эскиз окружностей;
- напротив **Траектории** (3) выбираем спираль;
- включаем опцию **Тонкостенный элемент** (4), вводим толщину 2 мм (5), при этом необходимо проконтролировать, чтобы выдавливание происходило вовнутрь с помощью операции **Поменять местами** (6);
- нажимаем галочку (7).

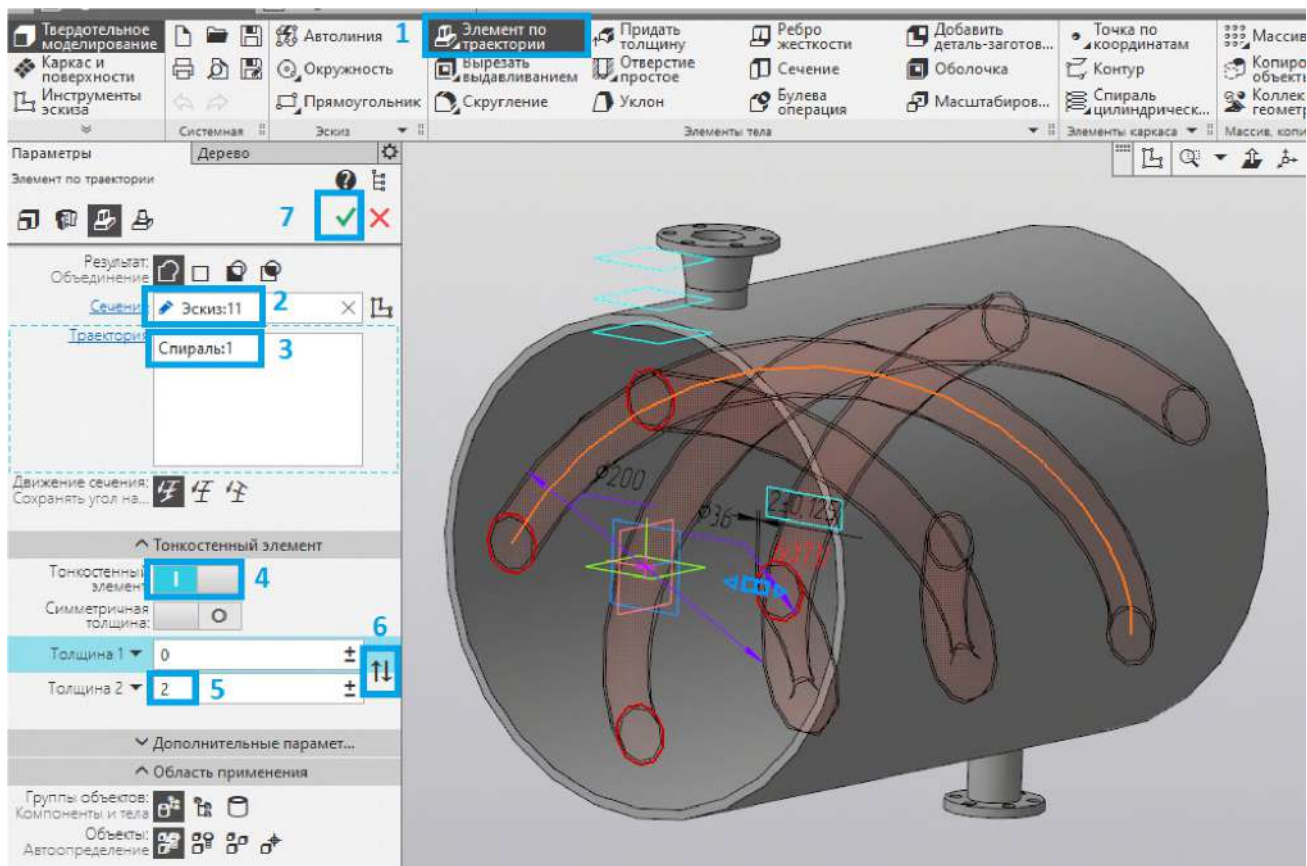


Рис. 1.57. Выдавливание по траектории

Примечание: при выдавливании можно выбрать, будут ли выдавлены все элементы или нет.

7. Создаем патрубки (рис. 1.58). Для этого нажимаем на инструмент **Элемент выдавливания** (1), указываем расстояние выдавливания, равное 20 мм (2), выбираем грани торцевой поверхности трубок (3) и нажимаем галочку (4). Повторяем данную операцию для всех трубок с обратной стороны.

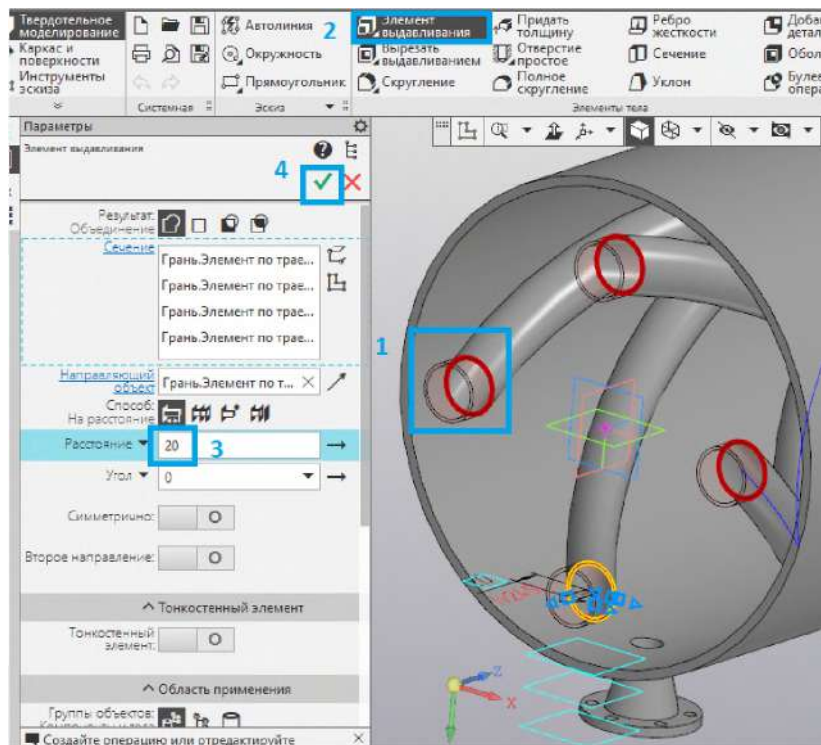


Рис. 1.58. Выдавливание патрубки

8. Строим торцевую стенку теплообменного аппарата (рис. 1.59):
 - выделяем торцевую поверхность корпуса и создаем эскиз, повторяющий внешние контуры корпуса и трубок (1);
 - выделяем созданный эскиз и применяем инструмент **Элемент выдавливания** (2);
 - задаем толщину 6 мм и контролируем направления выдавливания с помощью операции **Сменить направление** (4) если это необходимо;
 - нажимаем галочку (5).

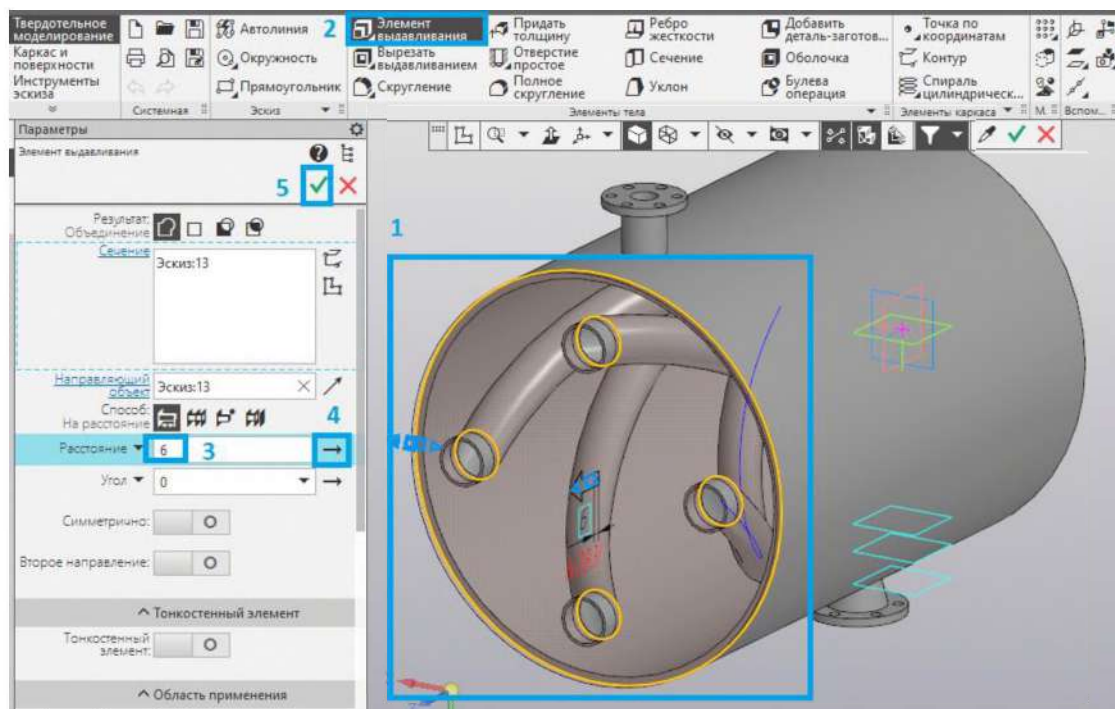


Рис. 1.59. Создание крышки

9. Повторяем п. 7 для другой стороны корпуса теплообменного аппарата.

10. Создаем разрез и указываем основные габаритные размеры готовой модели теплообменного аппарата (рис. 1.60):

- нажимаем на **Отображение сечения модели** (1) и указываем необходимую плоскость;
- с помощью инструментов **Линейный размер** и **Диаметральный размер** (2) указываем основные размеры из своего варианта.

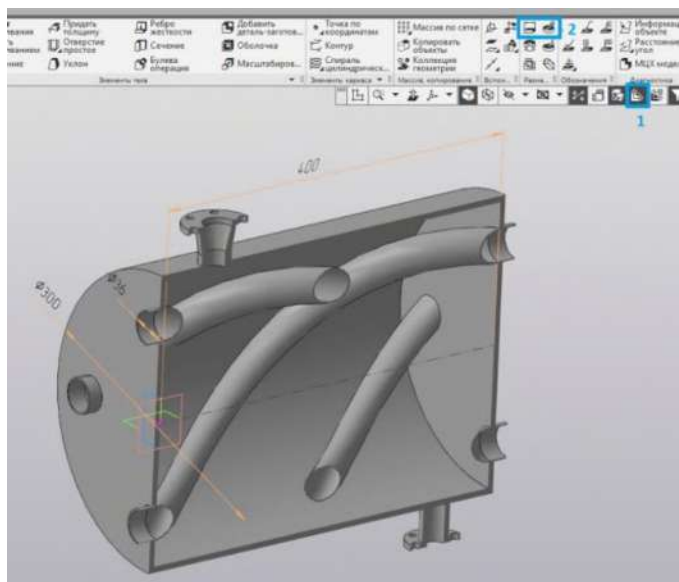


Рис. 1.60. Создание разреза и указание размеров

11. Сохраняем проект в папку, ранее созданную студентом. Для этого нажимаем **Файл – Сохранить как... – Сохранить**.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Описание работы (с исходной схемой и таблицей для своего варианта).
4. Этапы построения.
5. Результаты работы (три базовых вида и вид в изометрии с разрезом и указанием размеров).
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Что такое точка начала координат?
2. Что такое координатные оси?
3. Что такое координатная плоскость?
4. Какие инструменты и операции КОМПАС-3D использовались для создания моделей?
5. Назовите основные этапы построения моделей.

2. ПРОВЕДЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА В ANSYS

ANSYS – универсальная программная система конечно-элементного (КЭ) анализа, является довольно популярной у специалистов в области компьютерного инжиниринга (CAE, Computer-Aided Engineering) и КЭ решения линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела и механики конструкций (включая нестационарные геометрически и физически нелинейные задачи контактного взаимодействия элементов конструкций), задач механики жидкости и газа, теплопередачи и теплообмена, электродинамики, акустики, а также механики связанных полей.

Начиная с 10-й версии, в комплект программных продуктов ANSYS добавлена программная среда **Workbench** – универсальный инструмент для структурирования и контроля решения задач. В ее состав входит несколько удобных и простых в освоении инструментов для создания геометрии любой сложности, а также сетки конечных элементов, ориентированной на конкретный тип анализа. Workbench без труда позволяет создать геометрию объекта (в том числе с помощью параметрических функций), сетку КЭ и связать, например, тепловой и структурный анализ в рамках одного проекта с возможностью последующего редактирования параметров на любой стадии. Кроме того, эта программная среда дает возможность экономить время путем исключения ручной передачи файлов и перерасчета.

ANSYS Workbench предоставляет мощные методы для взаимодействия с семейством решателей ANSYS. Эта среда обеспечивает уникальную интеграцию с CAD-системами в процессе проектирования.

Рабочее окно Workbench представлено на рис. 2.1.

Схема проекта содержит необходимые этапы выполнения анализа (рис. 2.2). Проект может содержать несколько таких блоков для различных типов инженерных расчетов, между которыми могут устанавливаться связи (рис. 2.3).

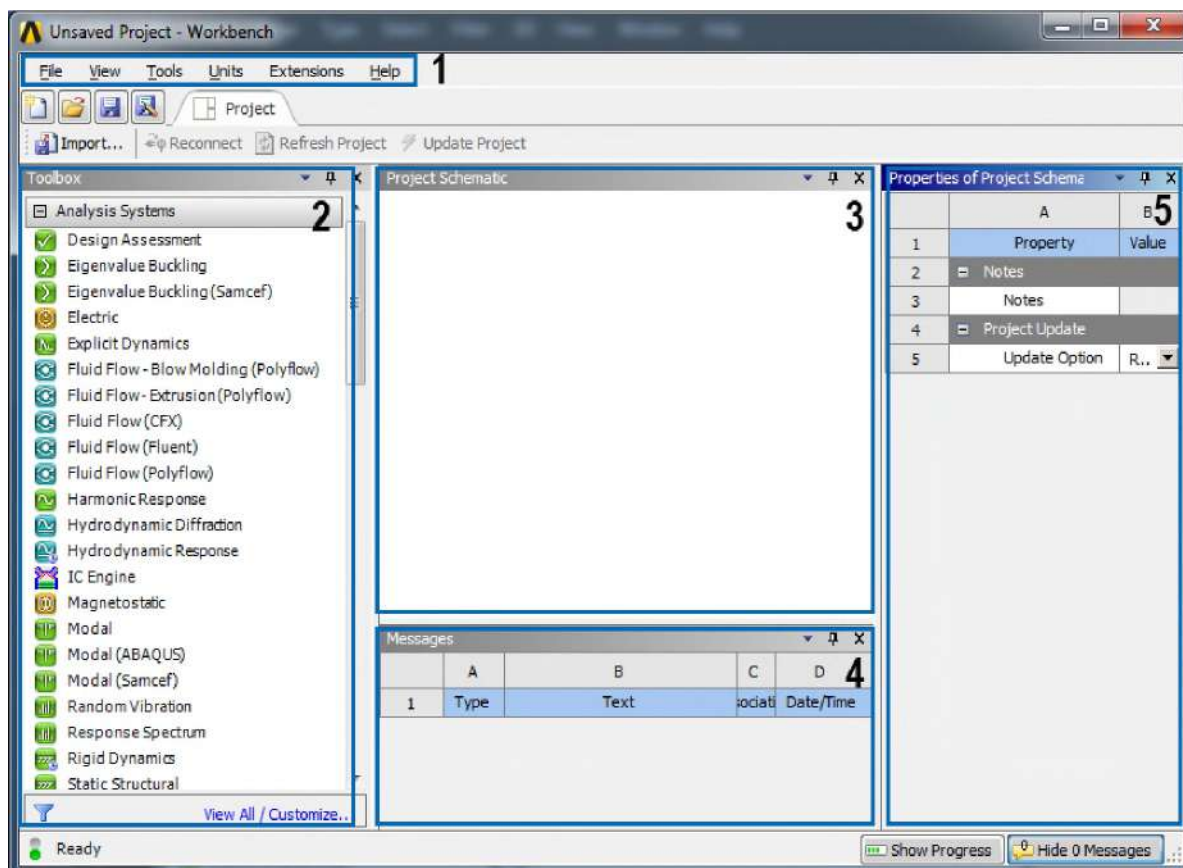


Рис. 2.1. Рабочее окно Workbench:

1 – главное меню; 2 – панель инструментов проекта;

3 – основное окно проекта; 4 – окно сообщений;

5 – окно свойств выбранного объекта

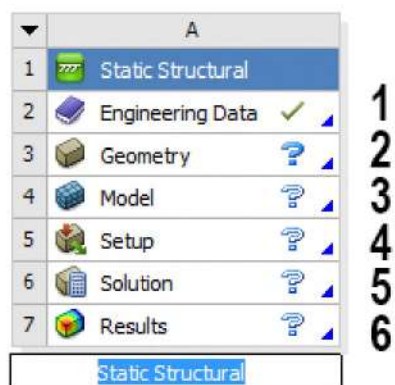


Рис. 2.2. Блок проекта:

1 – задание свойств материалов;

2 – создание геометрической модели; 3 – генерация сетки;

4 – задание параметров симуляции; 5 – решение задачи;

6 – предоставление результатов анализа

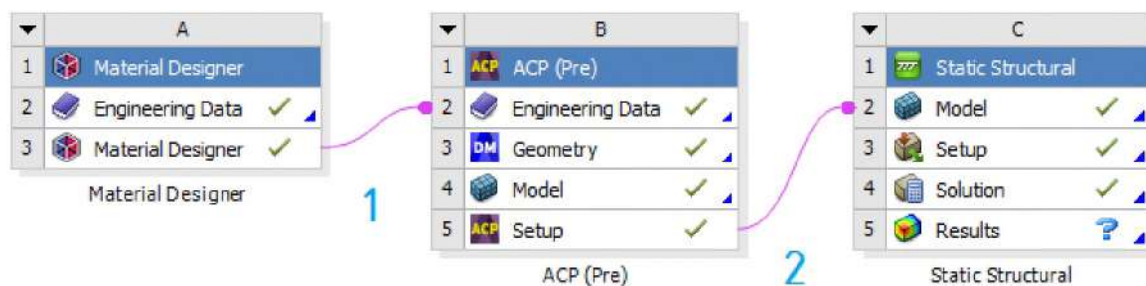


Рис. 2.3. Настройка связей:

1 – добавление композитного материала;

2 – добавление подготовленной сеточной модели в расчет

В среду **ANSYS Workbench** входит несколько различных приложений:

Material Designer – приложение для создания композитных материалов.

ANSYS Composite PrepPost (ACP) – приложение, которое позволяет просто и удобно моделировать сложные структуры изделий из композитных материалов. Данный инструмент ускоряет процесс расчётов, при этом выдерживается высокая точность получаемых результатов.

Mechanical – приложение для выполнения структурного и теплового анализа с использованием решателя ANSYS. Наложение сетки на область расчета также включено в Mechanical.

Fluid Flow (CFX) – приложение для выполнения анализа с использованием CFD CFX.

Fluid Flow (FLUENT) – приложение для выполнения анализа с использованием CFD FLUENT.

DesignModeler (геометрия) – приложение для создания и редактирования CAD-геометрии и подготовки твердотельной модели для использования в дальнейших расчетах.

Engineering Data – приложение для определения свойств материала.

Meshing Application – приложение для генерации области расчета CFD и генерирования сетки.

Design Exploration – приложение для проведения проектных исследований и оптимизации анализов.

Finite Element Modeler (FE Modeler) – приложение для адаптации сетки, полученной в NASTRAN и ABAQUS, при использовании в ANSYS.

2.1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА ANSYS MECHANICAL В ИНЖЕНЕРНОМ АНАЛИЗЕ

Пакет *ANSYS Mechanical* позволяет решить практически любую задачу механики деформируемого твердого тела или получить сопряженное решение задачи механики с решением задач других областей физики, например гидрогазодинамики, теплопереноса или электромагнетизма. Данный пакет предлагает возможность создания единой фундаментальной матрицы взаимодействия полей с поддержкой акустического, пьезоэлектрического, термopрочностного и термоэлектрического типов анализа.

ANSYS Mechanical способен решать следующие типы задач:

- прочностной анализ – статический;
- линейная и нелинейная устойчивость;
- контактные задачи;
- тепловой анализ и т. д.

Данный пакет включает: полный набор линейных и нелинейных элементов, удобную для использования и редактирования базу материалов от конструкционной стали до резины, а также широкий набор методов решения (решателей). Это позволяет легко решать самые сложные и комплексные задачи, даже если они включают нелинейный контакт.

Рабочее окно Mechanical представлено на рис. 2.4.

Панель инструментов имеет широкую функциональность и предназначена для настройки отображения проекта и проведения его анализа.

Дерево проекта отображает разделы проекта, используемые для проведения анализа.

Настройки элементов проектов меняются в зависимости от выбранного раздела дерева проекта и предназначены для контроля параметров проекта.

Сообщения системы отображают сообщения об ошибках системы и дают рекомендации для их устранения.

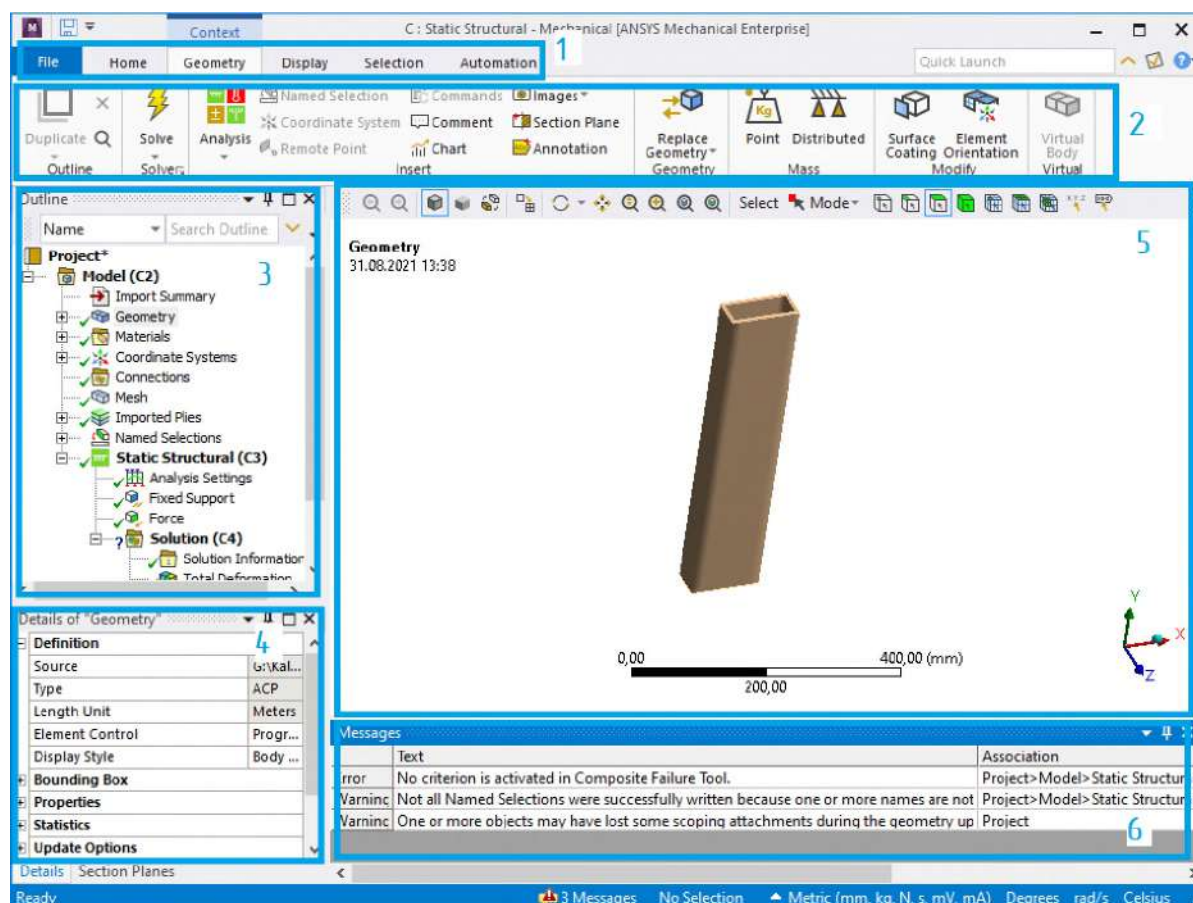


Рис. 2.4. Окно Mechanical:

- 1 – главное меню; 2 – панель инструментов;
 3 – дерево проекта; 4 – настройки элементов проекта;
 5 – окно просмотра модели; 6 – сообщения системы

Расчет в *Static Structural* подразумевает использование нескольких приложений, между которыми происходит поток информации, возникающей в процессе постановки и решения задач механики деформируемого твердого тела в статической постановке. Такими приложениями являются следующие.

1. *Engineering Data* используется для создания и хранения материалов, применяемых в анализе.

2. *DesignModeler* или *SpaceClaim* (представлены блоком *Geometry*). *DesignModeler* подходит в том случае, если качественной исходной CAD-геометрией модели хорошо параметризованы, не имеют сложных по-

верхностей, сопряжений, и их можно быстро построить по чертежам. **DesignModeler** подходит, когда нужно работать импортированной геометрией, имеющей нетипичные форматы – STEP или IGES, если эта геометрия имеет сложные поверхности и сопряжения, подразумевается дальнейшая 3D-печать или топологическая оптимизация.

3. **Mechanical** (объединяет в себе несколько блоков: **Model**, **Setup**, **Solution**, **Results**). При использовании в модуле **Static Structural** имеет ограниченный ряд возможностей и позволяет решать статические/равновесные задачи механики. При работе с данным инструментом пользователю необходимо выполнить следующие этапы:

- свойства материала;
- систему координат;
- контактные поверхности;
- сеточную модель;
- граничные условия;
- решения задачи и контроль сходимости;
- обработку и анализ результатов.

Необходимо отметить, что **Mechanical** имеет интегрированный в него инструмент – **Meshing**. **Meshing** (представлен блоком **Mesh**) – многофункциональный сеточный препроцессор, который позволяет генерировать высококачественные расчетные сетки в автоматическом режиме для различных типов инженерного анализа. Модуль предоставляет широкий набор инструментов для построения расчетных сеток на основе треугольных и четырехугольных элементов для 2D-моделей и на основе тетраэдров, гексаэдров или пирамидальных элементов для 3D-моделей. В программе заложены алгоритмы для построения структурированных и неструктурированных расчетных сеток, а также возможности качественного разрешения расчетной сетки вблизи твердых стенок и других особенностей моделей, что особенно важно для гидродинамического анализа.

Лабораторная работа № 4

ПРОЧНОСТНОЙ АНАЛИЗ В ПРОГРАММЕ ANSYS

Цель работы: изучение основных этапов проведения статического прочностного анализа в среде *ANSYS Workbench* с использованием инструмента *Parameters*; приобретение навыков в использовании программного инструмента *ANSYS Workbench – Static Structural* при проведении прочностного анализа корпуса подшипника.

Описание работы: используя модуль *Static Structural* и инструмент *Parameters*, необходимо рассчитать минимальное значение коэффициента запаса прочности (*Safety Factor*), максимальное значение эквивалентного перемещения (*Equivalent Stress*) и максимальное значение полного перемещения (*Total Deformation*) при разных значениях величин температуры корпуса подшипника (рис. 2.5).

Температура корпуса подшипника = T

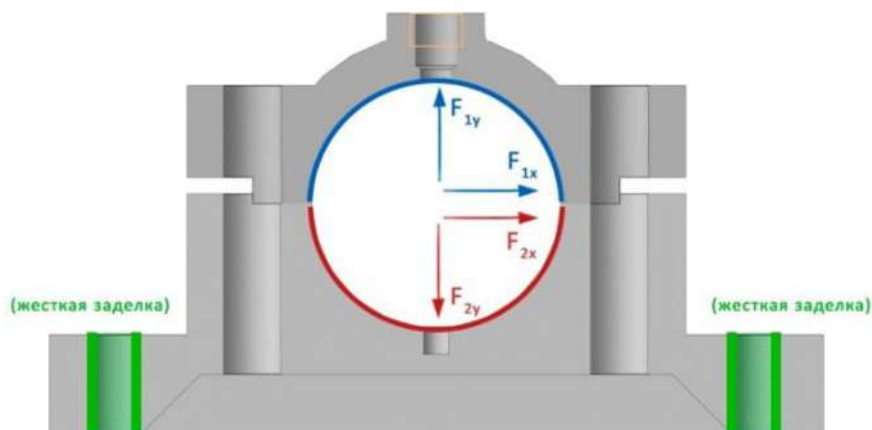


Рис. 2.5. Расчетная схема

Известны: материал корпуса подшипника, участки жесткой заделки (*Fixed Support*), направление действия векторов сил F_{1x} , F_{1y} и F_{2x} , F_{2y} (*Force*), действующих при вращении коленчатого вала, и начальная температура (*Thermal Condition*) корпуса подшипника (исследуется четыре значения с шагом в 25 °C. Пример: 25 °C – 50 °C – 75 °C – 100 °C) (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Исходные данные

Вариант	Материал	$F_{1x} = F_{2x}$, кН	F_{1y} , кН	F_{2y} , кН	T , °C
1	Copper Alloy	1	8	10	10
2	Structural Steel	2	10	12	15
3	Copper Alloy	1,5	12	14	20
4	Aluminum Alloy	2	3	12	25
5	Copper Alloy	3	5	10	10
6	Copper Alloy	2,5	7	12	15
7	Structural Steel	1,5	9	14	20
8	Aluminum Alloy	4	8	10	25
9	Copper Alloy	1	10	12	10
10	Aluminum Alloy	3,5	8	10	15
11	Aluminum Alloy	1	10	12	20
12	Structural Steel	2	12	14	25
13	Copper Alloy	2,5	3	12	10
14	Copper Alloy	1,5	5	10	15
15	Aluminum Alloy	1,5	7	12	20
16	Structural Steel	2	9	14	25
17	Aluminum Alloy	1,5	8	10	10
18	Structural Steel	2	10	12	10
19	Copper Alloy	3	8	10	15
20	Aluminum Alloy	2,5	10	12	20
21	Structural Steel	1,5	12	14	25
22	Copper Alloy	2	3	12	10
23	Aluminum Alloy	5	5	10	15
24	Copper Alloy	3,5	7	12	20
25	Aluminum Alloy	1	9	14	25
26	Structural Steel	3,5	8	10	10
27	Aluminum Alloy	1	10	12	15
28	Copper Alloy	5	8	10	20
29	Structural Steel	2,5	10	12	25
30	Copper Alloy	1,5	8	10	10

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Запускаем *ANSYS Workbench* и добавляем модуль *Static Structural* двойным нажатием ЛКМ в разделе *Toolbox* (рис. 2.6).

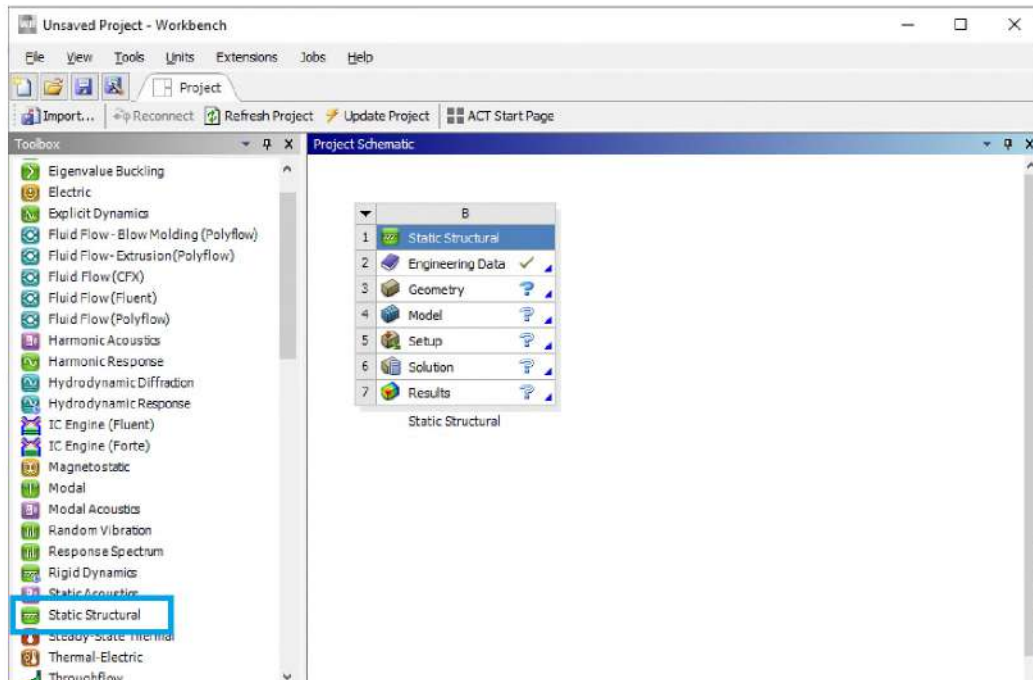
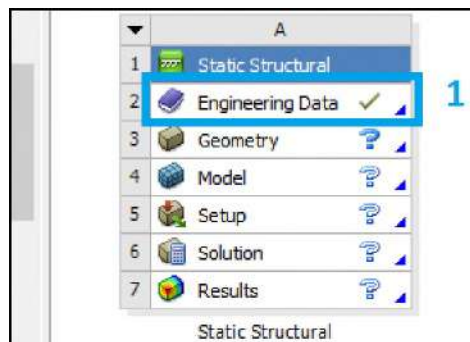


Рис. 2.6. Добавление модуля

2. Дважды нажимаем ЛКМ на блок *Engineering Data* (1), после чего жмем на *Engineering Data Sources* (2). Выбираем библиотеку *General Materials* (3) и подключаем материал из своего варианта (4). После этого можно закрыть *Engineering Data* (5) (рис. 2.7).



а

Рис. 2.7. Выбор материала (начало)

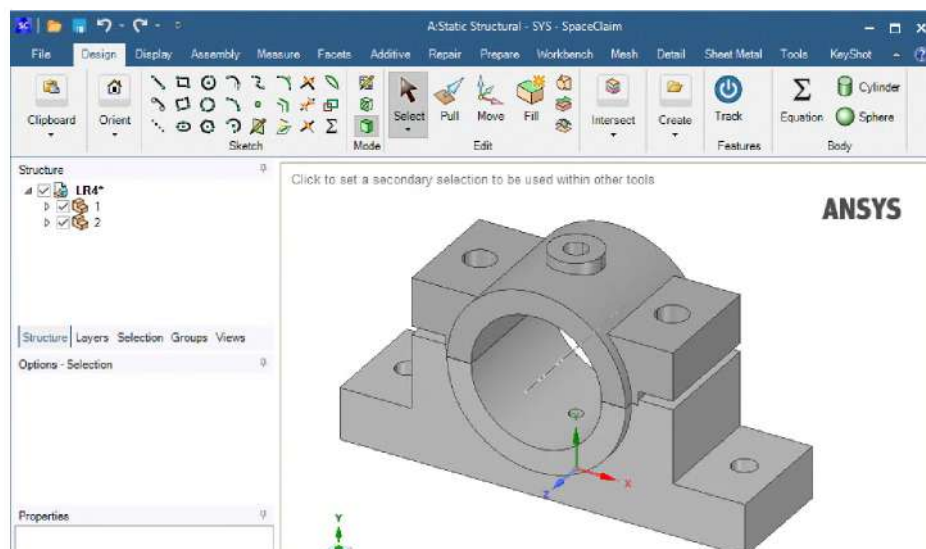


Рис. 2.8. Импорт геометрии

4. Присваиваем выбранный материал к импортированной геометрии:
- дважды нажимаем ЛКМ на блок **Model** в окне **Workbench**;
 - в появившемся окне нажимаем на «+» напротив **Geometry** (1), выделяем обе модели (удерживая кнопку Ctrl) и выбираем вариант согласно своему варианту (3) (рис. 2.9).

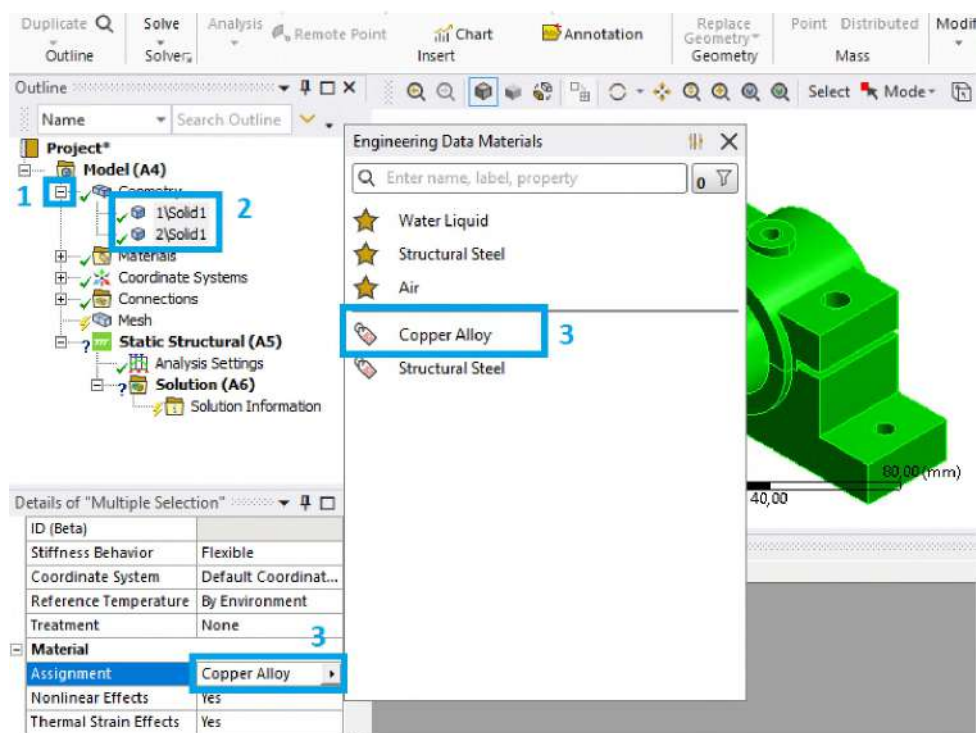


Рис. 2.9. Выбор материала

5. Проверяем корректность автоматического создания контактных поверхностей (рис. 2.10). Для этого раскрываем раздел *Connections* (1) и нажимаем на *Contact Region* (2). Проверяем корректность выбора контактирующих поверхностей (3) и тип контакта – *Bonded* (4).

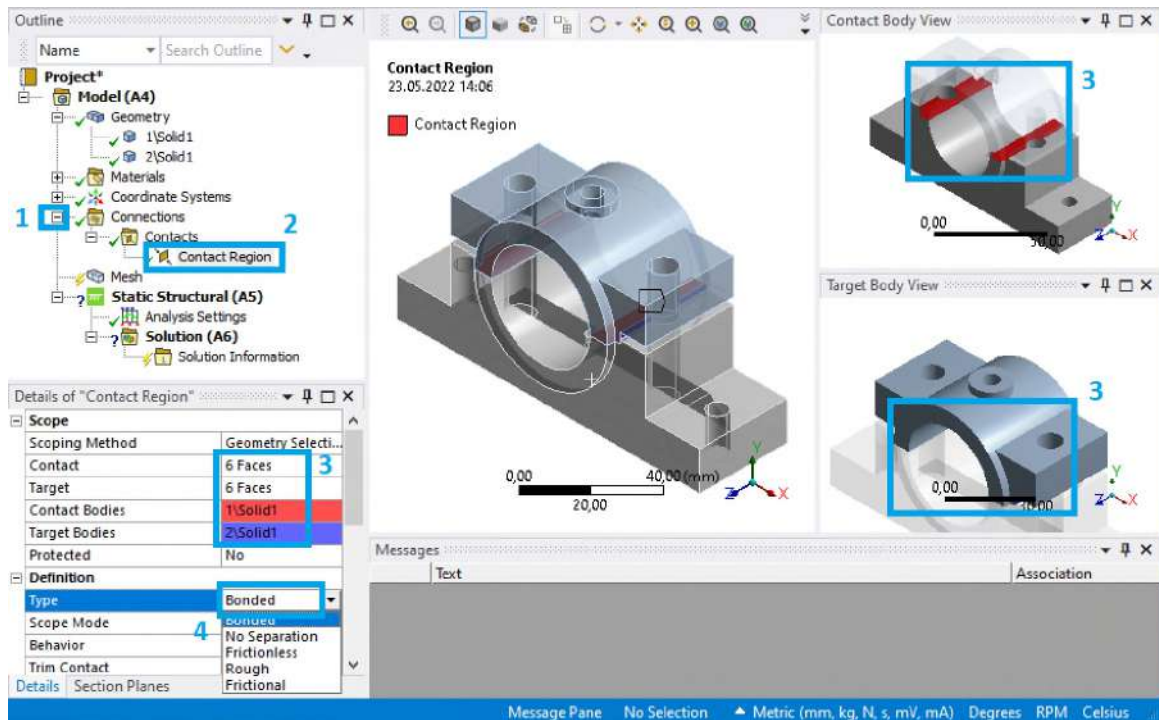


Рис. 2.10. Настройка контактов

Примечание: Bonded – целевая и контактная поверхности сцепляются по всем направлениям; No Separation – целевая и контактная поверхности сцепляются, но проскальзывание разрешено; Frictionless – контакт без трения; Rough – «грубый» фрикционный контакт с отсутствием скольжения; Frictional – контакт с трением, нелинейный контакт.

6. Создаем сеточную модель (рис. 2.11):
 - нажимаем ПКМ на раздел *Mesh* (1);
 - напротив разрешения сетки (*Resolution*) устанавливаем значение 5 (2);
 - устанавливаем хорошее качество базового значение для улучшения краев (*Span Angle Center*) – *Fine* (3);
 - нажимаем *Generate* (4) и на экране появляется сеточная модель.

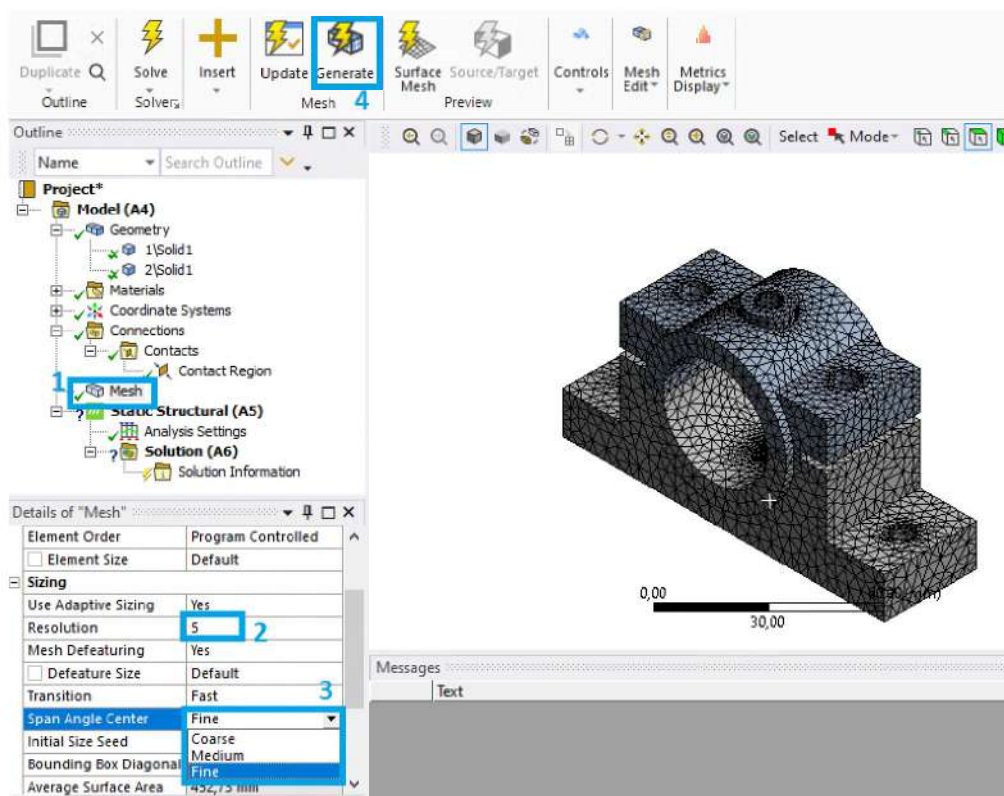


Рис. 2.11. Создание сетки

7. Задаем граничные условия.

7.1. Фиксируем корпус подшипника в пространстве (рис. 2.12):

- нажимаем ПКМ на *Static Structural* (1) и выбираем *Insert – Fixed Support*;
- выбираем отверстия, состоящие из двух частей, и нажимаем *Apply* (2).

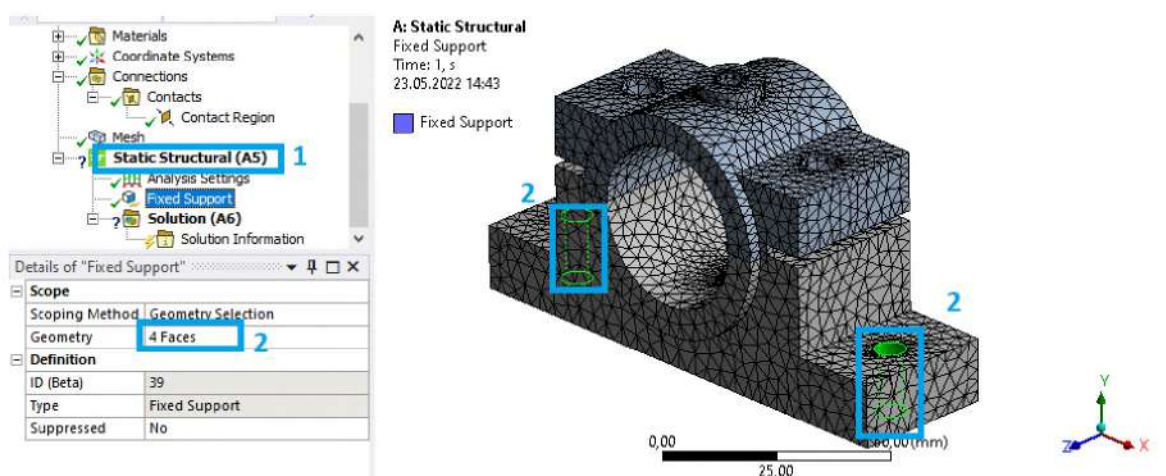


Рис. 2.12. Фиксация в пространстве

7.2. Подводим действующие силы (рис. 2.13):

- нажимаем ПКМ на **Static Structural** (1) и выбираем **Insert – Force**;
- выбираем необходимую поверхность корпуса подшипника и нажимаем **Apply** (2);
- изменяем способ задания значений на компонентный (**Components**) (3);
- вводим значения сил по оси **X** и **Y** (4);
- повторяем приведенные выше операции для второй поверхности.

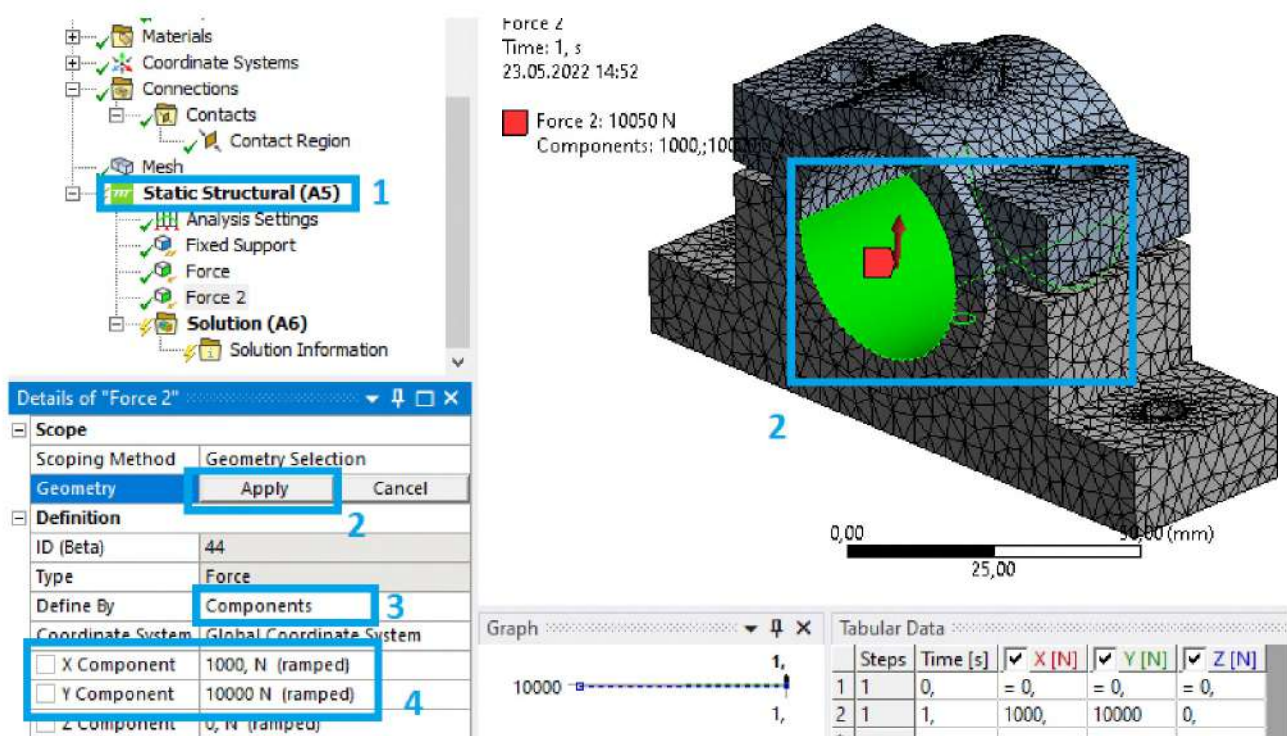


Рис. 2.13. Задание действия сил

7.3. Задаем начальную температуру согласно варианту (рис. 2.14):

- нажимаем ПКМ на **Static Structural** (1) и выбираем **Insert – Thermal Condition**;
- выбираем обе детали корпуса подшипника и нажимаем **Apply** (2);
- вводим начальное значение температуры (3);
- нажимаем на иконку параметра (4).

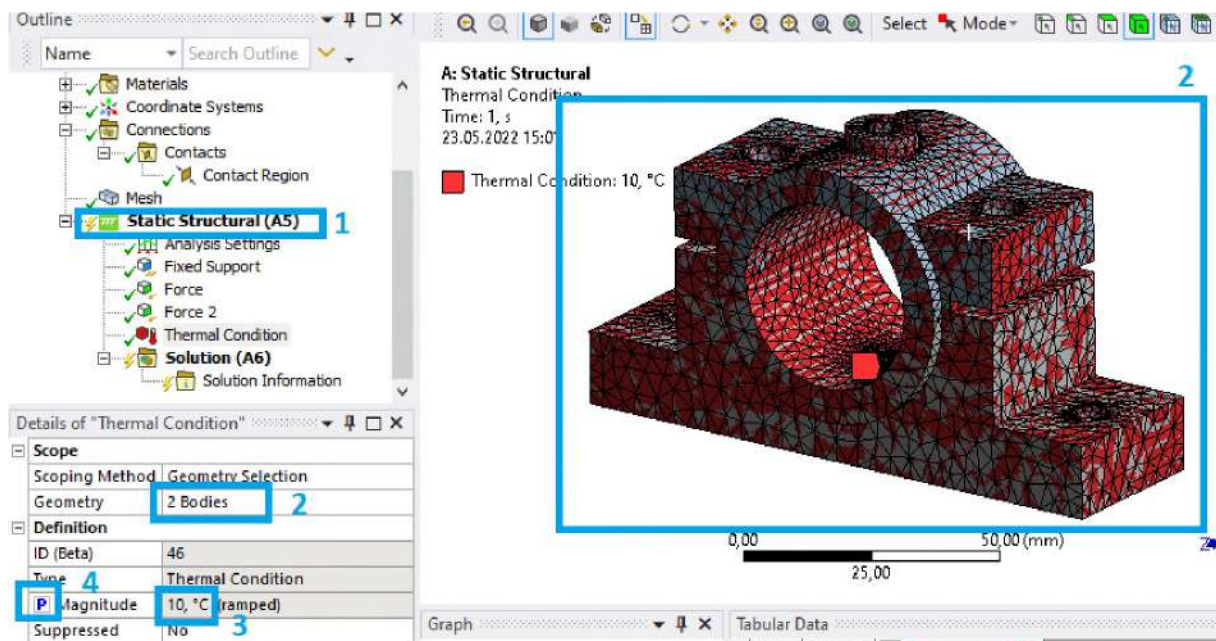


Рис. 2.14. Задание температуры

8. Выбираем необходимые результаты расчета (рис. 2.15). Для этого поочередно нажимаем ПКМ на **Solution** (1), наводим на **Insert** и выбираем (2): **Deformation – Total** (полное смещение); **Stress – Equivalent (von-Mises)** (эквивалентное напряжение); **Stress Tool – Max Equivalent Stress** (коэффициент запаса прочности). После этого можно нажать на кнопку **Solve**, чтобы запустить расчет (3).

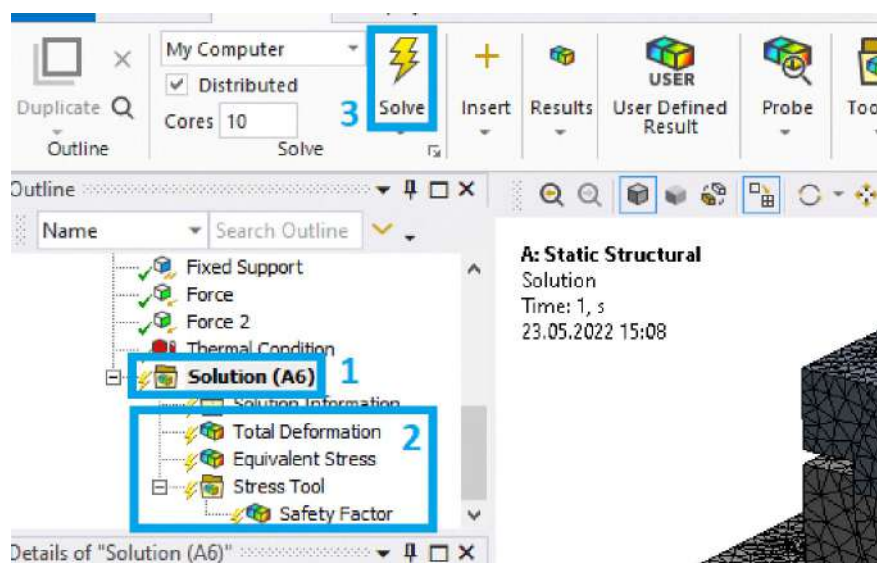


Рис. 2.15. Выбор результатов расчета

9. Выводим получившиеся результаты:

– скрываем каркас и сетку (рис. 2.16): нажимаем ЛКМ на **Total Deformation** (1), выбираем **Display** (2) – **Edges** (3) – **No WireFrame** (4);

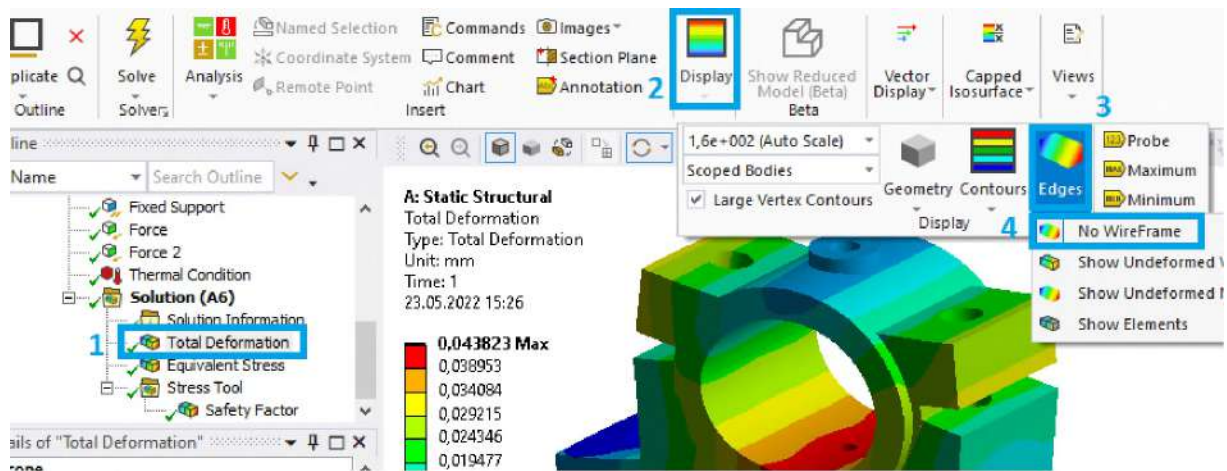


Рис. 2.16. Скрытие сетки

– увеличиваем цветовой шаг распределения градиента коэффициента запаса прочности (рис. 2.17): выделяем центральную область (1) и нажимаем на «+» несколько раз (2), после чего сместившийся цвет можно удалить подобным образом (3);

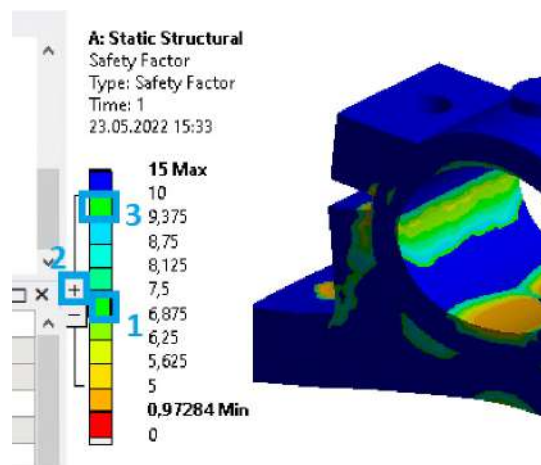
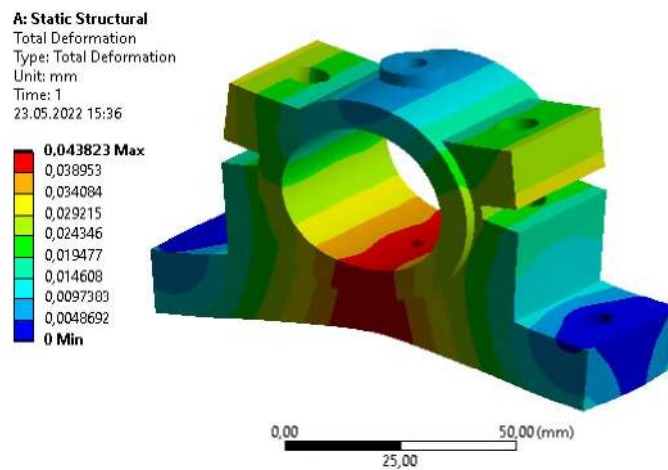
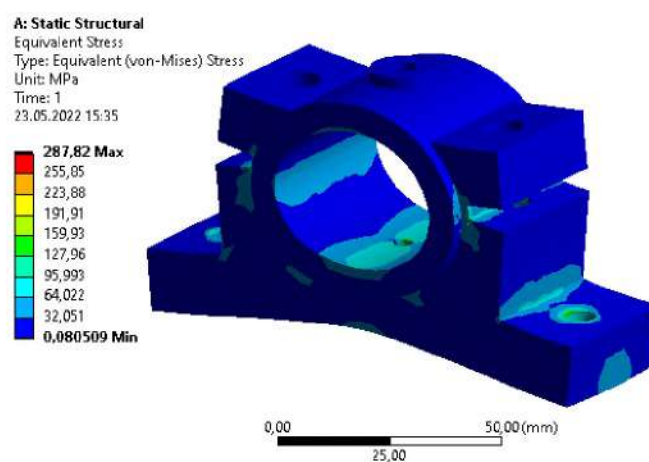


Рис. 2.17. Расширение цветового градиента

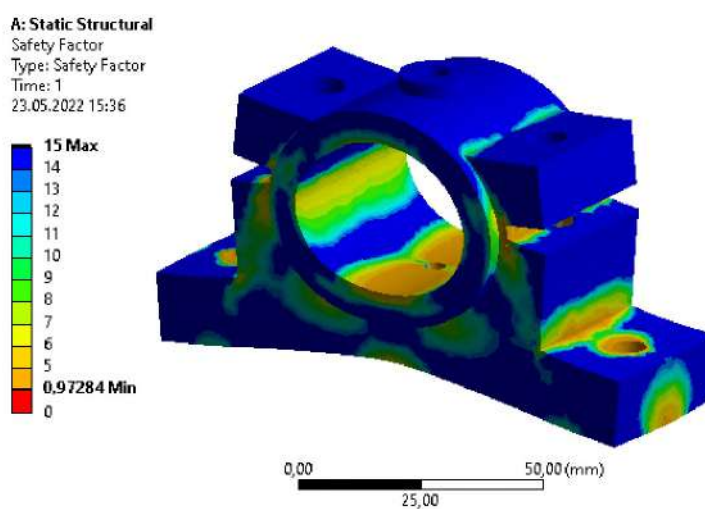
– в результате должны получиться изображения, аналогичные тем, что представлены на рис. 2.18.



a



б



в

Рис. 2.18. Результаты расчета:
a – полное смещение; *б* – эквивалентное напряжение;
в – коэффициент запаса прочности

10. Выполняем параметрический анализ.

10.1. Поочередно выделяем полученные результаты (1) и включаем опцию параметра (2) напротив значений (рис. 2.19): максимальное значение полного смещения; максимальное значение эквивалентного напряжения и минимальное значение коэффициента запаса прочности.

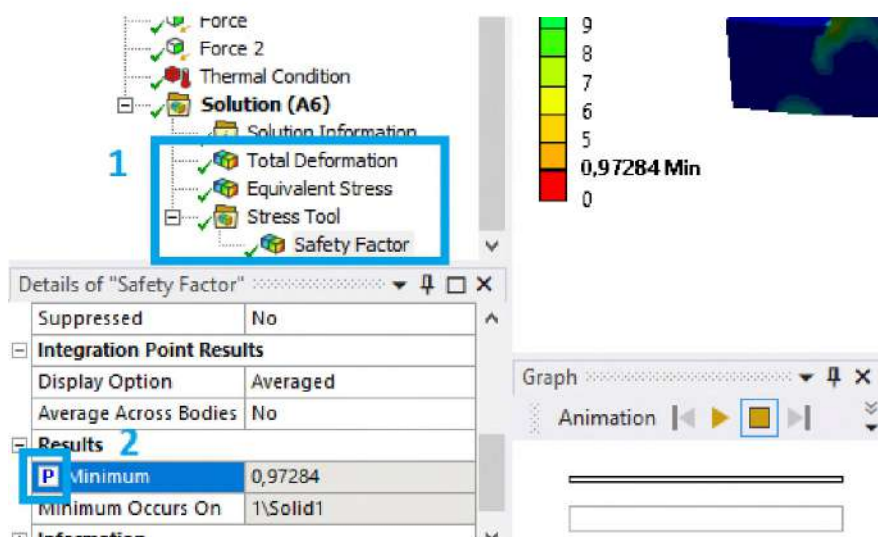


Рис. 2.19. Включение параметра

10.2. Возвращаемся в окно **Workbench** и нажимаем на появившийся блок **Parameter Set**. В открывшемся окне вводим необходимые значения температуры (1), нажимаем **Update All Design Points** (2), чтобы запустить расчет всех указанных точек, и после окончания расчета увидим заполненную таблицу результатов (3) (рис. 2.20).

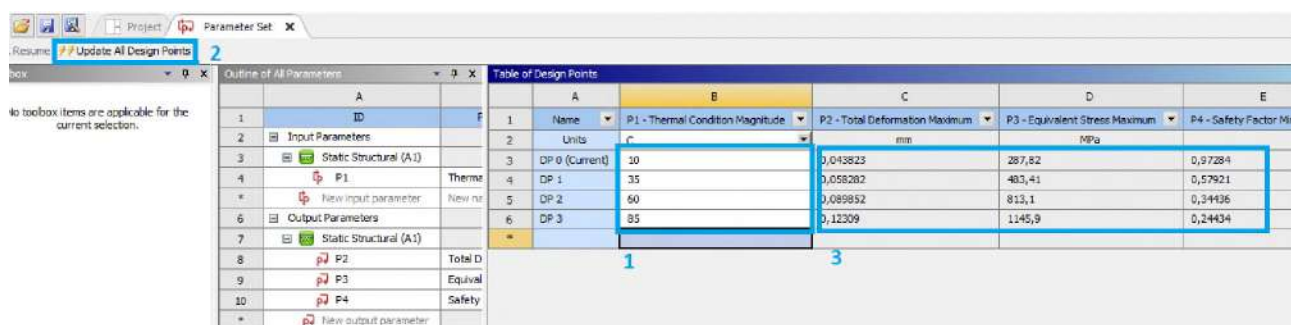


Рис. 2.20. Параметрический анализ

11. Сохраняем проект в папку, ранее созданную студентом (названия папки и проекта должны быть на английском языке). Для этого нажимаем *File – Save As... – Сохранить*. Для того чтобы проект можно было копировать без опасений сбить прописанные пути файлов, необходимо создать его архив. Для этого нажимаем *File – Archive... – Сохранить – Archive*.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Описание работы (с исходной схемой и таблицей для своего варианта).
4. Этапы построения.
5. Результаты работы (библиотека материалов со своим материалом, геометрия, сетка, граничные условия, градиент распределения полного смещения, градиент распределения эквивалентных напряжений, градиент распределения запаса прочности, таблица параметрического анализа с результатами).
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные этапы выполнения данной работы.
2. Дайте определение ANSYS.
3. Какие приложения объединяет в себе ANSYS Workbench?
4. Для чего предназначено приложение Mechanical?
5. Какие задачи позволяет рассчитывать модуль Static Structural?
6. Для чего предназначено приложение Meshing?
7. Назовите граничные условия, реализуемые в статическом прочностном анализе? Поясните значение каждого из них.

2.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА

ANSYS FLUID FLOW (CFX)

В ИНЖЕНЕРНОМ АНАЛИЗЕ

ANSYS CFX – программный комплекс, сочетающий уникальные возможности анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков, химической кинетики, горения, радиационного теплообмена и многих других. Возможность работы под единой средой **Workbench** позволяет обмениваться данными и результатами напрямую с другими модулями **ANSYS**, позволяя проводить сопряженный жидкостно-структурный анализ. Широкий спектр физических моделей позволяет найти реальное решение любой промышленной задачи. В дополнение к этому, **ANSYS CFX** представляет открытую архитектуру и специальные средства для изменения всех возможностей. Входные данные и результаты могут сохраняться в различных форматах, что обеспечивает легкую интеграцию с существующими программными средствами.

Рабочее окно Ansys CFX представлено на рис. 2.21.

Окно просмотра модели включает в себя контактные параметры, временные; доменный раздел; параметры расчета; базу материалов; параметры анализа и т. д.

Отличительные особенности данного пакета:

- алгебраический многосеточный метод решения линеаризованных уравнений;
- совместное решение уравнений сохранения момента и массы;
- практически линейная зависимость времени счета от размеров модели;
- высокие характеристики масштабируемости параллельных расчетов.

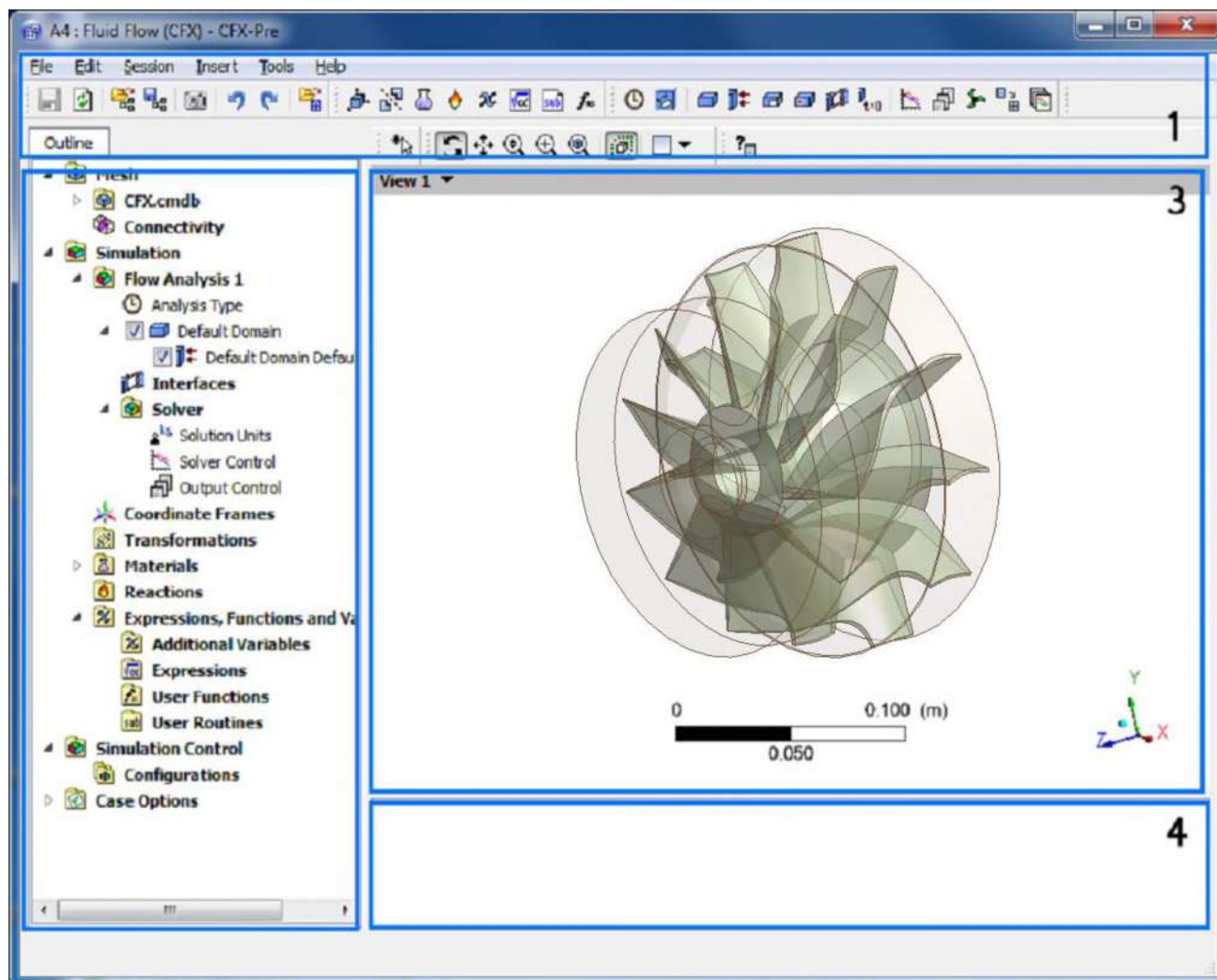


Рис. 2.21. Рабочее окно программы ANSYS CFX:

- 1 – панель управления;
- 2 – Дерево проекта (основные составляющие проекта);
- 3 – окно просмотра модели;
- 4 – окно сообщений системы

Расчет в **ANSYS FLUID FLOW (CFX)** подразумевает использование нескольких приложений, которые имеют собственные интерфейсы и между которыми происходит передача информации, возникающей в процессе постановки и решения задач гидродинамики. Такими приложениями являются следующие:

- 1) **DesignModeler** или **SpaceClaim** (представлены блоком **Geometry**);
- 2) **Meshing** (представлен блоком **Mesh**);

3) **CFX-Pre** (представлен блоком **Setup**) – это физический препроцессор, который импортирует сетку, созданную в блоке **CFX-Mesh**. Это этап постановки задачи, на котором определяются физические модели, на основе которых будет происходить симуляция процесса, а также их основные параметры и характеристики. **CFX-Pre** позволяет определить граничные условия процесса (входные, выходные параметры), модели теплообмена и контактные интерфейсы;

4) **CFX-Solver Manager** (представлен блоком **Solution**) – это графический интерфейс пользователя, который позволяет задавать параметры для вычислений: управлять процессом решения **CFX-Solver** в интерактивном режиме, определять входные данные файла решателя, запускать или приостанавливать **CFX-Solver**, контролировать процесс решения задачи, устанавливать решатель для проведения параллельных вычислений;

5) **CFD-Post** (представлен блоком **Result**) – это программа, предназначенная для анализа, визуализации и представления результатов, полученных в ходе решения задачи посредством **ANSYS CFX-Solver**. Для этого используются следующие средства:

- визуализация геометрии и исследуемых областей;
- векторные графики для визуализации направления и величины потоков;
- визуализация изменения скалярных величин, таких как температура, давление, внутри исследуемой области.

Графики, изображения и видео, полученные в результате анализа решения задачи, можно сохранить в виде отдельных файлов.

Лабораторная работа № 5
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТУРБИНЫ
В ПРОГРАММЕ ANSYS

Цель работы: приобретение студентами навыков в использовании программного инструмента *ANSYS - Fluid Flow (CFX)* при проведении газодинамического анализа колеса турбины.

Описание работы: используя расчетный инструмент *Fluid Flow (CFX)*, необходимо смоделировать движение газа в турбине (рис. 2.22).

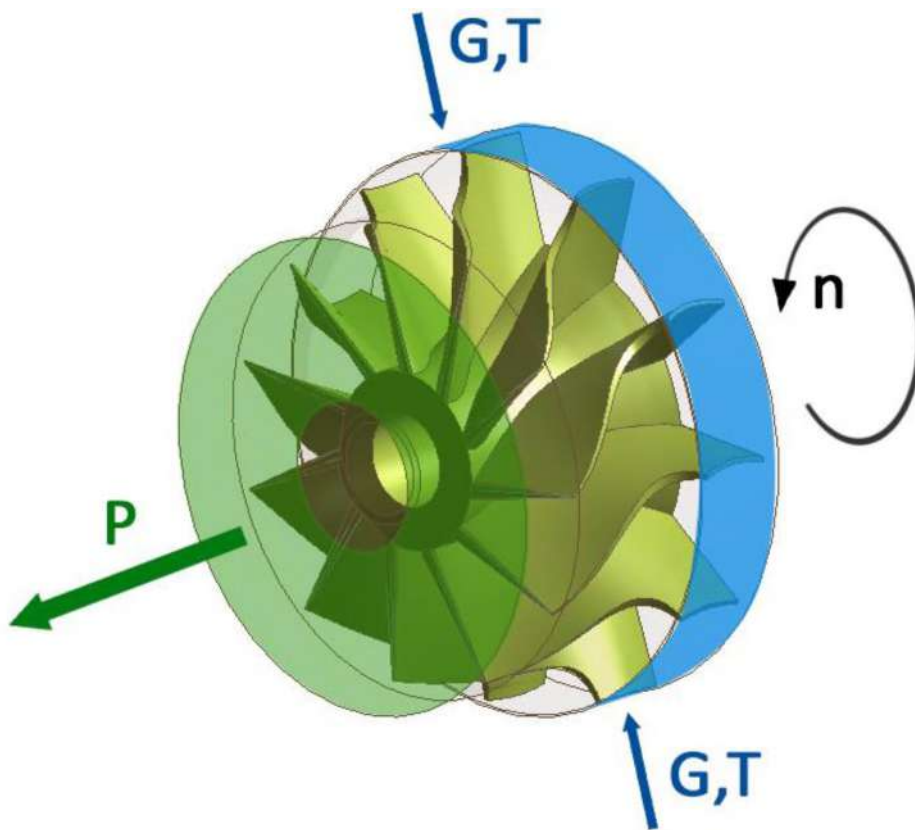


Рис. 2.22. Расчетная схема

Известны: рабочее тело, скорость вращения ротора n , массовый расход на входе G , температура на входе T и давлением на выходе $P = 1$ атм (табл. 2.2). Гравитационными силами можно пренебречь.

Таблица 2.2

Исходные данные

Вариант	Газ	Число оборотов n , об/мин	Расход на входе G , кг/с	Температура на входе T , К	Давление на выходе P , атм
1	CO2 Ideal Gas	50000	1	320	1
2	O2 Ideal Gas	55000	1,2	340	1,2
3	Air Ideal Gas	45000	0,9	340	1
4	Air Ideal Gas	62000	1,2	360	1,5
5	CO2 Ideal Gas	57000	0,8	320	1,2
6	O2 Ideal Gas	48000	1	325	1,6
7	Air Ideal Gas	50000	1	330	1
8	NH3 Ideal Gas	52000	1,2	310	1,2
9	CO2 Ideal Gas	60000	0,9	320	1
10	O2 Ideal Gas	53000	0,8	315	1,5
11	Air Ideal Gas	55000	1	325	1,2
12	NH3 Ideal Gas	51000	1	320	1,6
13	Air Ideal Gas	45000	1,2	360	1,5
14	O2 Ideal Gas	62000	0,8	320	1,2
15	Air Ideal Gas	57000	1	325	1,6
16	NH3 Ideal Gas	48000	1	330	1
17	Air Ideal Gas	50000	1,2	310	1,2
18	O2 Ideal Gas	52000	0,9	320	1
19	Air Ideal Gas	60000	0,8	315	1,5
20	NH3 Ideal Gas	53000	1	325	1,2
21	CO2 Ideal Gas	50000	1,2	360	1,5
22	O2 Ideal Gas	55000	0,8	320	1,2
23	Air Ideal Gas	47000	1	325	1,6
24	Air Ideal Gas	60000	1	330	1
25	CO2 Ideal Gas	57000	1,2	310	1,2
26	O2 Ideal Gas	45000	0,9	320	1
27	Air Ideal Gas	50000	0,8	315	1,5
28	NH3 Ideal Gas	52000	1	325	1,2
29	Air Ideal Gas	62000	1	330	1
30	O2 Ideal Gas	53000	1,2	310	1,2

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Запускаем *ANSYS Workbench* и добавляем модуль *Fluid Flow (CFX)* двойным нажатием ЛКМ в разделе *Toolbox* (рис. 2.23).

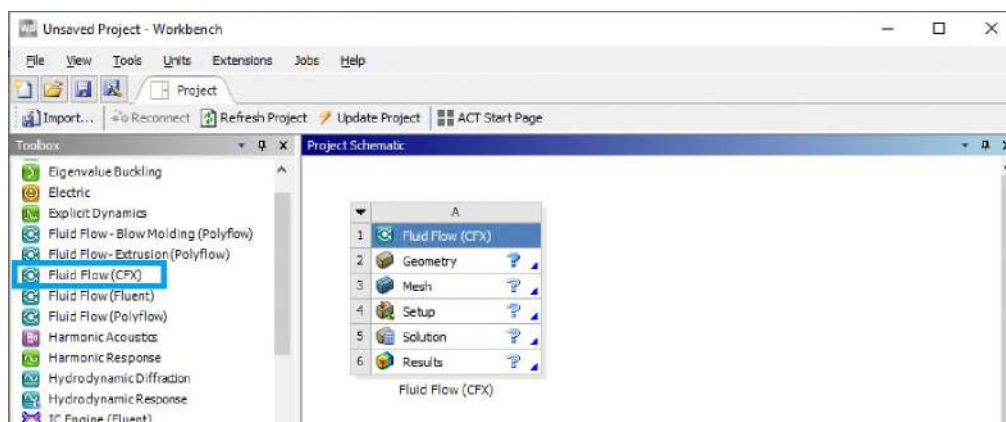


Рис. 2.23. Добавление модуля

2. Импортируем геометрию:

- дважды нажимаем ЛКМ на блок *Geometry* в окне *Workbench*;
- в появившемся окне нажимаем *File – Open*;
- для того чтобы найти созданную геометрию, переходим в папку с ней и выбираем отображение всех форматов – *All Files (*.*)*. Нажимаем на созданную геометрию с расширением «.x_t» в папке лабораторной работы и жмем кнопку *Открыть*. Импортированная геометрия показан на рис. 2.24;
- после этого окно геометрии можно закрыть.

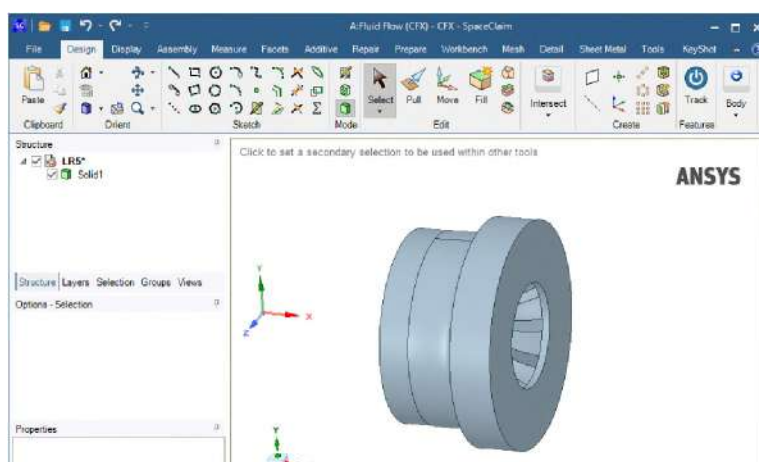


Рис. 2.24. Импорт геометрии

3. Создаем сеточную модель и присваиваем имена поверхностям.

3.1. Создаем сеточную модель (рис. 2.25):

– дважды нажимаем ЛКМ на блок **Mesh** в окне **Workbench**;

– нажимаем ПКМ на раздел **Mesh** (1);

– напротив размера элемента (**Element Size**) устанавливаем значение 2 мм (2);

– нажимаем **Generate** (3) и на экране появляется сеточная модель.

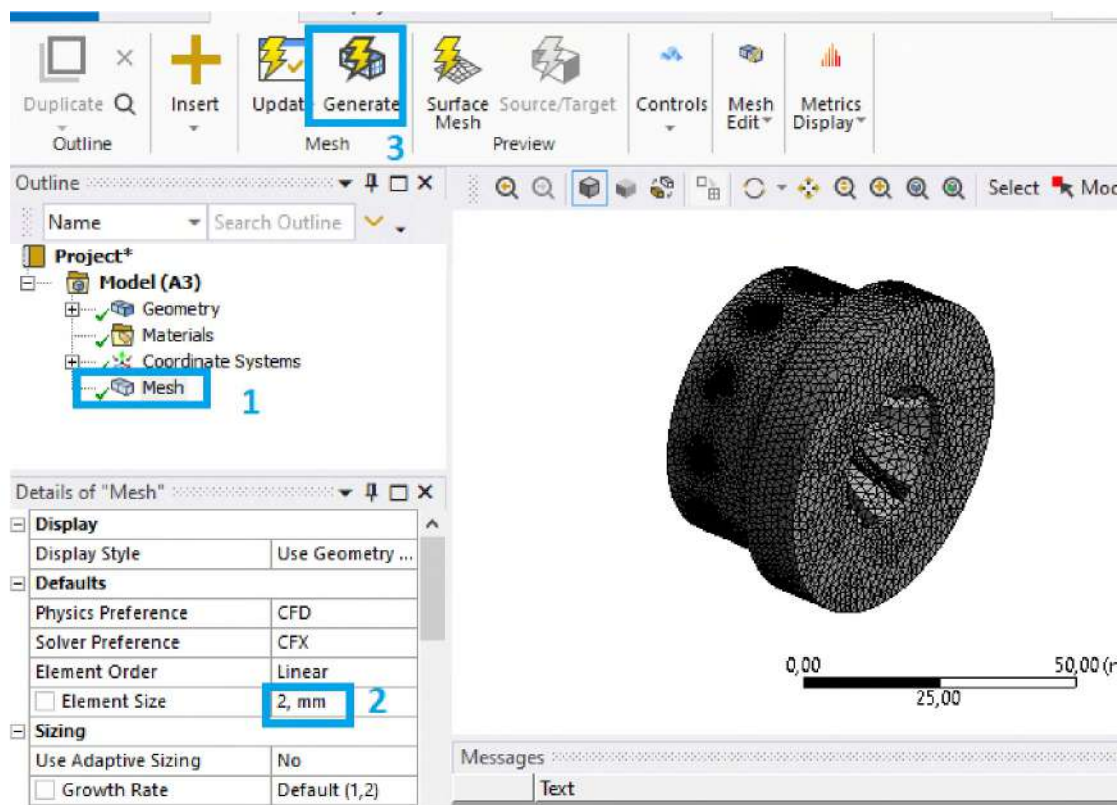


Рис. 2.25. Создание сетки

3.2. Присваиваем имена поверхностям:

– нажимаем один раз ЛКМ на поверхность 1 (рис. 2.26), после чего один раз нажимаем ПКМ на синюю область. В открывшейся вкладке выбираем раздел **Create Named Selection**. После чего в появившемся окне вводим имя поверхности «inlet»;

– повторяем приведенную выше операцию для поверхности 2 – «outlet», 3 – «wall».

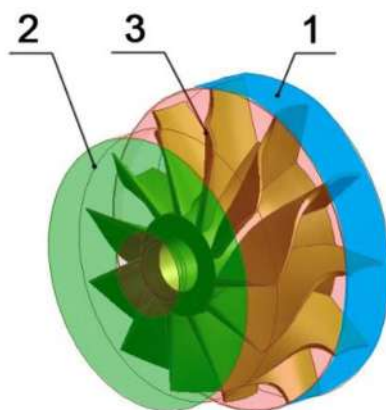


Рис. 2.26. Присвоение имен поверхностей

3.3. Нажимаем ПКМ на *Mesh* и выбираем *Update*. После этого окно *Meshing* можно закрыть.

4. Задаем граничные условия и параметры расчета.

4.1. Заходим в расчетных блок. Дважды нажимаем ЛКМ на блок *Setup* в окне *Workbench*.

4.2. Импортируем материал рабочей среды согласно варианту (рис. 2.27).

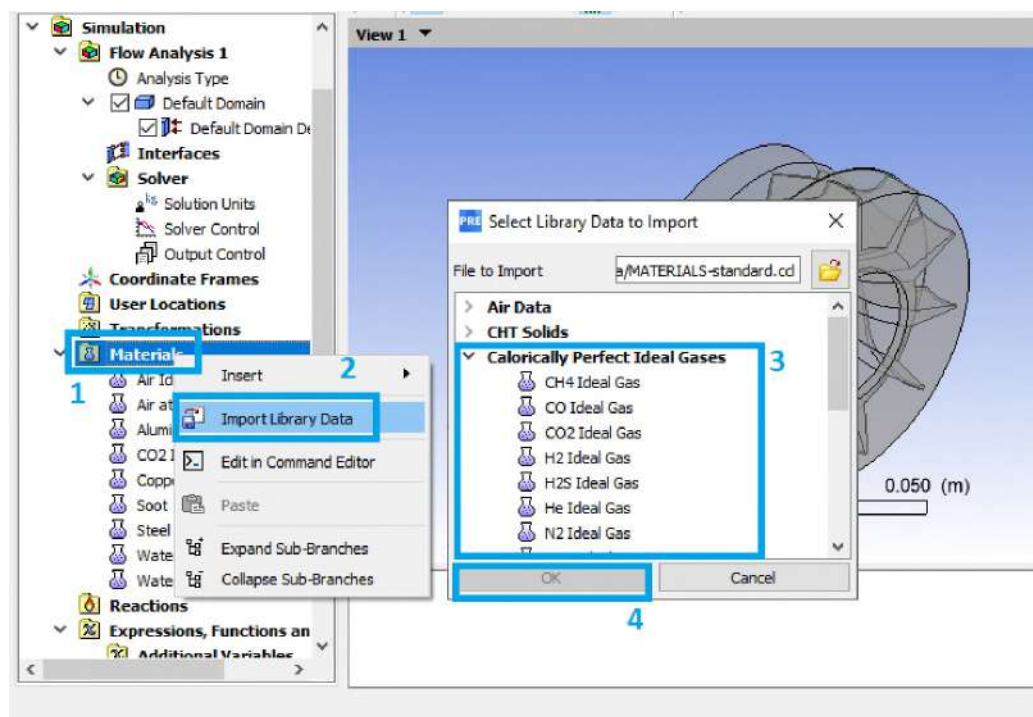


Рис. 2.27. Импорт газа

Для этого нажимаем ПКМ на вкладку *Materials* (1) в дереве проекта и выбираем *Import Library Data* (2). В появившемся окне раскрываем каталог идеальных газов *Calorically Perfect Ideal Gases* (3), выбираем газ, соответствующий своему варианту, и нажимаем *Ок* (4).

Примечание: для *Air Ideal Gas* данную операцию можно пропустить, так как данный газ присвоен по умолчанию.

4.3. Настраиваем модель работы турбоагрегата:

- в верхней панели окна *CFX-Pre* нажимаем *Tools – Turbo Mode...*;
- в окне *Basic Settings* выбираем тип машины (*Machine Type*) – *Radial Turbine* и ось вращения (*Rotation Axis*) – *X*. После чего можно нажать кнопку *Next*;
- в окне *Component Definition* нажимаем на *R1*, выбираем тип (*Type*) – *Rotating* и выставляем число оборотов в минуту согласно своему варианту *n*. После чего можно нажать кнопку *Next*;
- в окне *Physics Definition* выставляем следующие параметры (рис. 2.28): согласно своему варианту выбираем движущийся газ в строке *Fluid* (1); устанавливаем исходное давление (*Reference Pressure*), равное 0 атмосфер (2); теплопередачу (*Heat Transfer*) – суммарную энергию (*Total Energy*) (3); тип турбулентного течения (*Turbulence*) – *k-Epsilon* (4); параметры входа и выхода (*Inflow/Outflow Boundary Templates*) – массу на входе и давление на выходе (*Mass Flow Inlet P-Static Outlet*) (5); полную температуру на входе (*T-Total*) – вводится значение температуры *T* (6), согласно своему варианту (табл. 2.2); массовый расход на входе (*Mass Flow Rate*) – вводится значение массового расхода *G* (7), согласно своему варианту (табл. 2.2); статичное давление на выходе (*P-Static*) – вводится значение давления *P* (8), согласно своему варианту (табл. 2.2). После чего можно нажать кнопку *Next* (9);

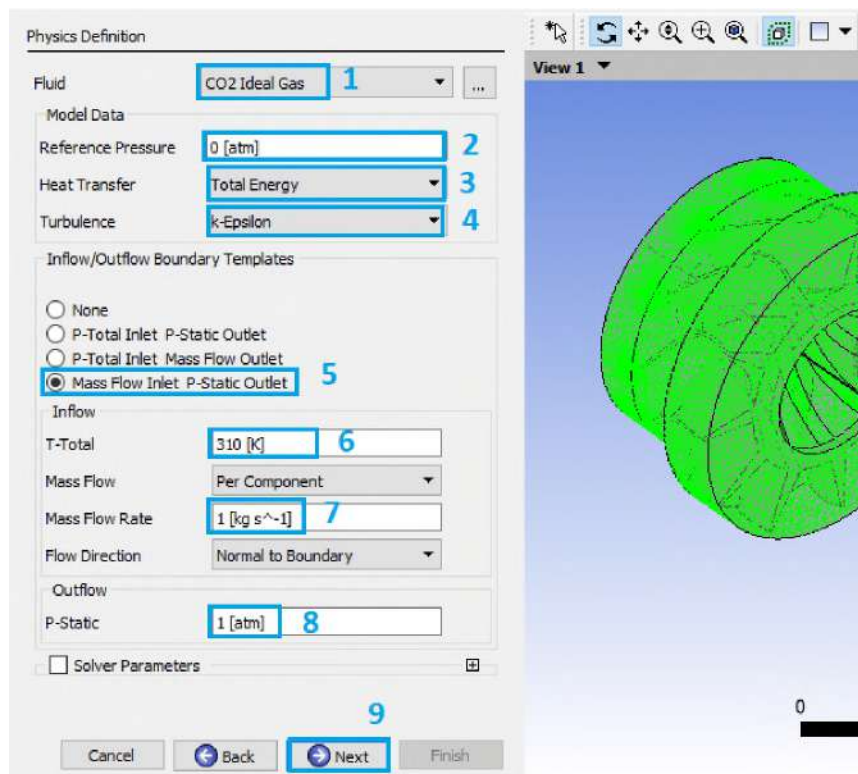


Рис. 2.28. Физическая модель

– настройку интерфейсов в окне *Interface* можно пропустить, так как у нас нет отдельных контактирующих геометрий;

– в окне *Boundary Definition* сверяем выбранные для входа и выхода поверхности. Если п. 4 не был пропущен, то все должно быть присвоено автоматически. После чего можно нажать кнопку *Next*;

– в следующем окне нажимаем *Finish*. В появившемся окне выбираем *Yes*.

5. Устанавливаем количество итераций. Для этого дважды нажимаем ЛКМ на *Solver Control* (1) и в появившемся окне вводим **500** итераций (2), после чего нажимаем *Ok* (3). Окно CFX-Pre можно закрыть.

6. Запускаем решатель:

- дважды нажимаем ЛКМ на блок *Solution* в окне *Workbench*;
- в появившемся окне жмем *Start Run*;
- после окончания расчета появится предупреждение, в котором нужно будет нажать *Ok*;
- теперь окно *Solver Manager* можно закрыть.

7. Выводим результаты расчета.

7.1. Заходим в блок результатов. Дважды нажимаем ЛКМ на блок **Result** в окне **Workbench**.

7.2. Настраиваем отображение легенды результатов (рис. 2.29). Для этого нажимаем на Default Legend View (1), выбираем Fixed (2), вводим значение 1 (3) и нажимаем Apply (4). Данные изменения позволят выводить результаты в более понятной форме (пример: будет значение «317.6» вместо «3.318e+03»).

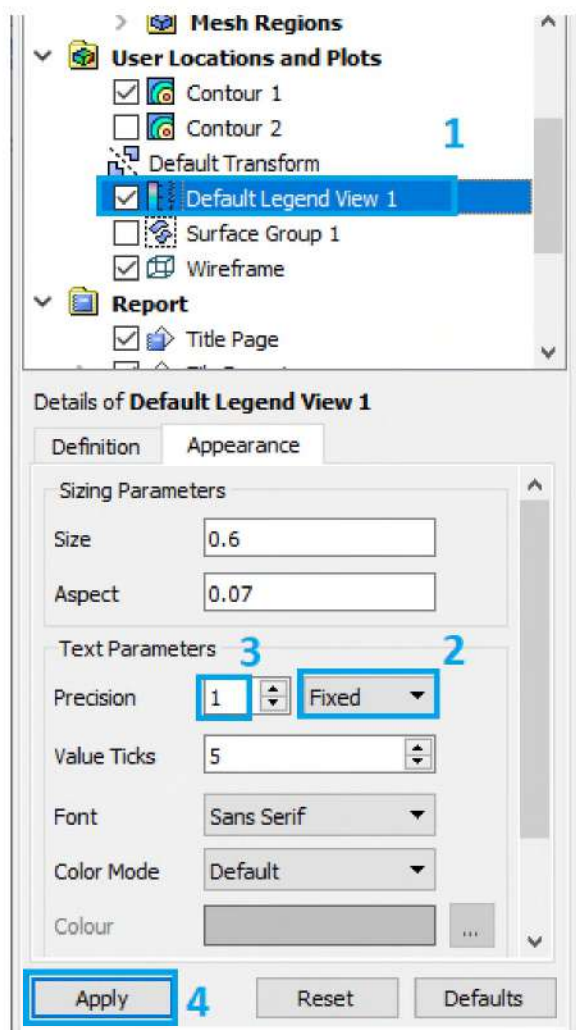


Рис. 2.29. Настройка истории результатов

7.3. Выводим распределение давлений газа в пристеночной области турбины (рис. 2.30). Для этого нажимаем иконку **Contour** (1), вводим название «Pressure» (2), нажимаем **OK** (3), в выпадающем окне

выбираем *Pressure* (4), вводим число цветовых ступеней – 33 (5) и нажимаем *Apply* (6).

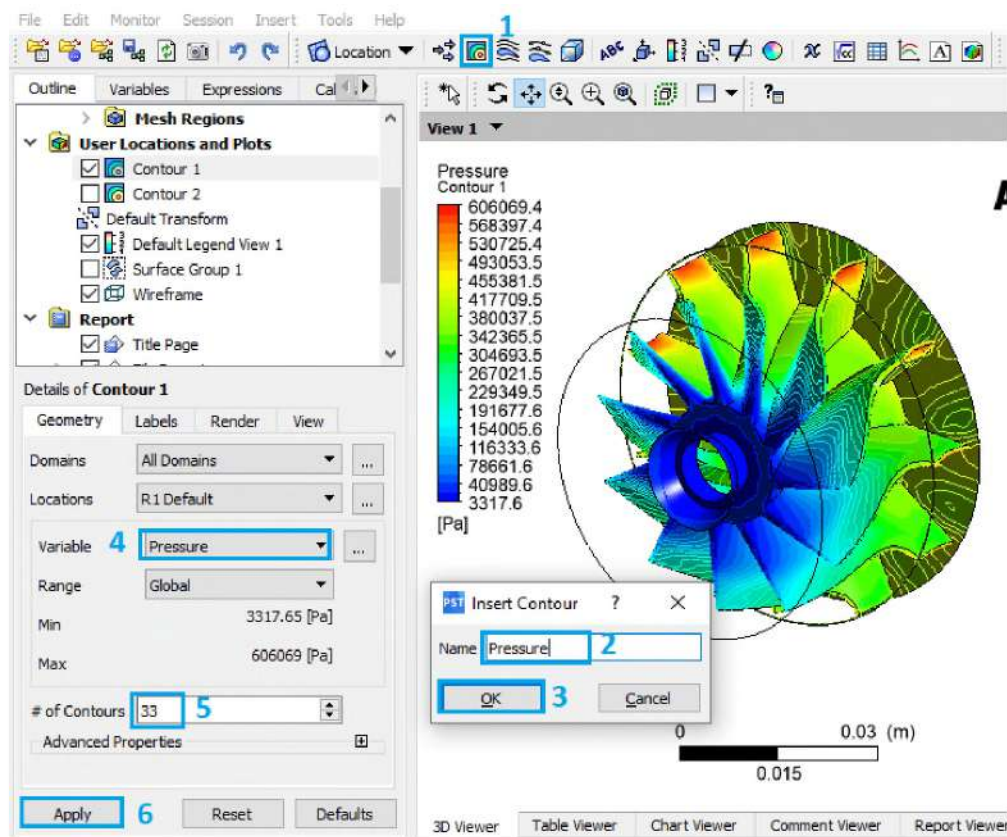


Рис. 2.30. Распределение давления

7.4. Повторяем п. 7.3 для температуры (Temperature) (рис. 2.31).

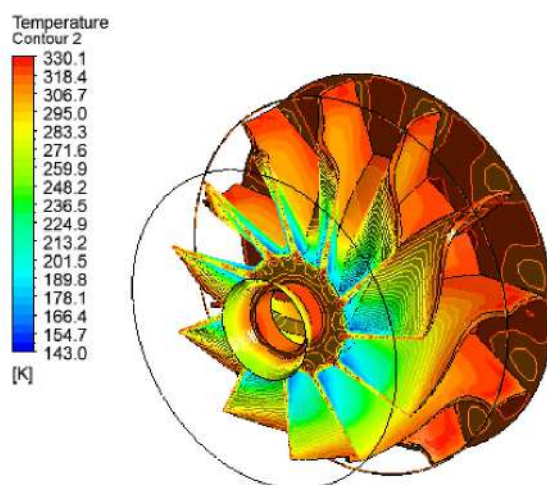


Рис. 2.31. Распределение температуры

7.5 Выводим линии распределения скоростей (рис. 2.32). Для этого нажимаем иконку **Stream Line** (1), вводим название «Velocity» (2), нажимаем **OK** (3), выбираем начальную поверхность **R1 Inlet** (4), вводим число стартовых точек – 200 (5) и нажимаем **Apply** (6). После этого работа в окне **CFD-Post** окончена.

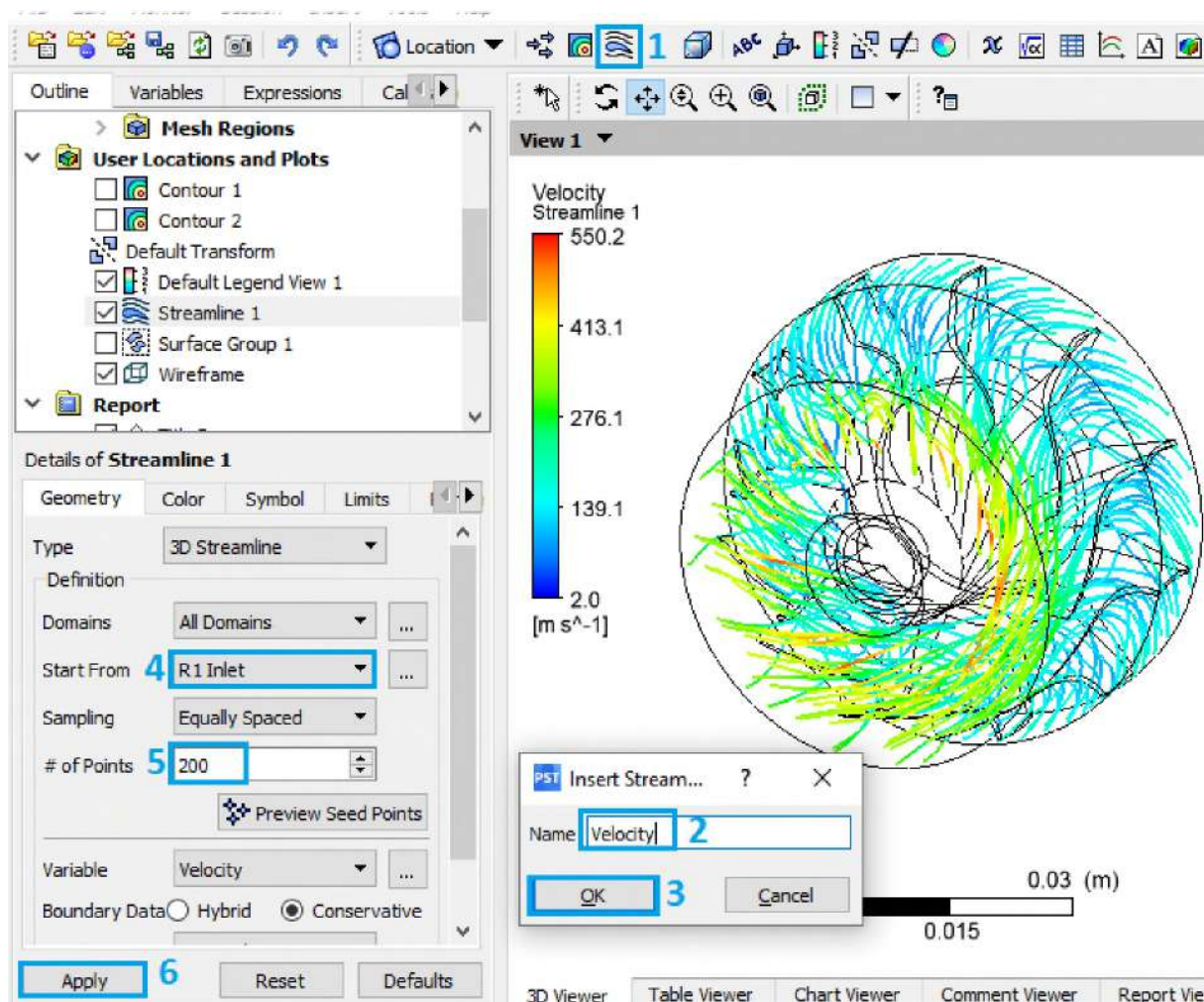


Рис. 2.32. Линии скорости

8. Сохраняем проект в папку, ранее созданную студентом (названия папки и проекта должны быть на английском языке). Для этого в окне **Workbench** нажимаем **File – Save As... – Сохранить**. Для того чтобы проект можно было копировать без опасений сбить прописанные пути файлов, необходимо создать его архив. Для этого нажимаем **File – Archive... – Сохранить – Archive**.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Описание работы (с исходной схемой и таблицей для своего варианта).
4. Этапы построения.
5. Результаты работы (изображения распределения давления; распределения температуры; линии скорости).
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Основные этапы выполнения работы.
2. Что такое ANSYS Fluid Flow (CFX)?
3. Отличительные особенности ANSYS Fluid Flow (CFX).
4. Из каких блоков состоит модуль ANSYS Fluid Flow (CFX)?
5. Для чего предназначены DesignModeler или SpaceClaim?
6. Что представляет собой ANSYS CFX-Solver Manager?
7. Назовите основные инструменты визуализации расчетов в CFD-Post.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем практикуме представлены пять лабораторных работ, которые могут быть использованы при изучении дисциплины «Основы машиностроительных компьютерных технологий» студентами, обучающимися по направлениям 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 20.05.01 «Пожарная безопасность», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» и 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения».

Материал, изложенный в практикуме, рассчитан на освоение таких программных продуктов, как КОМПАС и ANSYS, приобретение навыков подготовки чертежей, спецификаций, схем, а также моделирования и проведения численных исследований.

Библиографический список, представленный в конце практикума, будет полезен при выполнении и оформлении лабораторных работ.

Студент в ходе выполнения лабораторных работ может продемонстрировать свой уровень квалификационной подготовки и наиболее глубоко изучить теорию на примере: создания и оформления сборочного чертежа и спецификации, создания и оформления технологической схемы, построения трехмерной модели в программе КОМПАС, а также прочностного и газодинамического анализа в программе ANSYS.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ Р 2.307-2011. Нанесение размеров и предельных отклонений : межгосударственный стандарт : издание официальное : Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 3 августа 2011 г. N 211-ст межгосударственный стандарт ГОСТ 2.307-2011 введен в действие в качестве национального стандарта Российской Федерации с 1 января 2012 г. : введен впервые : дата введения 2012-01-01 / разработан АО "Кодекс". – Москва : Стандартинформ, 2012. – 34 с. – Текст : непосредственный.

2. ГОСТ Р 2.701-2008. Нанесение размеров и предельных отклонений : межгосударственный стандарт : издание официальное : Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 25 декабря 2008 г. N 702-ст межгосударственный стандарт ГОСТ 2.701-2008 введен в действие в качестве национального стандарта Российской Федерации с 1 июля 2009 г. : введен впервые : дата введения 2009-07-01 / разработан ЗАО "Кодекс". – Москва : Стандартинформ, 2012. – 16 с. – Текст : непосредственный.

3. Калашников, А. М. Моделирование и анализ компрессорного и теплообменного оборудования с применением компьютерных технологий [Электронный ресурс] : практикум : в 2 ч. / А. М. Калашников. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – ISBN 978-5-8149-2533-6. – Ч. 1 : Трехмерное моделирование. – 2017. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-8149-2534-3.

4. Калашников, А. М. Моделирование и анализ компрессорного и теплообменного оборудования с применением компьютерных технологий [Электронный ресурс] : практикум : в 2 ч. / А. М. Калашников. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – ISBN 978-5-8149-2533-6. – Ч. 2 : Компьютерные

технологии в инженерном анализе. – 2017. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-8149-2535-0.

5. Выполнение и защита выпускной квалификационной работы бакалавра [Электронный ресурс] : А. М. Калашников [и др.]. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2019. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-8149-2845-0.

6. Инженерная графика : учеб. пособие / И. Ю. Скобелева, И. А. Широкова, Л. В. Гареева, В. В. Князьков. – Нижний Новгород : НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 2008. – 183 с. ISBN 978-5-93272-617-4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Омский государственный технический университет»

Кафедра «Холодильная и компрессорная техника и технология»

Дисциплина «Прикладные программы анализа технологических систем
и процессов»

Лабораторная работа №4
на тему: «ПРОЧНОСТНОЙ АНАЛИЗ В ПРОГРАММЕ ANSYS»

Вариант 1

Выполнил: ст. гр. НИ-191

Иванов И. И.

Проверил: ст. пр. каф. ХКТТ

Калашников А. М.

Омск, 2022

Цель работы:

Изучение основных этапов проведения статического прочностного анализа в среде *ANSYS Workbench* с использованием инструмента *Parameters*; приобретение навыков в использовании программного инструмента *ANSYS Workbench – Static Structural* при проведении прочностного анализа корпуса подшипника.

Описание работы:

Используя модуль *Static Structural* и инструмент *Parameters*, необходимо рассчитать минимальное значение коэффициента запаса прочности (*Safety Factor*), максимальное значение эквивалентного перемещения (*Equivalent Stress*) и максимальное значение полного перемещения (*Total Deformation*) при разных значениях величин температуры корпуса подшипника (рис. 1).

Температура корпуса подшипника = T

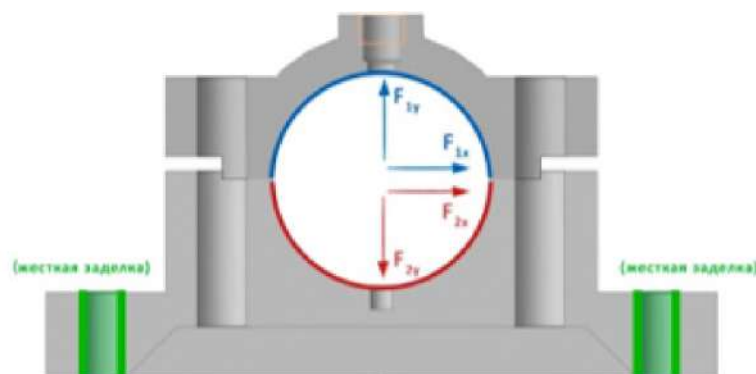


Рис. 1. Исходная схема

Табл. 1. Исходные данные

Вариант	Материал	$F_{1x} = F_{2x}$, кН	F_{1y} , кН	F_{2y} , кН	T, °C
1	Copper Alloy	1	8	10	10

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Запускаем *ANSYS Workbench* и добавляем модуль *Static Structural* двойным нажатием ЛКМ в разделе *Toolbox*.
2. Дважды нажимаем ЛКМ на блок *Engineering Data* (1), после чего жмем на *Engineering Data Sources* (2). Выбираем библиотеку *General Materials* (3) и

Результаты:

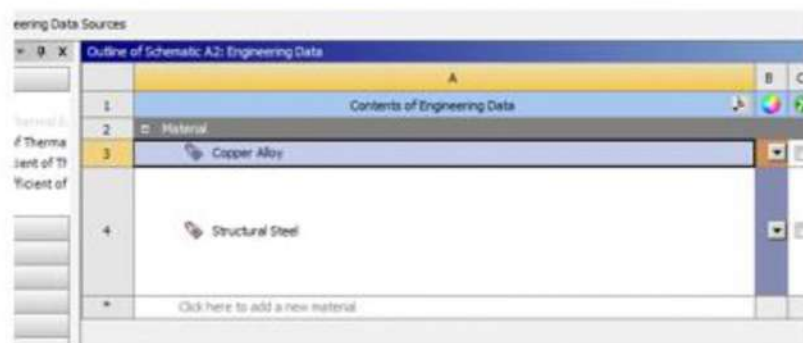


Рис. 2. Выбор материала

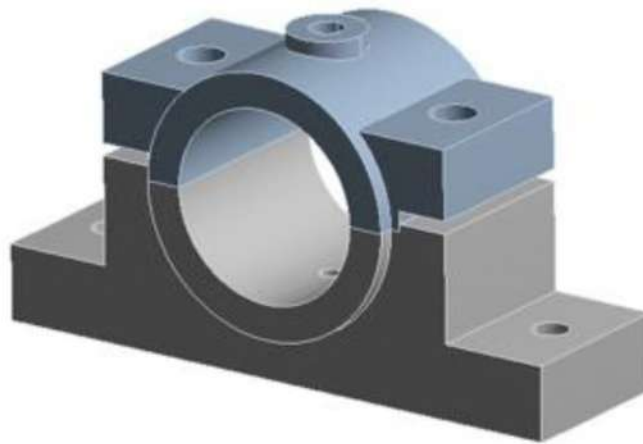


Рис. 3. Импорт 3D-модели

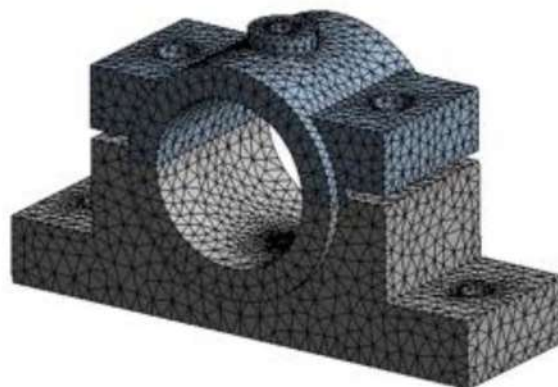
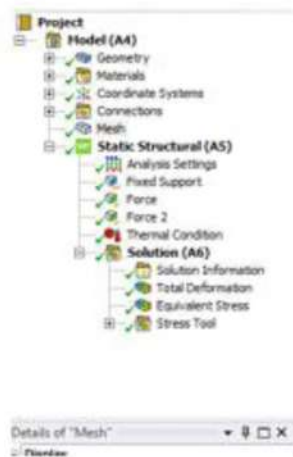


Рис. 4. Генерация сетки

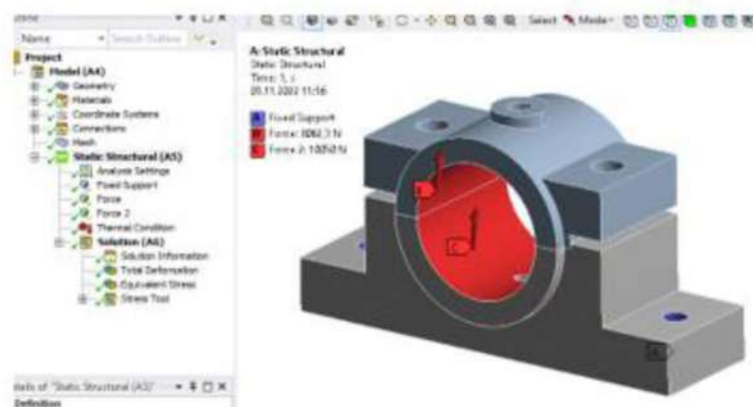


Рис. 6. Задание граничных условий

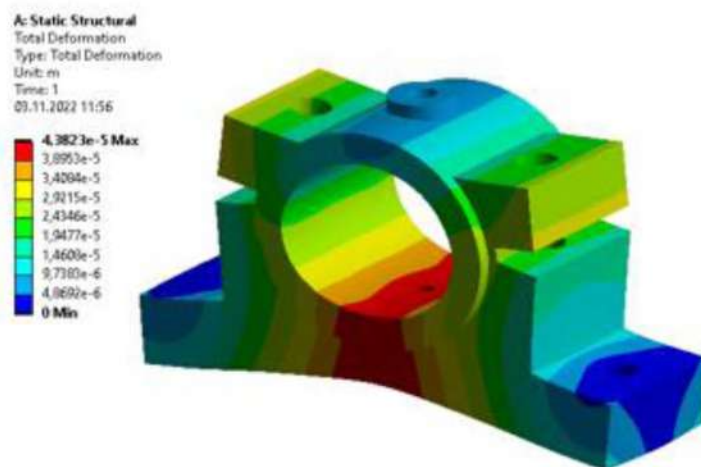


Рис. 8. Полное смещение

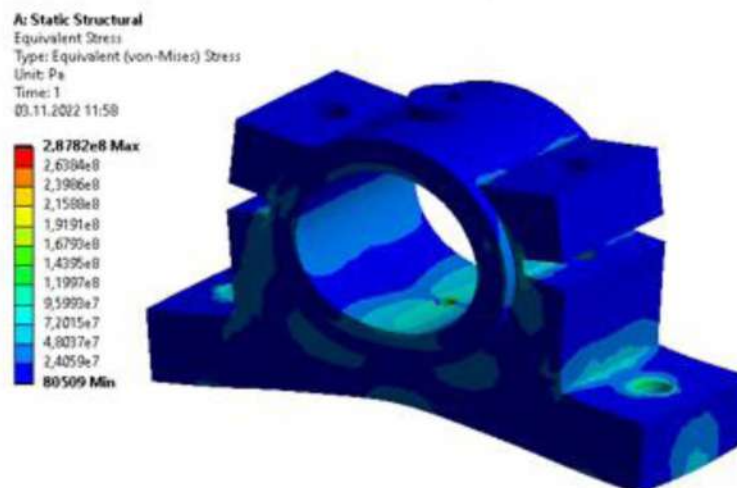


Рис. 9. Эквивалентные напряжения

A: Static Structural
 Safety Factor
 Type: Safety Factor
 Time: 1
 03.11.2022 11:58

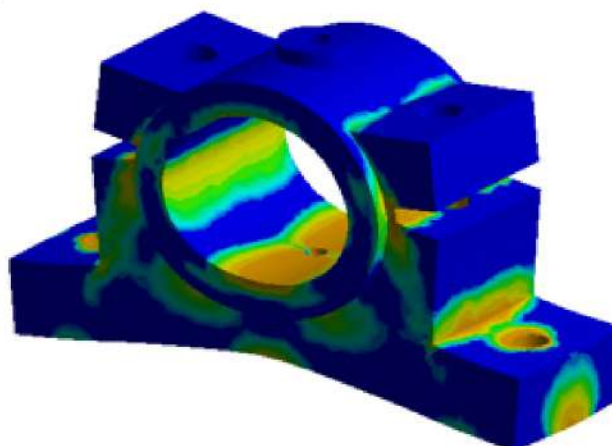
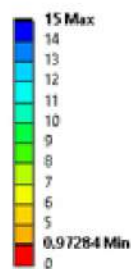


Рис. 10. Коэффициент запаса прочности

	A	B	C	D	E
1	Name	P1 - Thermal Condition Magnitude	P2 - Total Deformation Maximum	P3 - Equivalent Stress Maximum	P4 - Safety Factor Minimum
2	Units	C	mm	MPa	
3	DP 0 (Current)	10	0,043823	287,82	0,97284
4	DP 1	35	0,058282	483,41	0,57921
5	DP 2	60	0,089852	813,1	0,34436
6	DP 3	85	0,12309	1145,9	0,24434
*					

Рис. 11. Расчёт в блоке Parameters

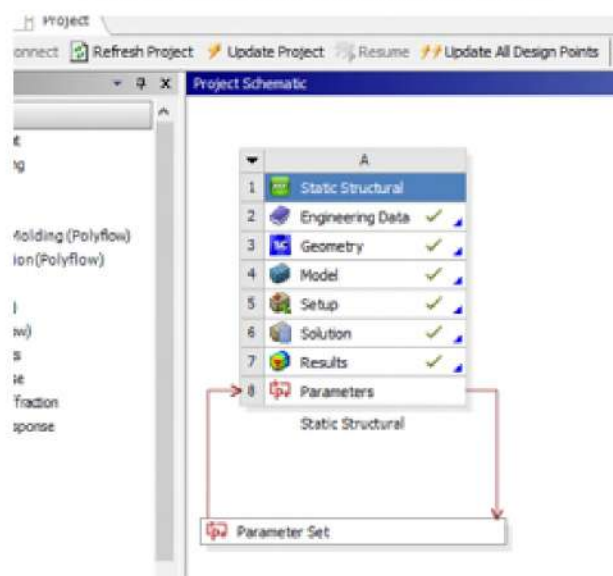


Рис. 12. Окно ANSYS Workbench

Вывод: Изучены основные этапы проведения статического прочностного анализа в среде ANSYS Workbench с использованием инструмента Parameters; приобретены навыки в использовании программного инструмента ANSYS Workbench – Static Structural при проведении прочностного анализа корпуса подшипника.

В результате выполнения лабораторной работы были получены следующие изображения: выбор материала; импорт 3D-модели; генерация сетки; задание граничных условий, полное смещение; эквивалентные напряжения; коэффициент запаса прочности; расчёт в блоке Parameters; окно ANSYS Workbench.

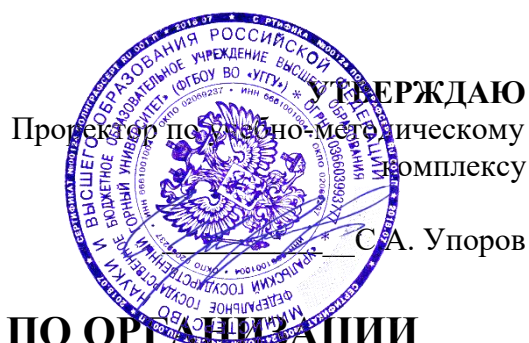
В результате выполненных расчетов были получены следующие интервалы искомых характеристик (табл. 2).

Таблица 2. Результаты

Тепловое состояние, °C	Максимальное полное смещение, мм	Максимальное эквивалентное напряжение, МПа	минимальный коэффициент запаса прочности
10	0,043823	287,82	0,97284
35	0,0582	483,41	0,57921
60	0,089852	813,1	0,34436
85	0,12309	1145,9	0,24434

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ
ОБУЧАЮЩИХСЯ
Б1.В.ДВ.01.01.01 ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦЕХОВ И УЧАСТКОВ
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Специальность
15.03.01 Машиностроение
программа подготовки бакалавриата
специализация

Материалы и технологии цифрового производства

Автор: Горшков Э.В., к.т.н.,с.н.с.

Одобрены на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисин Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол №1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	5
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	6
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ.....	10
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ	11
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	13
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ.....	13
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	14

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении - это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;
- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны - это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе лекций, практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа - лекционные, практические занятия;

2. внеаудиторная самостоятельная работа – дополнение лекционных материалов, подготовка к практическим занятиям, подготовка к участию в деловых играх и дискуссиях, выполнение письменных домашних заданий, Контрольных работ (рефератов и т.п.) и курсовых работ (проектов), докладов и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «Проектирование цехов и участков машиностроительного производства» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Проектирование цехов и участков машиностроительного производства» являются:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение тем курса (в т.ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля);
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к тестированию;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

ТЕМА 1: *Предпроектное обследование и подготовка исходных данных для проектирования.*

1. Основные цели и задачи, решаемые при проектировании?
2. Состав экономических задач при проектировании завода?
3. Какие технические задачи необходимо решать при проектировании машиностроительного завода?
4. Организационные задачи проработка которых необходима при проектировании машиностроительного производства?
5. Этапы проектирования (ТЭО, выбор площадки под строительство, задание на проектирование)?
6. Кем разрабатывается и что включает в себя ТЭО?
7. Кто составляет задание на проектирование?
8. Что должно включать в себя задание на проектирование?
9. Стадийность проектирования заводов.
10. Кто и с какой целью разрабатывает бизнес план по строительству и реконструкции машиностроительного предприятия?

Тема 2: *Определение состава, количества основного технологического оборудования и плана его расположения в цехе (участке).*

1. Что изображается на генеральном плане завода?
2. Какие периоды включает в себя разработка генерального плана машиностроительного предприятия?
3. Исходные данные для составления генерального плана завода?
4. На какие виды подразделяются заводские цеха?
5. Состав производственных цехов.
6. Состав вспомогательных цехов.

7. Обслуживающие цехи и устройства.
8. Принципы заложенные в основу проектирования генерального плана.
9. На какие виды подразделяется транспорт машиностроительного предприятия?
10. Какие коэффициенты характеризуют эффективность экономических расчетов генерального плана?
11. Какие виды оборудования располагаются в цехе?
12. Какими методами производится расчет количества единиц основного оборудования механического цеха?

ТЕМА 3: *Проектирование производственного помещения цеха.*

1. Основной принцип, которому следует придерживаться при планировке оборудования в цехе?
2. Каким образом располагаются станки участков или линий?
3. Какими правилами и приемами необходимо руководствоваться при выполнении планировки оборудования в цехе?
4. Какими нормами регламентируется расстояние между станками, между станками и элементами здания, ширина проездов в зависимости от применяемых транспортных средств?
5. Могут ли быть увеличены нормы на расстояния между станками, между станками и элементами здания, ширину проездов?
6. Какова рекомендованная длина участков цеха, занятых станками, для условий машиностроительных заводов?
7. Во сколько рядов могут быть расположены станки вдоль участка?
8. Каким образом могут располагаться технологические линии на пролетах механического цеха?
9. Каким образом могут быть расположены станки по отношению к проезду?
10. Как могут быть расположены станки по отношению друг к другу?

. ТЕМА 4: *Объемно-планировочные и конструктивные решения зданий машиностроительного предприятия.*

1. Какие параметры сетки колонн приняты для одноэтажных многопролетных зданий машиностроительного предприятия?
2. Укажите последовательность выполнения компоновки проектируемого цеха?
3. Перечислите основные конструктивные элементы промышленных зданий, оказывающие влияние на размещение технологического оборудования?
4. Указывается ли технологическое оборудование на компоновочном плане?
5. Какие способы определения площадей производственных участков цеха Вы знаете?

6. Учитывается ли ширина магистральных проездов при определении площадей производственных участков цеха?
7. Почему для размещения станочного оборудования отдается предпочтение одноэтажным многопролетным зданиям, а не многоэтажным?
8. Каким образом производится расчет основных параметров производственного помещения цеха?
9. Какие компоновочные и планировочные решения механических цехов Вы знаете?
10. Чем обусловлен выбор того или иного варианта компоновки участков в цехах различного производственного назначения?

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);
- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);
- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;
- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;
- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);
- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;
- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое

прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьезный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотрное – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или

статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Следовательно, работа на практическом занятии направлена не только на познание студентом конкретных явлений внешнего мира, но и на изменение самого себя. Вторым результатом очень важен, поскольку он обеспечивает формирование таких общекультурных компетенций, как способность к самоорганизации и самообразованию, способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящихся за пределами непосредственной сферы деятельности студента. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. В ходе самого практического занятия обучающиеся выполняют задания и делают выводы по выполненному практическому заданию.

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их

может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Контрольная работа – это письменная работа, выполняемая студентами самостоятельно, преимущественно по общим математическим и естественно-научным, а также специальным дисциплинам, в которой, как правило, решаются конкретные задачи.

Цель контрольной работы – оценка качества усвоения студентами отдельных, наиболее важных разделов, тем и проблем изучаемой дисциплины, умения решать конкретные теоретические и практические задачи.

Контрольная работа, как правило, имеет аналитическую или описательную части, может решать проблемные ситуации путем проведения численного моделирования или расчетов, в том числе с использованием ПК. По типу они могут иметь характер задач, расчётов, алгоритмов, программ и т.п.

Контрольные работы выполняются студентами самостоятельно в соответствии с учебным планом.

Структура контрольной работы зависит от специфики изучаемой дисциплины. В общем виде контрольная работа должна содержать: титульный лист, введение, основную часть и заключение.

Во введении приводится формулировка контрольного задания, кратко излагается цель контрольной работы, место и роль рассматриваемого вопроса (проблемы) в изучаемой учебной дисциплине.

Основная часть контрольной работы должна, как правило, содержать основные определения, обоснования и доказательства, описание методики расчёта (формулы), а также иметь ссылки на используемые источники информации. Материал работы и ее отдельные положения должны быть взаимосвязаны. Основная часть может также включать анализ теории вопроса по теме контрольной работы. Здесь же приводятся исходные данные и значения параметров в соответствии с заданием на контрольную работу. После этого излагается ход рассуждений, описывается последовательность расчётов, приводятся промежуточные доказательства и результаты решения всей поставленной задачи.

В заключении формулируются краткие выводы по выполненной контрольной работе, а в её конце приводится список использованных источников информации.

Контрольные работы обучающихся выполняются согласно учебному графику и сдаются преподавателю за месяц до защиты контрольной работы. Преподаватель делает отметку о приеме работы в графике сдачи контрольных работ.

Ведущий преподаватель после проверки на титульном листе ставит оценку («зачтено» или «не зачтено») и подписывается. Выявленные в ходе проверки преподавателем замечания фиксируются на полях работы. Контрольные работы, выполненные с нарушением установленных требований, а также их ксерокопии к рассмотрению не принимаются.

Типичными ошибками, допускаемыми обучающимися при подготовке контрольной работы, являются:

- содержание работы не соответствует цели и поставленным задачам контрольной работы;
- нарушение требований к оформлению контрольной работы;
- использование информации без ссылок на источник;

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *зачету* по дисциплине «Проектирование цехов и участков машиностроительного производства» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «Проектирование цехов и участков машиностроительного производства».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во -первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и

удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *зачету* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Преподобно-учебно-методическому
комплексу

С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Б1.В.ДВ.01.01.03 Техническая диагностика средств и объектов машиностроения

Специальность
15.03.01 Машиностроение

программа подготовки бакалавриата

Направленность (профиль)/ специализация
Материалы и технологии цифрового производства
форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

Автор: Горшков Э.В., к.т.н. с.н.с.

Одобрены на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисин Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

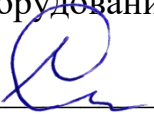
Протокол № 2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург

Комплект оценочных средств дисциплины согласован с выпускающей кафедрой эксплуатации горного оборудования

Заведующий кафедрой



подпись

Симисинов Д.И.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	5
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	6
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ.....	10
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ	11
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	13
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ.....	13
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	14

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении - это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;

- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны - это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе лекций, практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа - лекционные, практические занятия;
2. внеаудиторная самостоятельная работа – дополнение лекционных материалов, подготовка к практическим занятиям, подготовка к участию в деловых играх и дискуссиях, выполнение письменных домашних заданий, Контрольных работ (рефератов и т.п.) и курсовых работ (проектов), докладов и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «Техническая диагностика средств и объектов машиностроения» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и иссле-

довательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Техническая диагностика средств и объектов машиностроения» являются:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение тем курса (в т.ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля);
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к тестированию;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

ТЕМА 1: Классификация дефектов деталей машин. Обнаружение и поиск дефектов.

1. Какие формы проявления неработоспособности горных машин *вы знаете*?
2. Назовите основные причины, приводящие к потере работоспособности горного оборудования в процессе его эксплуатации?
3. Классификация видов изнашивания?
4. Методы измерения износа и пути снижения интенсивности изнашивания горных машин?
5. Основные закономерности изнашивания?
6. Допустимый и предельный износ?
7. Дефекты, возникающие в процессе эксплуатации горного оборудования?
8. Причины разрушений и анализ поверхностей разрушения деталей?
9. Меры по предупреждению разрушения деталей машин.
10. Методы и средства обнаружения дефектов.

Тема 2: Тестовое и функциональное диагностирование.

1. Диагностика, как основа ТО и ремонта машин по их фактическому техническому состоянию?
2. Каковы основные этапы внедрения технической диагностики в систему ТО и ремонта машин?
3. Физические основы технической диагностики?
4. Термины и определения технической диагностики?

5. Какие процессы работы машин могут быть использованы в качестве диагностических?
6. Каким требованиям должен удовлетворять выходной сигнал при использовании его в качестве диагностического?
7. Какие задачи должны быть решены при внедрении системы диагностирования на предприятии?
8. Требования к оборудованию, переводимому на техническое диагностирование?
9. Последовательность и методика проведения работ по оснащению оборудования средствами ТД?
10. В чем заключается тестовое диагностирование и каким образом оно осуществляется в условиях горного предприятия?
11. Что включает в себя функциональное диагностирование?

ТЕМА 3: Технологические принципы диагностирования.

1. Основные операции составляющие технологический процесс диагностирования?
2. Порядок выполнения работ по диагностике при плановом техническом обслуживании?
3. Диагностирование при возникновении неисправностей в процессе эксплуатации?
4. Рекомендации по установлению вида и объема ремонтно-обслуживающих работ по результатам диагностирования?
5. Каковы основные требования к математическим моделям объекта технического диагностирования?
6. Каким образом осуществляется построение алгоритма диагностирования?
7. Каковы основные требования, предъявляемые к методам технического диагностирования?
8. Субъективные и объективные методы диагностирования?
9. Классификация диагностических датчиков и область их применения?
10. Какие методы не разрушающего контроля находят наибольшее распространение при ремонтах горного оборудования.

ТЕМА 4: Нормирование и нормативы диагностических параметров.

1. Классификация и выбор диагностических параметров.
2. Субъективные и объективные методы диагностирования?
3. Номинальные, предельные и допустимые значения диагностических и структурных параметров?
4. Основной документ в который заносятся результаты диагностирования?
5. Каким образом разрабатываются нормативные данные по диагностике?

6. Совершенствование организации ТО и ремонта машин с применением диагностики.
7. Периодичность диагностирования.
8. Какие факторы оказывают влияние на эффективность использования средств диагностирования?
9. Какова экономическая эффективность от внедрения средств диагностирования горных машин?
10. Пути повышения эффективности диагностирования.

ТЕМА 5: Прогнозирование износа деталей и технического состояния машин.

1. Каким образом осуществляется прогнозирование технического состояния машин?
2. Методика прогнозирования износа деталей машин.
3. Технологические методы обеспечения долговечности машин.
4. Эксплуатационные методы обеспечения долговечности машин.
5. Технологическое обеспечение качества поверхностного слоя детали.
6. Эксплуатационные методы управления техническим состоянием промышленного оборудования.
7. Восстановление утраченной работоспособности машин в период производства текущих и капитальных ремонтов.
8. Повышение ресурса промышленного оборудования путем применения системы мониторинга.

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);
- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);

- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;

- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;

- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);

- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;

- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьезный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в

связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются

основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности,

повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Следовательно, работа на практическом занятии направлена не только на познание студентом конкретных явлений внешнего мира, но и на изменение самого себя. Второй результат очень важен, поскольку он обеспечивает формирование таких общекультурных компетенций, как способность к самоорганизации и самообразованию, способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящихся за пределами непосредственной сферы деятельности студента. Подготовка к практическому

занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. В ходе самого практического занятия обучающиеся выполняют задания и делают выводы по выполненному практическому заданию.

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Контрольная работа – это письменная работа, выполняемая студентами самостоятельно, преимущественно по общим математическим и естественно-научным, а также специальным дисциплинам, в которой, как правило, решаются конкретные задачи.

Цель контрольной работы – оценка качества усвоения студентами отдельных, наиболее важных разделов, тем и проблем изучаемой дисциплины, умения решать конкретные теоретические и практические задачи.

Контрольная работа, как правило, имеет аналитическую или описательную части, может решать проблемные ситуации путем проведения численного моделирования или расчетов, в том числе с использованием ПК. По типу они могут иметь характер задач, расчётов, алгоритмов, программ и т.п.

Контрольные работы выполняются студентами самостоятельно в соответствии с учебным планом.

Структура контрольной работы зависит от специфики изучаемой дисциплины. В общем виде контрольная работа должна содержать: титульный лист, введение, основную часть и заключение.

Во введении приводится формулировка контрольного задания, кратко излагается цель контрольной работы, место и роль рассматриваемого вопроса (проблемы) в изучаемой учебной дисциплине.

Основная часть контрольной работы должна, как правило, содержать основные определения, обоснования и доказательства, описание методики расчёта (формулы), а также иметь ссылки на используемые источники информации. Материал работы и ее отдельные положения должны быть взаимосвязаны. Основная часть может также включать анализ теории вопроса по теме контрольной работы. Здесь же приводятся исходные данные и значения параметров в соответствии с заданием на контрольную работу. После этого излагается ход рассуждений, описывается последовательность расчётов, приводятся промежуточные доказательства и результаты решения всей поставленной задачи.

В заключении формулируются краткие выводы по выполненной контрольной работе, а в её конце приводится список использованных источников информации.

Контрольные работы обучающихся выполняются согласно учебному графику и сдаются преподавателю за месяц до защиты контрольной работы. Преподаватель делает отметку о приеме работы в графике сдачи контрольных работ.

Ведущий преподаватель после проверки на титульном листе ставит оценку («зачтено» или «не зачтено») и подписывается. Выявленные в ходе проверки преподавателем замечания фиксируются на полях работы. Контрольные работы, выполненные с нарушением установленных требований, а также их ксерокопии к рассмотрению не принимаются.

Типичными ошибками, допускаемыми обучающимися при подготовке контрольной работы, являются:

- содержание работы не соответствует цели и поставленным задачам контрольной работы;
- нарушение требований к оформлению контрольной работы;
- использование информации без ссылок на источник;

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *зачету* по дисциплине «Техническая диагностика средств и объектов машиностроения» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недо-

статочной информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «Техническая диагностика средств и объектов машиностроения».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во -первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *зачету* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

.

.



УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по учебно-методическому
комплексу

С.А. Упоров

Методические указания по самостоятельной работе студентов

**Б1.В.ДВ.01.02.03 УПРАВЛЯЮЩИЕ ПРОГРАММЫ
ОБОРУДОВАНИЯ С ЧПУ**

Специальность

Направленность (профиль)

Материалы и технологии цифровых производств

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатация горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Горно-механический

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 20.10.2023

(Дата)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ТОКАРНАЯ ОБРАБОТКА.....	5
1.1. Общие сведения	5
1.2. Зоны токарной обработки	6
1.3. Черновая и чистовая обработка.....	6
1.4. Схемы черновой обработки	7
1.5. Последовательность обработки заготовок	9
2. ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ	10
2.1. Подготовка управляющей программы	10
2.2. Язык программирования	10
2.3. Структура программы	11
2.4. Строка безопасности	13
2.5. Программирование перемещений.....	13
2.6. Верификация программ.....	15
3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.....	16
4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.....	17
4.1. Исходные данные.....	17
4.2. Технология изготовления.....	17
4.3. Схема расчета опорных точек черновой обработки	18
4.4. Схема расчета опорных точек чистовой обработки.....	19
4.5. Схема расчета опорных точек точения канавок	20
4.6. Расчет положения конечной точки сверла	20
4.7. Оформление результатов	20
5. СОЗДАНИЕ И ОТЛАДКА ПРОГРАММЫ.....	24

5.1. Подготовка и ввод данных.....	24
5.2. Средства визуализации и отладки.....	33
5.3. Сохранение и загрузка проекта	35
6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	36
6.1. Исходные данные.....	36
6.2. Требования к оформлению отчета	38
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	39
Приложение 1	40

ВВЕДЕНИЕ

Повышение производительности механической обработки изделий в значительной степени зависит от уровня автоматизации технологических процессов. Внедрение в производство станков с числовым программным управлением (далее – ЧПУ) требует выполнения ряда специфических требований, обусловленных особенностями их применения. Замена универсального неавтоматизированного оборудования станками с ЧПУ позволяет в несколько раз снизить трудоемкость изготовления деталей. Внедрение компьютерных систем резко сокращает сроки подготовки производства, освоения и выпуска новой продукции, повышает ее качество и снижает себестоимость.

Цель работы – ознакомить с основами программирования на станках с ЧПУ, составлением программ обработки поверхностей определенных геометрических форм на токарном станке с ЧПУ.

При подготовке управляющих программ специалист должен знать: технологический процесс изготовления детали; виды режущего инструмента и режимы резания; основы программирования в кодах G и M.

Подготовка управляющих программ включает в себя:

- расчет траектории инструмента (выбор или уточнение системы координат, определение наладочных размеров детали, расчет координат опорных точек, разделение проходов на ходы и шаги, построение траектории движения инструмента, преобразование системы координат);
- кодирование и запись УП (формирование элементарных перемещений и определение технологических команд, кодирование УП, записывание УП на программноноситель);
- контроль, редактирование и отладку УП (контроль траектории движения инструмента, редактирование УП, обработку опытной детали).

Методическое пособие содержит теоретический материал, но лишь в объеме, необходимом для выполнения практических заданий.

1. ТОКАРНАЯ ОБРАБОТКА

1.1. Общие сведения

Токарная обработка (точение) является основным способом обработки поверхностей тел вращения. Процесс резания осуществляется на токарных станках при вращении обрабатываемой заготовки (главное движение резания, D_r) и перемещении резца (движение подачи, D_s). Точение можно отнести к числу самых простых операций по выбору типа инструмента, расчету режимов резания и программированию обработки.

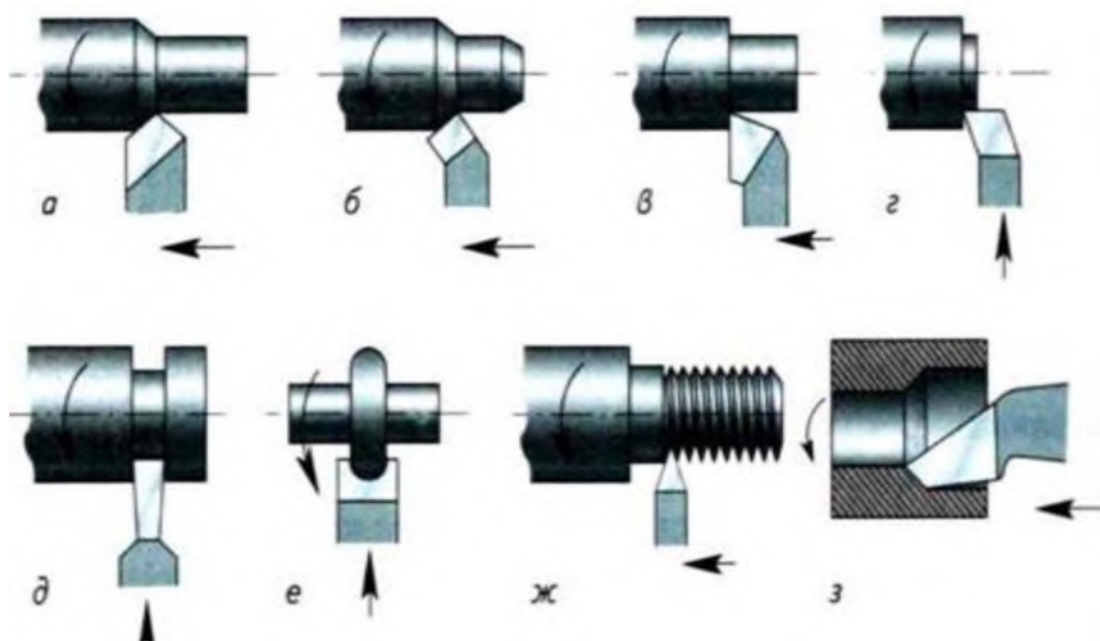


Рис. 1.1. Основные схемы обработки заготовок на токарно-винторезном станке:
а–в – обтачивание наружных поверхностей; г – подрезание торцов; д – протачивание канавок, отрезание; е – точение фасонных поверхностей; ж – нарезание резьбы; з – растачивание гладких и ступенчатых отверстий [2]

На станках токарной группы могут выполняться операции сверления и рифления.

Для обработки используются следующие основные виды резцов: проходной прямой (рис. 1.1, а), проходной отогнутый (рис. 1.1, б), проходной упорный (рис. 1.1, в), подрезной (рис. 1.1, г), канавочный, отрезной (рис. 1.1, д), фасонный (рис. 1.1, е), резьбовой (рис. 1.1, ж), проходной расточной (рис. 1.1, з).

1.2. Зоны токарной обработки

Каждая зона токарной обработки (часть поверхности), как правило, соответствует одному технологическому переходу и формируется в зависимости от конфигурации контура детали и технологических возможностей режущего инструмента, выполняющего данный переход. В зависимости от конфигурации участка контура, формируемого за технологический переход, зоны обработки делятся на открытые (*а*), полуоткрытые (*б*), закрытые (*в*) и комбинированные (*г*) (рис. 1.2).

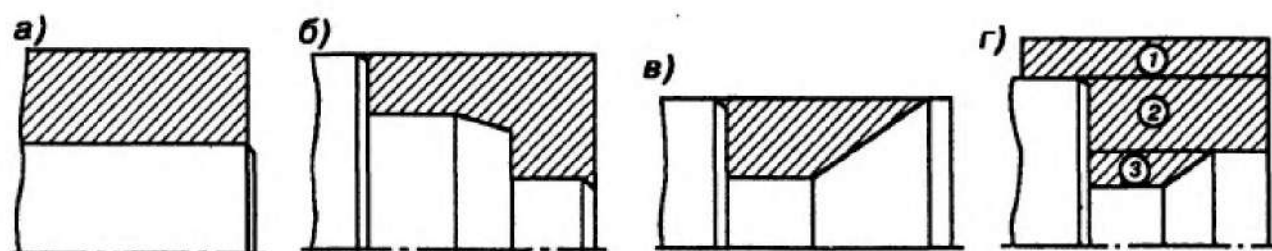


Рис. 1.2. Зоны токарной обработки [4]

1.3. Черновая и чистовая обработка

Механическую обработку поверхностей заготовок обычно разделяют на черновую и чистовую.

При черновой обработке основным критерием обрабатываемости является стойкость инструмента при соответствующей скорости и силе резания. При черновой обработке стремятся снять почти весь припуск, оставляя примерно 0,5 мм на чистовую обработку, за один проход с максимально возможной большой глубиной резания $t = 3 - 8$ мм. Рекомендуемая глубина 5 мм. Подачу S назначают в зависимости от величины t . Параметры режима резания назначают в последовательности: глубина резания – t , мм, подача S , мм/об, скорость резания – V , м/мин.

В зависимости от величины t и S выбирается скорость резания V_p . По величине V_p рассчитывают частоту вращения заготовки n_p , мин⁻¹, по формуле

$$n_p = 1000 \frac{V_p}{\pi D},$$

где D – диаметр заготовки, мм.

По паспортным данным станка выбирается ближайшая меньшая величина n . После выбора n рассчитывается фактическая скорость резания V , м/мин, по формуле:

$$V = \pi D n / 1000.$$

При чистовой обработке основными критериями обрабатываемости металлов являются шероховатость поверхности, точность обработки, стойкость инструмента. При чистовой обработке t определяется частью припуска, оставленной на чистовую обработку, $t = 0,5$ мм. Величина подачи S выбирается в зависимости от заданной чертежом шероховатости поверхности и корректируется по паспортным данным станка по аналогии с подачей при черновой обработке. Величина скорости резания V выбирается по специальной таблице и корректируется по паспортным данным станка по аналогии со скоростью резания при черновой обработке.

Черновая обработка проходит на низких оборотах и с максимальной подачей, а чистовая – на высоких оборотах и небольших поддачах.

1.4. Схемы черновой обработки

Типовые схемы переходов. На рис. 1.3 показаны типовые схемы черновых переходов токарной обработки основных поверхностей.

Схема «петля» характеризуется тем, что по окончании рабочего хода инструмент отводится на небольшое расстояние (около 0,5 мм) от обработанной поверхности и возвращается во время вспомогательного хода назад. Эту схему наиболее часто применяют при обработке открытых и полукруглых зон.

Схема «виток» («зигзаги») предусматривает работу инструмента на прямой и обратной подаче и может быть реализована в зонах обработки всех видов.

Схема «спуск» характерна тем, что припуск снимается при радиальном перемещении резца. Наиболее часто эту схему используют при черновых переходах для закрытых зон.

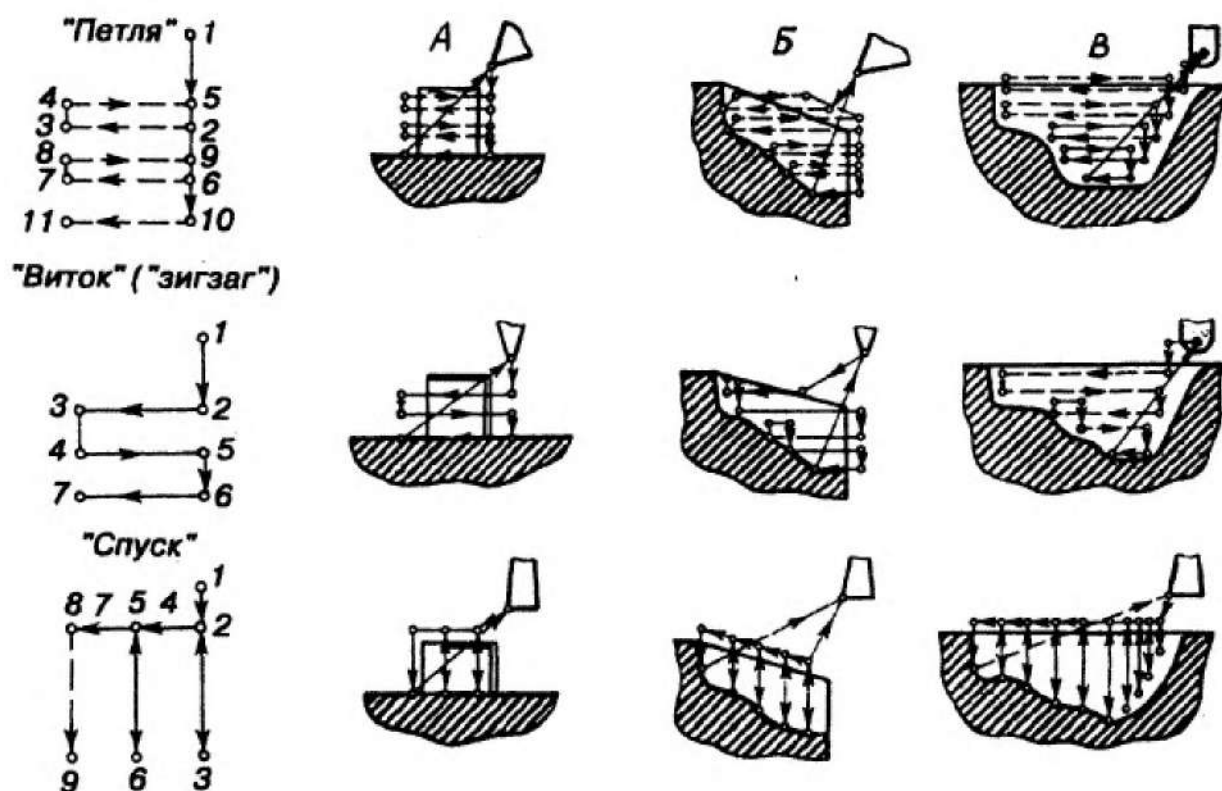


Рис. 1.3. Типовые схемы переходов при черновой обработке основных поверхностей:

А – открытая зона, Б – полукрытая зона, В – закрытая зона [4]

Особое внимание следует уделять выбору схем для полукрытых зон, так как они наиболее часто встречаются при токарной обработке. Помимо простейших схем, приведенных на рис. 1.3, для них находят применение и более сложные.

А) Черновая схема с подборкой (рис. 1.4, а)

После прямолинейного рабочего хода инструмент, согласно УП, движется вдоль чернового контура детали (вплоть до уровня предыдущего прохода), срезая при этом оставшийся материал.

Б) Черновая схема с получистовым (зачистным) проходом (рис. 1.4, б)

После выполнения последнего (или предпоследнего) чернового хода инструменту задают движение вдоль контура детали; осуществляется получистовой ход, при котором на контуре срезаются все гребешки и остатки металла.

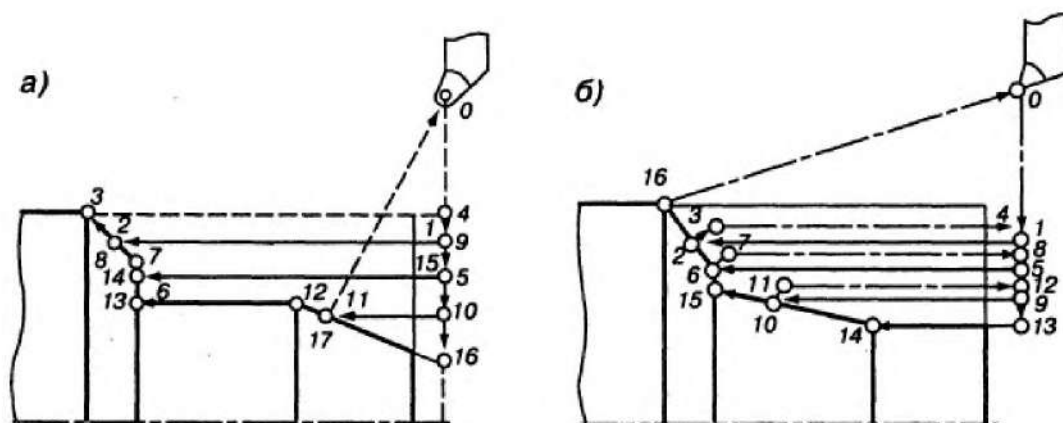


Рис. 1.4. Схемы черновой обработки [4]

1.5. Последовательность обработки заготовок

Общая последовательность обработки заготовок на токарном станке с ЧПУ:

- 1) подрезание торца;
- 2) центрование (если сверло имеет диаметр меньше 20 мм);
- 3) сверление;
- 4) черновая обработка основных поверхностей;
- 5) черновая обработка дополнительных поверхностей;
- 6) чистовая обработка этих же дополнительных поверхностей, т. к. она может выполняться, как правило, тем же инструментом, что и черновая обработка;
- 7) чистовая обработка дополнительных поверхностей, не требующих черновой обработки;
- 8) чистовая обработка основных поверхностей;
- 9) отрезка детали.

При обработке основной поверхности применяют черновые и чистовые резцы. Канавки сплошной формы обрабатывают по типовой программе за несколько ходов. Схему обработки выбирают с учетом глубины и ширины канавки. Применяют канавочные проходные резцы и многоступенчатую обработку.

2. ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Подготовка управляющей программы

Для программирования обработки детали необходимо выполнить ряд последовательных действий:

- 1) подготовить чертеж детали, определить ее нулевую точку, нанести системы координат;
- 2) определить процесс обработки, т. е. установить:
 - когда, какие и для обработки каких контуров будут использоваться инструменты;
 - последовательность изготовления отдельных элементов детали;
 - какие отдельные элементы детали повторяются (возможно в повернутом виде) и должны быть сохранены в подпрограмме;
 - наличие в других программах или подпрограммах обработки данных или подобных контуров деталей, которые можно использовать;
 - где целесообразны или необходимы смещение нулевой точки, вращение, отражение, масштабирование;
- 3) создать технологическую карту, т. е. определить поочередно все действия при обработке детали, например, движение ускоренным ходом при позиционировании, смену инструмента, свободный ход, включение-выключение шпинделя, подачу СОЖ, вызов данных перемещения инструмента (подача, коррекция траектории, подвод к контуру, отвод от контура) и т. д.;
- 4) перевести рабочие операции на язык программирования, т. е. записать каждую отдельную операцию как кадр или кадры ЧПУ;
- 5) соединить все отдельные операции в одной программе.

2.2. Язык программирования

Программирование обработки на станках с ЧПУ осуществляется на языке, который обычно называют языком ISO 7 бит или языком G и M кодов.

G-коды называются *подготовительными* и позволяют задавать:

- перемещение рабочих органов оборудования с заданной скоростью;

- выполнение типовых последовательностей;
- управление параметрами инструмента, системами координат, и рабочих плоскостей.

М-коды называются *технологическими* (вспомогательными) и включают такие действия, как:

- сменить инструмент;
- включить/выключить шпиндель;
- включить/выключить охлаждение;
- работа с подпрограммами.

Кроме указанных команд программа некоторые вспомогательные символы (адреса), которые обозначаются буквами латинского алфавита.

Список некоторых команд и адресов приведен в приложении 1.

Все станочные коды в зависимости от их способности сохраняться в памяти СЧПУ разделяют на два класса: *немодальные* и *модальные*. Немодальные коды действуют только в том кадре, в котором они находятся. Модальные коды, действуют бесконечно долго, пока их не отменят другим кодом.

2.3. Структура программы

Управляющая программа состоит из последовательности кадров и обычно начинается с символа начало программы (%) и заканчивается M02 или M30. Каждый кадр программы представляет собой один шаг обработки и может начинаться с номера кадра (N1...N10 и т. д.), а заканчиваться символом конец кадра (;). Кадр управляющей программы состоит из операторов в форме слов (G91, M30, X10. и т. д.). Слово состоит из символа (код или адреса) и цифры, представляющее арифметическое значение.

Схематично любую управляющую программу можно представить в виде следующих областей (рис. 2.1).

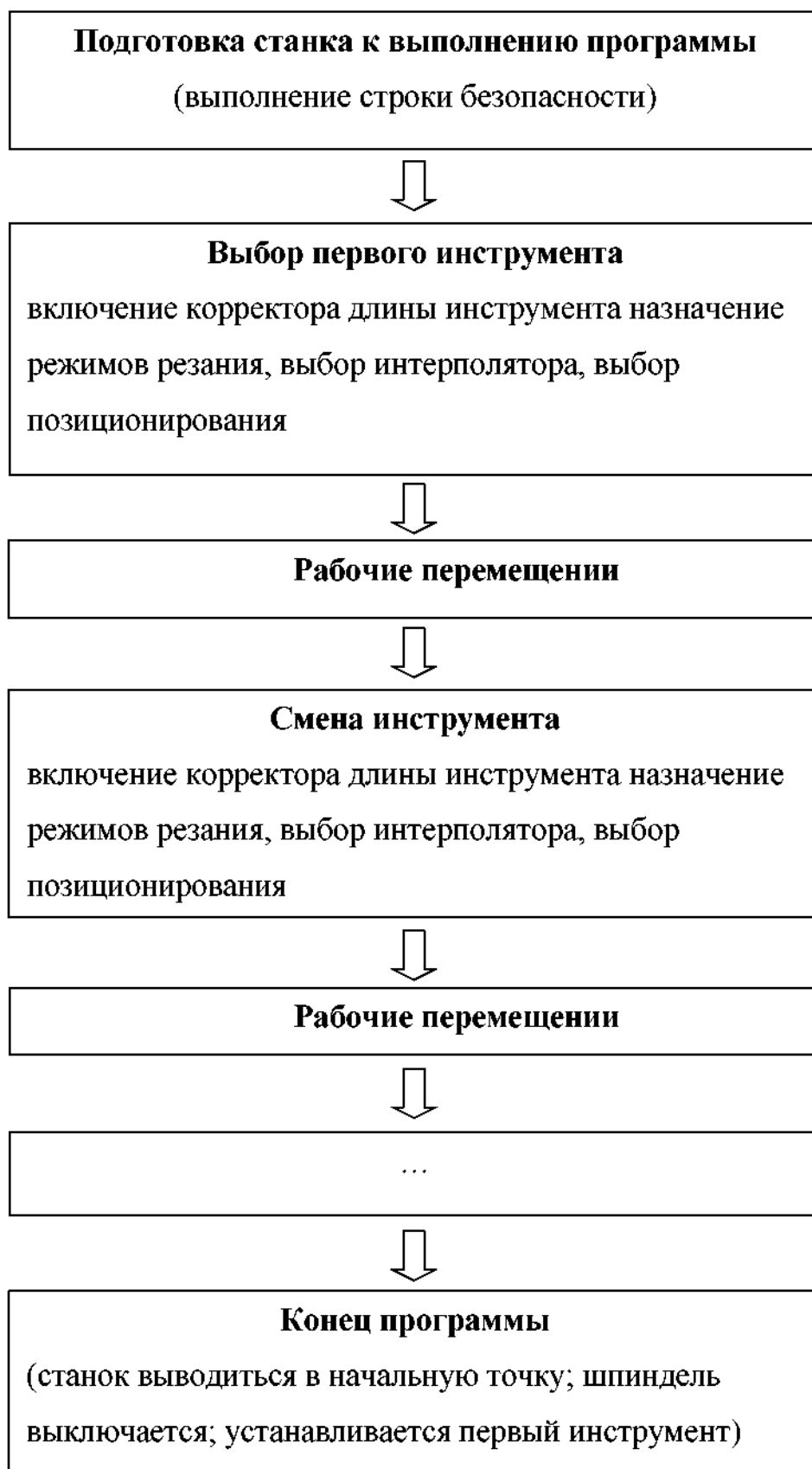


Рис. 2.1. Структура управляющей программы

2.4. Строка безопасности

Строкой безопасности называется кадр, содержащий G коды, которые переводят СЧПУ в определенный стандартный режим, отменяют ненужные функции и обеспечивают безопасную работу с управляющей программой. Используют для предотвращения отрицательного влияния внештатных ситуаций, когда какой-либо ненужный модальный G код не был отменен. Например, если программа обработки была прервана по каким-либо причинам в середине. Строка безопасности, находящаяся обычно в начале УП или после кадра смены инструмента, позволяет «восстановить» забытые G коды и выйти в нормальный режим работы. Как правило, строка безопасности содержит коды G18, G21, G40, G49, G54, G80, G90.

2.5. Программирование перемещений

При программировании за основную принимают точку начала системы координат детали W , организуя относительно нее всю УП. Нулевая точка детали W (нуль детали) – точка на детали, относительно которой заданы ее размеры. На чертеже ноль детали обозначается символом  .

Начало системы координат W определяется технологом-программистом, исходя из анализа чертежа детали с учетом: геометрии заготовки, простановки размеров, описывающих ее контур; базирования заготовки на станке и технологии её обработки; удобства размерной настройки инструментов.

При токарной обработке чаще всего за начало координатной системы программы принимают базовую точку детали на базовом торце.

Для токарной обработки на станке с ЧПУ наиболее распространенной является плоская прямоугольная система координат заготовки, оси которой обычно называются X и Z (G18). В этой системе осью Z является ось главного шпинделя станка, при этом положительным направлением оси Z является направление от места крепления заготовки в шпинделе к режущему инструменту. Ось X расположена перпендикулярно оси Z , а ее положительное направление зависит от положения инструмента относительно оси Z (рис. 2.2).

Но в любом случае положительным направлением оси X является перемещение, при котором инструмент отдаляется от заготовки.

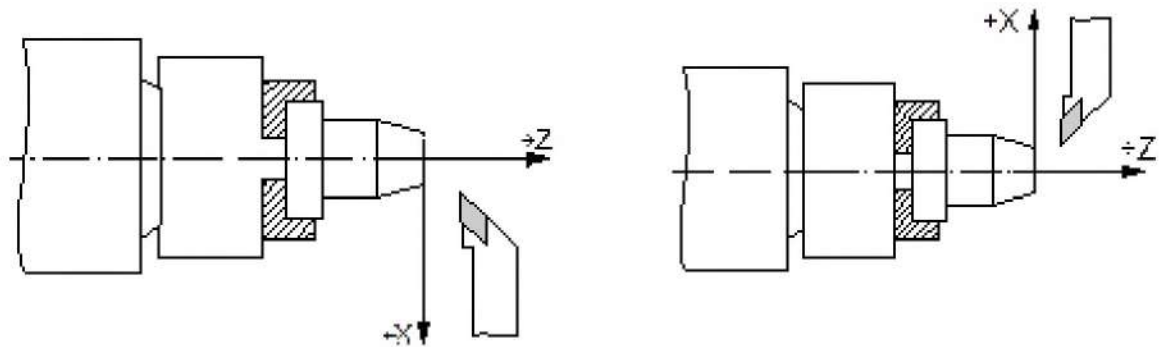


Рис. 2.2. Система координат токарного станка

Положение и перемещение объектов при программировании обработки может быть использован одним из способов отсчета координат: абсолютный и относительный (в приращениях). Большинство программ обработки создается в абсолютных координатах.

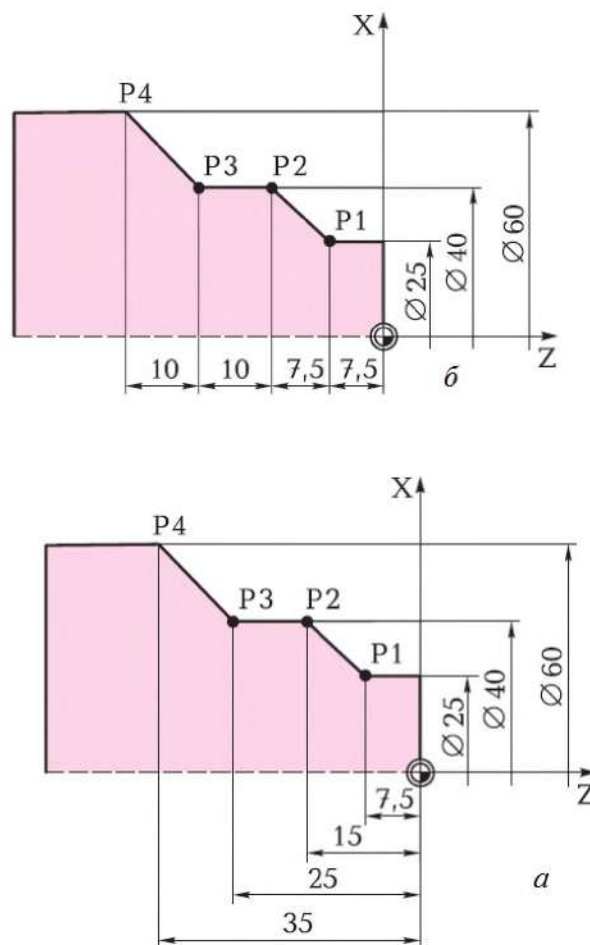


Рис. 2.3. Относительная и абсолютная системы отсчета [2]

2.6. Верификация программ

После создания управляющей программы с помощью её надо проверить на предмет правильности траектории движения рабочего инструмента. Для проверки программ применяется верификация. Технология верификации заключается в демонстрации процесса обработки с визуализацией удаления материала.

Верификация дает возможность просмотреть сам процесс и окончательный результат исполнения рабочей программы в виде модели готовой детали. Верификация позволяет удостовериться в том, как выполнены отдельные участки технологического процесса детально, при этом можно увидеть необработанные участки и скорректировать требуемые параметры.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

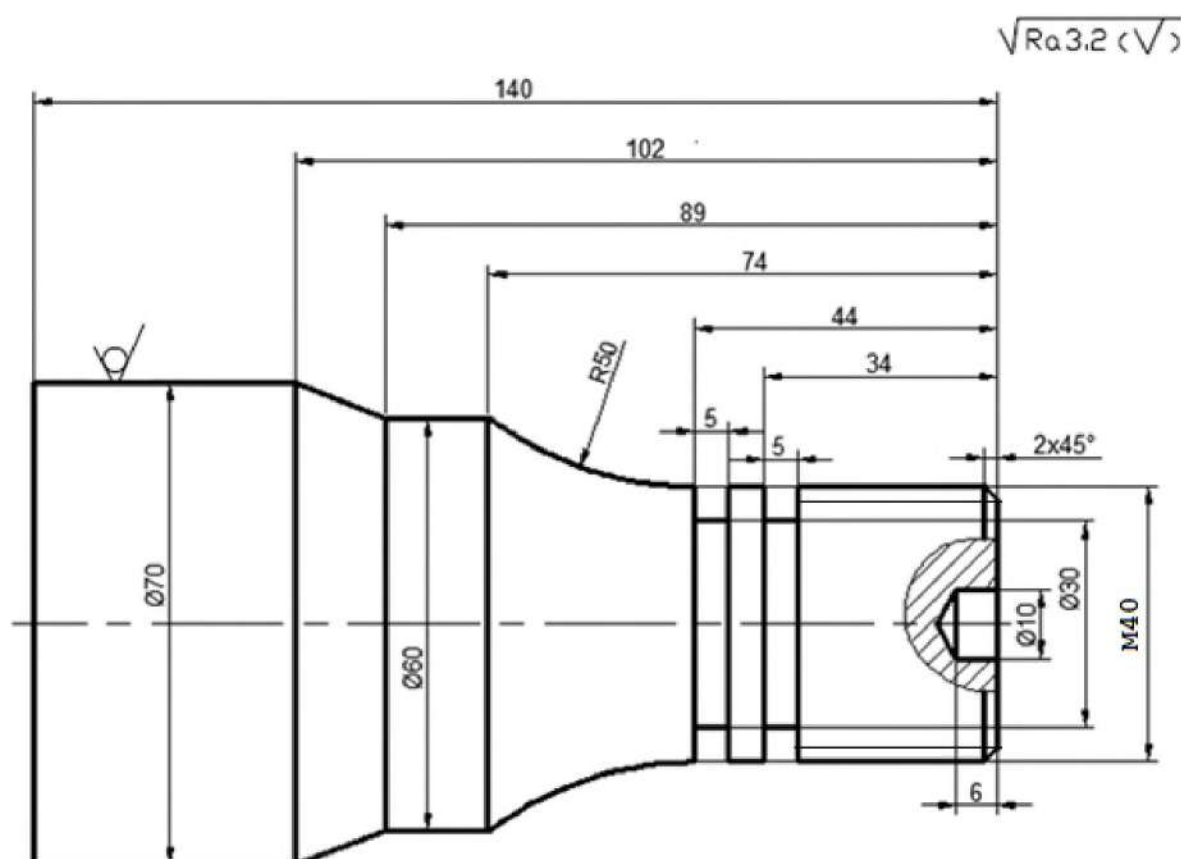
1. Построить по размерам для данного варианта в системе AutoCAD верхнюю половину контура (без отверстия). Контур должен быть единой замкнутой полилинией. Начало контура (крайнюю левую нижнюю точку) поместить в начало экранной координат. Сохранить полилинию в формате dxf для версии AutoCAD R12.
2. Построить эквидистанту к контуру, определяющую получистовую поверхность (поверхность с припуском на чистовую обработку).
3. Определить порядок выполнения операций и занести в таблицу (табл. 1).
4. Определить опорные точки контура для черновой обработки и занести в таблицу (табл. 2).
5. Определить опорные точки контура для чистовой обработки черновой и занести в таблицу (табл. 3).
6. В текстовом редакторе («Блокноте») написать текст управляющей программы.
7. Используя систему NC-Manager создать проект для токарной обработки и отладить программу.
8. Оформить отчет.

4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Исходные данные

Заготовка: простой сортовой прокат круглого сечения $\varnothing 70 \times 142$ (2 мм на подрезку торца).

Материал заготовки: сталь 45 ГОСТ 1050-88.



4.2. Технология изготовления

Технология изготовления представлена в таблице 1.

Таблица 1

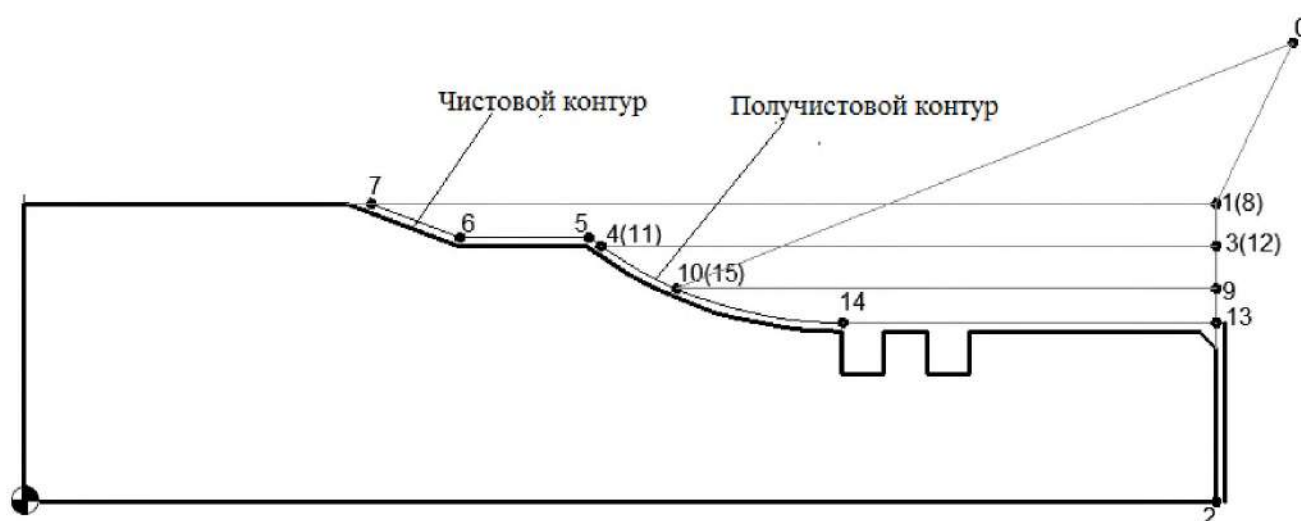
Технологические данные

№ перехода	Содержание перехода	Режущий инструмент	Режимы резания
1	2	3	4
1	Подрезать торец	Токарный проходной упорный резец ГОСТ 18879-73	$S = 0,46 \text{ мм/об}$ $N = 750 \text{ мин}^{-1}$

1	2	3	4
2	Точить наружные цилиндрические и конические поверхности начерно	Проходной упорный прямой резец с пластинкой из твердого сплава Т5К10 ГОСТ 18879-73	$S = 0,30 \text{ мм/об}$ $N = 750 \text{ мин}^{-1}$
3	Точить наружные цилиндрические и конические поверхности начисто	Проходной упорный отогнутый резец с пластинкой из твердого сплава Т15К6 ГОСТ 18879-73	$S = 0,25 \text{ мм/об}$ $N = 715 \text{ мин}^{-1}$
4	Точить канавки	Резец канавочный ТУ 2-035-558-77	$S = 0,12 \text{ мм/об}$ $N = 815 \text{ мин}^{-1}$
5	Сверлить отверстия	Сверло спиральное цилиндрическое Р6М5 ГОСТ 10903-77	$S = 0,18 \text{ мм/об}$ $N = 315 \text{ мин}^{-1}$
6	Нарезать резьбу	Резец 2660-0003 2 Т15К6 ГОСТ 18885-3	$S = 1,5 \text{ мм/об}$ $N = 250 \text{ мин}^{-1}$

4.3. Схема расчета опорных точек черновой обработки

Ниже приведена схема расположения опорных точек черновой обработки.



Координаты опорных точек представлены в таблице 2.

Опорные точки черновой обработки

№ точки	X	Z	Примечания
0			Линейное перемещение
1	35.0	140.0	
2	0.0	140.0	
3	30.0	140.0	
4	30.0	67.7013	Перемещение по дуге (по ЧС)
5	31.0	66.3344	Линейное перемещение
6	31.0	51.1857	
7	35.0	40.7857	
8	35.0	140.0	
9	25.0	140.0	
10	25.0	76.6358	Перемещение по дуге (по ЧС)
11	30.0	67.7013	Линейное перемещение
12	30.0	140.0	
13	21.0	140.0	
14	21.0	96.0007	Перемещение по дуге (по ЧС)
15	25.0	76.6358	Линейное перемещение

4.4. Схема расчета опорных точек чистовой обработки

Ниже приведена схема расположения опорных точек чистовой обработки.

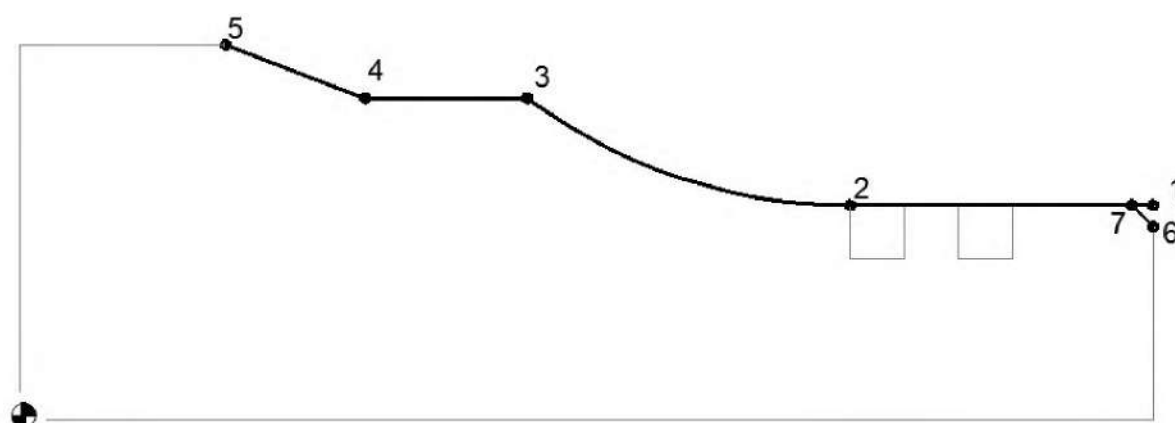


Таблица 3

Опорные точки чистового контура

№ точки	X	Z	Примечания
0			Линейное перемещение
1	20.0	140.0	
2	20.0	96.0	Перемещение по дуге (по ЧС)
3	30.0	66.0	Линейное перемещение
4	30.0	51.0	
5	38.0	35	
6	18	140	Снятие фаски
7	20	138	

4.5. Схема расчета опорных точек точения канавок

В таблице 4 представлены координаты опорных точек канавок.

Таблица 4

Опорные точки канавок

№ точки	X	Z	Примечания
1	20.0	96.0	Линейное перемещение
2	15.0	96.0	
3	20.0	106.0	
4	15.0	106.0	

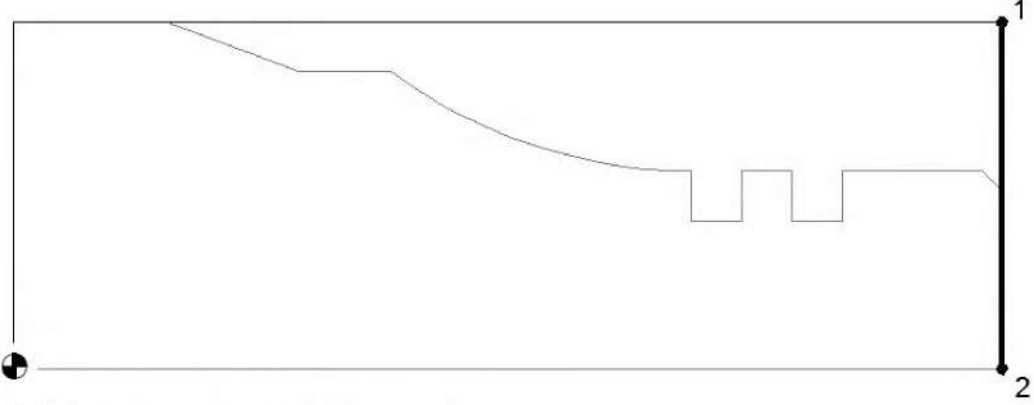
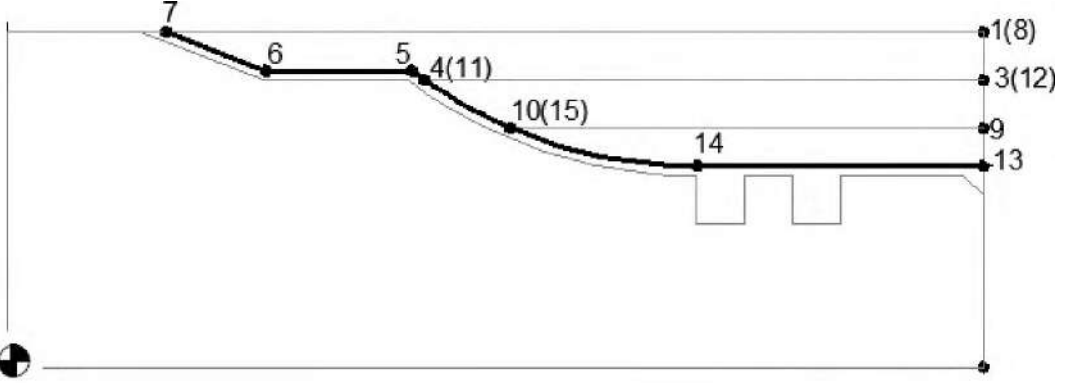
4.6. Расчет положения конечной точки сверла

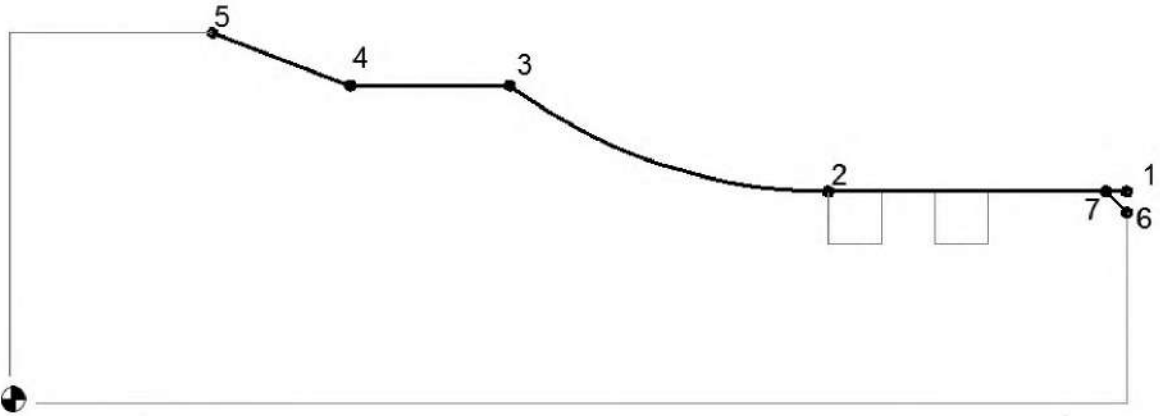
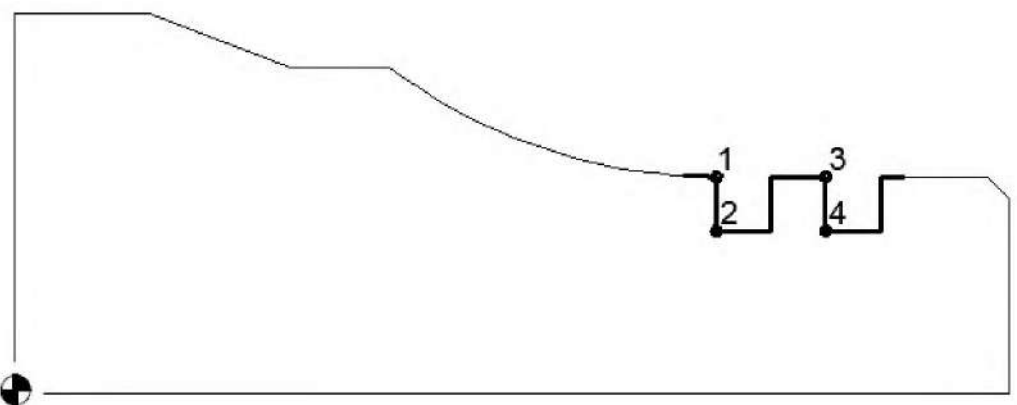
Координаты конечного положения конца сверла:

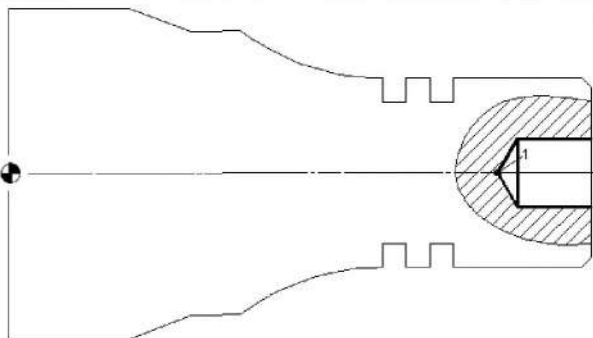
$$Z = 140 - \left(6 + 0.5 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg} \left(90 - \frac{118}{2} \right) \right) = 131.9.$$

4.7. Оформление результатов

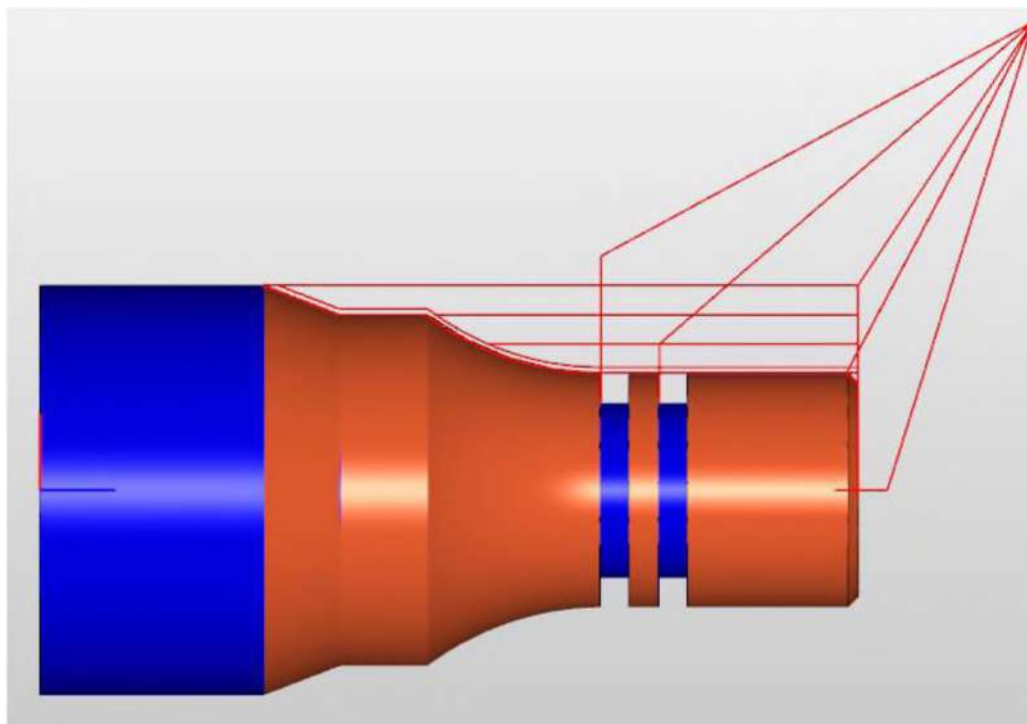
Данные эскизов переходов и соответствующие им фрагменты кода программы должны быть представлены в виде приведенной ниже таблицы.

№	Эскиз обработки и фрагмент кода
1	2
	 G90 // Абсолютная система координат G18 // задание рабочей плоскости XZ G0 X35.0 Z140.0 // Подвод инструмента на холостом ходу к торцу // подрезка торца G95 F0.25 S750 // F – подача в формате мм/об., S – Скорость вращения шпинделя G01 X-1.0 Z140.0 // Обработка G0 X35.0 Z140.0 // отвод инструмента
	 // первый проход G95 F0.30 // F –подача в формате мм/об. G01 X30.0 Z140.0 X30.0 Z67.7013 G02 X31.0 Z66.3344 R49 //Круговая интерполяция по ЧС G01 X31.0 Z51.1857 X35.0 Z40.7857 G0 X35.0 Z140.0 X25.0 Z140.0 // второй проход G01 X25.0 Z76.6358 G02 X30.0 Z67.7013 R49 //Круговая интерполяция по ЧС G00 X30.0 Z140.0 X21.0 Z140.0 // третий проход G1 X21.0 Z96.0007 G02 X25.0 Z76.6358 R49 G0 X25 Z140.0

№	Эскиз обработки и фрагмент кода
1	2
	 <pre> // Чистовая обработка G0 X20 Z140.0 G01 X20 Z96.0 G02 X30 Z66.0 R50 G01 X30 Z51.0 X35 Z38.0 G00 X35 Z140.0 G01 X18 Z140.0 X20 Z138.0 G00 X80 Z170.0 </pre>
	 <pre> // Точение канавок M06 T2 F0.12 S815 G00 X40 Z96 G01 X15 Z96 X25 Z96 X25 Z106 X15 Z106 X25 Z106 G0 X80.0 Z170.0 </pre>

№	Эскиз обработки и фрагмент кода
1	2
	 // Сверление отверстия M06 T3 F0.18 S315 G00 X0 Z145.0 G01 X0 Z131.9 X0 Z145.0 G00 X80 Z170
	// Нарезание резьбы G90 M06 T4 M3 // правая резьба // M4 левая резьба G0 X20 Z140 G32 Z103 K2 G00 X80 Z170
	// Завершение программы M99

Итог работы программы представлен на рисунке.



5. СОЗДАНИЕ И ОТЛАДКА ПРОГРАММЫ

5.1. Подготовка и ввод данных

1. Создать процесс токарной обработки

На первом этапе работы создается новый токарный проект (рис. 5.1).

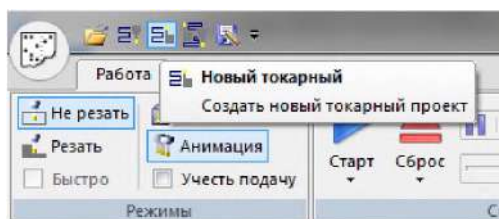


Рис. 5.1. Создание нового токарного проекта

2. Выбрать станок

Далее производится выбор станка. Для этого необходимо выполнить следующую последовательность действий.

а) Выбрать объект «Станок» (рис. 5.2).

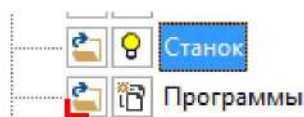


Рис. 5.2. Выбор объекта «Станок»

б) Выбрать пункт «Загрузить» (рис. 5.3).

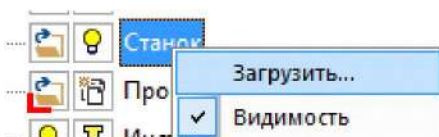


Рис. 5.3. Подменю объекта «Станок»

в) Выбрать тип станка, установленный по умолчанию: TURN DEFAULT (рис. 5.4).

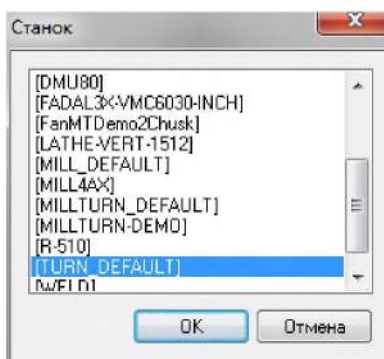


Рис. 5.4. Выбор типа станка

3. Загрузить существующую программу

Программа может быть написана в обычном текстовом редакторе (Блокноте).

Для ее загрузки необходимо:

- а) выбрать пункт меню «Программы» (рис. 5.5);

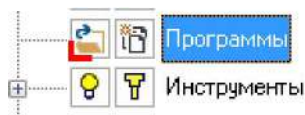


Рис. 5.5. Выбор пункта «Программы»

- б) нажать кнопку ;

в) в появившемся диалоговом выбрать пункт «Все файлы (*.*)» (рис. 5.6);

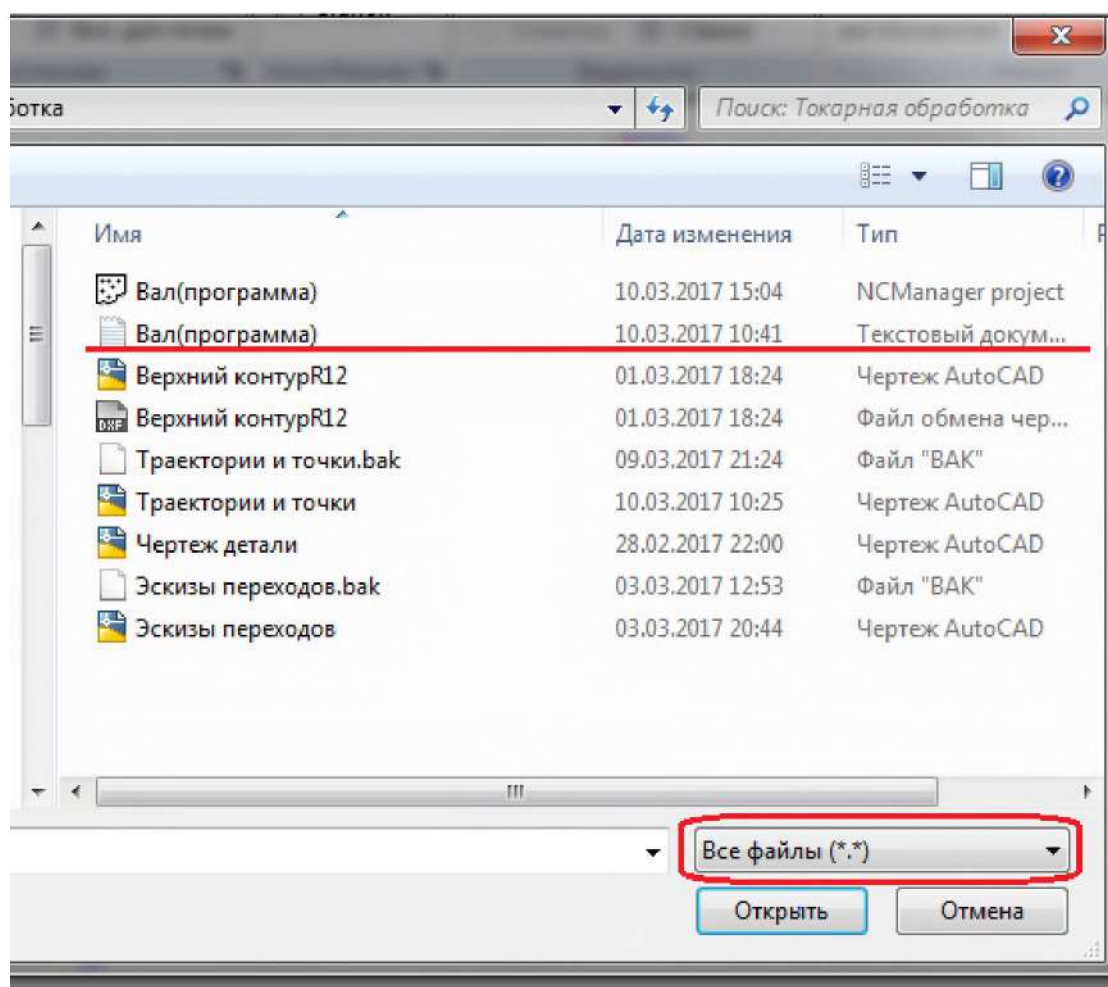


Рис. 5.6. Диалоговое окно выбора файла

- г) выбрать необходимый файл и нажать кнопку .

Текст выбранной программы появится в окне Редактора (рис. 5.7).

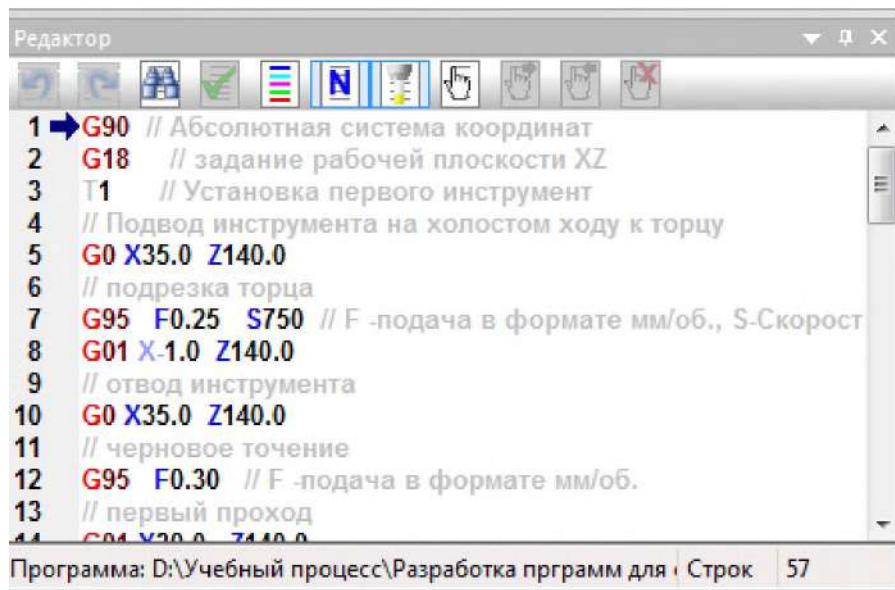


Рис. 5.7. Окно Редактора

4. Создать заготовку

Следующим этапом работы является создание заготовки. Для этого требуется выполнить следующую последовательность действий.

- а) Выбрать объект «Заготовка» (рис. 5.8).

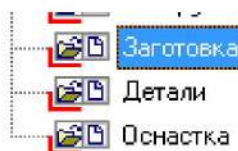


Рис. 5.8. Выбор объекта «Заготовка»

- б) Выбрать пункт «цилиндр/конус» (рис. 5.9).

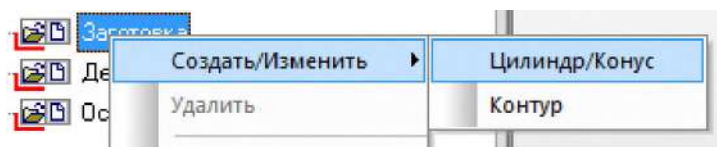


Рис. 5.9. Подменю объекта «Заготовка»

- в) Задать размеры заготовки (рис. 5.10).

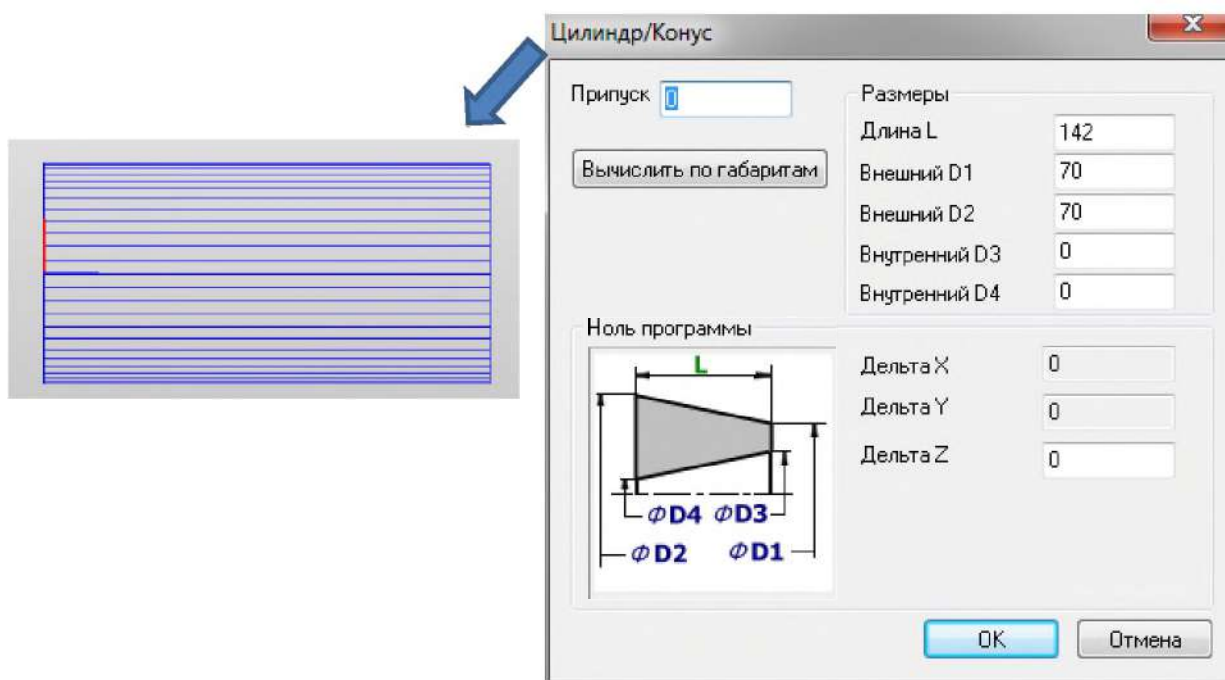


Рис. 5.10. Определение размеров заготовки

Для изменения ориентации заготовки используйте контекстное меню (рис. 5.11), которое активизируется нажатием правой клавиши мыши.

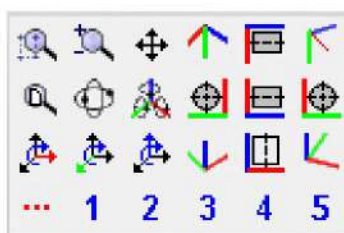


Рис. 5.11. Контекстное меню

5. Загрузить контур детали

После создания заготовки производится загрузка контура детали по следующей последовательности действий.

- а) Выбрать объект «Детали» (рис. 5.12).



Рис. 5.12. Выбор объекта «Детали»

- б) Выбрать пункт «Контур из файла» (рис. 5.13).

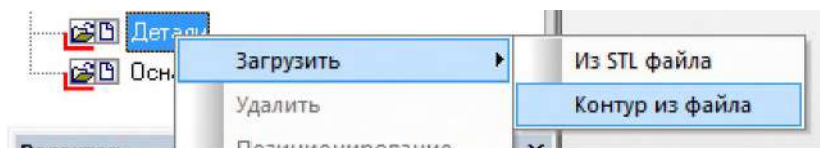


Рис. 5.13. Подменю объекта «Детали»

в) Загрузить файл (рис. 5.14–5.15).

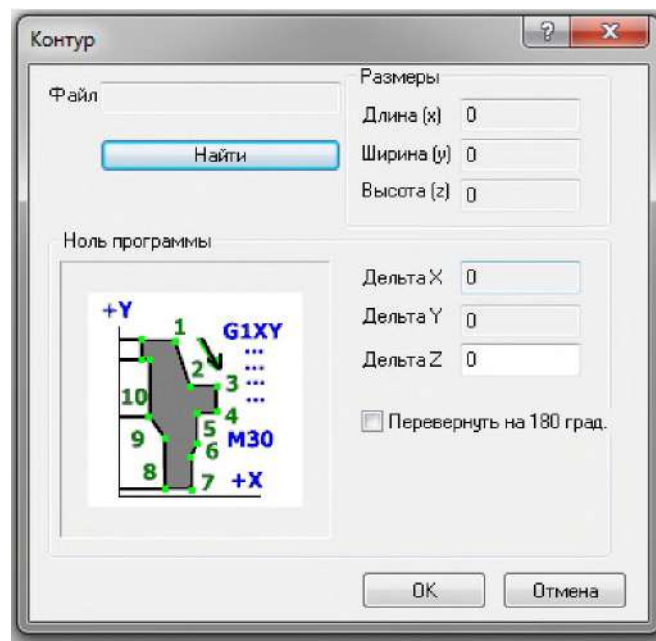


Рис. 5.14. Окно настройки свойств контура

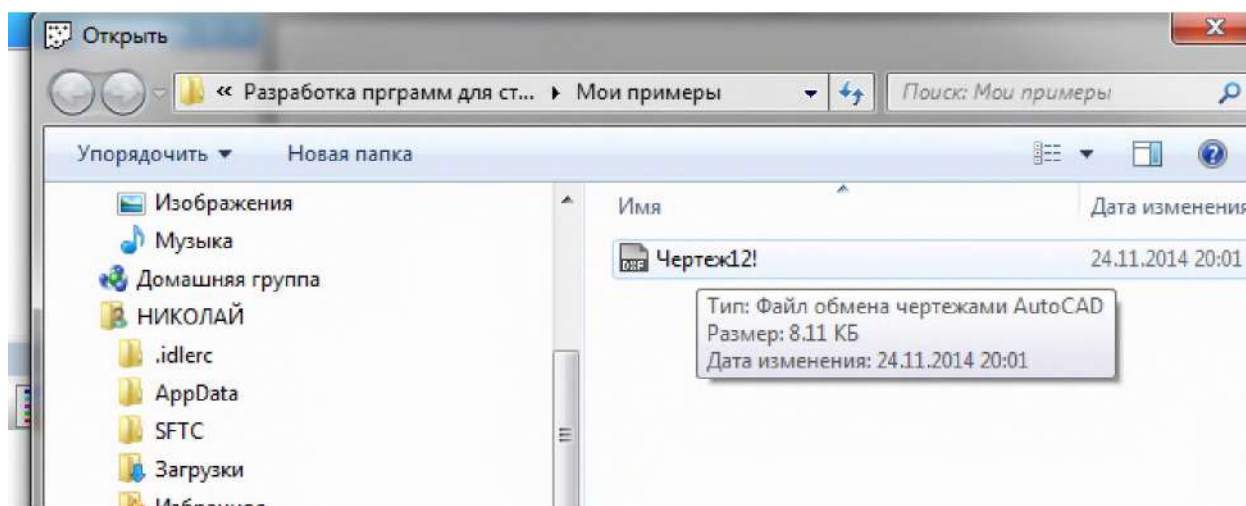


Рис. 5.15. Окно выбора файла

Внимание!

- 1) Контур детали должен быть сформирован в формате AutoCAD R12|LT2 DXF (.dxf).
- 2) Контур должен быть представлен замкнутой полилинией.
- 3) Задается только верхняя половина контура.

4) *Замыкающая линия проходит по оси детали.*

Примечание. Вместо контура детали можно использовать ее 3D модель в форма-те STL. Тогда при загрузке детали следует выбрать пункт «Из STL файла».

При правильно выполненной последовательности действий должно появиться изображения детали, представленное на рис. 5.16.

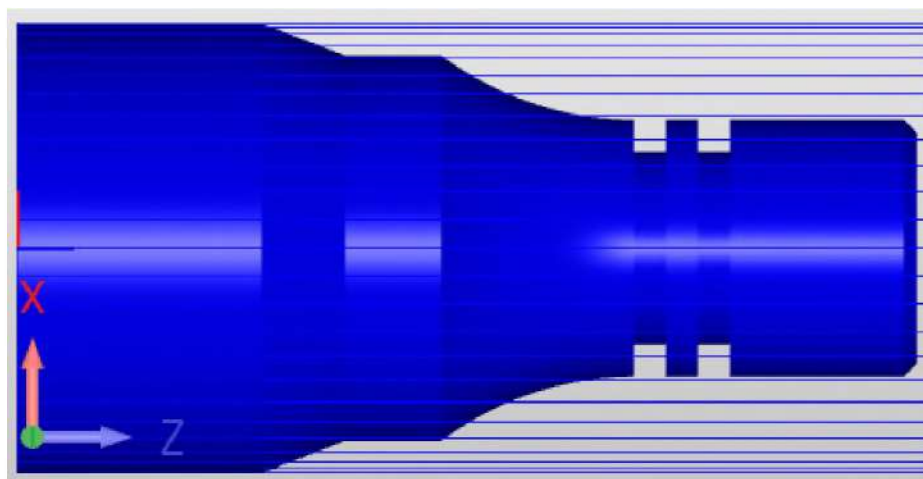


Рис. 5.16. Изображение детали

б. *Выбрать /создать инструмент*

Следующим этапом работы является выбор или создание инструмента, которое предполагает выполнение следующих действий.

а) Выбрать объект «Инструмент» (выбор ПКМ) (рис. 5.17).

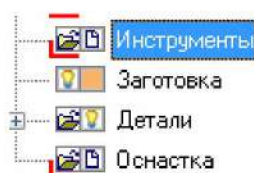


Рис. 5.17. Выбор объекта «Инструмент»

б) Выбрать пункт «Создать...» (рис. 5.18).

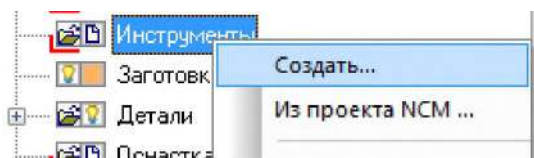


Рис. 5.18. Подменю объекта «Инструмент»

в) В появившемся диалоговом окне нажать кнопку «Добавить пластинку» (рис. 5.19).

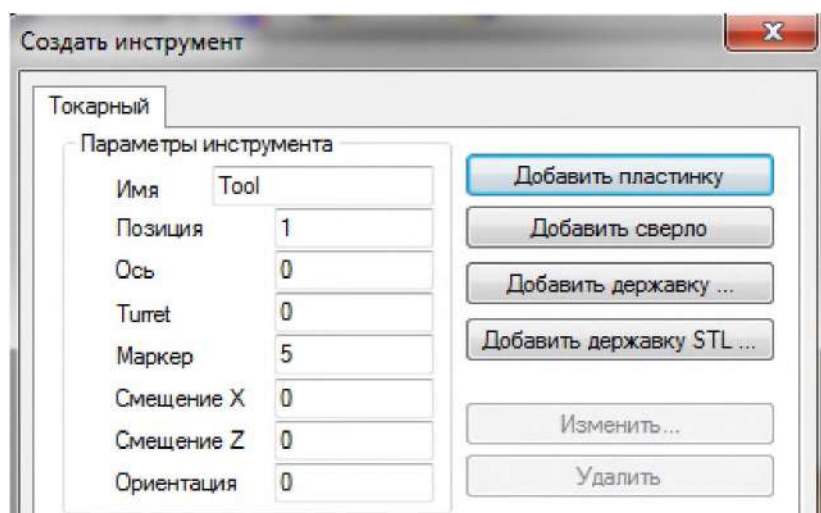


Рис. 5.19. Выбор добавления пластинки при создании инструмента

г) В появившемся диалоговом окне выбрать закладку для проходного резца, которым будут обрабатываться основные поверхности, и установить параметры по рисунку (рис. 5.20).

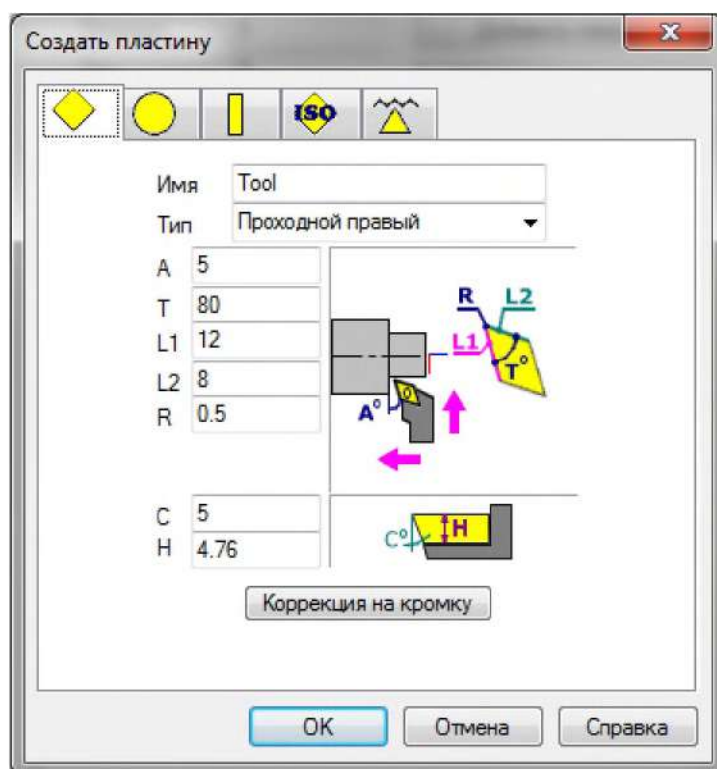


Рис. 5.20. Настройки параметров инструмента

Создание инструмента завершить нажатием кнопки ОК (рис. 5.21).

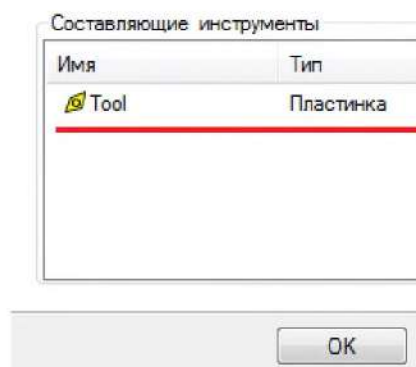


Рис. 5.21. Завершение создания инструмента

Номер созданного инструмента – 1.

Аналогичным образом создать еще один инструмент для точения канавок шириной 2 мм. (рис. 5.22).

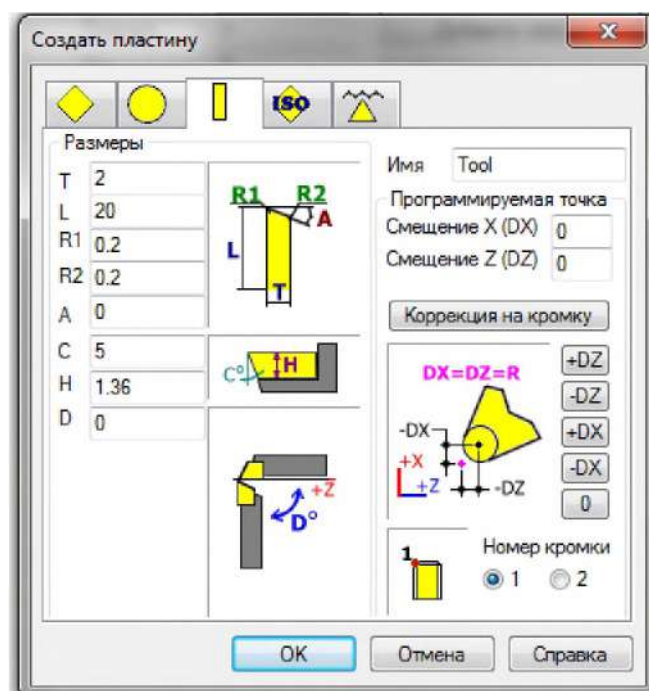


Рис. 5.22. Создание инструмента для точения канавок

Номер этого инструмента будет 2. В списке инструментов появятся добавленные резцы (рис. 5.23).



Рис. 5.23. Список созданных инструментов

Для сверления отверстия добавить инструмент «Сверло», выбрав его соответствующий диаметр (рис. 5.24).

Примечание. При программировании операции сверления учесть тот факт, программируется перемещение вершины (крайней точки) сверла. Поэтому ее координата будет больше глубины сверления на высоту конической части сверла, рассчитываемой по диаметру сверла и углу при вершине. Эту величину можно указать при выборе сверла в поле «Смещение».

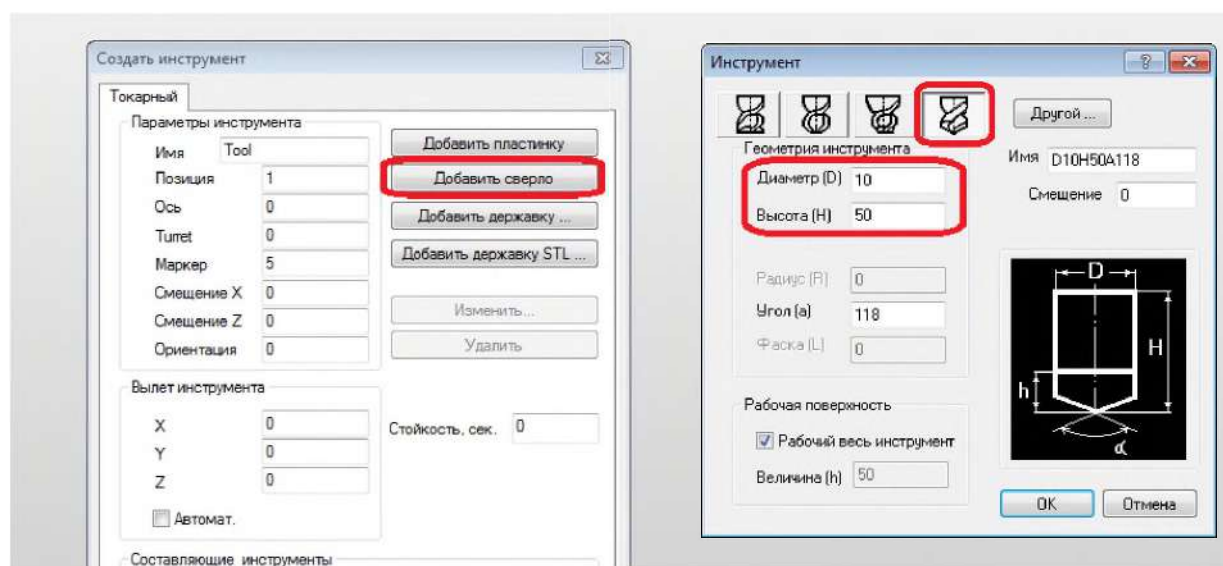


Рис. 5.24. Добавление инструмента «Сверло»

Для нарезания резьбы необходимо создать инструмент с пластинкой (рис. 24).

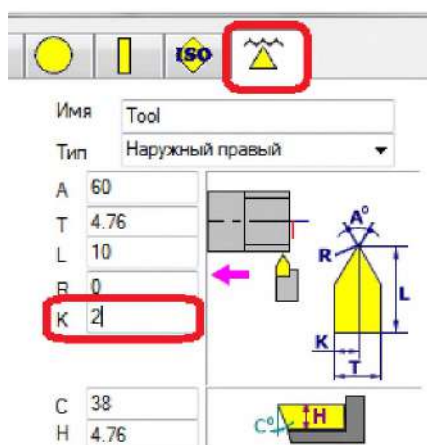


Рис. 5.24. Создание инструмента для нарезания резьбы

7. Задать исходное состояние для выбранной стойки

а) Выбрать объект «Стойка ЧПУ» (рис. 5.25).



Рис. 5.25. Выбор стойки ЧПУ

- б) Выбрать пункт «Исходное состояние».
- в) На закладке «Позиция» (рис. 5.26) задать
 - начальное положение инструмента (координаты X и Z),
 - номер инструмента.

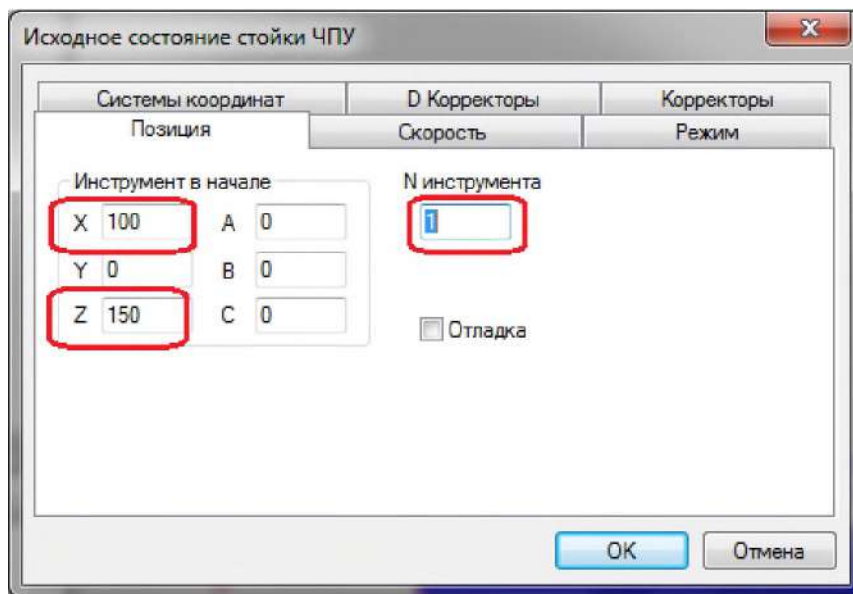


Рис. 5.26. Настройка начального положения инструмента

В графической области появится условное отображение первого

инструмента .

5.2. Средства визуализации и отладки

Запуск проекта производится нажатием кнопки «Старт» на панели «Симуляция» (рис. 5.27).

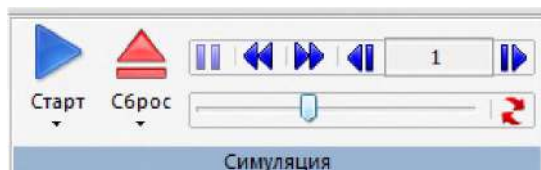


Рис. 5.27. Панель «Симуляция»

При повторном запуске проекта необходимо восстановить исходное состояние нажатием кнопки «Сброс».

Режимы визуализации выбираются на панели «Режимы».

а) Режим «Резать» / «Не резать»

Кнопки включения режимов «Резать» / «Не резать» расположены на панели Режимы (рис. 5.28).

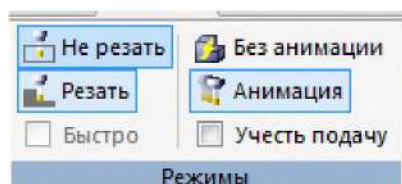


Рис. 5.28. Панель Режимы

В режиме «Резать» имитируется удаление металла, в режиме «Не резать» – только траектория инструмента (рис. 5.29).

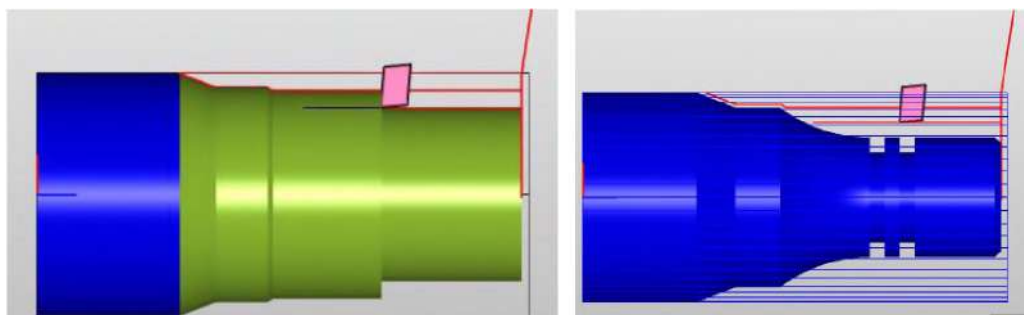


Рис. 5.29. Особенности отображения режимов

б) Режим «Анимация»/ «Без анимации».

В режиме «Анимация» симулируются перемещения в каждом проходе, в режиме «Без анимации» – только траектория инструмента и конечный результат обработки (рис. 5.30).

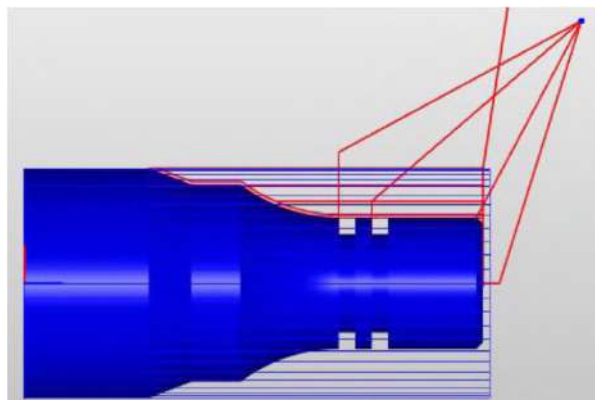


Рис. 5.30. Траектория инструмента и результат обработки

в) Скорость перемещения инструмента при симуляции устанавливается включением/выключением «Учесть подачу».

В режиме «Учесть подачу» скорость перемещения инструмента (подача) берется из программы. Если режим «Учесть подачу» выключен, скорость демонстрации устанавливается перемещением бегунка на панели «Симуляция».

5.3. Сохранение и загрузка проекта

Созданный проект можно сохранить полностью со всеми входящими в него данными – деталью, заготовкой, инструментом, станком и т. д. Файл проекта сохраняется с расширением **ncm**. При дальнейшей работе над проектом достаточно загрузить этот файл. Все исходные данные будут восстановлены.

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1. Исходные данные

1. Деталь «переходник».
2. Материал сталь 40 ГОСТ 1055-88.
3. Заготовка: простой сортовой прокат круглого сечения.
4. Работа выполняется по вариантам.

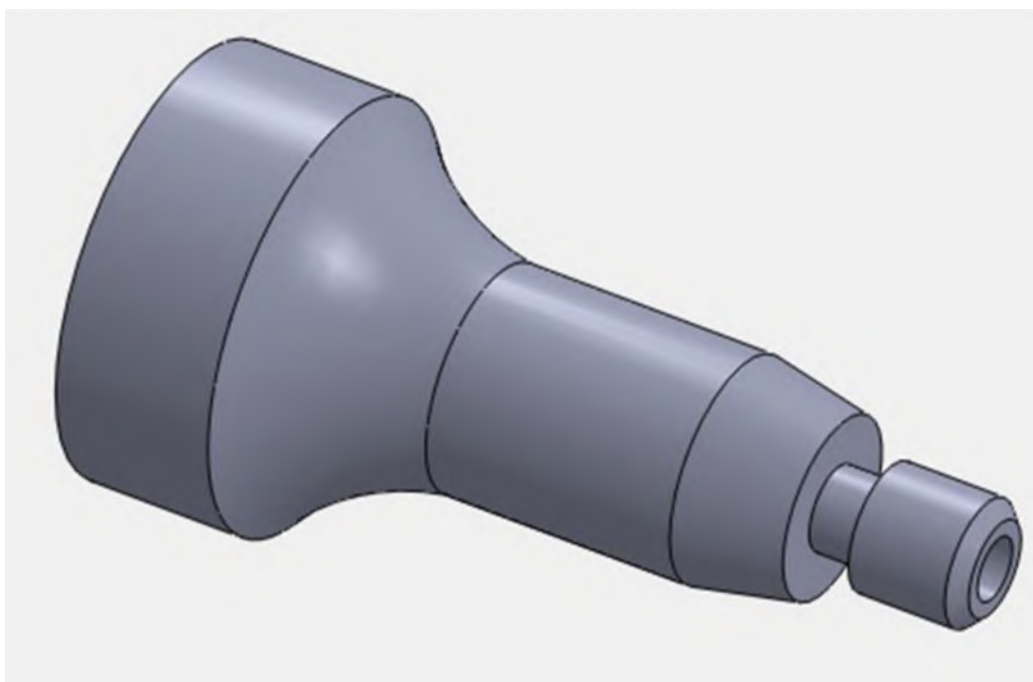
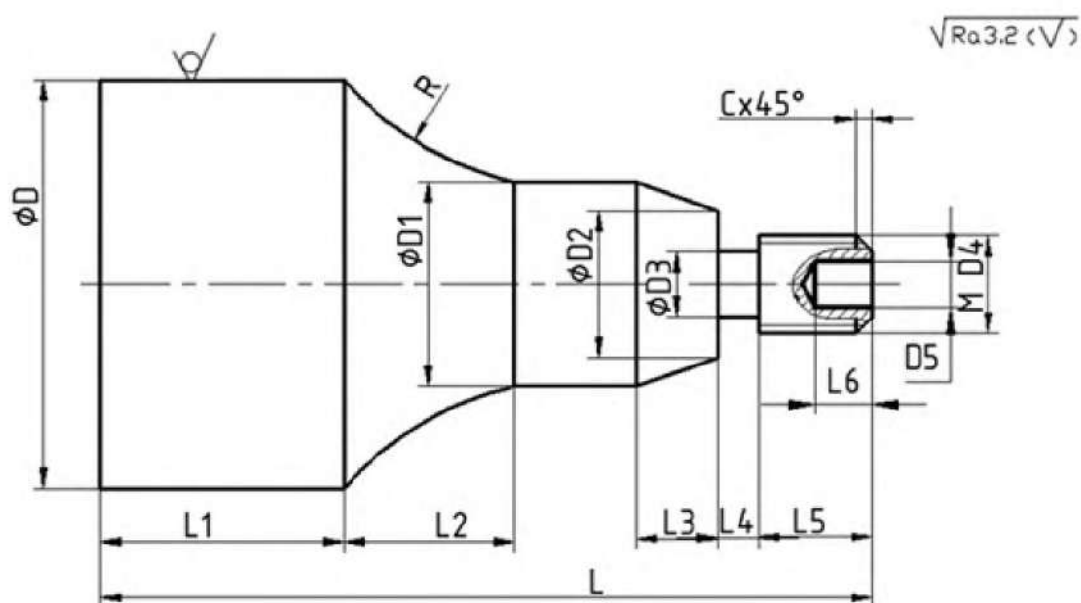


Таблица технологических данных

Содержание перехода	Режущий инструмент	Режимы резания
Подрезка торца	Токарный проходной упорный резец ГОСТ 18879-73	S = 0,5 мм\об N = 700 об\мин
Черновая обработка основных наружных поверхностей	Проходной упорный прямой резец ГОСТ 18879-73	S = 0,350 мм\об N = 750 об\мин
Черновая обработка основных наружных поверхностей	Проходной упорный ГОСТ 18879-73	S = 0,25 мм\об N = 730 об\мин
Точение канавок	Резец канавочный ТУ 2-035-558-77	S = 0,15мм\об N = 800 об\мин
Сверление отверстия	Сверло спиральное цилиндрическое Р6М5 ГОСТ 10903-77	S = 0,18мм\об N = 315 об\мин
Нарезание резьбы	Резец 2660-0003 2 Т15К6 ГОСТ 18885-3	S = 1.5мм\об N = 250 об\мин

Припуск на чистовую обработку – 0.5 мм.

№ вар.	L	D	L1	L2	L3	L4	L5	L6	D1	D2	D3	D4	D5	R	C
1	80	40	10	15	11	5	10	4	20	16	8	12	6	20	1.5
2	81	40	15	16	12	5	11	4	21	17	8	12	6	25	1.5
3	82	40	20	17	13	5	12	4	22	18	8	12	6	30	1.5
4	83	40	25	18	14	5	13	6	23	19	8	12	6	35	1.5
5	84	40	30	15	10	5	14	6	24	20	10	14	8	40	2.0
6	85	50	30	15	10	5	15	6	25	15	10	14	8	40	2.0
7	86	50	20	21	11	5	10	6	21	16	10	14	8	50	2.0
8	87	50	20	22	12	5	11	6	22	17	10	14	8	55	2.0
9	88	50	20	23	13	5	12	6	23	18	10	14	8	60	2.0
10	89	50	20	24	14	5	13	8	24	19	10	14	8	65	2.0
11	90	60	20	25	15	5	14	8	25	20	12	16	10	70	2.5
12	91	60	20	26	10	5	15	8	21	15	12	16	10	75	2.5
13	92	60	20	27	11	5	16	8	22	16	12	16	10	80	2.5
14	93	60	20	28	12	5	17	10	23	17	12	16	10	85	2.5
15	94	60	20	29	10	5	18	10	25	18	12	16	10	90	2.5
16	95	50	30	21	13	5	14	6	25	15	8	12	6	40	2.0

Для четных номеров вариантов реализовать схему черновой обработки «петля с подборкой».

Для нечетных номеров вариантов реализовать схему черновой обработки «петля с зачистным проходом».

6.2. Требования к оформлению отчета

Результаты выполнения работы должны быть представлены в виде отчета.

Отчет должен быть оформлен аналогично тому, как это сделано в примере (п. 4) и должен содержать:

- исходные данные о детали и заготовке;
- чертеж детали, выполненный в соответствии с требованиями ЕСКД;
- таблицу технологических данных;
- таблицы с координатами опорных точек для черновой и чистовой обработки и точения канавки;
- таблицу с эскизами переходов и соответствующих им фрагментов кода программы;
- результат (копию экрана) обработки с траекториями перемещения инструмента.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Должиков, В. П. Основы программирования и наладки станков с ЧПУ : учебное пособие / В. П. Должиков. – Томск : Изд. ТПУ, 2011. – 112 с.
2. Ермолаев, В. В. Программирование для автоматизированного оборудования : учебник / В. В. Ермолаев. – Москва : Издательский центр «Академия», 2014. – 256 с.
3. Панов, А. А. Обработка металлов резанием: справочник технолога / А. А. Панов [и др.]. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 2004. – 784 с.
4. Серебrenицкий, П. П. Программирование для автоматизированного оборудования : учебник / П. П. Серебrenицкий, А. Г. Схиртладзе. – Москва : Высш. шк. 2003. – 592 с.

Таблица основных команд

Код	Описание	Пример
G00	Ускоренное перемещение инструмента (холостой ход) Используется для выполнения ускоренного перемещения режущего инструмента к позиции обработки или к безопасной позиции. Ускоренное перемещение никогда не используется для выполнения обработки, т. к. скорость движения исполнительного органа станка очень высока. Код G00 отменяется кодами: G01, G02, G03.	G0 X0 Y0 Z100;
G01	Линейная интерполяция Используется для выполнения прямолинейных перемещений с заданной скоростью (F). При программировании задаются координаты конечной точки в абсолютных значениях (G90) или приращениях (G91) с соответственными адресами перемещений (например, X, Y, Z). Код G01 отменяется кодами: G00, G02, G03.	G01 X0 Y0 Z100 F200;
G02	Круговая интерполяция по часовой стрелке Предназначена для выполнения перемещения инструмента по дуге (окружности) в направлении часовой стрелки с заданной скоростью (F). При программировании задаются координаты конечной точки в абсолютных значениях (G90) или приращениях (G91) с соответственными адресами перемещений (например X, Y, Z). Параметры интерполяции I, J, K, которые определяют координаты центра дуги окружности в выбранной плоскости, программируются в приращениях от начальной точки к центру окружности, в направлениях, параллельных осям X, Y, Z соответственно. Код G02 отменяется кодами: G00, G01, G03.	G02 X15 Y15 R5 F200;
G03	Круговая интерполяция против часовой стрелки Предназначена для выполнения перемещения инструмента по дуге (окружности) в направлении против часовой стрелки с заданной скоростью (F). При программировании задаются координаты конечной точки в абсолютных значениях (G90) или приращениях (G91) с соответственными адресами перемещений (например X, Y, Z). Параметры интерполяции I, J, K, которые определяют координаты центра дуги окружности	G03 X15 Y15 R5 F200;

	в выбранной плоскости, программируются в приращениях от начальной точки к центру окружности, в направлениях, параллельных осям X, Y, Z соответственно. Код G03 отменяется кодами: G00, G01, G02.	
G04	Пауза Команда на выполнение выдержки с заданным временем. Этот код программируется вместе с X или P адресом, который указывает длительность времени выдержки. Обычно, это время составляет от 0.001 до 99999.999 секунд.	G04 P1000; пауза 1 секунда. G04 X2.5 ; пауза 2.5 секунды
G18	Выбор плоскости Z_X Код G18 предназначен для выбора плоскости XZ в качестве рабочей. Плоскость XZ становится определяющей при использовании круговой интерполяции, вращении системы координат и постоянных циклов сверления.	G18
G21	Ввод метрических данных Код G21 активирует режим работы с метрическими данными. Пока действует этот режим, все вводимые данные воспринимаются как метрические. Рекомендуется во всех программах, которые написаны в метрических размерах, поставить команду G21 в начало программы (в строку безопасности), чтобы в случае, если в программе, выполняемой до этого, действовал дюймовый режим, обеспечить выбор корректного формата. Команда является модальной и действует до тех пор, пока ее не отменят командой G20.	G21 G40 G49 G54 G80 G90 (строка безопасности)
G32	Нарезание резьбы с постоянным шагом (Z – длина резьбы, K – шаг в направлении Z) Направление (правая или левая) резьбы определяется направлением вращения шпинделя M3 – правая резьба, M4 – левая резьба.	G33 Z-100 K2
G80	Отмена циклов сверления Функция, которая отменяет любой постоянный цикл	(G81-G84)G80 Z100;
G81	Цикл сверления Цикл G81 предназначен для зацентровки и сверления отверстий. Движение в процессе обработки происходит на рабочей подаче. Движение в исходное положение после обработки идет на ускоренной подаче.	G81 X0 Y0 Z-10 R3 F100;

G90	<i>Абсолютная система координат</i> В режиме абсолютного позиционирования G90 перемещения исполнительных органов производятся относительно нулевой точки рабочей системы координат. Код G90 отменяется при помощи кода относительного позиционирования G91.	G90 G21;
G91	<i>Относительная система координат</i> В режиме относительного (инкрементального) позиционирования G91 за нулевое положение каждый раз принимается положение исполнительного органа, которое он занимал перед началом перемещения к следующей опорной точке (программируется, на сколько должен переместиться инструмент). Код G91 отменяется при помощи кода абсолютного позиционирования G90.	G91 G1 X4 Y5 F100;
G94	<i>F (подача) – в формате мм/мин.</i> При помощи функции G94 указанная скорость подачи устанавливается в дюймах или в миллиметрах за 1 минуту. Программируется вместе с функцией подачи (F). Код G94 отменяется кодом G95.	G94 G80 Z100;
G95	<i>F (подача) – в формате мм/об.</i> При помощи функции G95 указанная скорость подачи устанавливается в дюймах или в миллиметрах на 1 оборот шпинделя. Т. е. скорость подачи F синхронизируется со скоростью вращения шпинделя S. Код G95 отменяется кодом G94.	G95 G84 X0 Y0 Z-10 R3 F1.411;

Вспомогательные (технологические) команды

Код	Описание	Пример
M00	Приостановить работу станка до нажатия кнопки «старт» на пульте управления, так называемый «технологический останов»	G0 X0 Y0 Z100 M0;
M01	Приостановить работу станка до нажатия кнопки «старт», если включен режим подтверждения останова	G0 X0 Y0 Z100 M1;
M02	Конец программы	M02;
M03	Начать вращение шпинделя по часовой стрелке	M3 S2000;
M04	Начать вращение шпинделя против часовой стрелки	M4 S2000;
M05	Остановить вращение шпинделя	M5;

M06	Сменить инструмент	M6 T15;
M08	Включить основное охлаждение	M3 S2000 M8;
M09	Выключить охлаждение	G0 X0 Y0 Z100 M5 M9;
M30	Конец информации	M30;
M99	Конец подпрограммы, возврат к основной программе	M99;

Параметры команд (задаются буквами латинского алфавита)

Код константы	Описание	Пример
X	Координата точки траектории по оси X	G0 X0 Y0 Z100
Y	Координата точки траектории по оси Y	G0 X0 Y0 Z100
Z	Координата точки траектории по оси Z	G0 X0 Y0 Z100
F	Скорость рабочей подачи	G1 G91 X10 F100
S	Скорость вращения шпинделя	S3000 M3
R	Радиус или параметр стандартного цикла	G1 G91 X12.5 R12.5 или G81 R1 0 R2 -10 F50
D	Параметр коррекции выбранного инструмента	M06 T1 D1
P	Величина задержки или число вызовов подпрограммы	M04 P101 или G82 R3 Z-10 P1000 F50
I,J,K	Параметры дуги при круговой интерполяции	G03 X10 Y10 I0 J0 F10
L	Вызов подпрограммы с данной меткой	L12 P3

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому
комплексу
А. Угоров

С

Методические указания по самостоятельной работе студентов

**Б1.В.ДВ.01.02.04 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И АДДИТИВНЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ**

Специальность

Направленность (профиль)

Материалы и технологии цифровых производств

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатация горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Горно-механический

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург

Содержание

Инструкция по охране труда при проведении лабораторных работ	4
1 Проектирование технологических процессов изготовления деталей на основе технологий аддитивного производства.....	5
2 Подготовка трехмерных моделей деталей для изготовления методами на основе технологий аддитивного производства.....	13
3 Трехмерное сканирование и основы работы с 3D-сканером модели EinScan-Pro.....	32
4 Изготовление деталей методом FDM-печати и основы работы на 3D-принтере.....	36
5 Изготовление металлических деталей методом SLM-печати и основы работы на 3D-принтере модели EP-M250.....	40
Список литературы.....	48

Инструкция по охране труда при проведении лабораторных работ

Общие требования безопасности

Допуск студентов к лабораторным занятиям производится только после инструктажа по технике безопасности, о чем делается соответствующая запись в специальном журнале (бланке).

Требования безопасности перед началом работы

1 Внимательно изучить содержание и порядок проведения лабораторной работы, а также безопасные приемы его выполнения.

2 Перед каждым включением оборудования предварительно убедиться, что его пуск безопасен.

Требования безопасности во время работы

1 Точно выполнять все указания преподавателя.

2 Не прикасаться к находящимся под напряжением элементам электрических цепей, к корпусам стационарного электрооборудования.

3 Запрещается во время работы оборудования снимать ограждения и предохранительные устройства, а также держать их открытыми.

4 Во время работы запрещается касаться руками нагретых, вращающихся и перемещающихся частей, вводить руки в зону движения.

Требования безопасности по окончании работы

1 Полностью выключить оборудование.

2 Привести в порядок рабочее место.

3 Предупредить преподавателя обо всех, даже малейших и незначительных, неисправностях оборудования.

Требования безопасности в аварийных ситуациях

1 В случае травмирования кого-либо немедленно доложить преподавателю.

2 При выходе оборудования из строя необходимо:

– отключить оборудование (обесточить);

– доложить преподавателю о случившемся, а в случае возгорания приступить к немедленной его ликвидации первичными средствами пожаротушения.

1 Проектирование технологических процессов изготовления деталей на основе технологий аддитивного производства

Цель работы: освоение методики проектирования технологических процессов изготовления деталей на основе технологий аддитивного производства с соблюдением принципов рациональности, производительности, экономичности, обеспечения качества и технических требований.

1.1 Производственные технологии

Большинство производственных технологий можно отнести к одной из трех групп. На простейшем уровне эти группы можно определить как:

1) *формовочное производство*: лучше всего подходит для крупно-серийного производства одной и той же детали, требующего больших первоначальных инвестиций в оснастку (пресс-формы), но затем способного производить детали по очень низкой цене за единицу продукции;

2) *субтрактивное производство*: лучше всего подходит для деталей с относительно простой геометрией, производимых в малых и средних объемах;

3) *аддитивное производство (АП)*: лучше всего подходит для мелко-серийных сложных конструкций, которые формовочными или субтрактивными методами не могут быть произведены. Обычно используется для уникальных быстрых прототипов или деталей для конечного использования.

Стоимость любого типа производства в основном связана с объемом производства, а производительность изготовления детали сильно зависит от её геометрии.

Технологическая цепочка формовочного производства: чертеж – подготовка модельного комплекта – подготовка материалов для изготовления литейной формы – формовка – плавка материала – заливка формы – охлаждение формы – извлечение отливки – термообработка – очистка отливок – термообработка – контроль – среднее количество отходов.

Технологическая цепочка субтрактивного производства: чертеж – разработка технологического процесса, выбор оборудования, режущего и вспомогательного инструмента, технологической оснастки – разработка и изготовление специального режущего и вспомогательного инструмента, технологической оснастки – получение заготовки – субтрактивные методы изготовления деталей и термообработка – постобработка (слесарная операция, промывка, мойка, маркировка и др.) – деталь и её контроль – большое количество отходов.

Технологическая цепочка аддитивного производства: чертеж – CAD-модель – оптимизированная CAD-модель – разработка технологического процесса, выбор оборудования, выбор материала (порошок, филамент, смола и др.) – STL-файл – слайсинг и генерация управляющей программы – аддитивные методы изготовления деталей – постобработка – деталь и её контроль – малое количество отходов.

STL (от англ. stereolithography) – формат файла, широко используемый для хранения трёхмерных моделей объектов для использования в аддитивных технологиях. Информация об объекте хранится как список треугольных граней, которые описывают его поверхность, и их нормалей.

Слайсинг (от англ. slicing) – процесс перевода STL-файла трёхмерной модели в управляющий код. Модель режется (слайстится) по слоям. Каждый слой состоит из периметра и/или заливки. Модель может иметь разный процент заполнения заливкой, также заливки может и не быть (пустотелая модель).

Постобработка (от англ. post-processing) – процесс или последовательность операций, которую необходимо совершить с изделием или материалом, перед или после 3D-печати, для получения необходимых характеристик детали и преодоления ограничений аддитивного производства.

Ключевым аспектом аддитивного производства является его способность создавать детали со сложной и оптимизированной геометрией. Это означает, что данный тип производственных технологий идеально подходит для изготовления высокопроизводительных деталей. С другой стороны, он не масштабируется так же хорошо, как обработка на станках с ЧПУ или литьё при больших объёмах.

1.2 Технологии аддитивного производства

В 2015 г. был создан стандарт ISO/ASTM 52900, а в 2017 г. – ГОСТ Р 57558–2017 / ISO/ASTM 52900:2015 с целью стандартизации всей терминологии и классификации каждого типа аддитивного производства.

В общей сложности на сегодняшний день выявлено и установлено семь категорий процессов аддитивного производства. Эти семь процессов 3D-печати породили множество различных типов технологий, которые сегодня используют 3D-принтеры [1–3].

1 *Экструзия материала (material extrusion)*: процесс, в котором материал выборочно подается через сопло или жиклер (рисунок 1.1).

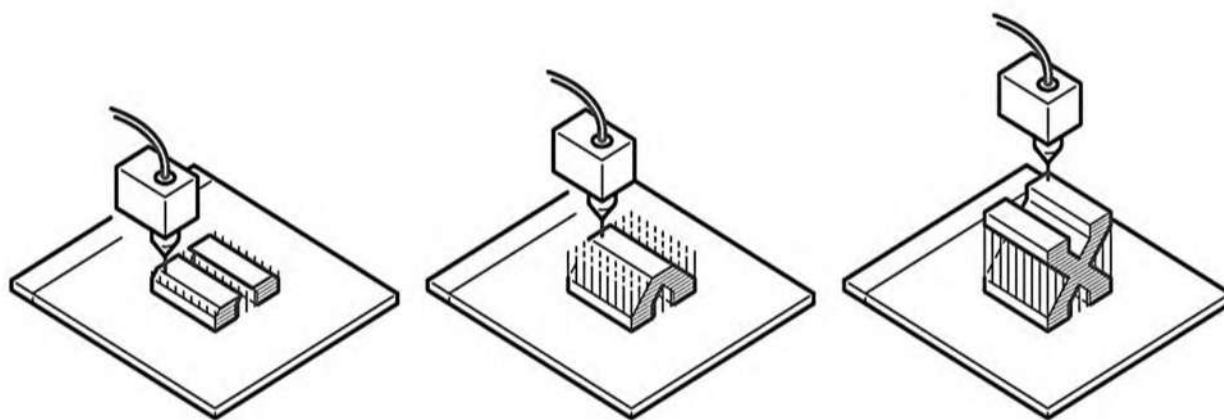


Рисунок 1.1 – Принцип процесса экструзии материала (material extrusion)

Типы технологии: fused deposition modeling (FDM) или fused filament fabrication (FFF).

Материалы: полимерный филамент (PLA, ABS, PET, PETG, TPU, Nylon, ASA, PC, HIPS, PEEK, PEI, PPE, PP, PE, PS, PA12, PA11, PA6, углеродное волокно и др.), металлизированный филамент и др.

Размерная точность: $\pm 0,5\%$ (нижний предел $\pm 0,5$ мм).

Область применения: корпуса электрических устройств, быстрое прототипирование, модели для литья по выплавляемым моделям и др.

Преимущества: низкая стоимость; время выполнения печати приемлемое; технология достаточно доступна; широкий выбор материалов и расцветки.

Недостатки: самая низкая размерная точность и разрешение по сравнению с другими технологиями 3D-печати, поэтому она не подходит для моделей со сложной геометрией и мелкими деталями; конечный продукт будет иметь видимые линии слоев, поэтому для лучшего вида требуется постобработка; механизм адгезии слоя делает детали анизотропными.

Постобработка: удаление поддержки (support removal); стандартные и растворимые; шлифование (sanding); холодная сварка (cold welding); заполнение пропусков (gap filling); полировка (polishing); грунтовка и покраска (priming and painting); сглаживание парами растворителя (vapor smoothing); погружение в растворитель (dipping); эпоксидное покрытие (epoxy coating); металлическое покрытие (metal plating).

2 *Фотополимеризация в ванне (vat photopolymerization)*: процесс, в котором жидкий фотополимер выборочно отверждается (полимеризуется) в ванне световым излучением (рисунок 1.2).

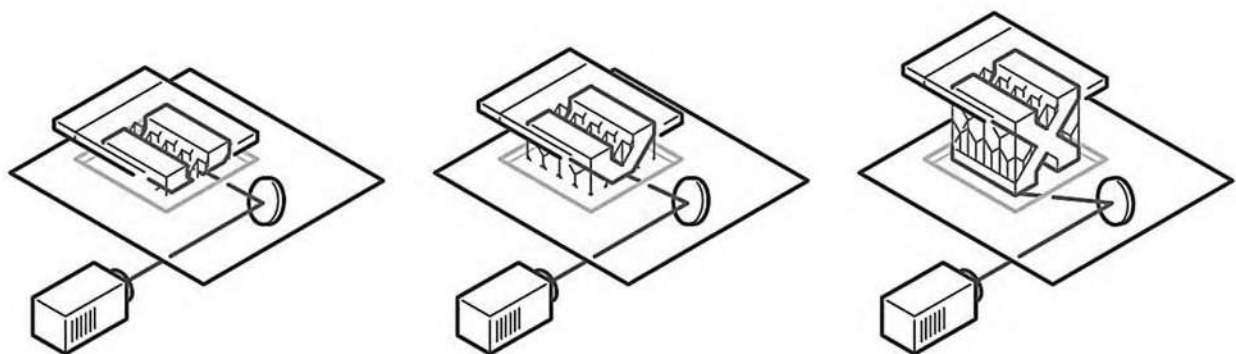


Рисунок 1.2 – Принцип процесса фотополимеризации в ванне (vat photopolymerization)

Типы технологии: stereolithography (SLA), masked stereolithography (MSLA), microstereolithography (μ SLA) и др.

Материалы: фотополимерные смолы.

Размерная точность: $\pm 0,5\%$ (нижний предел $\pm 0,15$ мм или 5 нм с μ SLA).

Область применения: полимерные прототипы, подлежащие изготовлению методом литья под давлением; ювелирное литье; стоматологическое применение.

Преимущества: высокая точность размеров; возможность получения деталей со сложной геометрией; детали будут иметь очень гладкую поверхность, что делает их идеальными, например для визуальных прототипов.

Недостатки: детали, как правило, хрупкие и не подходят для функциональных прототипов; механические свойства и внешний вид этих деталей со временем ухудшаются; поддержки и постобработка при печати требуются всегда.

Постобработка: промывка; дополнительная засветка фотополимерной смолы; удаление элементов поддержки; шлифование; склеивание; грунтовка; покраска и др.

3 Синтез на подложке (*powder bed fusion*): процесс, в котором энергия от внешнего источника используется для избирательного спекания/сплавания предварительно нанесенного слоя порошкового материала (рисунок 1.3).

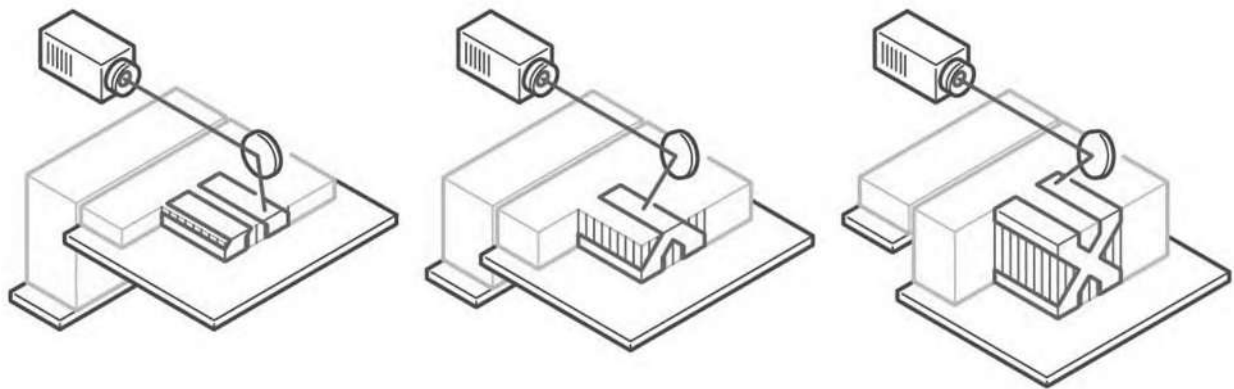


Рисунок 1.3 – Принцип процесса синтеза на подложке (*powder bed fusion*)

Типы технологии: selective laser sintering (SLS), selective laser melting (SLM), electron beam melting (EBM), direct metal laser sintering (DMLS), multi jet fusion (MJF).

Материалы: термопластичные порошки (Nylon 6, Nylon 11, Nylon 12 и др.), металлические порошки (сталь, титан, алюминий, кобальт и др.), керамические порошки.

Размерная точность: $\pm 0,3\%$ (нижний предел $\pm 0,3$ мм).

Область применения: функциональные детали, сложные воздухопроводы (полые конструкции), мелкосерийное производство деталей.

Преимущества: возможность изготовления функциональных деталей со сложной геометрией, которую традиционные методы производства не смогут обеспечить; детали могут быть оптимизированы; отличные механические свойства готовых деталей.

Недостатки: высокие затраты и стоимость расходного материала; размер рабочей области ограничен.

Постобработка: отделение моделей от стола (резка на проволочном электроэрозионном станке, резка на ленточнопильном станке, резка на дисково-отрезном станке); удаление порошка в полостях и элементов поддержки; терми-

ческая обработка (термический отжиг) для снятия остаточных напряжений и улучшения механических свойств детали; обработка на металлорежущих станках (обработка отверстий, резьбы и др.); пескоструйная обработка; галтование; шлифование; полировка и др.

4 *Прямой подвод энергии и материала (directed energy deposition)*: процесс, в котором энергия от внешнего источника используется для соединения материалов путем их сплавления в процессе нанесения (рисунок 1.4).

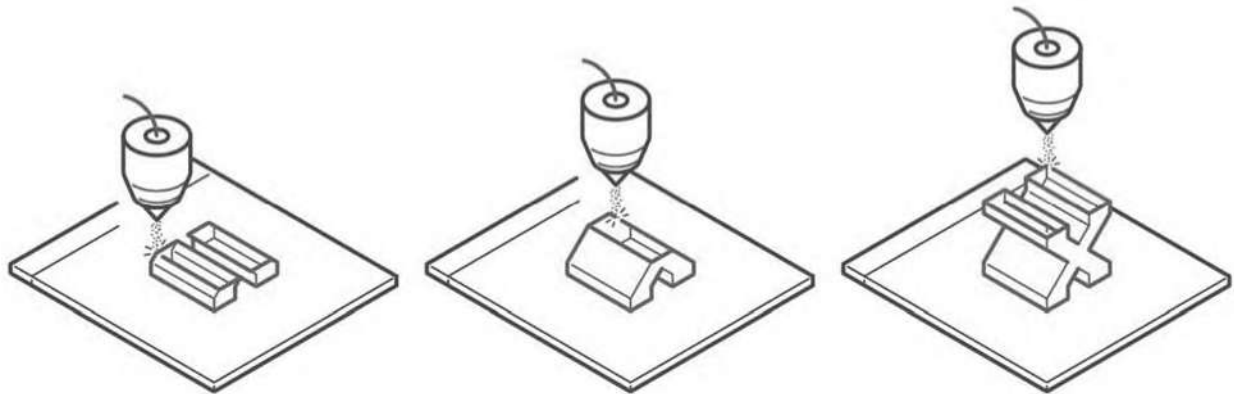


Рисунок 1.4 – Принцип процесса прямого подвода энергии и материала (directed energy deposition)

Типы технологии: laser engineered net shaping (LENS); electron beam additive manufacturing (EBAM); cold spray.

Материалы: металлы (проволока, порошок).

Размерная точность: $\pm 0,1$ мм.

Область применения: ремонт высококачественных автомобильных и аэрокосмических компонентов; функциональные прототипы и готовые детали.

Преимущества: поддерживающие конструкции требуются редко; смешивание металлов; работа в трёх координатах; высокая плотность и механическая прочность распечатков; возможность печатать прямо на готовом объекте.

Недостатки: низкое качество финишной поверхности, требующей последующей обработки; высокая стоимость; необходимость прочной поддержки.

Постобработка: термообработка; фрезерование, шлифование, полирование, и другие операции, характерные в том числе для ремонта и восстановления деталей.

5 *Струйное нанесение связующего (binder jetting)*: процесс, в котором порошковые материалы соединяются выборочным нанесением жидкого связующего (рисунок 1.5).

Типы технологии: binder jetting (BJ).

Материалы: песок, полимер или металлический порошок: нержавеющая сталь / бронза, полноцветный песок, кремнезём (литье в песчаные формы); металлокерамические композиты.

Размерная точность: $\pm 0,2$ мм (металл) или $\pm 0,3$ мм (песок).

Область применения: функциональные металлические детали, полноцветные модели, литьё в песчаные формы.

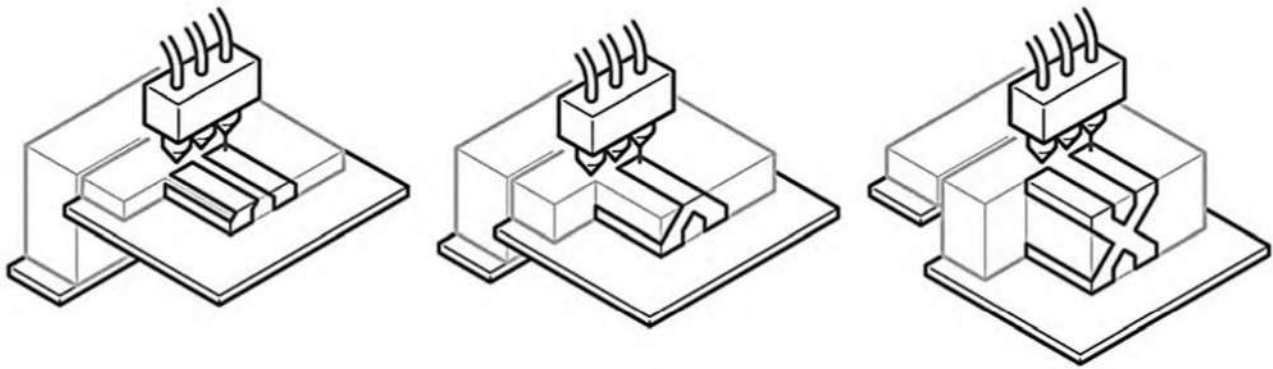


Рисунок 1.5 – Принцип процесса струйного нанесения связующего (binder jetting)

Преимущества: низкая стоимость; высокая производительность при производстве малых и средних партий; высокая точность; нет ограничений по габаритным размерам; улучшенные свойства готовой продукции; возможность изготовления изделий со сложной геометрией; возможность печати полноцветных прототипов; отсутствие деформации при печати; отсутствие поддержек; возможность использовать оставшийся после печати материал для новой распечатки.

Недостатки: высокая пористость моделей, что приводит к меньшей механической прочности; хрупкость детали в процессе до термообработки; необходимость закладывать разницу в размерах на усадку при печати моделей под запекание; ограниченное количество материалов.

Постобработка: термообработка (инфильтрация, спекание); обработка на металлорежущих станках (обработка отверстий, резьбы и др.); пескоструйная обработка; шлифование; полировка и др.

6 Струйное нанесение материала (*material jetting*): процесс, в котором изготовление объекта осуществляют нанесением капель строительного материала (рисунок 1.6).

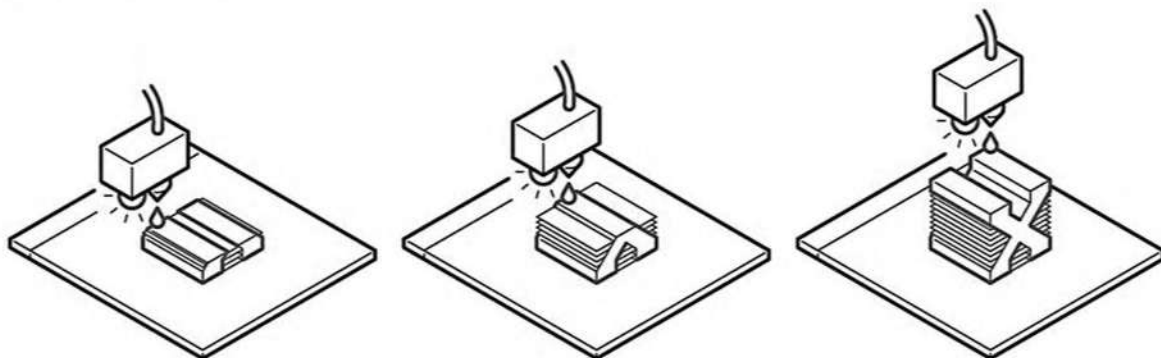


Рисунок 1.6 – Принцип процесса струйного нанесения материала (*material jetting*)

Типы технологии: *material jetting* (MJ), *drop on demand* (DOD).

Материалы: фотополимерная смола (стандартная, литьевая, прозрачная, высокотемпературная).

Размерная точность: $\pm 0,1$ мм.

Область применения: полноцветные прототипы продукции; прототипы,

изготовленные методом литья под давлением; пресс-формы для литья под давлением; медицинские модели.

Преимущества: высокая точность и детализация (печать очень тонких слоёв); доступность полноцветного и мультиматериального производства; гладкая поверхность распечатков.

Недостатки: хрупкость, не подходит для механических частей; высокая стоимость принтеров и материалов для печати.

Постобработка: дополнительная засветка фотополимерной смолы; удаление элементов поддержки и остатков смолы; шлифование; склеивание; грунтовка; окрашивание и др.

7 *Листовая ламинация (sheet lamination)*: процесс, в котором изготовление детали осуществляется послойным соединением листовых материалов (рисунок 1.7).

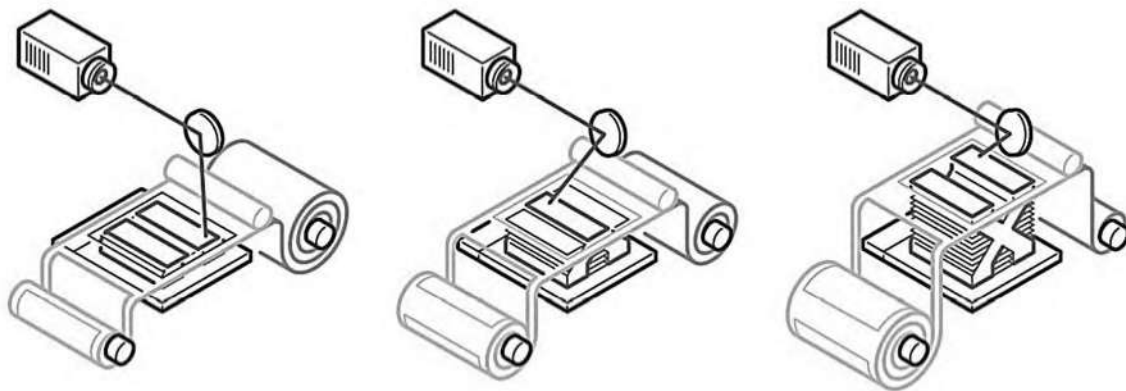


Рисунок 1.7 – Принцип процесса листовой ламинации (sheet lamination)

Типы технологии: laminated object manufacturing (LOM), ultrasonic consolidation (UC) и др.

Материалы: бумага, полимеры и металлы в листовой форме.

Размерная точность: $\pm 0,1$ мм.

Область применения: нефункциональные прототипы, многоцветная печать, формы для литья.

Преимущества: низкая стоимость; возможность быстрого изготовления; составная печать; производство крупных моделей.

Недостатки: низкая точность; много отходов; много постобработки; невысокая прочность моделей; ограниченность применения; низкое разрешение печати (толщина слоя равна толщине материала).

Постобработка: шлифование; полирование; механическая обработка отверстий и полостей; окрашивание и др.

1.3 Порядок выполнения лабораторной работы

1 Получить чертеж или CAD-модель детали у преподавателя.

2 Проанализировать информацию о детали: объем выпуска, размеры и допуски, сложность геометрии, материал, функциональное назначение.

3 Проанализировать применение различных методов производственных технологий и составить технологическую цепочку изготовления детали одним из типов технологии аддитивного производства.

4 Оформить отчёт.

1.4 Содержание отчета

Отчёт по лабораторной работе выполняется на отдельных листах бумаги или в тетради. Он должен содержать следующее:

- название лабораторной работы;
- цель работы;
- анализ информации о детали;
- технологическая цепочка изготовления детали;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы.

Контрольные вопросы

1 В чем отличие технологической цепочки аддитивного производства от цепочек других производственных технологий?

2 Какие категории процессов аддитивного производства Вы знаете?

3 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из металлов?

4 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из полимеров?

5 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из фотополимерной смолы?

6 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из композитов?

7 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из бумаги?

8 Какие категории процессов и типы технологии аддитивного производства предназначены для получение деталей из песка?

9 Что такое постобработка?

10 Какие операции может в себя включать постобработка?

2 Подготовка трехмерных моделей деталей для изготовления методами на основе технологий аддитивного производства

Цель работы: освоение методики проектирования и оптимизации трехмерных моделей деталей для изготовления методами на основе технологий аддитивного производства.

2.1 Этапы подготовки модели к печати

Из технологической цепочки аддитивного производства можно выделить этапы, связанные с подготовкой трехмерной модели к печати: чертеж – CAD-модель – оптимизированная CAD-модель – ... – STL-файл – слайсинг и генерация управляющей программы –

Рассмотрим каждый из этих этапов.

Этап 1. Чертеж и CAD-модель.

На первых этапах жизненный цикл «аддитивно-технологичного» изделия почти не отличается от традиционного. Чертежи и 3D-модели создаются теми же САПР (Компас-3D, SolidWorks, AutoCAD, Autodesk Inventor, NX, CATIA и др.). Правда уже здесь у конструктора на порядок больше свободы – деталь может быть более сложной формы, легче и функциональнее обычной.

Этап 2. Оптимизированная CAD-модель.

Для пользователя программного обеспечения оптимизации (Autodesk Netfabb, Autodesk Within, Materialise Magics, ANSYS SpaceClaim и др.) этот этап начинается с импорта модели из САПР. Здесь неоценимую помощь ему окажет возможность прямого импорта данных из самых распространенных САПР и поддержка широкого набора нейтральных форматов файлов, в том числе STL-файлы и файлы после слайсинга.

Специальные модули оптимизации, встроенные в программное обеспечение, позволяют автоматизировано превращать обычные САПР-модели в облегченную систему из оболочек и внутренней решетчатой структуры переменной плотности, которая при этом сохранит необходимую надежность. Детали в этом случае могут быть оптимизированы по массе, объему, прочности, технологичности исполнения на выбранном принтере и по еще целому ряду характеристик. Конструктор может даже изменить свойства самого материала печати как для всей модели, так и для отдельных ее участков. Можно создавать пористые участки и гладкие, упругие и жесткие, причем упругость может быть анизотропной (неравной по разным осям). Типовой процесс оптимизации представлен на рисунке 2.1.

Этап 3. STL-файл.

На этом этапе выполняется обработка данных – конвертация, исправление сетки (при необходимости) и др.

Новый формат файлов для аддитивного производства (AMF), который впоследствии заменит формат файлов STL, был разработан группой экспертов технического комитета ИСО по аддитивному производству ИСО/ТК 261,

в партнерстве с ASTM International.



Рисунок 2.1 – Оптимизация структуры крепёжного элемента

Этап 4. Слайсинг (нарезка) и генерация управляющей программы.

После формирования STL-файла полученную модель нужно подготовить к печати – оптимально разместить модели деталей в рабочем пространстве принтера, добавить структуру опор, разбить модель на слои, сгенерировать траектории инструмента под выбранную технологию печати. В завершении необходимо проанализировать деталь и провести имитацию процессов печати для предсказания и исключения возможных ошибок.

Структура опор необходима для частей детали, которые нависают над платформой, не имея снизу уже пропечатанного материала. Чтобы эти части при печати не отвалились от модели или не покособили всю модель, под ними моделируются временные, тонкие и легко удаляемые после производства структуры – так называемые «поддержки». В программном обеспечении они, в большинстве случаев, создаются автоматически. Хотя, конечно, инструменты ручного их создания и редактирования тоже предусмотрены. Поддержки бывают разных типов: прямые, ветвящиеся, древовидные, стеночные, объемные или комбинированные.

Кроме того, программное обеспечение может автоматически предложить пользователю оптимальные варианты ориентации детали при печати, исходя из соотношения объема поддержек, общей поддерживаемой площади и общего времени печати. Пользователю останется только выбрать наиболее подходящий вариант ориентации из списка, предложенного системой.

Инструменты пакования деталей в рабочее пространство принтера – это размещения множества деталей в области построения для одновременной печати. Автоматическое пакование позволяет достигать небывалой плотности размещения деталей, недостижимой в случае ручного расположения. Благодаря

этому за одну операцию печати можно изготовить максимально возможное количество деталей, сэкономив не только время, но и материалы.

В программном обеспечении могут использоваться различные алгоритмы пакования – плоские, трехмерные, контурные. Для технологий печати, не требующих поддержек, возможно расположение детали друг над другом максимально тесно. Вокруг групп мелких деталей можно автоматически генерировать временные легкие коробки, чтобы детали при извлечении не растерялись. При трехмерном размещении программное обеспечение будет следить даже за тем, чтобы детали не сцепились и не переплелись между собой.

Аналитический модуль программного обеспечения предназначен для исследования и имитации печати. Он позволяет заранее обнаружить и исключить множество потенциальных проблем печати. На основании виртуальной имитации процесса печати он предскажет, рассчитает и визуализирует остаточные напряжения и деформации детали, возникающие от неравномерного нагрева в процессе печати. Более того, он предложит автоматически компенсировать эти деформации, особым образом изменив модель перед печатью. Модуль также может предсказать разрыв системы поддержек в результате деформации детали. Предсказание и предварительная компенсация остаточных напряжений и деформаций детали позволяет в разы сократить количество требуемых итераций печати до получения идеального результата. Это, естественно, снижает себестоимость всего производства и радикально ускоряет его.

При всех операциях подготовки и настройки печати программное обеспечение позволяет учитывать параметры и специфику конкретной машины. В него может быть встроена обширная библиотека оборудования или же оператор может задать параметры вручную. Выбор машины из библиотеки автоматически устанавливает необходимые параметры подготовки к печати и ограничивает область построения.

По итогам контроля готовой детали можно внести корректировки в предыдущие этапы.

2.2 Инструменты для оптимизации дизайна

Современные CAD-/CAM-/CAE-пакеты предлагают инструменты, которые помогают в полной мере воспользоваться геометрической свободой 3D-печати. Используя эти инструменты проектирования на основе встроенных алгоритмов, можно создавать структуры, подобные органическим, которые превосходят детали, разработанные с использованием традиционных методов.

На сегодняшний момент принято использовать три основные стратегии построения трехмерных моделей деталей для 3D-печати. Эти стратегии могут либо оптимизировать производительность существующей конструкции, либо помочь в создании структур с нуля на основе набора требований к детали.

Решетчатые структуры. Применение решетчатого узора – отличный способ оптимизировать существующий дизайн (рисунок 2.2). Решетчатые структуры помогают создавать легкие детали, максимально увеличивать

площадь поверхности теплообменников или улучшать возможности печати и снижать стоимость производства существующей конструкции.



Рисунок 2.2 – Пример решетчатой структуры

Оптимизация топологии. Оптимизация топологии на основе моделирования помогает создавать конструкции с минимальной массой и максимальной жесткостью (рисунок 2.3). При оптимизации топологии определяемое пользователем проектное пространство и варианты нагрузки анализируются для определения областей, из которых можно удалить материал. Затем результат моделирования можно использовать для проектирования деталей с оптимальными характеристиками для подобных сценариев нагрузки.



Рисунок 2.3 – Пример оптимизации топологии

Порождающее моделирование (генеративный дизайн). Порождающее моделирование – это разновидность процесса оптимизации топологии на основе моделирования (рисунок 2.4). В генеративном дизайне вместо одного вывода анализ создает несколько вариантов дизайна. Все полученные конструкции пригодны для изготовления и соответствуют проектным требо-

ваниям. Таким образом, конструктор может изучить различные решения и выбрать то, которое подходит для производства (например, на основе вторичных критериев выбора).

В отличие от традиционных инструментов дизайна и проектирования, генеративные системы полуавтономно создают и первично отбирают варианты решений, что изменяет характер взаимодействия человека с системой: программа воспринимается не как средство, а как полноценный участник творческого процесса.

Некоторые генеративные системы позволяют пользователю переформулировать, корректировать и уточнять задачу по промежуточным результатам, а также самообучаются в процессе поиска решений.

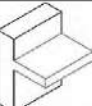
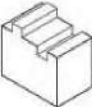
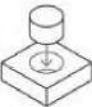


Рисунок 2.4 – Пример генеративного дизайна

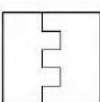
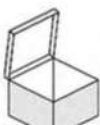
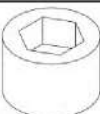
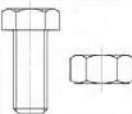
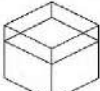
2.3 Дизайн для аддитивного производства (DfAM)

Даже при использовании передовых инструментов САПР конструктор при подготовке чертежа или CAD-модели детали и изделия в целом должен следовать определенным правилам проектирования дизайна. Они связаны с базовой механикой процессов 3D-печати. Список наиболее важных правил дизайна для различных типов технологий аддитивного производства представлен в таблице 2.1.

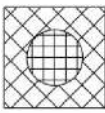
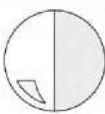
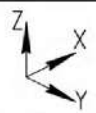
Таблица 2.1 – Правила дизайна для аддитивного производства

Элемент конструкции			Технология					
Характеристика	Единица измерения	Эскиз	FDM	SLA	SLS	DMLS (SLM)	BJ	MJ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Минимальная толщина опорных стенок	мм		0,8	0,4	0,7	0,4	2	1
Минимальная толщина свободных стенок	мм		0,8	0,6	0,8	0,5	3	0,5
Поддержки и нависания	град		45	19	Не нужны	Всегда	н/д ¹	Всегда
Растворимые поддержки			+ ²	н/д	н/д	– ³	н/д	+
Нависания (вылет) без поддержек	мм		н/д	1	н/д	0,5	20	0,5
Рельефы и гравировка ($\frac{\text{ширина}}{\text{высота/глубина}}$)	мм		$\frac{0,6}{2}$	$\frac{0,4}{0,1/0,4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0,1}{0,1}$	$\frac{0,5}{0,5}$	$\frac{0,5}{0,5}$
Перемычки	мм		5	21 широкие	н/д	2	н/д	н/д
Минимальный диаметр отверстия	мм		Ø2	Ø0,5	Ø1,5	Ø1,5	Ø1,5	Ø0,5
Зазор между сопрягаемыми деталями ($\frac{\text{неподвижные}}{\text{подвижные}} \frac{\text{монтажные}}{\text{монтажные}}$)	мм		$\frac{0,5}{0,5}$ н/д	$\frac{0,1}{0,5}$ 0,2	$\frac{0,1}{0,3}$ н/д	н/д	н/д	$\frac{0,2}{0,2}$ н/д
Отверстия для извлечения материала	мм		н/д	Ø4	Ø3,5	Ø5	Ø5	н/д
Минимальный размер элемента	мм		2	0,2	0,8	0,6	2	0,25
Диаметр стержня (штифта)ы	мм		3	0,5	0,8	1	2	0,5

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальное соотношение сторон (высота : ширина)			н/д	н/д	н/д	8:1	8:1	8:1
Галтели (радиусы)	мм		н/д	н/д	0,4	н/д	1	н/д
Текст	мм		н/д	0,1	2	н/д	н/д	н/д
Ось	мм		н/д	н/д	0,3 (для ходовых осей)	н/д	н/д	н/д
Взаимосвязанные элементы (замковые элементы)	мм		0,5	0,2	0,2	н/д	н/д	0,1
Резервуары	мм		н/д	2	1	н/д	н/д	н/д
Живой шарнир ($\frac{\text{толщина}}{\text{длина}}$)	мм		0,4...0,6 (2 слоя) н/д	н/д	$\frac{0,3...0,8}{5}$	н/д	н/д	$\frac{0,4...0,8}{\text{н/д}}$
Толщина слоя	мкм		50...400	25...100	80...120	30...50	100	16...30
Резьба (резьбовые вставки)			+	+	+	—	—	+
Резьба (закладные гайки)			+	+	+	+	+	+
Резьба (саморезы)			+	+	+	—	—	+
Резьба (нарезание резьбы)			+	+	+	+	+	+
Резьба (3D-печать)			+	+	+	+	+	+
Усадка	%		0,2...1	н/д	3-3,5	н/д	н/д	—

Окончание таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Деформации			+	+	н/д	н/д	н/д	–
Многоцветность			–	–	–	–	–	+
Мультиматериальная печать			+	+	н/д	н/д	н/д	+
Текстура поверхности ($\frac{\text{глянцевый}}{\text{матовый}}$)			н/д	н/д	н/д	н/д	н/д	$\frac{+}{+}$
Водонепроницаемость			н/д	+	н/д	н/д	н/д	н/д
Изотропность			–	+	н/д	+	н/д	н/д
Ориентация			+	+	+/- ⁴	+	–	+/-
Размерная точность (настольный принтер)			±0,5 % (нижний предел ±0,5 мм)	±0,5 % (нижний предел ±0,15 мм)	±0,3 % (нижний предел ±0,3 мм)	±0,1 мм	±0,2 мм (металл); ±0,3 мм (песок)	±0,1 мм
Размерная точность (промышленный принтер)			±0,15 % (нижний предел ±0,02 мм)	±0,15 % (нижний предел ±0,01 мм)				
Примечания 1 Знак «н/д» – нет данных. 2 Знак «+» – характеристика присуща для технологии или важна. 3 Знак «–» – характеристика не присуща для технологии или не важна. 4 Знак «+/-» – характеристика присуща для технологии или не сильно важна								

Описание элементов конструкции.

1 *Опорные стенки* – это стенки, соединенные с остальной частью распечатка как минимум с двух сторон.

ВJ: минимальная толщина опорных стенок гарантирует, что деталь может быть извлечена из порошка и обработана в сыром состоянии без повреждения.

2 *Свободные стенки* – это неподдерживаемые стенки, соединенные с остальной частью, распечатка менее чем с двух сторон.

BJ: минимальная толщина свободных стенок (включая плавники и ребра) гарантирует меньший риск повреждения во время обработки.

SLA: тонкие свободные стенки должны иметь закругленные основания (там, где стенка соединяется с остальной частью распечатка), чтобы уменьшить концентрацию напряжений вдоль стыка.

3 *Поддержки и нависания* характеризуются максимальным углом наклона стенок, которые могут быть напечатаны без использования поддержек. Также поддержки характеризуются возможностью отделения от модели при помощи растворения.

FDM: под углом 45° вновь напечатанный слой опирается на 50 % предыдущего слоя. Это создает достаточную поддержку и адгезию, на которые можно опираться. При углах выше 45° необходима поддержка, чтобы вновь напечатанный слой не выпирал вниз и не отходил от сопла. Еще одна проблема, возникающая при печати выступов, – это скручивание. Новый слой становится тоньше на краю выступа. Это приводит к дифференциальному охлаждению, заставляя его деформироваться вверх. Ключевой момент при проектировании: вы можете преодолеть ограничения, связанные с выступами, используя опоры для углов стены более 45° . Для больших выступов, требующих поддержки, ожидайте, что на окончательной поверхности будут присутствовать дефекты, если они не прошли постобработку.

SLA: рекомендуется ориентировать деталь таким образом, чтобы визуальнo важные поверхности не соприкасались с опорными конструкциями. Если только модель не печатается без соответствующих внутренних и внешних опорных конструкций, выступы не представляют большой проблемы при печати. Печать без поддержек часто приводит к короблению отпечатка, но если необходимо печатать без поддержек, любые неподдерживаемые выступы должны соответствовать рекомендациям. Технологии печати «сверху вниз» и «снизу вверх» используют поддержку по-разному.

DMLS, SLM: металлическая печать плавит или спекает слои порошка при очень высокой температуре. Из-за этого для каждого слоя требуется что-то «твердое», а не просто рассыпчатая пудра, как в процессе SLS. Для этого для секций, не прикрепленных к рабочему столу, сначала печатаются опорные конструкции, а затем поверх них строятся твердые секции. Остаточное напряжение, возникающее в результате дифференциального охлаждения, означает, что каждый слой металлического распечатка стремится свернуться и деформироваться. Добавление поддержки помогает отводить тепло от недавно напечатанных участков, а также закреплять их на твердом основании. Поддержка увеличивает стоимость сборки (поскольку она использует дополнительный материал), а также должна быть удалена после завершения печати. Поверхности, соприкасающиеся с опорой, всегда требуют некоторой последующей обработки для достижения такой же чистоты поверхности, как у деталей, где опора не требовалась.

MJ: одним из самых больших преимуществ струйной печати материалов является то, что все детали печатаются из двух разных материалов; один для основного строительного материала, а второй в качестве растворимой

поддержки. Это означает, что в отличие от других методов 3D-печати, при которых опору необходимо вручную отрезать от детали, опора растворяется и легко удаляется. При правильной постобработке это может привести к тому, что поверхность вообще не будет иметь никаких признаков поддержки. Это также означает, что ориентация деталей гораздо более гибкая, чем другие технологии 3D-печати. Это в сочетании с относительной однородностью материалов, изготавливаемых с помощью струйной печати, обеспечивает большую свободу проектирования и позволяет создавать очень сложные и замысловатые конструкции.

4 Нависания (вылет) без поддержек характеризуются максимальным вылетом стенок, которые могут быть напечатаны без использования поддержек. Рекомендуется рассматривать возможность устранения нависания (вылета), добавив фаску под неподдерживаемые кромки.

BJ: хотя для технологии окружающие детали из порошка обеспечивают поддержку на этапах построения, незакрепленные края подвержены высокому риску поломки при обработке в сыром состоянии.

5 Рельефы и гравировка – элементы на модели, которые приподняты или утоплены ниже поверхности модели.

SLA: если элементы слишком малы, эти элементы, которые впечатаны или утоплены в модели, рискуют слиться с остальной частью модели во время печати.

6 Перемычки (мосты) характеризуются размером горизонтального участка, который технология печати может обеспечить без необходимости применения поддержек.

FDM: образование мостов происходит, когда принтер должен печатать между двумя опорами или опорными точками. Поскольку строить не на чем, первоначальный печатаемый слой не поддерживается, и материал имеет тенденцию провисать. Мосты чаще всего встречаются в отверстиях по горизонтальной оси. Одним из решений является уменьшение расстояния перемычки, но эффект от этого зависит от конструктивных ограничений детали. Еще одно решение, позволяющее избежать провисания – добавить поддержку. Поддержка обеспечивает временную платформу для создания связующего уровня. Поддерживающий материал удаляется после завершения печати, хотя он может оставить следы или повредить поверхность, где поддержка была соединена с деталью. Если требуется гладкая, ровная поверхность, передовым решением будет разделение дизайна на отдельные части или выполнение какой-либо формы постобработки.

SLA: перемычки между двумя точками на модели можно успешно напечатать, но более широкие горизонтальные перемычки должны быть короче, чем тонкие перемычки. Широкие перемычки имеют большую площадь контакта по оси Z, что увеличивает вероятность сбоя печати во время отслаивания.

7 Минимальный диаметр отверстия – диаметр отверстия с наименьшими размерами, который технология печати может обеспечить. Отверстия, по возможности, должны быть ориентированы вертикально, чтобы обеспечить округлость элемента.

FDM: процесс печати вертикального отверстия и причину уменьшения его диаметра можно резюмировать следующим образом. Когда сопло печатает периметр отверстия по вертикальной оси, оно прижимает вновь напечатанный слой к существующим слоям, чтобы улучшить адгезию. Сила сжатия сопла деформирует экструдированный круглый слой из круга в более широкую и плоскую форму. Это увеличивает площадь контакта с ранее напечатанным слоем, улучшая адгезию, но расширяя экструдированный сегмент, что приводит к уменьшению диаметра печатаемого отверстия. Это уменьшение может быть проблемой, особенно при печати отверстий малого диаметра, где эффект больше из-за отношения диаметра отверстия к диаметру сопла. Если диаметр отверстия вертикальной оси имеет решающее значение, рекомендуется напечатать его меньшего размера, а затем просверлить отверстие до нужного диаметра.

SLA: если диаметр отверстий слишком мал по осям X, Y и Z, то отверстия могут закрыться во время печати.

8 *Сопрягаемые детали* характеризуются рекомендуемым зазором между двумя сопрягаемыми деталями (подвижными и неподвижными). Этот зазор также должен быть каким-то образом доступен для очистки/удаления поддерживающего материала, который может скапливаться в зазоре.

9 *Отверстия для извлечения материала* характеризуются минимальным диаметром выхода для извлечения строительного материала (например, металлического нерасплавленного порошка из полых деталей). Использование нескольких выпускных отверстий значительно упростит удаление материала.

10 *Минимальный размер элемента* характеризуется наименьшим размером единичного элемента с обеспечением того, что печать пройдет без ошибок.

BJ: основной проблемой минимального размера элемента является возможность его повреждения. Хотя этот процесс позволяет производить детали с очень мелкими деталями, проблема заключается в обращении с очень хрупкими деталями в сыром состоянии. Если элемент или деталь слишком хрупкие, одно из решений состоит в том, чтобы добавить в конструкцию дополнительные распорки, чтобы повысить её жёсткость и обеспечить поддержку. Эти элементы крепления могут быть удалены после инфильтрации или спекания (когда деталь прочнее). Оптимальным решением является увеличение размеров этих элементов в соответствии с рекомендациями на рисунке 2.5. Тонкие элементы, прикрепленные к большим и тяжелым элементам, подвержены высокому риску поломки при обращении (рисунок 2.5, а). Эти области следует укрепить, добавив распорки (рисунок 2.5, б) или увеличив их размер (рисунок 2.5, в).

11 *Диаметр стержня (штифта)* – минимальный диаметральный размер стержня, который технология печати может обеспечить.

FDM: если дизайн содержит стержни диаметром менее 5 мм, добавьте небольшое скругление у основания стержня. Если функция имеет решающее значение, подумайте о том, чтобы включить в конструкцию отверстие в месте расположения штифта, просверлите отверстие до нужного размера и вставьте имеющийся в наличии штифт.

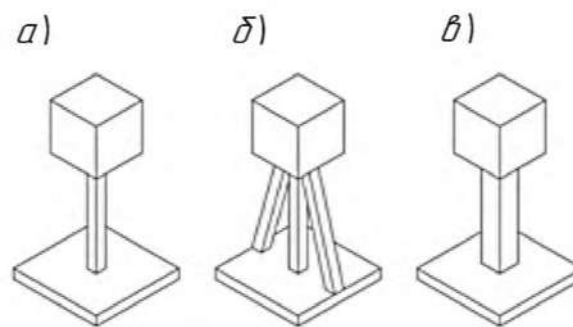


Рисунок 2.5 – Дизайн тонких элементов

12 *Соотношение сторон* – максимальное соотношение между высотой печати по вертикали и сечением детали в горизонтальной плоскости для обеспечения устойчивости напечатанной детали на рабочем столе. К высоким элементам можно добавить дополнительную устойчивость с помощью опорных ребер (аналогично литью под давлением).

13 *Галтели* характеризуются минимальным радиусом.

BJ: все скругления должны по возможности использоваться на всех краях модели. Это гарантирует, что они не будут повреждены в сыром состоянии. Галтели особенно важны для внутренних полостей, чтобы облегчить удаление порошка и обеспечить точность конструкции.

14 *Текст* характеризуется минимальной высотой шрифта для всех направлений.

SLS: рекомендуется шрифт без засечек.

15 *Ось* характеризуется минимальным зазором до поверхности подшипника или опоры.

SLS: нейлон как материал подшипника обеспечивает гладкую посадку с низким коэффициентом трения для соединений с низкой нагрузкой и низкой скоростью. Важно помнить, что порошок должен быть удален после процесса печати, чтобы обеспечить плавный ход соединения.

16 *Взаимосвязанные элементы (замковые элементы)* характеризуются размерной точностью соединения. Включение небольшого радиуса на краях деталей поможет при сборке соединений.

FDM: подходит для создания недорогих прототипов взаимосвязанных соединений, когда точность и долговечность не имеют критического значения.

SLS и MJ: лучше всего подходят для взаимосвязанных соединений благодаря их высокой точности печати и прочности материала.

17 *Резервуары* характеризуются минимальной толщиной стенки.

SLS: нейлон обладает хорошей химической стойкостью и часто применяется в нестандартных конструкциях резервуаров. Для дополнительной водонепроницаемости или при использовании агрессивных жидкостей, таких как топливо или растворители, ёмкость может иметь покрытие или облицовку. Избыток порошка должен быть удален изнутри бака.

SLA: если распечаток не предназначен для использования в качестве функциональной детали, наличие полости в модели значительно сокращает

количество необходимого материала и время печати. При печати полых деталей добавляйте дренажные отверстия, чтобы предотвратить попадание незатвердевшей смолы внутрь готового распечатка. Неотвержденная смола создает дисбаланс давления внутри полых камер.

18 *Живой шарнир (интегрированный шарнир, подшипник изгиба)* характеризуется максимальной толщиной и минимальной длиной тела шарнира. Живой шарнир представляет собой тонкий гибкий шарнир, сделанный из того же материала, что и две жесткие части, которые он соединяет.

FDM: оптимальный дизайн для живого шарнира – это попытаться напечатать шарнир с помощью одной нити термопластика, интегрированной в жесткие секции сборки, как показано на рисунке 2.6. Некоторые FDM-принтеры с двойной экструзией предлагают возможность печатать секцию шарнира из вторичного гибкого материала (например, ТПУ), что еще больше улучшит производительность шарнира и количество циклов до отказа.

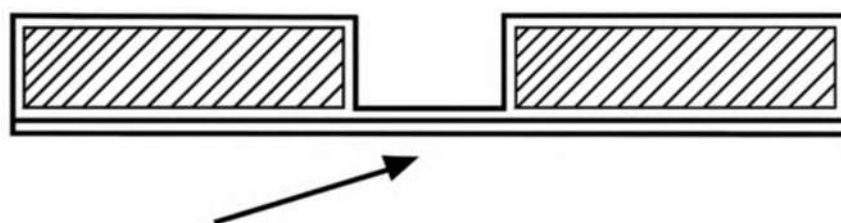


Рисунок 2.6 – Живой шарнир для FDM-печати

SLS: один из немногих методов 3D-печати, который позволяет создавать функциональные живые шарниры. Для получения шарнира отожгите модель путем нагревания (обычно достаточно погрузить её в кипящую воду), а затем согните шарнир вперед и назад.

MJ: обычно жесткие фотополимеры, используемые при струйной обработке материалов, являются хрупкими и не подходят для прототипов, где требуется более 10 циклов. Однако одним из основных преимуществ струйной печати материалов является возможность печати из нескольких материалов. Путем печати части шарнира из гибкого материала можно изготовить живую конструкцию шарнира, которая прослужит большое количество циклов.

19 *Толщина слоя* характеризуется высотой одного слоя при печати, которую обеспечивает технология. Влияние высоты слоя более заметно на кривых и углах и менее заметно на прямых вертикальных стенах из-за послойного характера 3D-печати. Например, чтобы напечатать отверстие вдоль горизонтальной оси, программное обеспечение должно разрезать круглое отверстие на несколько слоев, а затем наложить их друг на друга, создавая негладкий край, похожий на лестницу. Это называется ступенчатым эффектом и становится более заметным на поверхностях с большей кривизной (рисунок 2.7).

Если основной задачей печати является внешний вид, то идеальным вариантом будет выбор более низкой высоты слоя, так как это приведет к более гладкой поверхности. С другой стороны, при 3D-печати функциональной

детали предпочтительнее использовать более высокую высоту слоя, поскольку это приведет к экономии времени и средств, а также к улучшению механических характеристик.

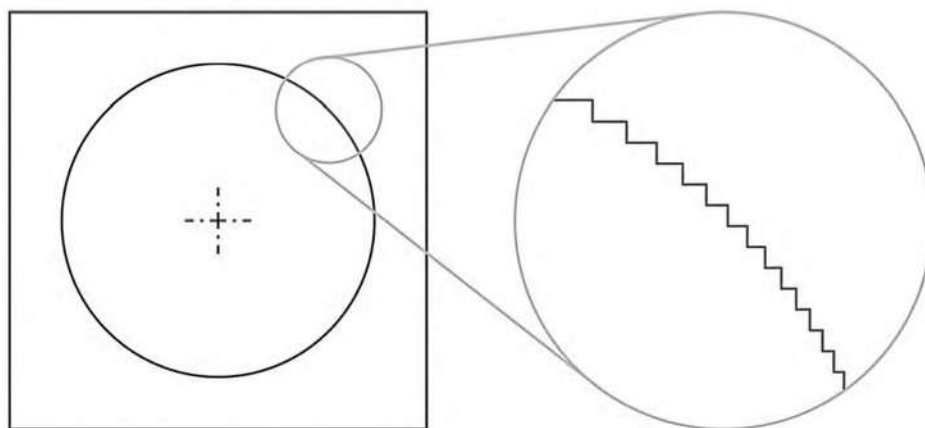


Рисунок 2.7 – Ступенчатый эффект

FDM: напечатанные детали из PLA с толщиной слоя 300 мкм, имеют прочность примерно на 20 % выше, чем детали, напечатанные толщиной 100 мкм.

20 Резьба характеризуется возможностью применения разных способов формирования резьбы. Способы формирования резьбы на деталях рассмотрены ниже.

Резьбовые вставки. Популярный метод, используемый регулярно, который обеспечивает прочное соединение металла с металлом, но требует дополнительных компонентов и установки. Два типа вставок лучше всего подходят для 3D-печати: термоусадочные вставки и врезные вставки.

Закладная гайка. Быстрый способ крепления компонентов. Нужен точный дизайн и печать. Часто для определения оптимальных размеров бобышки гайки требуется несколько итераций. Печать небольших тестовых деталей для определения идеальных размеров может сэкономить время и материальные затраты.

Саморезы. Один из способов крепления деталей, который не подходит для повторной разборки. Для пластика можно использовать специальные саморезы, которые ограничивают радиальное напряжение в отверстиях, напечатанных на 3D-принтере, снижая вероятность вздутия, расслоения или разрушения.

Нарезание резьбы. Нарезание резьбы дает свободу дизайна, однако важна правильная процедура нарезания резьбы.

Резьба на распечатке. Не подходит для небольших размеров резьбы (менее M5) и требует высокой детализации/разрешения принтера.

FDM: как правило, минимальная толщина стенки вокруг резьбы должна соответствовать диаметру крепежного элемента (например, для крепежного элемента M5 требуется минимальная толщина стенки 5 мм вокруг резьбового отверстия). Если толщина стенки слишком мала, детали могут вздуться и деформироваться из-за дополнительного напряжения, а в некоторых случаях может произойти расслоение или разрушение. Высота слоя – важный параметр

при печати резьбы. Ориентировочно, резьба больше M12 может быть успешно напечатана слоями толщиной 0,2 мм, а резьба меньшего размера должна быть напечатана более тонкими слоями.

SLS: шероховатая поверхность, полученная при печати, приводит к повышенному трению и может вызвать некоторые проблемы при соединении резьбовых деталей вместе. Можно сверлить и нарезать резьбу на нейлоне. Идеальным решением является использование нейлона только для одного из элементов резьбовых соединений (либо гайки, либо болта).

21 *Усадка* характеризуется процентным увеличением габаритных размеров модели на этапе предпечатного анализа. С учетом того, что это увеличение не повлияет на конструкцию детали.

SLA: вероятно для неподдерживаемых пролетов и выступов.

SLM, DMLS: технологии высоким риском усадки. Чтобы снизить вероятность этого, используются распорки и поддержки.

MJ: не является проблемой.

22 *Деформация* характеризуется склонностью к изменению формы и размеров под действием температурного воздействия и других факторов. Деформациями называются изменения размеров детали при сохранении её формы, а короблением – изменение формы детали (её может изогнуть, завернуть пропеллером и т. д.).

FDM: большие плоские области (например, характерные для прямоугольной коробки) более подвержены короблению, и их следует по возможности избегать. Тонкие выступающие элементы также склонны к короблению. Коробления можно избежать, добавив расходный материал на краю тонкого элемента, чтобы увеличить площадь, соприкасающуюся с платформой. Острые углы деформируются чаще, чем закругленные формы, поэтому добавление скруглений в дизайн является хорошей практикой. Различные материалы более подвержены деформации. ABS обычно более чувствителен к деформации, чем PLA или PETG.

SLA: одной из самых больших проблем, связанных с точностью деталей, изготовленных с помощью SLA, является скручивание (керлинг). Керлинг похож на деформацию в FDM. В процессе отверждения смола немного сжимается под воздействием источника света принтера. При значительной усадке между новым слоем и ранее затвердевшим материалом возникают большие внутренние напряжения, что приводит к скручиванию детали. Поддержка при печати важна когда нужно закрепить подверженные риску участки распечатка на рабочем столе и снизить вероятность скручивания. Ориентация деталей и ограничение больших плоских слоев также важны. Чрезмерное отверждение (например, подвергание детали воздействию прямых солнечных лучей после печати) также может вызвать скручивание. Лучший способ предотвратить скручивание – помнить об этом в процессе проектирования.

SLS: чтобы уменьшить вероятность коробления, которому подвержены большие плоские поверхности, рассмотрите возможность добавления ребер для увеличения жесткости. Оптимальная ориентация детали на этапе печати также может помочь.

SLM, DMLS: технологии высоким риском деформации. Чтобы снизить вероятность этого, используются распорки и поддержки.

MJ: не является проблемой.

23 *Многоцветность* характеризуется возможностью 3D-печати различными цветами в пределах одной детали или создания полноцветных презентационных прототипов.

MJ: высокий уровень точности, гладкая поверхность и варианты цвета делают струйную печать популярным выбором для презентаций и прототипов. Струйная обработка материалов – единственная технология 3D-печати, которая позволяет создавать полноцветные многоцветные распечатки. При использовании голубого, пурпурного, желтого, черного и белого материалов (СМΥК) доступен полный набор цветовых вариантов. Этого можно добиться в процессе настройки печати, назначив частям цветовые коды RGB, или можно сделать в процессе САПР, раскрасив деталь. Текстурные слои также могут быть применены к детали. С помощью этого метода к частям можно добавить такие элементы, как мазки кисти, текстура древесины и градиентные цвета. Возможность многоцветной печати MJ означает, что эта технология позволяет создавать физические модели метода конечных элементов (МКЭ, FEA). Если анализ МКЭ выполняется на детали виртуально, полученный цветовой шаблон можно экспортировать в виде текстуры или слоя и распечатать непосредственно на детали, создавая видимый цветовой шаблон МКЭ на физическом образце для просмотра. Это дает инженерам и конструкторам уникальное представление о том, как деталь будет работать под нагрузкой.

24 *Мультиматериальная печать* характеризуется возможностью печати несколькими материалами в одном цикле.

MJ: некоторые принтеры способны печатать как резиновые, так и жесткие компоненты на одном столе, в одной и той же детали, а также в виде сборки для формирования новых свойств материала (мягкий резиноподобный материал и твердый жесткий материал можно смешивать для получения различных уровней жесткости резины). При проектировании для этого важно создавать сборки в САПР, чтобы разные детали можно было выбирать в качестве разных материалов во время подготовки к печати. При сопряжении этих собранных деталей в САПР не должно быть нахлеста тел. Следует использовать сопряжение с зазором «0 мм». Это позволит частям правильно стыковаться. Любые перекрывающиеся тела в модели САПР будут игнорироваться при печати, что приведет к заполнению области основным материалом сборки.

25 *Текстура* характеризуется возможностью получения глянцевой и матовой поверхности.

FDM: верхняя поверхность сглаживается экструзионным наконечником; поверхность, контактирующая с печатной платформой, обычно будет глянцевой, а поверхности над опорными конструкциями будут иметь следы поддержки.

SLA: нижние поверхности будут иметь метки поддержки и потребуют последующей обработки, а верхние поверхности будут гладкими и не будут иметь меток поддержки.

SLS, BJ: детали будут иметь более зернистую поверхность на нижней поверхности.

MJ: настройка матовости добавит тонкий слой поддержки по всей детали, независимо от ориентации или требований. Глянцевая настройка будет использовать вспомогательный материал только там, где это необходимо для построения модели (выступы, сквозняки, полости и т. д.). Преимущества печати с глянцевой текстурой заключаются в прочности на тонких стенах, эстетике гладкой и готовой детали и снижении расхода материала на сборку. К недостаткам можно отнести неравномерную отделку деталей и незначительное закругление острых кромок и углов на верхних поверхностях. Преимуществами печати с матовой текстурой являются точность детали в целом, а также однородность покрытия. Недостатки включают дополнительные требования к материалу, дополнительное время очистки и более мягкую поверхность. Эта более мягкая поверхность иногда может привести к слабости мелких или тонких элементов.

26 *Водонепроницаемость* характеризуется тем при достижении каких значений гидростатического давления материал теряет способность не впитывать и не пропускать через себя воду.

SLA: объекты являются непрерывными, независимо от того, цельные они или имеют внутренние каналы. Водонепроницаемость важна в случаях, когда нужно контролировать и прогнозировать воздействие потоков воздуха или жидкости.

27 *Изотропность* характеризуется одинаковостью физических свойств во всех направлениях. Поскольку 3D-печать создает модели слой за слоем, прочность готовых деталей может отличаться в зависимости от ориентации детали относительно процесса печати: для осей X, Y и Z будут характерны различные свойства.

FDM: процесс анизотропный за счет подхода к созданию различных слоев в процессе изготовления. Эта анизотропия ограничивает возможности применения технологии или требует внесения дополнительных изменений в конструкцию модели для ее компенсации. Прочность связи между различными слоями всегда ниже базовой прочности материала: их прочность по оси Z всегда меньше, чем их прочность в плоскости XY. По этой причине важно учитывать ориентацию деталей при проектировании деталей для FDM. Влияния нагрузок при их различных направлениях представлены на рисунке 2.8.

SLA: достижение изотропии деталей основано на ряде факторов, которые можно строго контролировать за счет интеграции химического состава материалов с процессом печати. Во время печати компоненты полимеров образуют ковалентные связи, но при создании последующих слоев модель остается в «незрелом» состоянии частичной реакции. В незрелом состоянии смола сохраняет полимеризуемые группы, которые могут образовывать связи между слоями, придавая модели изотропические и водонепроницаемые свойства после окончательного отверждения. На молекулярном уровне между плоскостями X, Y и Z нет различий. Это позволяет получить модели с предсказуемыми механическими характеристиками, критически важными для таких целей, как

производство кондукторов и крепежных приспособлений и готовых деталей, а также функциональное прототипирование.

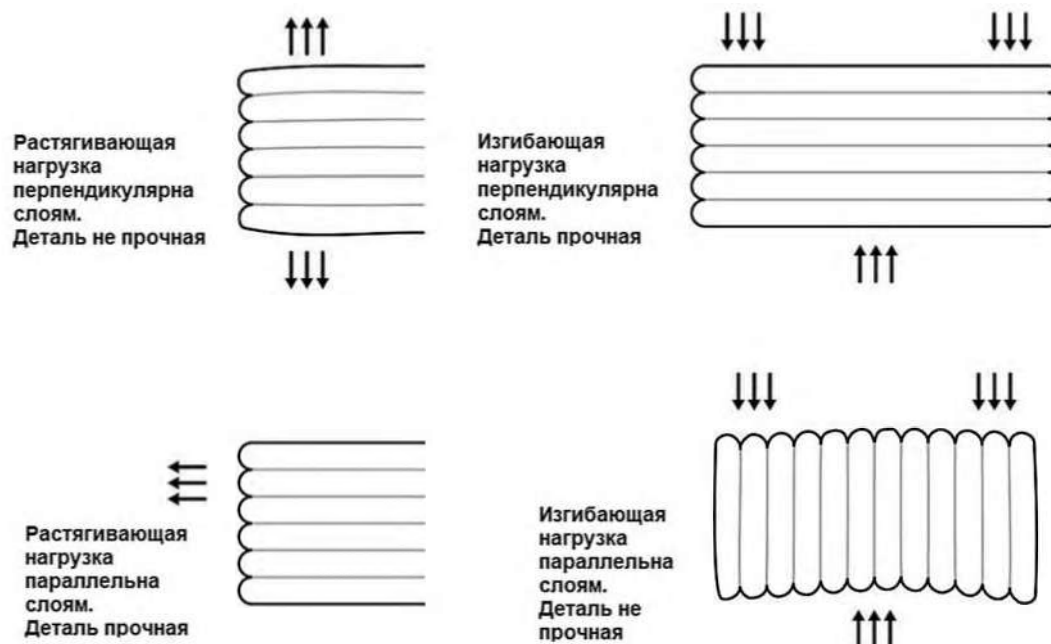


Рисунок 2.8 – Анизотропия FDM-печати

28 *Ориентация* характеризуется пространственным расположением модели при печати для получения поверхности с требуемым качеством.

29 *Размерная точность* – ожидаемая точность размеров и допусков конкретной технологии. Допуск детали в направлении печати составляет: $\pm$ толщина одного слоя.

2.4 Порядок выполнения лабораторной работы

- 1 Получить чертеж или CAD-модель детали у преподавателя.
- 2 Проанализировать информацию о детали: размеры и допуски, сложность геометрии, материал, качество поверхности, функциональное назначение.
- 3 Проанализировать и составить цепочку подготовки модели к печати с учетом выбранного типа технологии аддитивного производства. Проанализировать возможную оптимизацию конструкции детали и условий печати на основании правил дизайна.
- 4 Оформить отчёт.

2.5 Содержание отчета

Отчёт по лабораторной работе выполняется на отдельных листах бумаги или в тетради. Он должен содержать следующее:

- название лабораторной работы;
- цель работы;

- анализ технологичности конструкции детали;
- технологическая цепочка подготовки модели к печати;
- предложения по оптимизации конструкции детали и условий печати на основании правил дизайна;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Как и для каких целей производится оптимизация CAD-модели? Какие при этом применяются инструменты проектирования?
- 2 Какие три основные стратегии построения трехмерных моделей деталей для 3D-печати Вы знаете?
- 3 Что такое решетчатые структуры?
- 4 Что такое оптимизация топологии?
- 5 Что такое порождающее моделирование (генеративный дизайн)?
- 6 Что такое правила дизайна для аддитивного производства? Зачем они необходимы конструктору?
- 7 Что такое поддержки? Какие основные правила дизайна поддержек для технологий аддитивного производства Вы знаете?
- 8 Какие способы формирования резьбы на деталях в условиях аддитивного производства Вы знаете?
- 9 Что такое изотропность? Как анизотропность 3D-распечатков влияет на дизайн деталей в условиях аддитивного производства?
- 10 Какую размерную точность обеспечивают технологии аддитивного производства?

3 Трехмерное сканирование и основы работы с 3D-сканером модели EinScan-Pro

Цель работы: освоение методики трехмерного сканирования деталей на основе метода структурированного света с использованием 3D-сканера модели EinScan-Pro.

3.1 Оборудование, инструменты и приборы

- 1 Объекты исследования: твердотельные детали.
- 2 3D-сканер модели EinScan-Pro, штатив, поворотный стол, текстурная камера, набор маркеров, калибровочная пластина.
- 3 Рабочая станция или ноутбук.
- 4 Программное обеспечение EinScan-Pro.
- 5 Программное обеспечение SolidWorks.

3.2 Сканирование структурированным светом

3D-сканер – периферийное устройство, анализирующее форму объекта и на основе полученных данных создающее его 3D-модель.

3D-сканеры делятся на два типа по методу сканирования.

1 Контактный.

Такой метод основывается на непосредственном контакте сканера с исследуемым объектом.

2 Бесконтактный.

2.1 Активные сканеры: излучают на объект некоторые направленные волны и обнаруживают его отражение для анализа: чаще всего используется светодиодный или лазерный луч, реже – рентгеновские лучи, инфракрасное излучение или ультразвук.

2.2 Пассивные сканеры: не излучают ничего на объект, а полагаются на обнаружение отражённого окружающего излучения. Большинство сканеров такого типа обнаруживает видимый свет – легкодоступное окружающее излучение.

Существует пять основных методов сбора данных при 3D-сканировании.

1 Фотограмметрия. Программное обеспечение объединяет множество фотографий объекта, сделанных с различных ракурсов, и определяет координаты с помощью триангуляции.

2 Лазер. Сканер излучает лазерный луч. Луч отражается от объекта и возвращается в датчик, который определяет расстояние до поверхности.

3 Координатно-измерительные машины (КИМ). КИМ используют шуп, который контактирует с поверхностью объекта.

4 Компьютерная томография. Метод неразрушающего послойного исследования строения предмета, основанный на измерении и сложной компьютерной обработке рентгеновского излучения проходящего сквозь объект.

5 Структурированный свет. Проектор излучает световые узоры (паттерны), которые деформируются при отражении от объекта. Затем одна или несколько камер распознают 3D-геометрию с помощью алгоритмов триангуляции, как показано на рисунке 3.1.

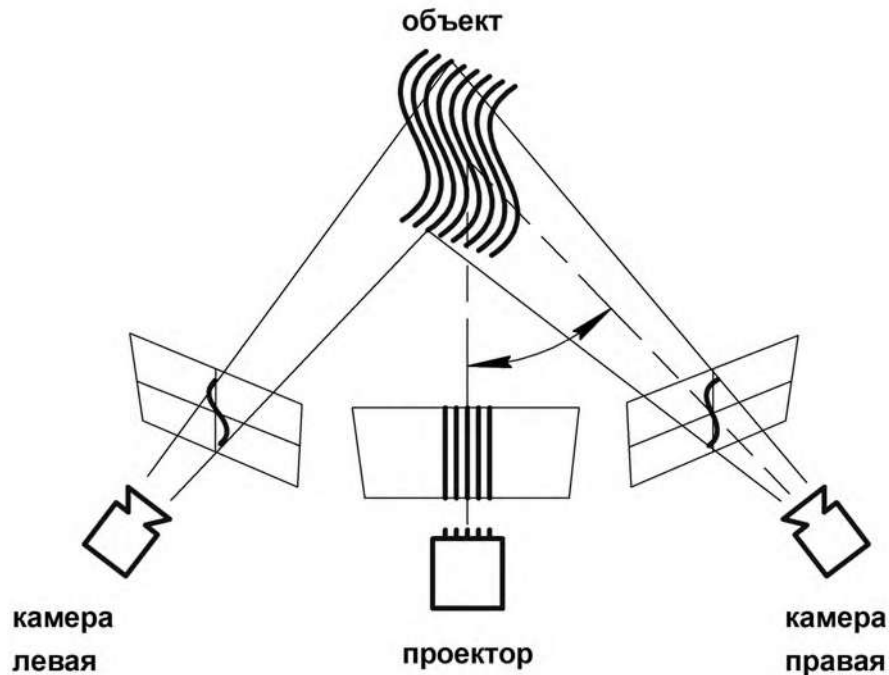


Рисунок 3.1 – Принцип сканирования структурированным светом

Процесс 3D-сканирования структурированным светом в общем случае представлен на рисунке 3.2 и состоит из следующих этапов:

- сканер собирает данные в виде точек, которые состоят из координат XYZ и, если есть такая опция, информацию о цвете (текстуре) и программное обеспечение 3D-сканера преобразует данные в облако точек;
- программное обеспечение 3D-сканера соединяет точки, создавая полигональную сетку;
- программное обеспечение CAD-проектирования преобразует файл полигональной сетки в файл твердотельной модели.

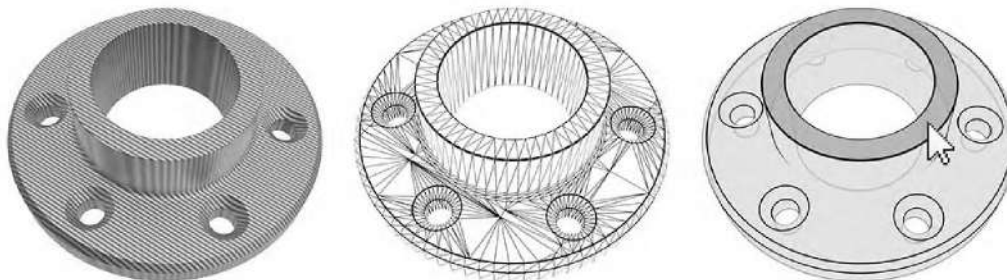


Рисунок 3.2 – Этапы 3D-сканирования

3.3 3D-сканер модели EinScan-Pro

Общий вид комплекта 3D-сканера модели EinScan-Pro представлен на рисунке 3.3.



Рисунок 3.3 – Комплект 3D-сканера EinScan-Pro

3D-сканер модели EinScan-Pro от компании SHINING 3D обладает следующим набором технических характеристик.

- 1 Режим работы: ручное HD-сканирование.
 - 1.1 Область сканирования: 0,03...4 м.
 - 1.2 Скорость сканирования: 15 кадров/с.
 - 1.3 Точность сканирования: 0,1 мм.
- 2 Режим работы: ручное быстрое сканирование.
 - 2.1 Область сканирования: 0,15...4 м.
 - 2.2 Скорость сканирования: 10 кадров/с.
 - 2.3 Точность сканирования: 0,3 мм.
- 3 Режим работы: автоматическое сканирование.
 - 3.1 Область сканирования: 0,03...0,15 м.
 - 3.2 Скорость сканирования: менее 2 с (один проход).
 - 3.3 Точность сканирования: 0,05 мм (один проход).
- 4 Режим работы: свободное сканирование.
 - 4.1 Область сканирования: 0,03...4 м.
 - 4.2 Скорость сканирования: менее 2 с (один проход).
 - 4.3 Точность сканирования: 0,05 мм (один проход).
- 5 Размер одного снимка: 210 × 150 мм.
- 6 Источник света: LED (белый).
- 7 Количество камер: 2 + 1 (две основные и одна камера для захвата текстур и цвета).
- 8 Поддерживаемые форматы: OBJ, STL, ASC, PLY, 3MF, P3.

9 Сканирование специальных объектов: для сканирования прозрачных, блестящих, темных объектов требуется применение специального спрея.

10 Дополнительное оборудование: калибровочная платформа, поворотный стол.

3.4 Порядок выполнения лабораторной работы

1 Получить деталь у преподавателя.

2 Проанализировать конструкцию детали: размеры, сложность геометрии, текстуру, труднодоступные участки. Подготовить деталь к 3D-сканированию.

3 Выполнить калибровку 3D-сканера модели EinScan-Pro, выполняя пошаговые рекомендации программного обеспечения EinScan-Pro.

4 В программном обеспечении EinScan-Pro создать новый проект, определить параметры сканирования и выполнить 3D-сканирование детали. Сформировать итоговый файл.

5 Проанализировать полученные результаты.

6 Оформить отчёт.

3.5 Содержание отчета

Отчёт по лабораторной работе выполняется на отдельных листах бумаги или в тетради. Он должен содержать следующее:

- название лабораторной работы;
- цель работы;
- порядок калибровки 3D-сканера EinScan-Pro;
- анализ конструкции и порядок подготовки детали к 3D-сканированию;
- порядок 3D-сканирования детали и работа с программным обеспечением EinScan-Pro;
- ответы на контрольные вопросы;
- анализ полученных результатов и выводы.

Контрольные вопросы

1 Что такое 3D-сканер? Какие основные элементы его конструкции Вы знаете?

2 Как работают пассивные сканеры?

3 Какие основные методы сбора данных при 3D-сканировании Вы знаете? В чем их отличие?

4 На чем основан метод структурированного света?

5 Какие режимы сканирования 3D-сканера модели EinScan-Pro Вы знаете?

4 Изготовление деталей методом FDM-печати и основы работы на 3D-принтере

Цель работы: освоение методики 3D-печати на основе технологии FDM с использованием 3D-принтера.

4.1 Оборудование, инструменты и приборы

- 1 Объекты исследования: детали из термопластиков.
- 2 3D-принтер технологии FDM, набор филамента (ABS, PLA, PETG и др.), набор сопел.
- 3 Рабочая станция или ноутбук.
- 4 Программное обеспечение для слайсинга (Sli3er, Cura и др.).
- 5 Программное обеспечение для эмуляции 3D-печати (Repetier-Host и др.).
- 6 Программное обеспечение для 3D-моделирования (SolidWorks, Компас-3D и др.).

4.2 FDM-печать: процесс и оборудование

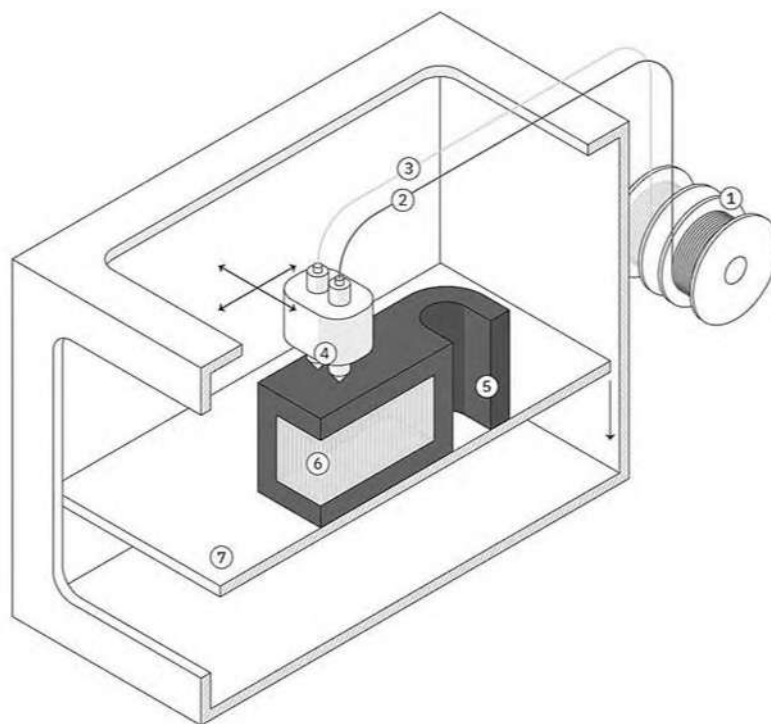
Моделирование методом послойного наплавления (FDM), также известное как изготовление методом плавления филамента (FFF), представляет собой процесс аддитивного производства, относящийся к категории экструзии материала. В FDM-печати объект создается путем выборочного нанесения расплавленного материала по заданному пути, слой за слоем, как показано на рисунке 4.1. Используемые материалы представляют собой термопластичные полимеры, которые выпускаются в форме нити (филамента).

Процесс FDM-печати заключается в том, что сначала в принтер загружается катушка термопластичной нити (филамента). Как только сопло достигает желаемой температуры, филамент подается в сопло через экструдер, где он плавится.

Экструдер прикреплен к трехосевой системе перемещения, которая позволяет рабочему органу перемещаться в осях X, Y и Z. Расплавленный материал подается тонкими полосками и укладывается слой за слоем в заранее определенных местах, где он охлаждается и затвердевает. Для ускорения охлаждения к экструдеру могут быть прикреплены кулеры (вентиляторы).

Для заполнения области построения требуется несколько проходов, аналогично закрашиванию прямоугольника маркером. Когда слой готов, платформа построения перемещается вниз (или в некоторых конфигурациях 3D-принтеров экструдер перемещается вверх) и наносится новый слой. Этот процесс повторяется до тех пор, пока деталь не будет завершена.

Большинство FDM-принтеров позволяют регулировать несколько параметров процесса. К ним относятся температура как сопла, так и платформы построения, скорость построения, высота слоя и скорость охлаждающего кулера.



1 – катушка филамента; 2 – главный филамент; 3 – филамент поддержек; 4 – экструдер; 5 – деталь; 6 – поддержки; 7 – платформа построения

Рисунок 4.1 – Принцип работы и конструкция FDM-принтера

Чтобы сократить время печати и сэкономить материал, детали при FDM-печати обычно не печатаются сплошными. Вместо этого внешний периметр, называемый оболочкой, трассируется с использованием нескольких проходов, а внутренний, называемый заполнением, заполняется внутренней структурой с низкой плотностью.

4.3 FDM-печать: материалы

Одной из сильных сторон FDM-печати является широкий спектр доступных для использования материалов, который включает в себя обычные термополимеры (такие как PLA и ABS), конструкционные материалы (такие как PA, TPU и PETG) и термополимеры с высокими эксплуатационными характеристиками (такие как PEEK и PEI).

Преимущества и недостатки материалов FDM-печати.

ABS:

- + хорошая прочность, стойкость к истиранию и термостойкость;
- + возможна постобработка парами ацетона для придания блеска;
- + постобработка: шлифование, полирование, покраска;
- + ацетон также можно использовать в качестве сильного клея;
- более подвержен деформации;
- чувствительный к ультрафиолетовому излучению;
- запах при печати и потенциально высокие выбросы дыма.

PLA:

- + отличное визуальное качество;
- + легко печатать детали из материала;
- + биоразлагаемый и отсутствие запаха;
- + постобработка: шлифование, полирование, покраска;
- + хорошая устойчивость к ультрафиолетовому излучению;
- низкая ударная вязкость;
- низкая влагостойкость;
- плохо склеивается.

Nylon (PA):

- + высокая прочность и износостойкость;
- + хорошая химическая стойкость;
- низкая влагостойкость;
- потенциально высокие выбросы дыма.

PETG:

- + безопасный для пищевых продуктов;
- + хорошая прочность и хорошая стойкость к истиранию;
- + легко печатать детали из материала;
- + высокая влагостойкость и химическая стойкость;
- + перерабатываемый;
- + постобработка: шлифование, полирование, покраска;
- тяжелее, чем PLA и ABS.

TPU:

- + очень гибкий;
- + хорошая стойкость к истиранию;
- + хорошая стойкость к маслам и жирам;
- затруднена постобработка;
- затруднена печать деталей с высокой точностью;
- плохо склеивается.

PEI:

- + отличная прочность по отношению к весу;
- + отличная огнестойкость и химическая стойкость;
- высокая стоимость.

PC:

- + возможно обеззараживание (стерилизация);
- + простота последующей обработки (шлифование);
- чувствительный к ультрафиолетовому излучению.

4.4 FDM-печать: постобработка

3D-печать FDM лучше всего подходит для экономичных прототипов, производимых в короткие сроки. Линии слоев обычно присутствуют на распечатках FDM, что делает постобработку необходимым этапом, если требуется гладкая поверхность детали. Некоторые методы постобработки также

могут повысить прочность распечатков, помогая уменьшить анизотропное поведение деталей FDM.

Основные методы постобработки после FDM-печати:

- удаление поддержки (support removal): стандартные и растворимые;
- шлифование (sanding) и полировка (polishing);
- холодная сварка (cold welding);
- заполнение пропусков (gap filling);
- грунтовка и покраска (priming and painting);
- сглаживание парами растворителя (vapor smoothing);
- погружение в растворитель (dipping);
- эпоксидное (epoxy coating) и металлическое покрытие (metal plating).

4.5 Порядок выполнения лабораторной работы

1 Получить чертеж или CAD-модель детали у преподавателя.

2 Проанализировать информацию о детали: размеры и допуски, геометрию, материал, функциональное назначение, качество поверхности.

3 Выполнить оптимизацию конструкции детали – задать параметры печати и произвести операцию слайсинга – проверить управляющую программу в эмуляторе – при необходимости внести корректировки – загрузить управляющую программу в 3D-принтер – при необходимости заменить материал филамента – запустить печать – по окончании печати произвести анализ и дать рекомендации по постобработке детали.

4 Оформить отчёт.

4.6 Содержание отчета

Отчёт по лабораторной работе выполняется на отдельных листах бумаги или в тетради. Он должен содержать следующее:

- название и цель лабораторной работы;
- анализ конструкции и порядок подготовки детали к 3D-печати;
- порядок FDM-печати детали;
- рекомендации по постобработке детали после 3D-печати;
- ответы на контрольные вопросы;
- анализ полученных результатов и выводы.

Контрольные вопросы

1 Как работает принтер для FDM-печати?

2 Какие материалы применяются для FDM-печати?

3 Что такое филамент?

4 Какие основные методы постобработки деталей после FDM-печати Вы знаете?

5 Какие ограничения присущи 3D-печати по технологии FDM?

5 Изготовление металлических деталей методом SLM-печати и основы работы на 3D-принтере модели EP-M250

Цель работы: освоение методики 3D-печати на основе технологии SLM с использованием 3D-принтера модели EP-M250.

5.1 Оборудование, инструменты и приборы

- 1 Объекты исследования: детали из металлического порошка.
- 2 3D-принтер технологии SLM модели EP-M250, металлический порошок (316L и др.).
- 3 Рабочая станция или ноутбук.
- 4 Программное обеспечение для слайсинга (EPHatch и др.).
- 5 Программное обеспечение для 3D-моделирования (SolidWorks, Компас-3D и др.).

5.2 SLM-печать: процесс и оборудование

Селективное лазерное плавление (SLM) – это процесс аддитивного производства металлов, который относится к семейству 3D-печати методом сплавления в порошковом слое. Технология использует лазер для сканирования и выборочного плавления частиц металлического порошка, связывая их вместе и создавая деталь слой за слоем. Материалы, используемые в процессе, представляют собой металлы в гранулированной форме как показано на рисунке 5.1. SLM использует металлические порошки с одной температурой плавления и полностью расплавляет частицы. SLM-печать используется в промышленности для создания конечных инженерных продуктов.

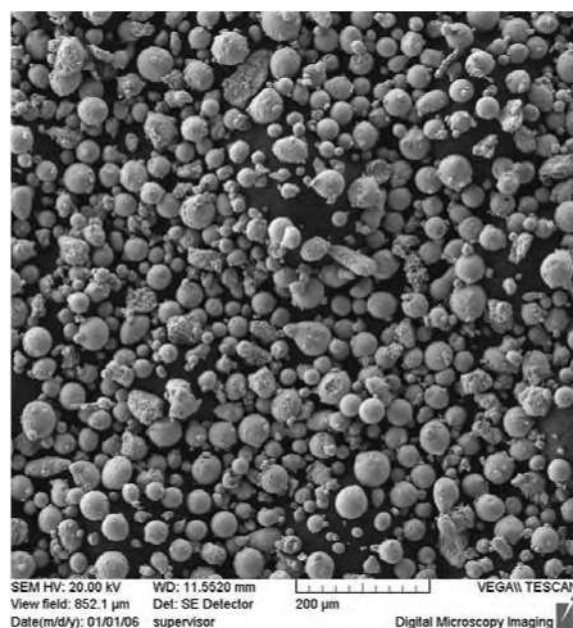
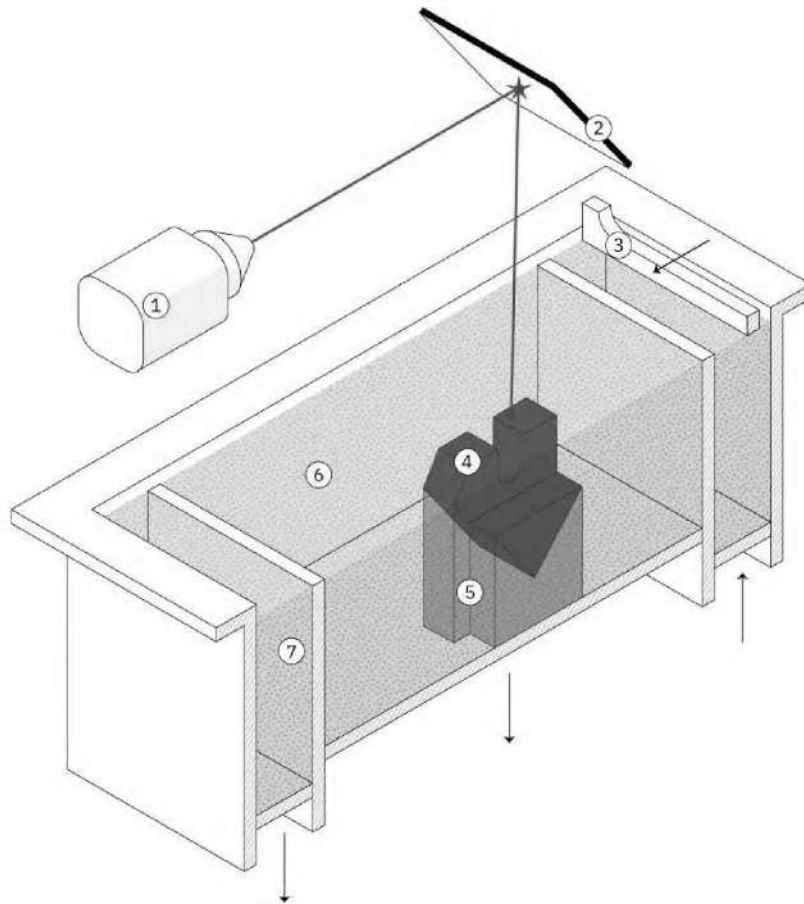


Рисунок 5.1 – Частицы металлического порошка для SLM-печати

В начале процесса подготовки печати на SLM-принтере (рисунок 5.2) камера сборки заполняется инертным газом (аргон, азот), чтобы свести к минимуму окисление металлического порошка, а затем нагревается до оптимальной температуры. Нагреву подлежит и платформа построения.



1 – лазер; 2 – система сканирующих зеркал; 3 – ракель (рекоутер); 4 – деталь; 5 – поддержки; 6 – металлический порошок; 7 – пересыпной бункер

Рисунок 5.2 – Принцип работы и конструкция SLM-принтера

Тонкий слой металлического порошка распределяется по платформе построения, и мощный лазер сканирует поперечное сечение компонента, расплавляя металлические частицы вместе и создавая следующий слой.

Когда процесс сканирования завершен, платформа построения перемещается вниз на один слой толщины, а ракель (рекоутер) наносит ещё один тонкий слой металлического порошка. Процесс повторяется до тех пор, пока печать не будет завершена.

Когда процесс печати закончен, детали полностью инкапсулируются в металлический порошок. В отличие от процесса сплавления полимерного порошкового слоя (например, SLS), детали прикрепляются к платформе сборки через опорные конструкции. Опора в 3D-печати металлом изготавливается из того же материала, что и деталь, и всегда необходима для уменьшения

воздействия деформаций, которые могут возникнуть из-за высоких температур обработки.

5.3 SLM-печать: материалы

SLM-печать позволяет производить детали из широкого спектра металлов и металлических сплавов, включая алюминий, нержавеющую сталь, титан, кобальт-хром и инконель. Эти материалы удовлетворяют потребности большинства промышленных применений, от аэрокосмической до медицины. Драгоценные металлы, такие как золото, платина, палладий и серебро, также могут быть обработаны, но их применение ограничено и в основном ограничивается изготовлением ювелирных изделий. Стоимость металлического порошка очень высока. По этой причине минимизация объема деталей и потребности в поддержках являются ключом к максимально возможному снижению стоимости. Ключевым преимуществом 3D-печати металлом является его совместимость с высокопрочными материалами, такими как никелевые или кобальт-хромовые суперсплавы, которые очень трудно обрабатывать традиционными методами производства.

Преимущества и недостатки материалов SLM-печати.

Алюминиевые сплавы:

- + хорошие механические и термические свойства;
- + низкая плотность;
- + хорошая электропроводность;
- низкая твердость.

Нержавеющая сталь и инструментальная сталь:

- + высокая износостойкость и твердость;
- + хорошая пластичность и свариваемость.

Титановые сплавы:

- + устойчивость к коррозии;
- + отличное соотношение прочности и веса;
- + низкое тепловое расширение;
- + биосовместимость.

Кобальт-хромовые суперсплавы:

- + отличная износостойкость и коррозионная стойкость;
- + отличные свойства при повышенных температурах;
- + очень высокая твердость;
- + биосовместимость.

Никелевые суперсплавы (инконель):

- + отличные механические свойства;
- + высокая коррозионная стойкость;
- + термостойкость до 1200 °C и применение в экстремальных условиях.

Драгоценные металлы:

- + использование в ювелирном деле.

5.4 SLM-печать: постобработка

Этап 3D-печати – это только начало производственного процесса изготовления деталей по технологии SLM. После завершения печати требуется несколько (обязательных или необязательных) этапов постобработки, прежде чем детали будут готовы к использованию. К обязательным этапам постобработки относятся:

- снятие внутренних напряжений: из-за очень высоких температур обработки во время печати возникают внутренние напряжения. Перед любой другой операцией их необходимо снять с помощью термической обработки;

- удаление деталей: при SLM-печати детали по существу привариваются к платформе построения. Здесь применяется резка на проволочном электроэрозионном станке, резка на ленточнопильном станке, резка на дисково-отрезном станке;

- удаление поддержки: поддержки в SLM всегда требуются для уменьшения коробления и деформаций, возникающих во время печати. Поддержки удаляются вручную или обрабатываются на станках с ЧПУ.

Для соответствия технической документацией часто требуются дополнительные этапы постобработки. К ним могут относиться:

- обработка на станках с ЧПУ: обработка используется в качестве чистового этапа когда требуются более жесткие допуски, чем стандарт $\pm 0,1$ мм. Для данного типа постобработки применяются минимальные припуски;

- термическая обработка: для улучшения свойств материала детали можно использовать термическую обработку или горячее изостатическое прессование (HIP);

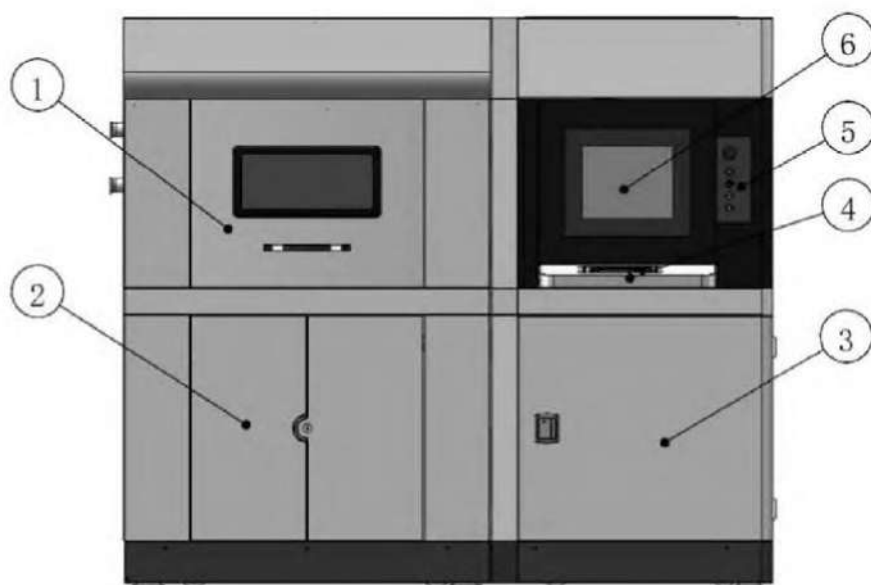
- сглаживание (полировка): для некоторых применений требуется более гладкая поверхность, чем стандартная шероховатость $Ra = 10$ мкм при SLM-печати. Обработку можно производить на универсальных станках и станках с ЧПУ, вибро- или химической полировкой, галтованием, пескоструйной обработкой и др.

5.5 3D-принтер технологии SLM-модели EP-M250: конструкция

EP-M250 – это промышленная установка для селективного лазерного плавления, выпущенная компанией E-Plus 3D (входит в концерн SHINING 3D). Машина плавит порошок слой за слоем с помощью высокоэнергетического лазера и формирует его в твердое металлическое тело на основе принципов послойного производства.

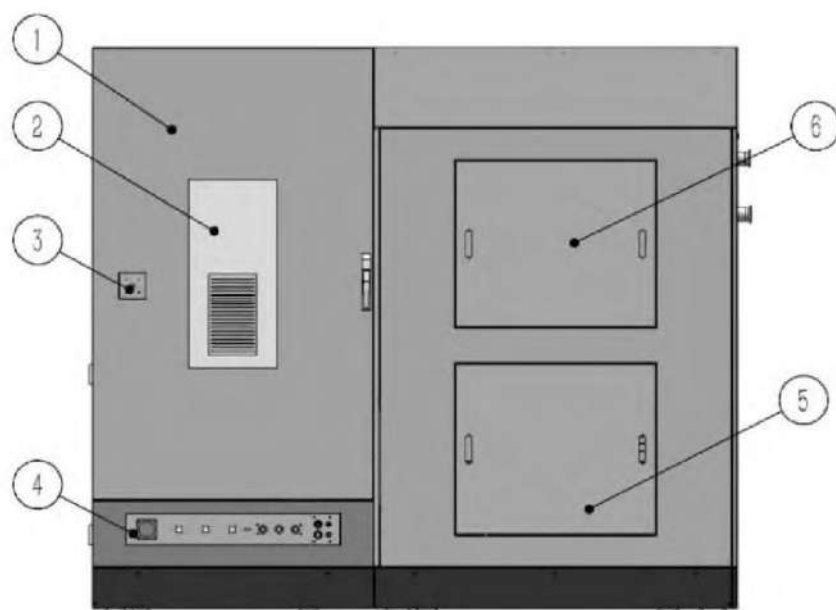
3D-принтер может использоваться для обработки промышленных изделий в таких областях, как аэрокосмическая промышленность, медицинские имплантаты, зубные протезы, пресс-формы, инструменты, детали специальной формы, ювелирные изделия и т. д. Комплекс EP-M250 также может использоваться в научных исследованиях и разработках, в образовании и в других отраслях.

Внешний вид 3D-принтера модели EP-M250 (установка подготовки газа не показана) представлен на рисунках 5.3–5.5.



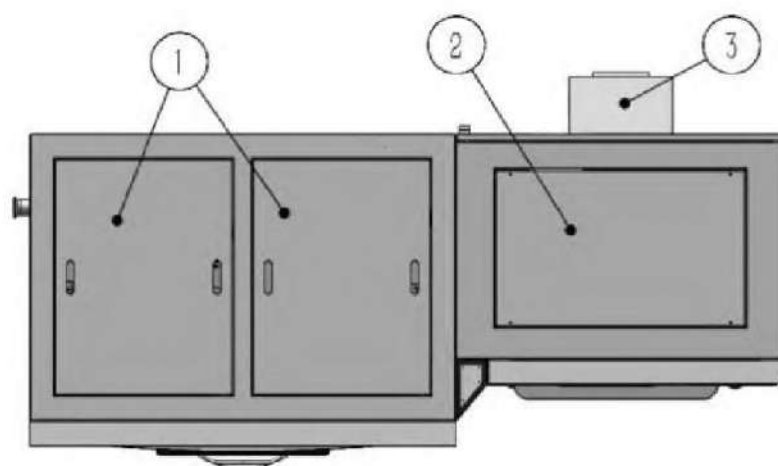
1 – передняя дверь верхней камеры; 2 – передняя дверь нижней камеры; 3 – передняя дверь электрического шкафа управления; 4 – операционная клавиатура; 5 – панель подключения управления; 6 – главный экран управления

Рисунок 5.3 – Внешний вид 3D-принтера модели EP-M250 (фронтальный вид)



1 – главная дверь электрического шкафа управления; 2 – кондиционер; 3 – главный выключатель питания; 4 – модуль электрического соединения; 5 – нижняя дверь главной машины; 6 – верхняя дверь главной машины

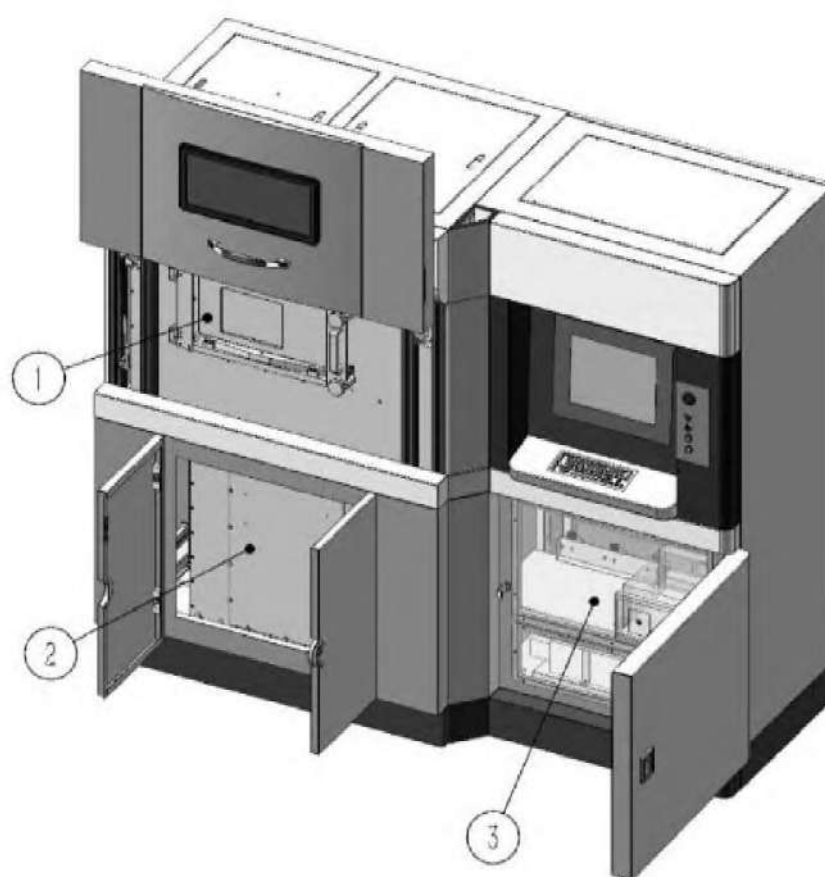
Рисунок 5.4 – Внешний вид 3D-принтера модели EP-M250 (задний вид)



1 – верхняя крышка; 2 – верхняя крышка электрического шкафа; 3 – кондиционер

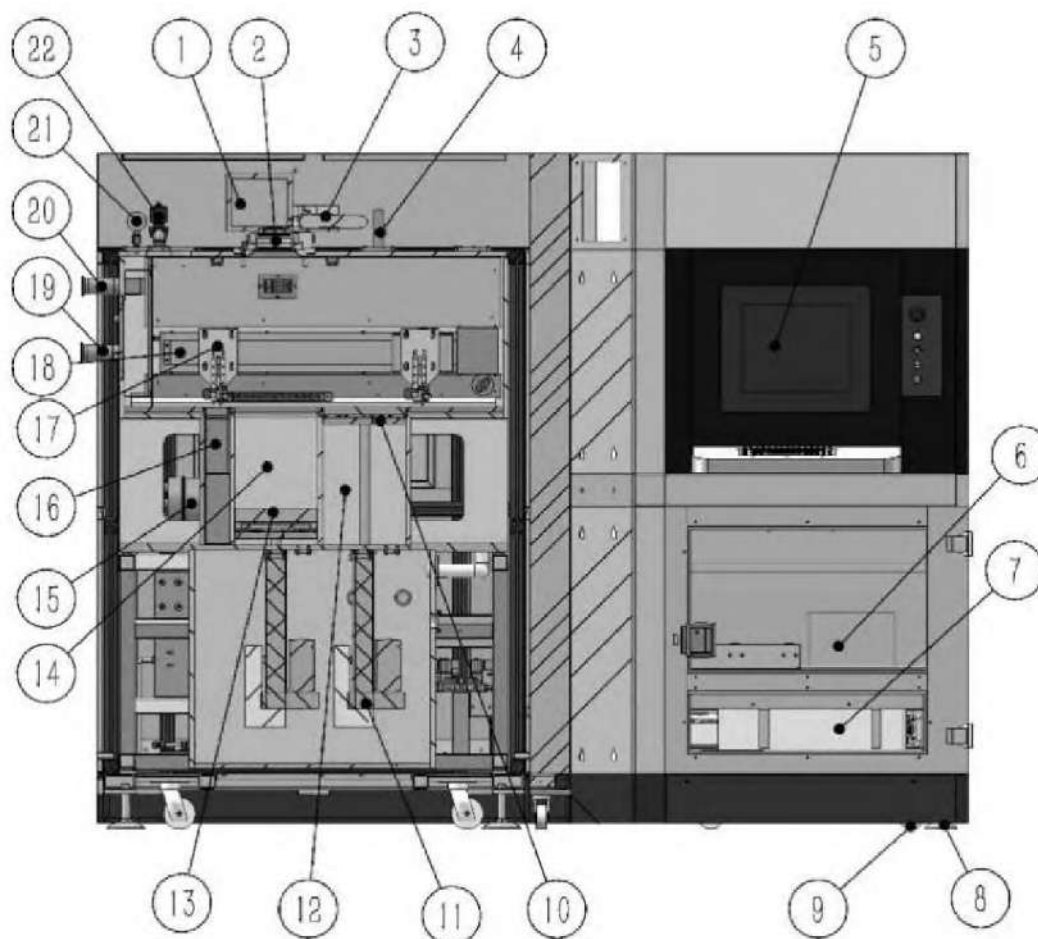
Рисунок 5.5 – Внешний вид 3D-принтера модели EP-M250 (вид сверху)

Основная внутренняя структура 3D-принтера показана на рисунках 5.6–5.8.



1 – внутренняя защитная дверь верхней камеры; 2 – внутренняя защитная дверь нижней камеры; 3 – промышленный компьютер и порт доступа к лазеру

Рисунок 5.6 – Внутренняя структура 3D-принтера модели EP-M250 (фронтальный вид)



1 – гальванометр; 2 – полевое зеркало; 3 – коллиматор (расширитель луча); 4 – датчик давления; 5 – экран; 6 – промышленный компьютер; 7 – оптоволоконный лазер; 8 – опора; 9 – ролик; 10 – поршень привода подачи материала; 11 – линейный привод подачи материала; 12 – цилиндр привода подачи; 13 – поршень платформы построения; 14 – формовочный цилиндр; 15 – блок фильтрации отработавших газов; 16 – бункер для порошка; 17 – ракель; 18 – линейный привод ракеля; 19 – воздухозаборный канал; 20 – возвратный воздуховод; 21 – манометр; 22 – электромагнитный клапан выпускной камеры

Рисунок 5.7 – Внутренняя структура 3D-принтера модели EP-M250 (задний вид)

Функции каждого компонента структуры 3D-принтера следующие.

Гальванометр: основная функциональная часть лазерного сканирования, используемая для управления сканированием лазерного луча в эффективном поле зрения.

Коллимационный расширитель луча: изменение диаметра и угла расходимости луча, излучаемого лазером.

Полевое зеркало: фокусировка лазерного луча.

Датчик давления (манометр): определение давления в камере в режиме реального времени во время работы.

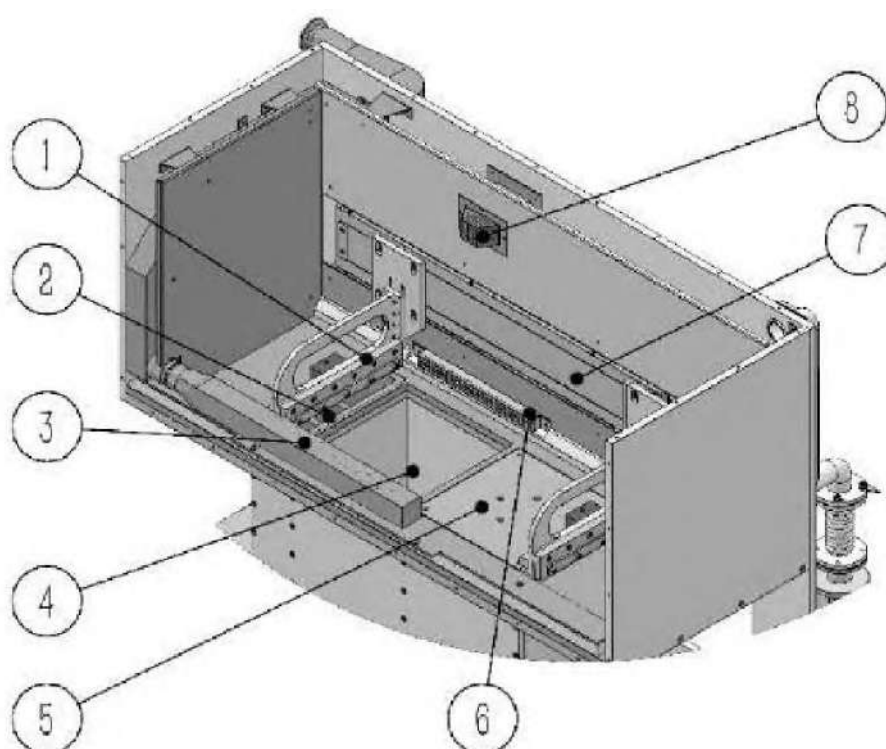
Блок фильтрации отработавших газов: фильтрация газов, выходящих из машины.

Линейный привод ракеля: приводит в движение систему для повторного нанесения покрытия от подающей платформы к платформе построения. Металлический порошок в подающей платформе равномерно распределяется по платформе построения вместе с движением ракеля.

Поршень привода подачи и платформы построения: носитель порошка и деталей.

Воздухозаборный канал и возвратный воздуховод: перенос пыли и пепла, образовавшегося в результате лазерного плавления порошка, в пылеуловитель и возврат отфильтрованного газа в технологическую камеру.

Электромагнитный клапан выпускной камеры: снижение избыточного давления, обеспечивающее поддержание давления в камере в определенном диапазоне.



1 – ракель; 2 – пересыпной канал бункера; 3 – всасывающий патрубок; 4 – платформа построения; 5 – подающая платформа (фидер); 6 – нижний выход инертного газа; 7 – линейный привод ракеля; 8 – верхний выход инертного газа

Рисунок 5.8 – Принципиальная схема формовочной камеры

5.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1 Получить чертеж или CAD-модель детали у преподавателя.

2 Проанализировать информацию о детали: размеры и допуски, геометрию, материал, функциональное назначение, качество поверхности.

3 Выполнить оптимизацию конструкции детали – задать параметры печати и произвести операцию слайсинга – загрузить управляющую программу в 3D-принтер – проверить управляющую программу в эмуляторе – при необхо-

димости внести корректировки – запустить печать – по окончании печати произвести анализ и дать рекомендации по постобработке детали.

4 Оформить отчёт.

5.7 Содержание отчета

Отчёт по лабораторной работе выполняется на отдельных листах бумаги или в тетради. Он должен содержать следующее:

- название и цель лабораторной работы;
- анализ конструкции и порядок подготовки детали к 3D-печати;
- порядок SLM-печати детали;
- рекомендации по постобработке детали после 3D-печати;
- ответы на контрольные вопросы;
- анализ полученных результатов и выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Как работает принтер для SLM-печати?
- 2 Какие материалы применяются для SLM-печати?
- 3 Какие технические газы применяются для SLM-печати?
- 4 Какие существуют методы постобработки деталей после SLM-печати?
- 5 Какие ограничения присущи 3D-печати по технологии SLM?
- 6 Какие основные элементы внешней конструкции 3D-принтера модели EP-M250 Вы знаете?
- 7 Какие основные элементы внутренней структуры 3D-принтера модели EP-M250 Вы знаете?
- 8 Какое функциональное назначение каждого из основных элементов структуры 3D-принтера модели EP-M250?
- 9 Что такое рапель, материал и назначение?
- 10 Какой тип лазерного источника установлен в 3D-принтере модели EP-M250?

Список литературы

- 1 **Calderaro, D. R.** Selection of additive manufacturing technologies in productive systems : a decision support model / D. R. Calderaro, D. P. Lacerda, D. R. Veit // Gestao & Producao. – 2020. – № 3. – P. 1–45.
- 2 Knowledge base. Design guidelines. Hubs [Electronic resource]. – 2022. – Made of access: <https://www.hubs.com/knowledge-base/design-guidelines/>. – Date of access: 10.01.2022.
- 3 **Зленко М. А.** Аддитивные технологии в машиностроении : учебное пособие / М. А. Зленко, А. А. Попович, И. Н. Мутылина. – Санкт-Петербург : Политехн. ун-т, 2013. – 200 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому
комплексу
С. А. Упоров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ**

по дисциплине

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Направленность

Материалы и технологии цифрового производства

форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

год набора: **2024**

Автор: Адас В.Е.

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург
2023

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов специалиста по направлению подготовки 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование» при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения обучающимся необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата обучающийся может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учиться лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: «**реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;

- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Обучающийся для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Обучающемуся предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует

сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и, изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).

1.1. (полное название параграфа, пункта);

1.2. (полное название параграфа, пункта).

2. (полное наименование главы).

2.1. (полное название параграфа, пункта);

2.2. (полное название параграфа, пункта).

Заключение (выводы).

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление (план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение (выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография (список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и пометки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта TimesNewRoman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что...», «таблица позволяет заключить, что...» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещенного в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков

должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «...в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (x) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «...в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводятся с указанием их порядкового номера, например: «...на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подписанный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «...в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // *Экономист*. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексахенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалитета и магистратуры /О.С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.
2. Ответы обучающегося на вопросы преподавателя.
3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы обучающемуся:

- Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.

- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.

- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.

- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.

- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.

- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!

- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.

- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.

- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методоориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яндекс, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Знать:

- офисные приложения;
- основы создания баз данных;
- принципы работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Уметь:

- использовать офисные приложения;
- создавать базы данных средствами офисных приложений;
- использовать электронную почту и другие средства коммуникаций с помощью Интернета.

Владеть:

- инструментарием офисных приложений;
- технологией разработки баз данных;
- навыками работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому комплексу

С. А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

по дисциплине

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Направленность

Материалы и технологии цифрового производства
форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

год набора: **2024**

Автор: Адас В.Е.

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель



(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург
2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	2
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1	9
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»	9
Создание файла базы данных Access	9
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2	17
Работа с простыми запросами.....	17
Конструирование запросов на выборку с условием отбора.....	17
Вычисляемые поля в запросах	200
Параметры в запросах	223
Групповые операции в запросах	245
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3	28
Работа с многотабличными запросами	28
Запросы на изменение	33
Задание для самостоятельной работы	35
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4	37
Работа с формами.....	37
Условное форматирование элементов управления.....	38
Создание разделенной формы.....	40
Многотабличные формы.....	41
Создание многотабличной формы с помощью мастера	42
Одиночная многотабличная форма	45
Задание для самостоятельной работы	49
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5	49
Работа с отчетами.....	49
Задание для самостоятельной работы	51
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6	551
Создание главной кнопочной формы.....	551
с использованием макросов.....	551
Создание управляющих кнопок на экране.....	55
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.....	60
Указания к выполнению работы	60
Варианты заданий.....	60
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	771

ВВЕДЕНИЕ

Система управления базами данных

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами*.

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление и удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с заданным критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования СУБД* включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA)*.
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
 - таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
 - запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
 - запросов на изменение данных базы;
 - экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
 - отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

Реляционная база данных

База данных является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержатся сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц, соответствующей

щих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации*) каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ*. По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:M). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:M предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:M, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

Схема данных

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdb-файле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных*, непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы и модули*, называемые *объектами приложения*.

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке VBA и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы.* Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобразить нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложе-

нии. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах. □ *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

Интерфейс пользователя Access

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации*. Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**. Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи; *Панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

Этапы проектирования базы данных:

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

Создание файла базы данных Access

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, *Реализация товаров*.

Щелчком по кнопке **Создать**, завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).

Новая база данных

Создание базы данных Microsoft Office Access, не содержащей существующих данных или объектов.

Имя файла:

Реализация товаров_ОГР_17_Попов



C:\Documents and Settings\Администратор\Мои документы\



Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «Закреть».



Рис. 1.2. Таблица1 в режиме таблицы

Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).

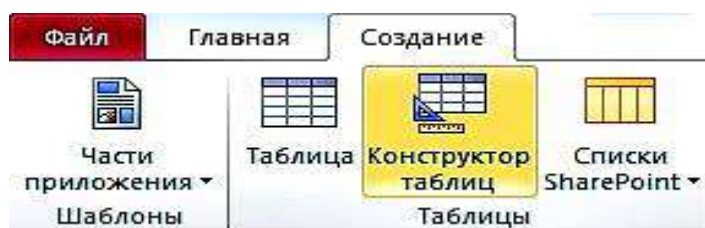


Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных**.

Товары	
Имя поля	Тип данных
Код товара	Счетчик
Наименование	Текстовый
Марка	Текстовый
Номер склада	Числовой
Количество	Числовой
Цена	Денежный
Свойства поля	
Общие	Подстановка
Формат поля	Денежный

Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «Конструктор»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара**», щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появится в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter**. По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары						
	Код товара ▾	Наименование ▾	Марка ▾	Номер склада ▾	Количество ▾	Цена ▾
⊕	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 Р
⊕	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 Р
⊕	3	Тахеометр	South NTS-365 R	2	6	225 000,00 Р
⊕	4	Тахеометр	South NTS-362 R	2	5	240 000,00 Р
⊕	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 Р
⊕	6	Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 Р
⊕	7	Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 Р
⊕	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 Р
⊕	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 Р
⊕	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 Р
*	(№)					

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»

Для поля Телефон следует задать маску ввода: (###)###-##-##

Имя поля	Тип данных
Код фирмы	Числовой
Название	Текстовый
Адрес	Текстовый
Телефон	Текстовый
Контактное лицо	Текстовый
Должность	Текстовый

Свойства поля

Общие Подстановка

Размер поля 255

Формат поля

Маска ввода (###)###-##-##

Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «Конструктор»

Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

Задание 3. Создание таблицы «Склады»

Имя поля	Тип данных
Номер склада	Числовой
Телефон	Текстовый
Адрес	Текстовый
Заведующий	Текстовый

Свойства поля

Общие Подстановка

Размер поля 255

Формат поля

Маска ввода (###)###-##-##

Рис. 1.9. Таблица «Склады» в режиме «Конструктор»

Склады				
Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий	
1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.	
2	(343)379-51-62	В-Пышма, пер. Индустриальный, 1	Мясников Д.О.	
3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.	
4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.	

Рис. 1.10. Таблица «Склады» в режиме «Таблицы»

Задание 4. Создание таблицы «Продажи»

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка**.
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

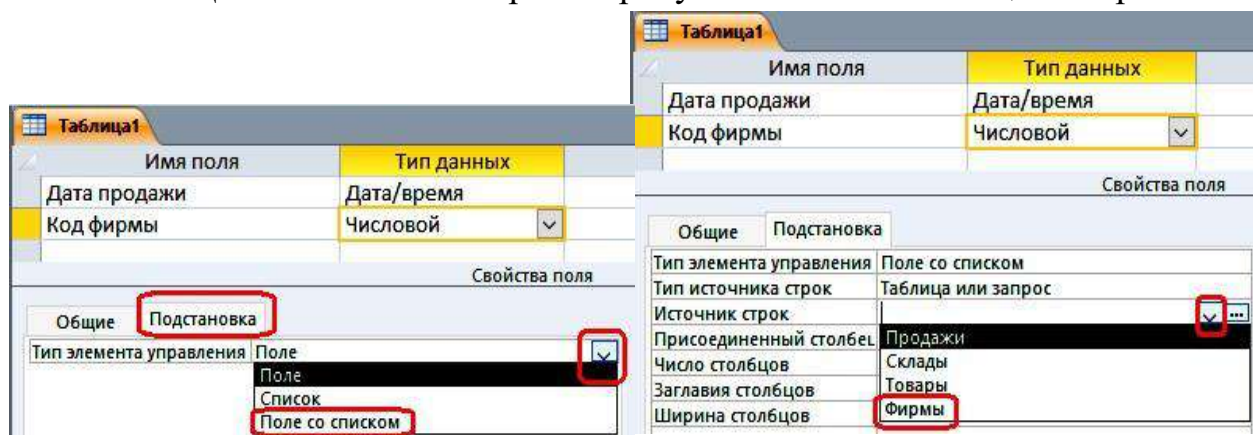


Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «Конструктора»

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой

Свойства поля

Общие Подстановка

Тип элемента управления: Поле со списком

Тип источника строк: Таблица или запрос

Источник строк: Товары

Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой
Количество	Числовой
Скидки	Числовой

Рис. 1.13. Окно таблицы «Продажи» в режиме «Конструктора»

Дата прода.	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10
15.02.2018	3	5	8	10

Рис. 1.14. Таблица «Продажи» в режиме «Таблицы»

Задание 5. Создание схемы данных

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).

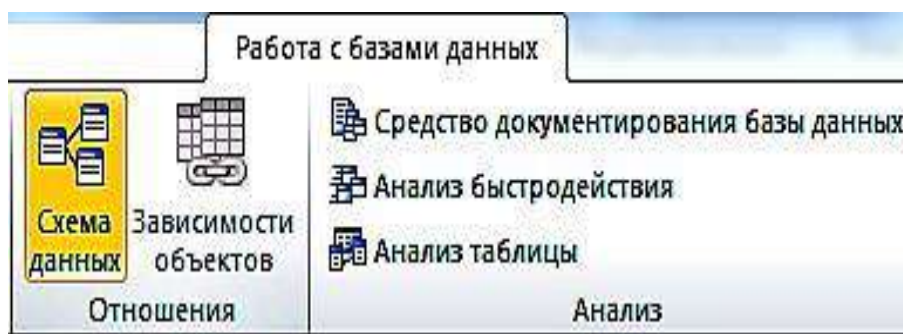


Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многочисленные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи*.

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или ∞ . Это свидетельствует о том, что одно-многочисленные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

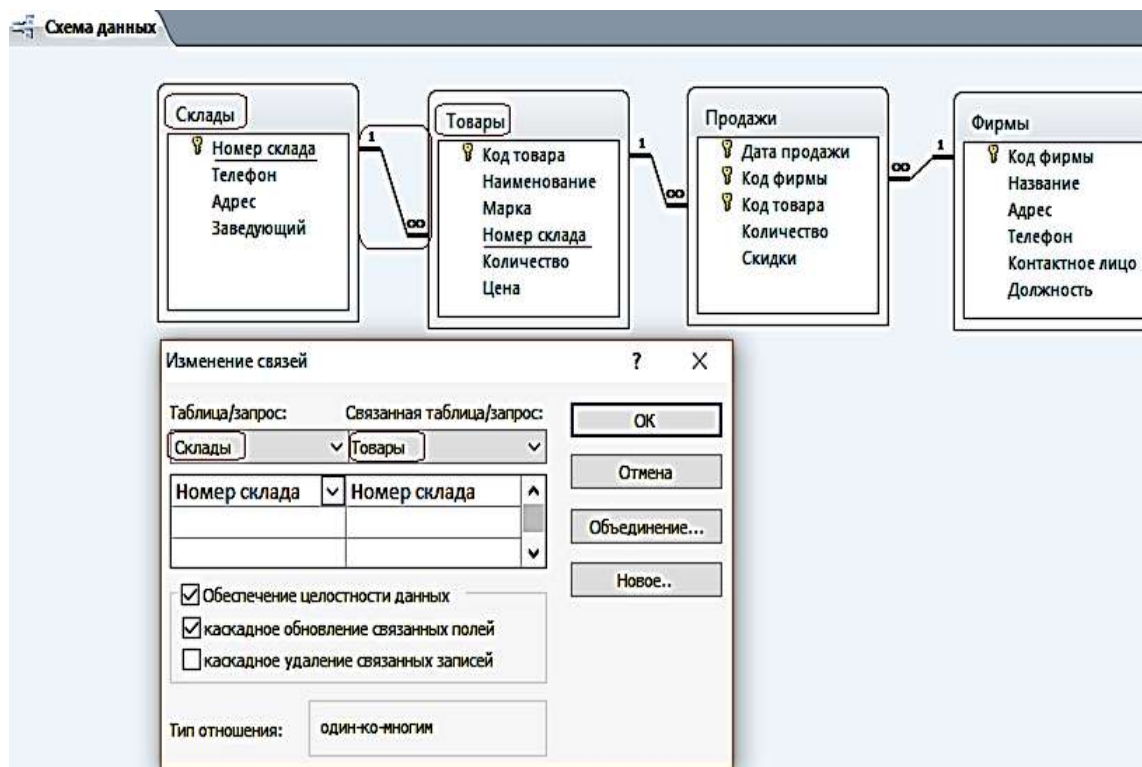


Рис. 1.16. Схема данных БД «Реализация товаров»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Работа с простыми запросами

Конструирование запросов на выборку с условием отбора

Задание 1. Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку **добавить**. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Заккрыть**. На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами** / **Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка**.

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование**, **Марка** и **Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

Создание Внешние данные Работа с базами данных Работа с запросами

Конструктор

Объединение К серверу Управление

Отобразить таблицу

Тип запроса

Запрос1

Товары

- * Код товара
- Наименование
- Марка
- Номер склада
- Количество
- Цена

Поле:	Наименование	Марка	Цена
Имя таблицы:	Товары	Товары	Товары
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:	Таксeометр		

Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.

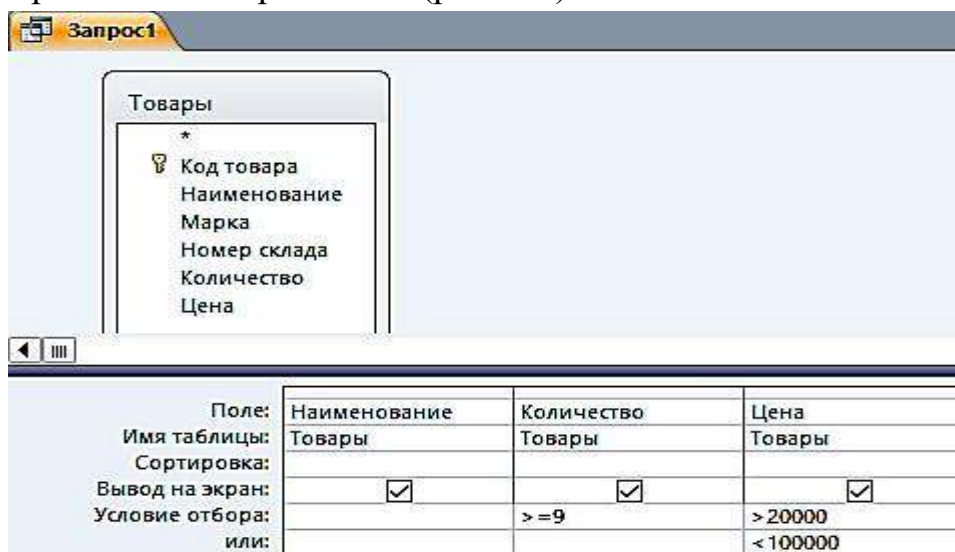


Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 ₽

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 2. Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).

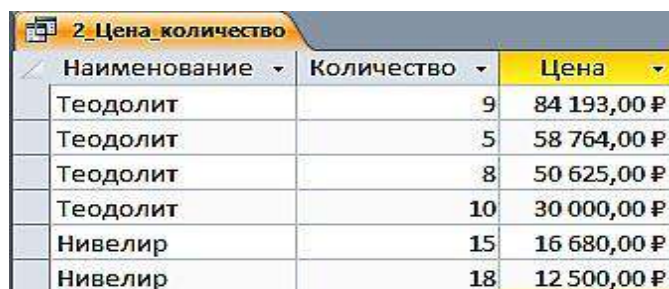


Поле:	Наименование	Количество	Цена
Имя таблицы:	Товары	Товары	Товары
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:		> =9	> 20000
или:			< 100000

Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

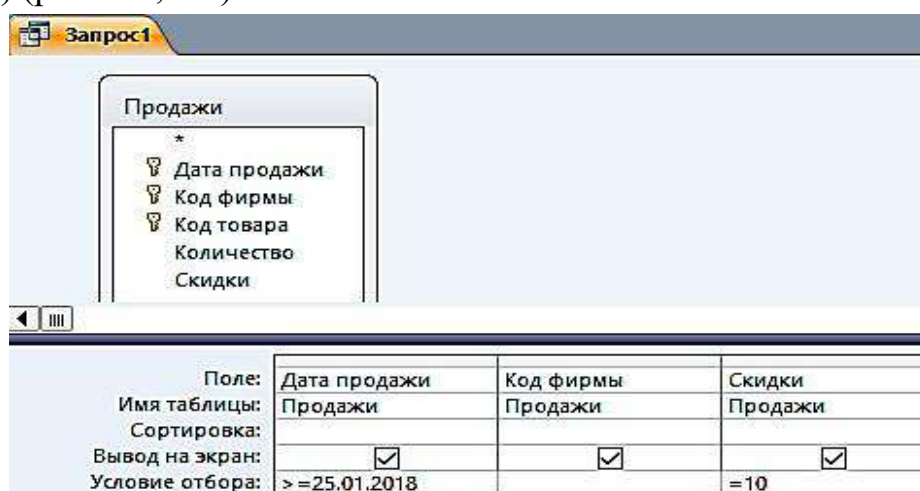
3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).



Наименование	Количество	Цена
Теодолит	9	84 193,00 ₽
Теодолит	5	58 764,00 ₽
Теодолит	8	50 625,00 ₽
Теодолит	10	30 000,00 ₽
Нивелир	15	16 680,00 ₽
Нивелир	18	12 500,00 ₽

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Задание 3. Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)



Продажи

- *
 - Дата продажи
 - Код фирмы
 - Код товара
 - Количество
 - Скидки

Поле:	Дата продажи	Код фирмы	Скидки
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Продажи
Сортировка:			
Вывод на экран:	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=25.01.2018		=10

Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора



Дата прода	Код фирмы	Скидки
25.01.2018	2	10
30.01.2018	3	10
05.02.2018	4	10
10.02.2018	3	10
15.02.2018	3	10

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «Таблицы»

Вычисляемые поля в запросах

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

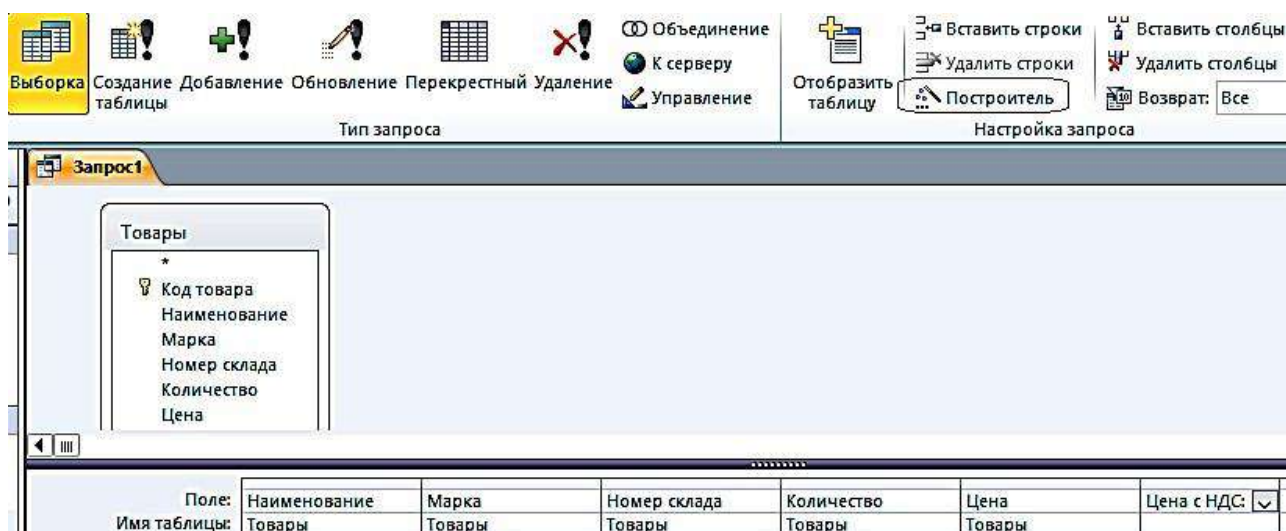


Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

Задание 4. В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

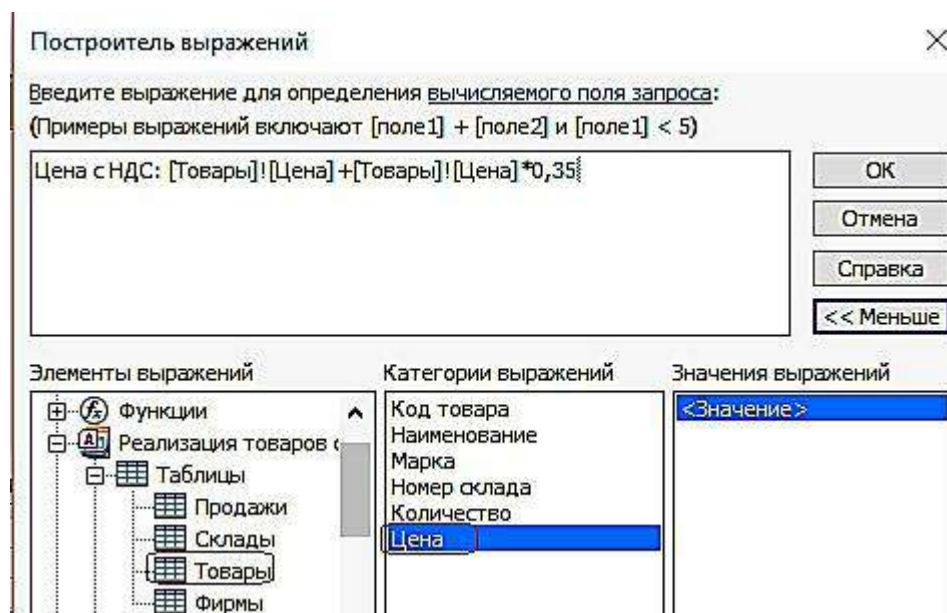


Рис. 2.8. Построитель выражений

2. Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

4. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

5. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «4_Цена с НДС» в режиме «Таблицы» изображен на рис. 2.9.



Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Цена с НДС
Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽
Тахеометр	South NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽
Тахеометр	South NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽
Теодолит	3T2КП	3	9	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽
Теодолит	4T15П	3	5	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽
Теодолит	4T30П	3	8	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽
Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽
Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽
Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽

Рис. 2.9. Просмотр запроса «4_Цена с НДС» в режиме «Таблицы»

Задание 5. В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: а `Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm")` – эта функция возвратит полное название месяца;

b или `Format([Продажи]![Дата продажи];"mm")` – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции `Format` (рис. 2.10, 2.11).

Поле:	Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц: <code>Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm")</code>
Имя таблицы:	Продажи	Продажи	Продажи	Продажи	
Сортировка:					
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:				>0	"Январь"

Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц
15.01.2018	4	10	10	Январь
19.01.2018	1	2	6	Январь
20.01.2018	3	5	8	Январь
25.01.2018	2	4	4	Январь
27.01.2018	1	1	4	Январь
30.01.2018	3	7	4	Январь

Рис. 2.11. Просмотр запроса «5_Заданный месяц» в режиме «Таблицы»

Параметры в запросах

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса*. Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра**.

Задание 6. Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].
2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.
3. Введите Январь и получите результат.

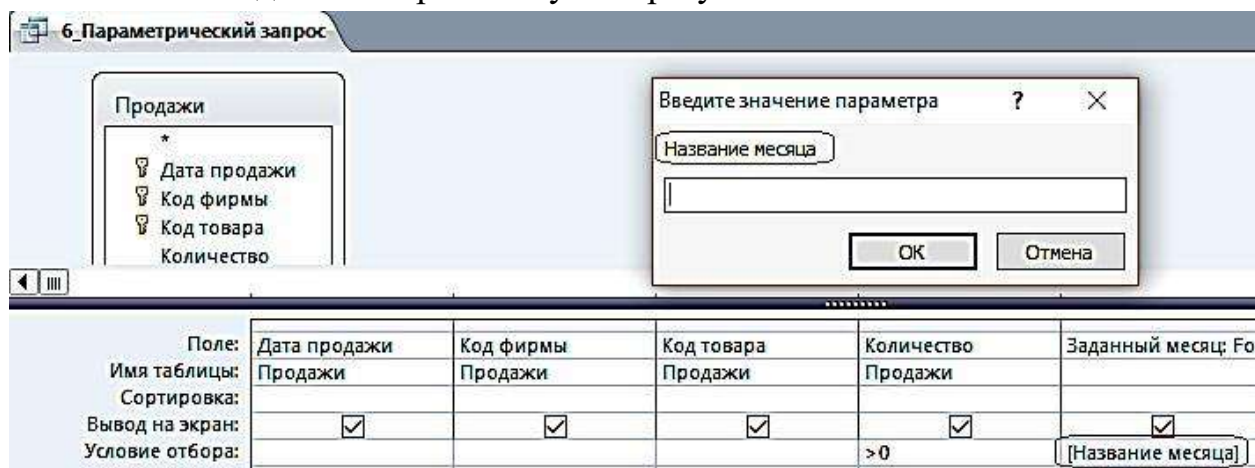


Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

Задание 7. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

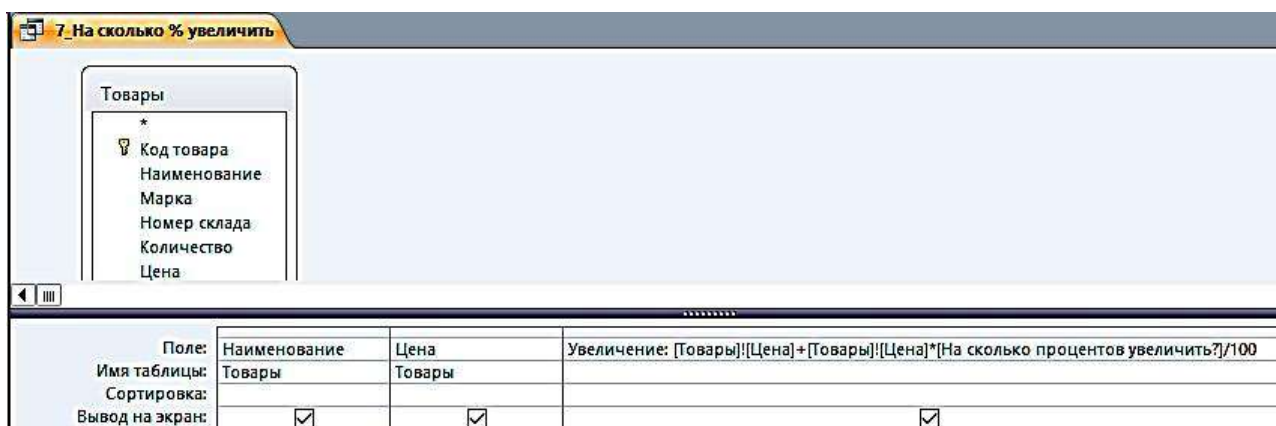


Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

Задание 8. Скопируйте запрос «7_На сколько % увеличить» и переименуйте его в «8_Проценты» (рис. 2.14)

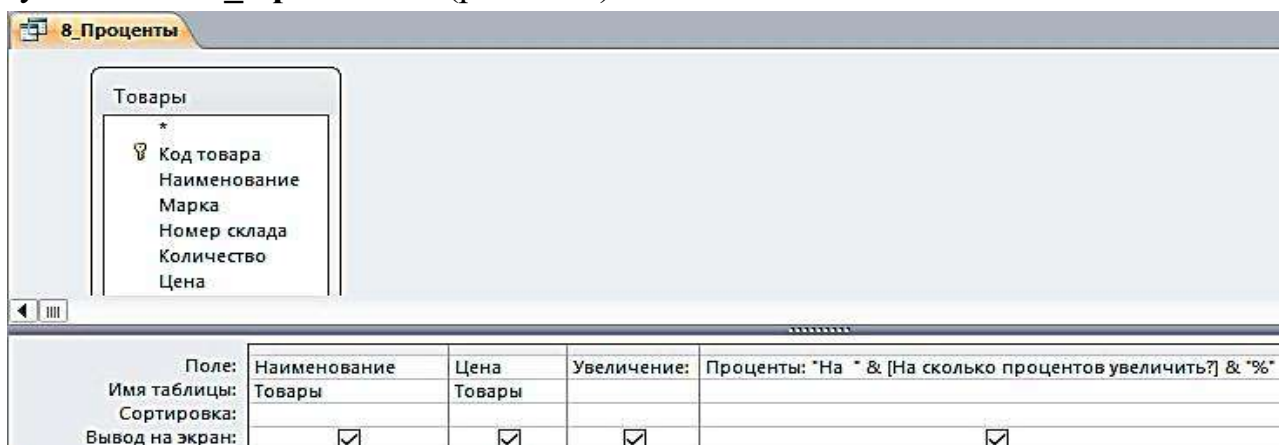


Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «Проценты»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «Проценты», в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).

Наименование	Цена	Увеличение	Проценты
Тахеометр	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽	На 35%
Тахеометр	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽	На 35%
Тахеометр	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽	На 35%
Тахеометр	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽	На 35%
Теодолит	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽	На 35%
Теодолит	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽	На 35%
Теодолит	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽	На 35%
Теодолит	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽	На 35%
Нивелир	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽	На 35%
Нивелир	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽	На 35%

Рис. 2.15. Просмотр запроса «8_Проценты» в режиме «Таблицы»

Групповые операции в запросах

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций. Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой**, **Денежный**, **Дата и время**.

Задание 9. Запрос с функцией Sum

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «**Товары**».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Наименование**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поля «**Количество**» и «**Цена**», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбцах «**Количество**» и «**Цена**» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

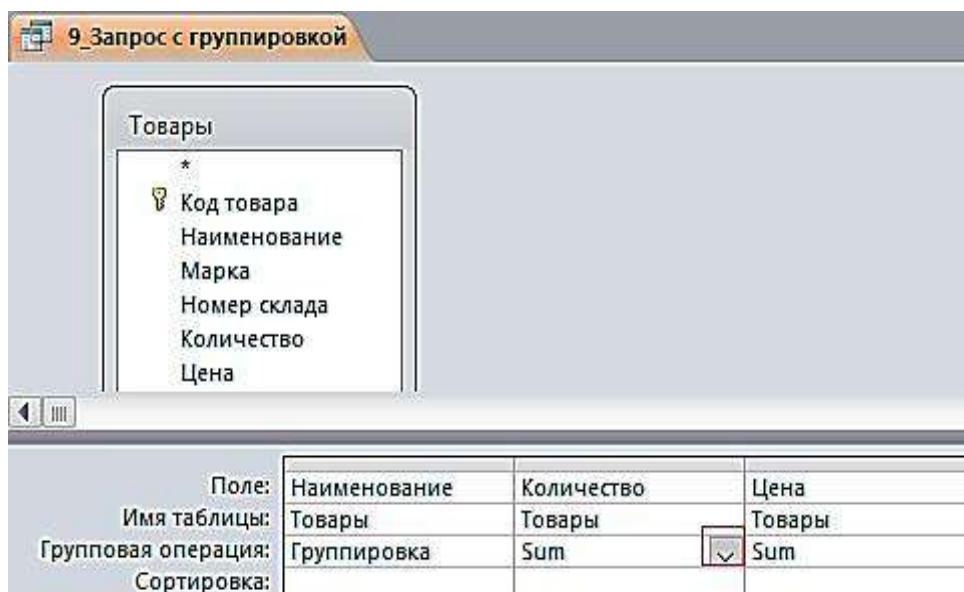
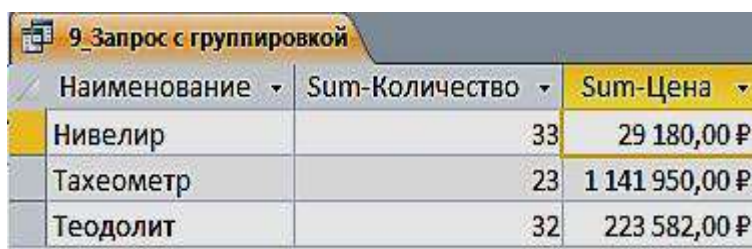


Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

6. Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.



Наименование ▾	Sum-Количество ▾	Sum-Цена ▾
Нивелир	33	29 180,00 ₽
Тахеометр	23	1 141 950,00 ₽
Теодолит	32	223 582,00 ₽

Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

Задание 10. Запрос с функцией **Count**

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию **Count**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.18).

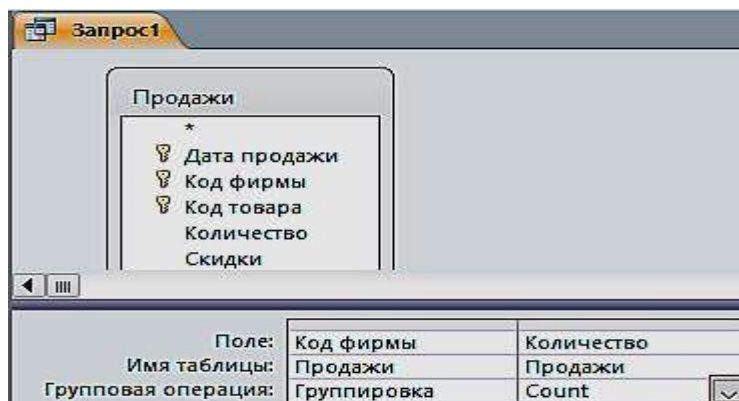


Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «**10_Число продаж по коду фирмы**». Результат запроса показан на рис. 2.19.



Код фирмы	Count-Количество
1	2
2	2
3	4
4	2

Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

Задание 11. Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «1_По наименованию тахеометр» в режиме таблицы. На вкладке ленты **Главная** в группе **Записи** выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «Цена», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).



Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 Р
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 Р
Тахеометр	South NTS-365 R	225 000,00 Р
Тахеометр	South NTS-362 R	240 000,00 Р
Итог		1 141 950,00 Р

Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них

нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

Задание 1. Запрос с вычисляемым полем «Остаток»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «Товары» и «Продажи». Перетащите в бланк запроса из таблицы «Товары» поля «Наименование», «Марка», «Количество», и из таблицы «Продажи» поле «Количество».
2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «Количество», вычисляемое поле «Остаток» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

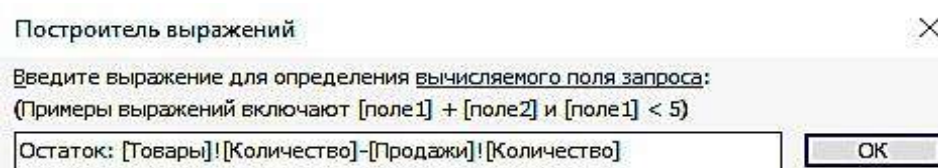


Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

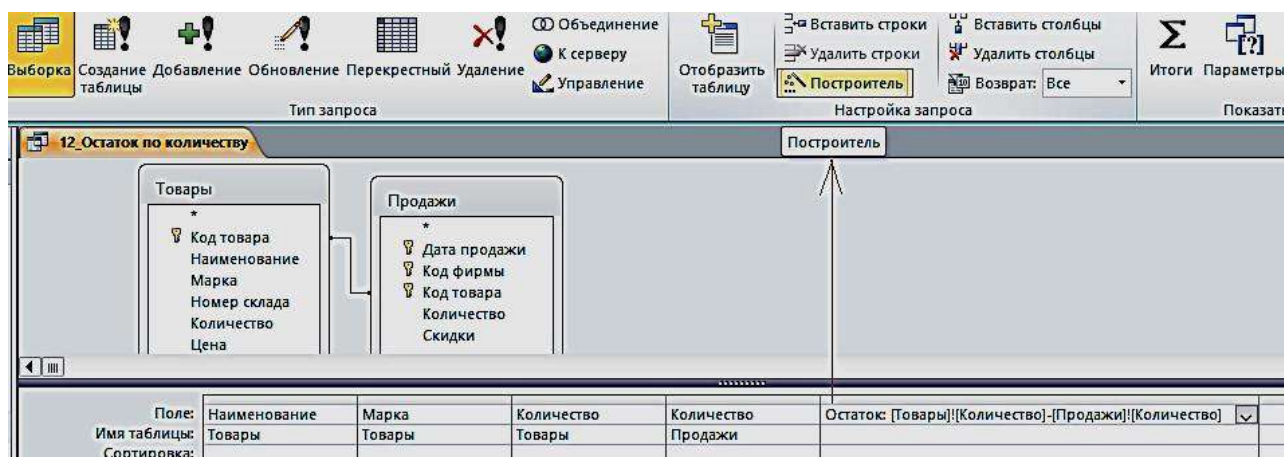


Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных «**Реализация товаров со складов**», далее выберите таблицу «**Товары**». Справа отобразится список её полей. Выберите поле «**Количество**» и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу «**Продажи**» и поле «**Количество**» (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству				
Наименование ▾	Марка ▾	Товары.Количество ▾	Продажи.Количество ▾	Остаток ▾
Тахеометр	SP FOKUS 6	5	4	1
Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	6	1
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	5	1
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	5	4	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	3T2КП	9	8	1
Теодолит	4T30П	8	4	4
Теодолит	VEGA TEO 5	10	9	1
Нивелир	4Н -2КЛ	15	10	5
Нивелир	4Н-3КЛ	18	10	8

Рис. 3.3 Результат запроса «Остаток по количеству»

5. Слово «Выражение» удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

Задание 2. Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Продажи**» поле «**Дата продажи**», а из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Номер склада**», «**Количество**», «**Цена**».

2. Создайте новое поле «**Новая цена**». Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле «**Новая Цена**» (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне «**Построительвыражений**» выбрать «**Элементы выражений**», в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы «**Товары**» и в поле «**Категории выражений**» выбрать «**Цена**», а с клавиатуры набрать «***1,05**».

4. В поле «**Дата продажи**» введите условие отбора $\geq 01.02.2018$ (рис. 3.4).

Запрос 1

Продажи
 *
 Дата продажи
 Код фирмы
 Код товара
 Количество
 Скидки

Товары
 *
 Код товара
 Наименование
 Марка
 Номер склада
 Количество
 Цена

Поле:	Дата продажи	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена: [Товары].[Цена]*105
Имя таблицы:	Продажи	Товары	Товары	Товары	Товары	Товары	
Сортировка:							
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:	>=01.02.2018						

Рис. 3.4. Запрос «Новая цена» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «Новая цена» (рис. 3.5).

13_Цена в феврале

Дата прода.	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена
02.02.2018	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 Р	23 625 000,00 Р
15.02.2018	Теодолит	3T2КП	3	9	84 193,00 Р	8 840 265,00 Р
10.02.2018	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 Р	3 150 000,00 Р
05.02.2018	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 Р	1 751 400,00 Р

Рис. 3.5. Результат запроса «Новая цена»

Задание 3. Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

14_Склад в Екатеринбурге

Склады
 *
 Номер склада
 Телефон
 Адрес
 Заведующий

Товары
 *
 Код товара
 Наименование
 Марка
 Номер склада
 Количество
 Цена

Поле:	Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Имя таблицы:	Товары	Склады	Склады	Склады	Склады
Сортировка:					
Вывод на экран:	☒	☒	☒	☒	☒
Условие отбора:				E*	

Рис. 3.6. Запрос «Склад в Екатеринбурге» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге				
Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 3.7. Результат запроса «Склад в Екатеринбурге»

Задание 4. Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «Сумма» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

Запрос1

Продажи

- Дата продажи
- Код фирмы
- Код товара
- Количество
- Скидки

Товары

- Код товара
- Наименование
- Марка
- Номер склада
- Количество
- Цена

Поле: Дата продажи Скидки Наименование Марка Количество Цена Сумма: [Товары].[Количество]*[Товары].[Цена]

Имя таблицы: Продажи

Сортировка:

Вывод на экран: ☒

Условие отбора: >=01.02.2018

Рис. 3.8. Запрос «Стоимость» в режиме Конструктора

15_Стоимость						
Дата прода.	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма
02.02.2018	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	225 000,00 Р	1 350 000,00 Р
15.02.2018	10	Теодолит	3Т2КП	9	84 193,00 Р	757 737,00 Р
10.02.2018	10	Теодолит	VEGA TEO 5	10	30 000,00 Р	300 000,00 Р
05.02.2018	10	Нивелир	4Н -2КЛ	15	16 680,00 Р	250 200,00 Р
*						
Итог						2 657 937,00 Р
						Нет
						Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «Стоимость» и итог с расчетом суммы по столбцу

Задание 5. Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

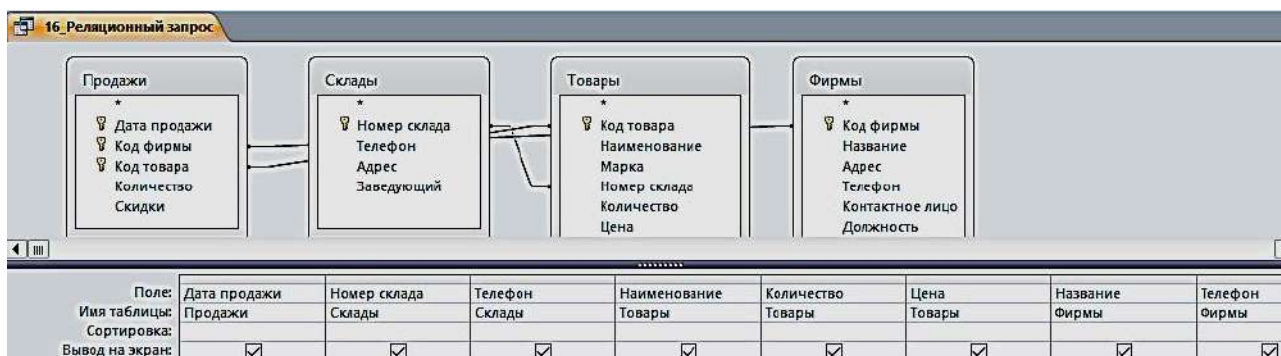


Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	18	12 500,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
19.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	7	357 487,00 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
20.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
25.01.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	5	240 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
27.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	5	319 463,00 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
30.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	8	50 625,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
02.02.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	6	225 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
05.02.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	15	16 680,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
10.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	10	30 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
15.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

Запросы на изменение

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

Задание 6. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «17_Обновление».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «Обновление» выражение для новых значений $[Цена] * 1,2$ (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

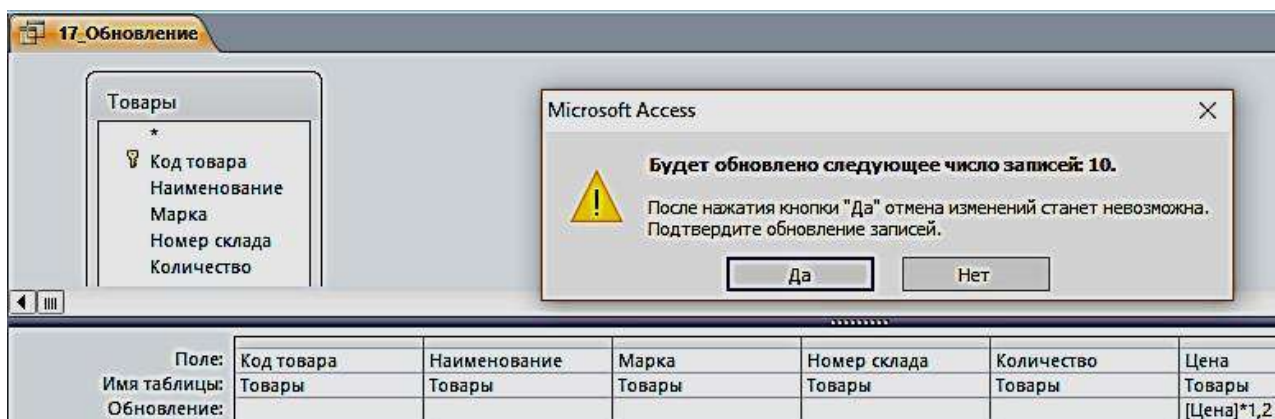


Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

Рис. 3.13. С правой стороны
результат
обновления таблицы

Цена	Цена
319 463,00 ₽	383 355,60 ₽
357 487,00 ₽	428 984,40 ₽
225 000,00 ₽	270 000,00 ₽
240 000,00 ₽	288 000,00 ₽
84 193,00 ₽	101 031,60 ₽
58 764,00 ₽	70 516,80 ₽
50 625,00 ₽	60 750,00 ₽
30 000,00 ₽	36 000,00 ₽
16 680,00 ₽	20 016,00 ₽
12 500,00 ₽	15 000,00 ₽

Задание 6. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.
2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.
3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы**.
4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).
5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

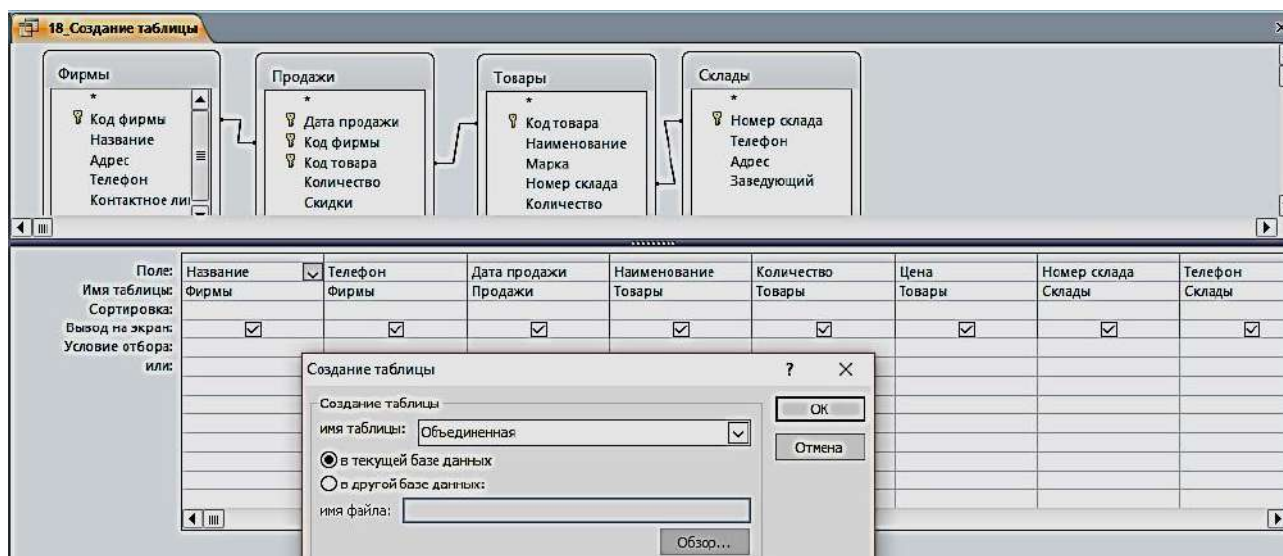


Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

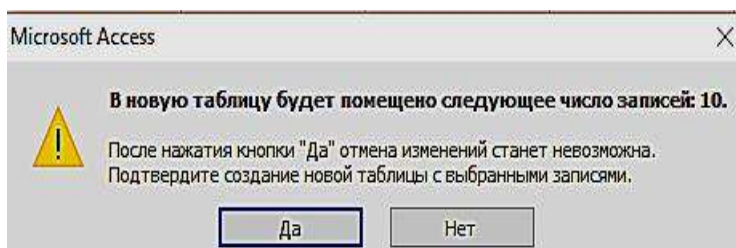


Рис. 3.15. Окно сообщений

Название	Фирмы	Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады	Телефон
ООО "Геомар Недра"	4956180510		19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р		1	3433818888
ООО "Геомар Недра"	4956180510		27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р		1	3433818888
ООО "Навгеоком"	3432535355		25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р		2	3433795162
ООО "Навгеоком"	3432535355		02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р		2	3433795162
ООО "А-ГЕО"	9040957045		20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р		3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045		15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р		3	3432751822
ГеоСтройПрибор	4732712144		15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р		4	3433102222
ГеоСтройПрибор	4732712144		05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р		4	3433102222

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

Задание для самостоятельной работы

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.

2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма**, **Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

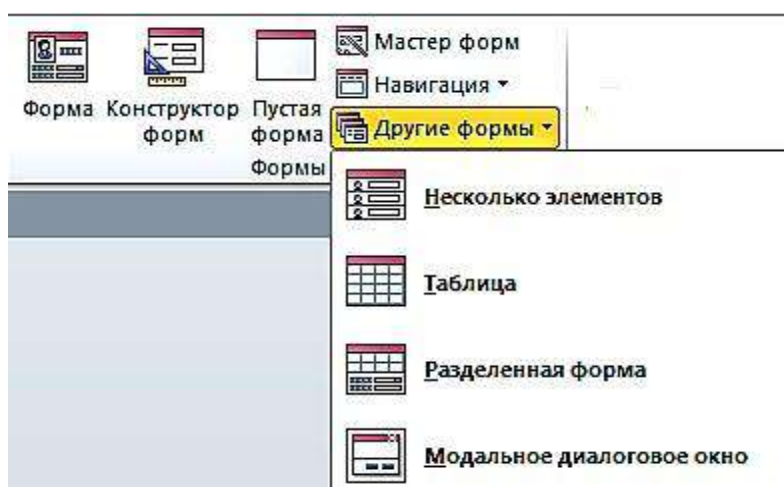


Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

Задание 1. Создать однотабличную форму «Товары для ввода, просмотра и корректировки данных» таблицы «Товары». Чтобы источником записей формы стала таблица «Товары», выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «Товары»

Условное форматирование элементов управления

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме, в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

Задание 2. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

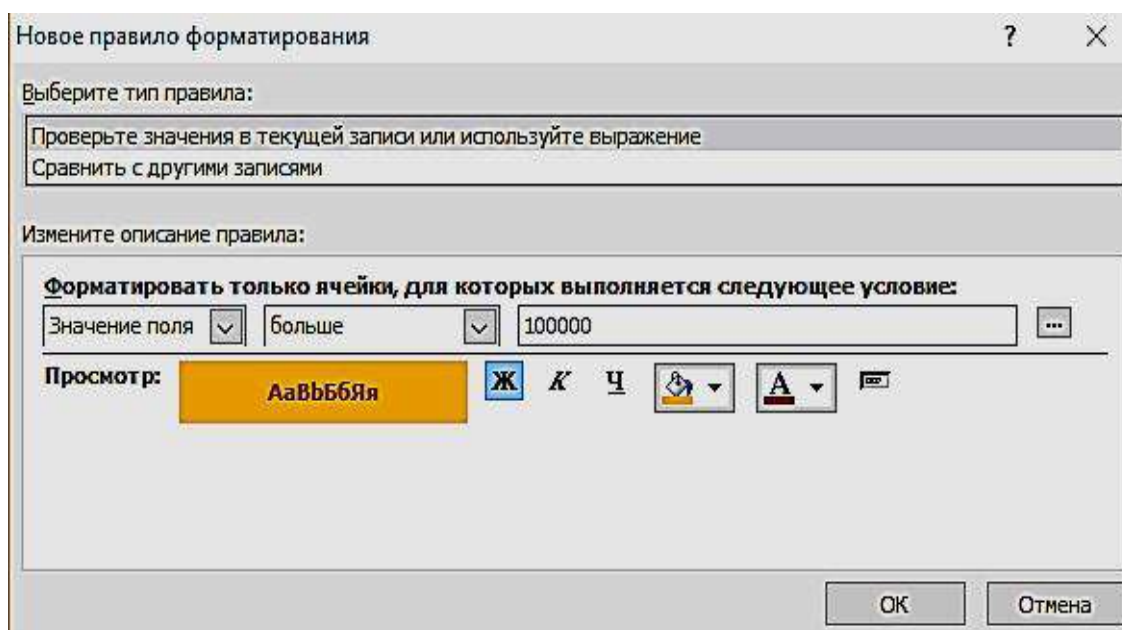


Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

Задание 3. Создать однотабличную форму «Склады». Для создания выбрать таблицу «Склады», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «Товары». Источником записей главной формы будет таблица «Склады». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «Склады» имеет подчиненную таблицу «Товары», с которой она находится в отношении 1:∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

Склады

Номер склада: 1

Телефон: (343)381-88-88

Адрес: Екатеринбург, пер. Базовый, 7

Заведующий: Амелина И.В.

Код товара	Наименование	Марка	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	5	383 355,60 Р
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	428 984,40 Р
(№)				

Записи: 1 из 4 | Нет фильтра | Поиск

Рис. 4.5. Форма по таблице «Склады» с встроенной подчиненной «Товары»
Создание разделенной формы

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

Задание 4. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «Продажи». Выберите таблицу «Продажи» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

Дата прода.	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10

Рис. 4.6. Разделенная форма «Продажи»

Многотабличные формы

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

Задание 5. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «**16_реляционный запрос**» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовок.

Составная форма

Составная форма на основе Реляционного запроса

Дата продажи	15.01.2018	Количество	18
Номер склада	4	Цена	15 000,00 Р
Склады.Телефон	{343}310-22-22	Название	ГеоСтройПрибор
Наименование	Нивелир	Фирмы.Телефон	{473}271-21-44

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	18	15 000,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
19.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	7	428 984,40 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
20.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
25.01.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	5	288 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
27.01.2018	1	{343}381-88-88	Тахеометр	5	383 355,60 Р	ООО "Геомар Недра"	{495}618-05-10
30.01.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	8	60 750,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
02.02.2018	2	{343}379-51-62	Тахеометр	6	270 000,00 Р	ООО "Навгеоком"	{343}253-53-55
05.02.2018	4	{343}310-22-22	Нивелир	15	20 016,00 Р	ГеоСтройПрибор	{473}271-21-44
10.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	10	36 000,00 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45
15.02.2018	3	{343}275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 Р	ООО "А-ГЕО"	{904}095-70-45

Рис. 4.7. Составная форма

Создание многотабличной формы с помощью мастера

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

Задание 6. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

Создание форм

Выберите поля для формы.
Допускается выбор нескольких таблиц или запросов.

Таблицы и запросы
Таблица: Продажи

Доступные поля:
Дата продажи
Код фирмы
Код товара
Количество
Скидки

Выбранные поля:

Отмена < Назад Далее > Готово

Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица «**Продажи**», выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля**, в нашем случае все, кроме поля «**Скидки**» (рис. 4.9).

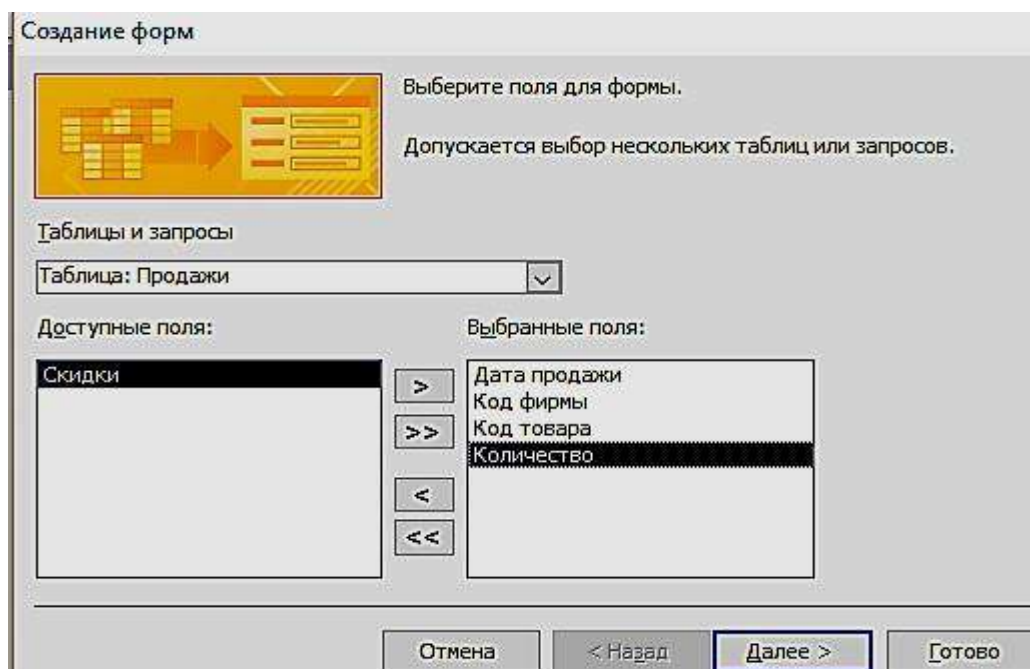


Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы «**Продажи**» для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы «**Товары**». Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки **Далее** в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы **Продажи** и щелкнуть по кнопке «**Далее**» (рис. 4.10).

Создание форм

Выберите вид представления данных:

- Товары

- Продажи

Дата продажи, Код фирмы, Код товара,
Продажи_Количество, Наименование,
Марка, Номер склада, Товары_Количество,
Цена

☒ Одиночная форма
 ☐ Связанные формы

Отмена < Назад **Далее >** Готово

Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «Готово» (рис. 4.11).

Создание форм

Выберите внешний вид формы:

☒ В один столбец

☐ ленточный

☐ табличный

☐ выровненный

Отмена < Назад **Далее >** Готово

Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

Одиночная многотабличная форма

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма**. Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

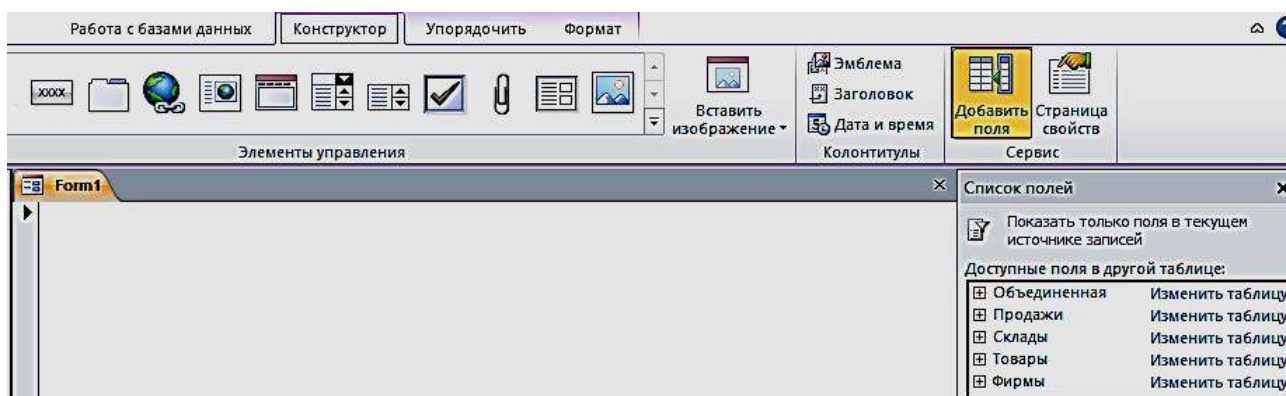


Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

Задание 7. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма**. В области **Список полей** откройте список полей таблицы «**Продажи**», щелкнув знак «Плюс» рядом с её

именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

Дата продажи	15.01.2018
Код фирмы	4
Код товара	10
Количество	10
Наименование	Нивелир
Марка	4Н-ЗКЛ
Цена	15 000,00 Р
Номер склада	4
Телефон	((343)310-22-22
Адрес	Екатеринбург, Радищева, 4
Заведующий	Ромашенко К.Д.
Название	ГеоСтройПрибор
Адрес_Фирмы	Воронеж, Жуков, 3
Телефон_Фирмы	((473)271-21-44
Контактное лицо	Яковлева Ю.К.
Должность	менеджер

Рис. 4.14. Форма «Общие данные», созданная с помощью инструмента

Пустая форма

Задание 8. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «**Товары**». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).

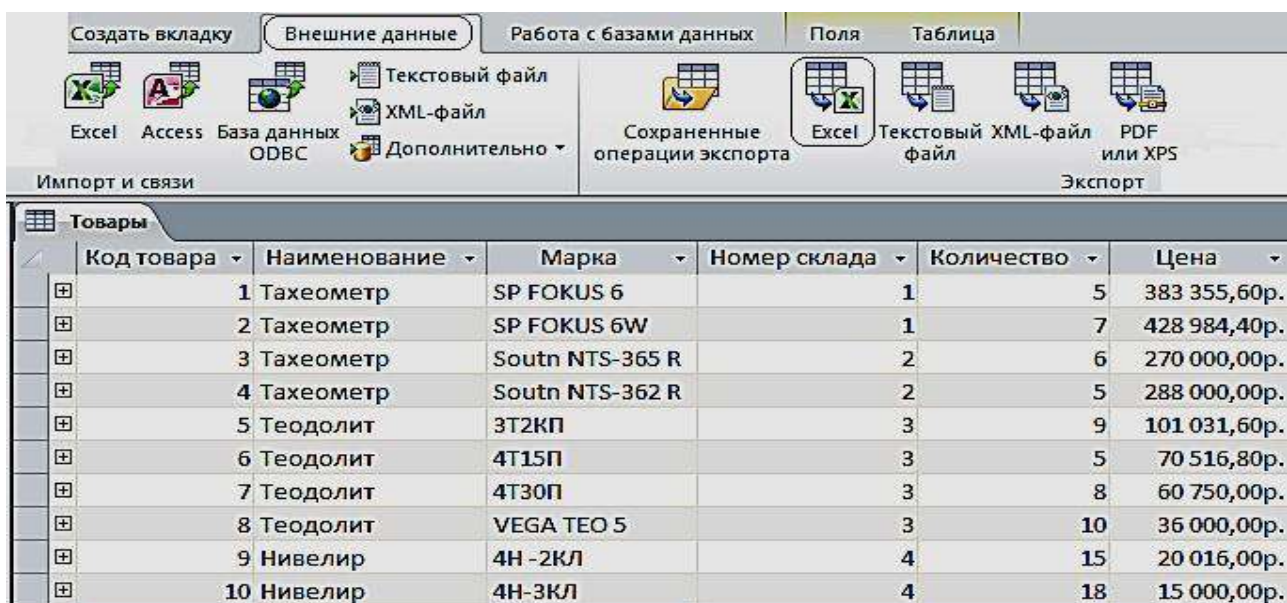


Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «Товары» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «Товары», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

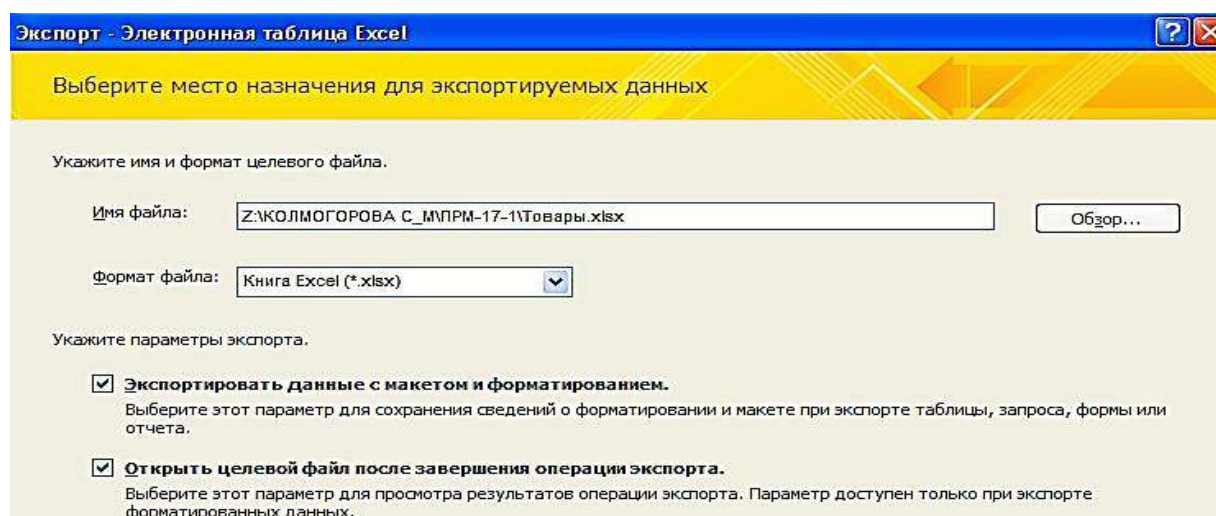


Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «Товары»

	A	B	C	D	E	F
1	Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
2	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
3	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
4	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
5	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
6	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
7	6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
8	7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
9	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
10	9	Нивелир	4Н-2КЛ	4	15	20 016,00р.
11	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.17. Таблица «Товары» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

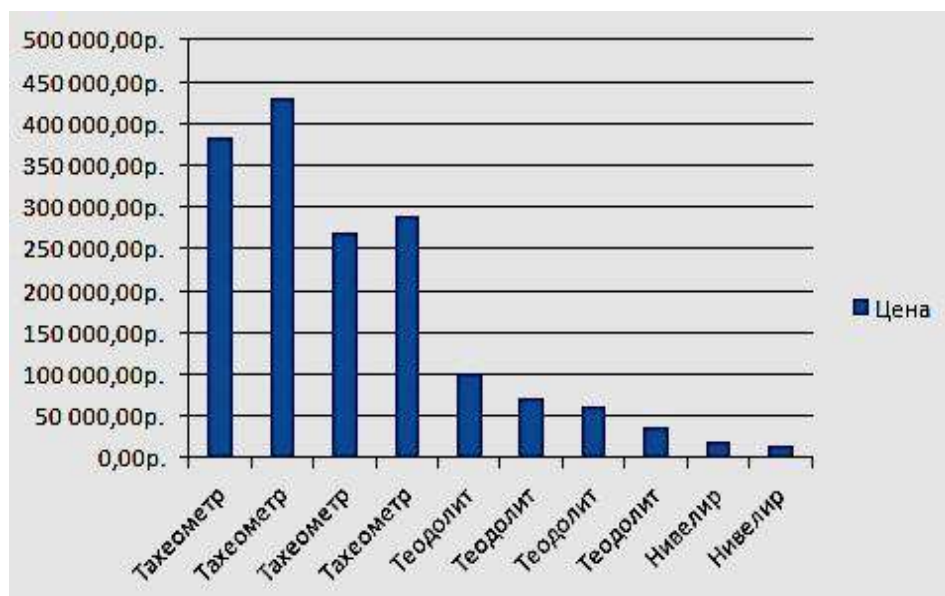


Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

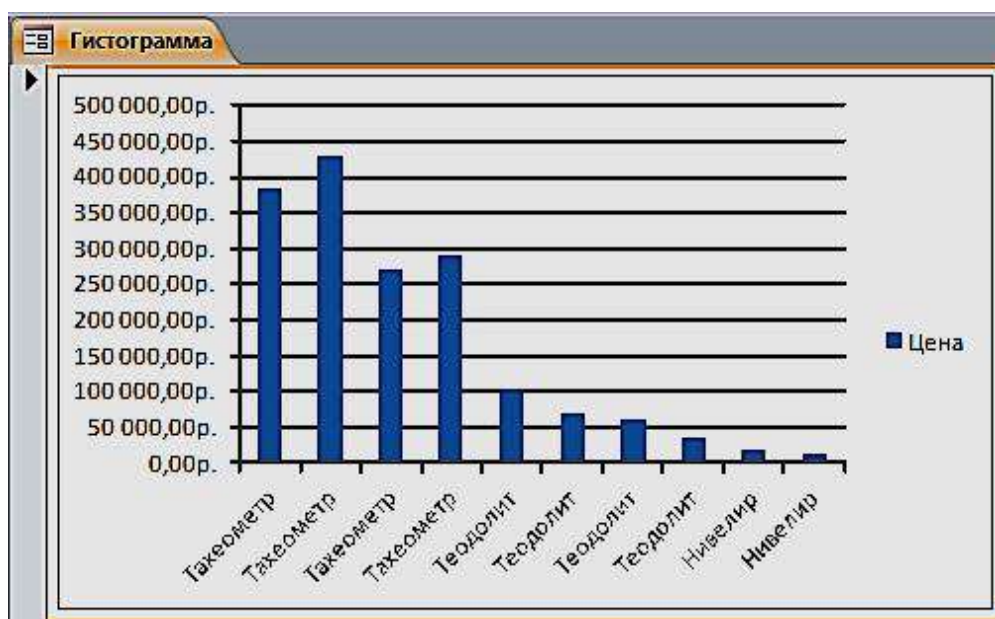


Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

Задание для самостоятельной работы

1. Изменить в форме «Товары» цвет денежных значений в поле «Цена» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «Фирмы» с подчиненной «Продажи».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

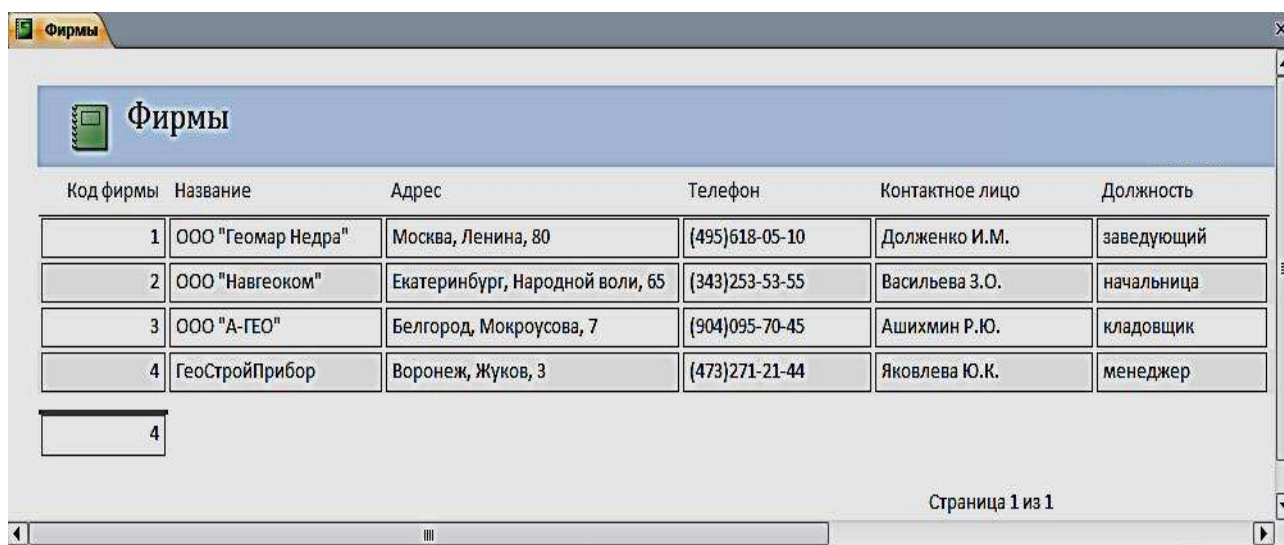
Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

Задание 1. Выберем в области навигации таблицу «Фирмы», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «Фирмы». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.



Код фирмы	Название	Адрес	Телефон	Контактное лицо	Должность
1	ООО "Геомар Недра"	Москва, Ленина, 80	(495)618-05-10	Долженко И.М.	заведующий
2	ООО "Навгеоком"	Екатеринбург, Народной воли, 65	(343)253-53-55	Васильева З.О.	начальница
3	ООО "А-ГЕО"	Белгород, Мокроусова, 7	(904)095-70-45	Ашихмин Р.Ю.	кладовщик
4	ГеоСтройПрибор	Воронеж, Жуков, 3	(473)271-21-44	Яковлева Ю.К.	менеджер

Рис. 5.1. Отчет в режиме «Макета»

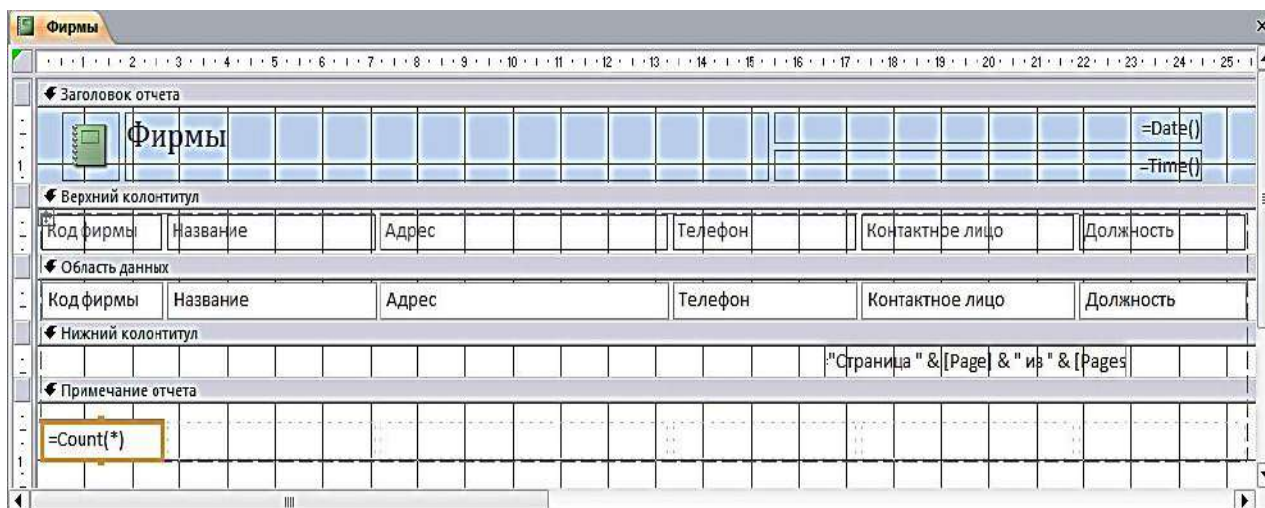


Рис. 5.2. Разделы однотобличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт**. Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы**. Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля**. На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

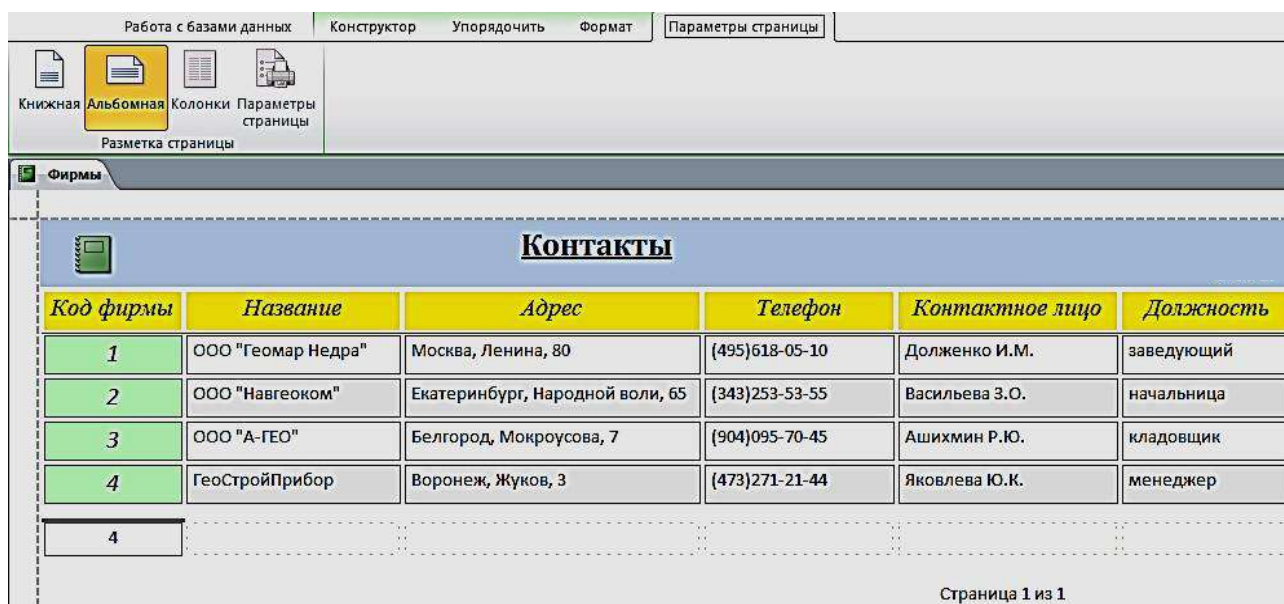


Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

ОТЧЕТ ПРОДАЖИ								
Дата продажи - по месяцам	Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
Январь 2018								
	ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 Р	4	3433102222
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 Р	2	3433795162
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 Р	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей)								
Сумма					52	1 277 121,60 Р		
Февраль 2018								
	ООО "Навгеоюм"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 Р	2	3433795162
	ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 Р	4	3433102222
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 Р	3	3432751822
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 Р	3	3432751822
Итого для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей)								
Сумма					40	427 047,60 Р		
ИТОГО					92	1 704 169,20 Р		

Рис. 5.6. Результат отчета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Создание главной кнопочной формы

с использованием макросов

Использование макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода VBA.

Макрос (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. **Макрокоманда** – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

Задание 1. Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим «**Конструктор**» (рис. 6.1).

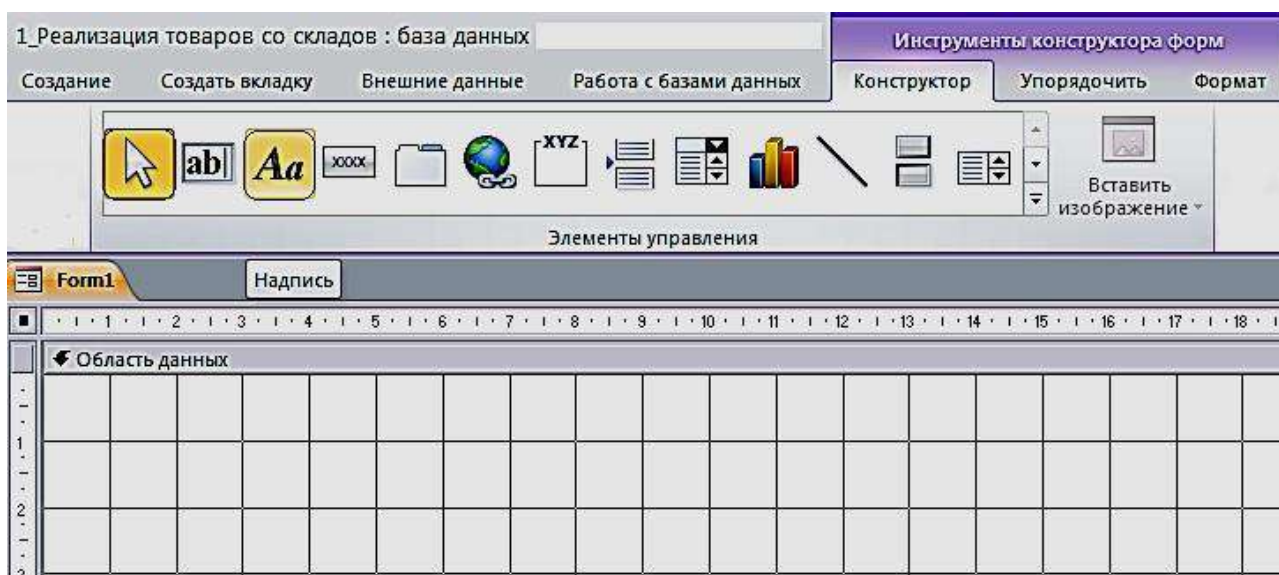


Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «Конструктор» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

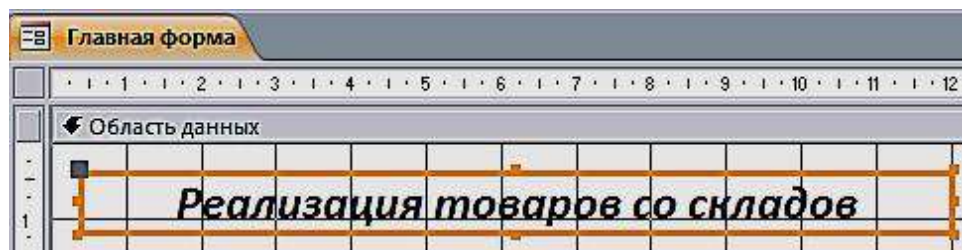


Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

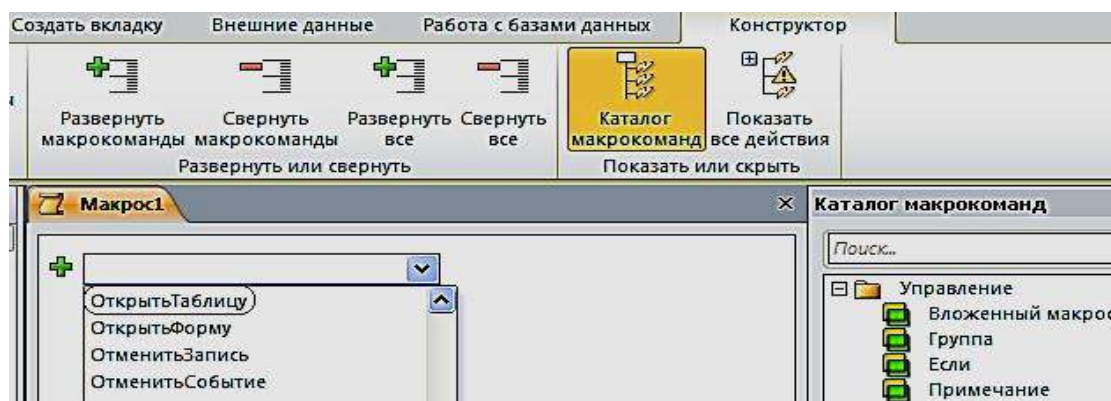


Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макроккоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

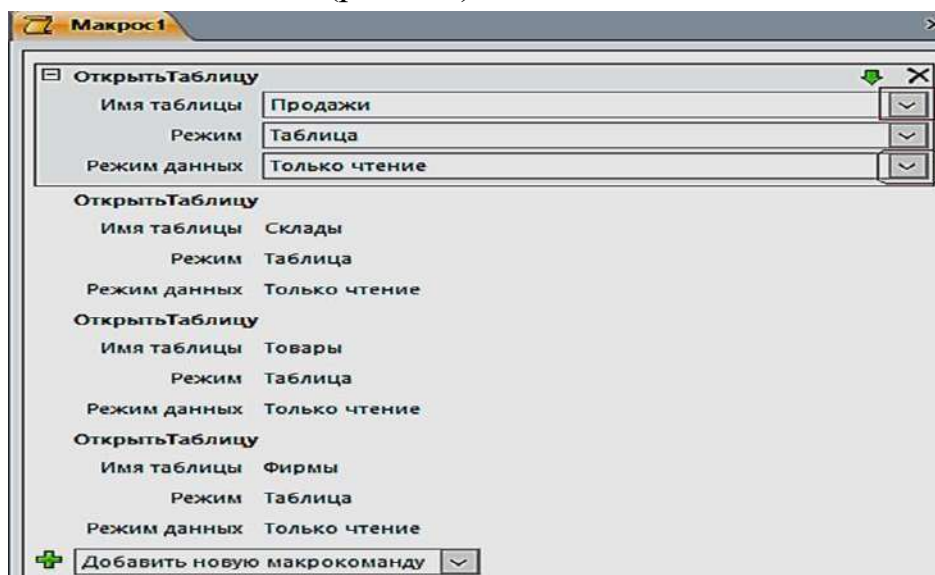


Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «Таблицы»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

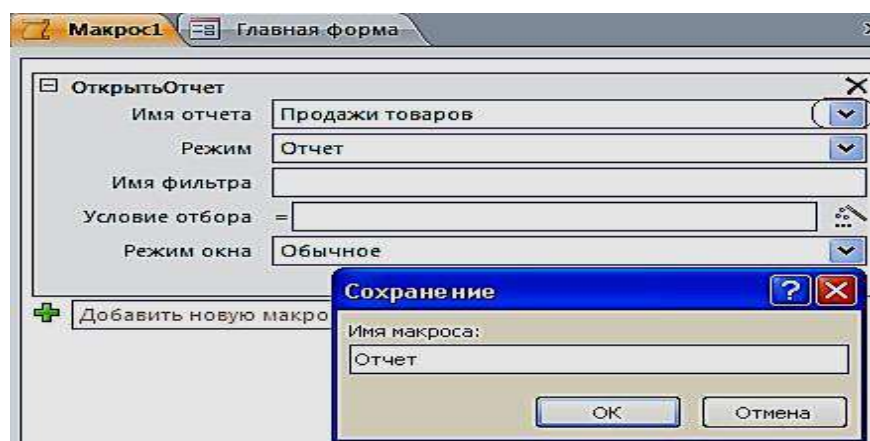


Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.

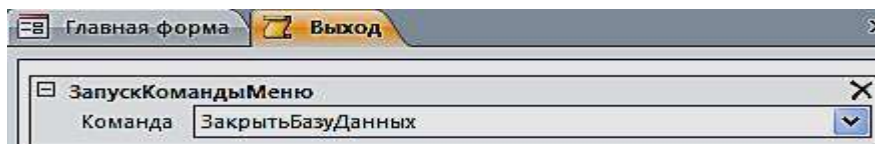


Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакретьБазуДанных**

Создание управляющих кнопок на экране

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД**. Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке «**Использовать мастера**». Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

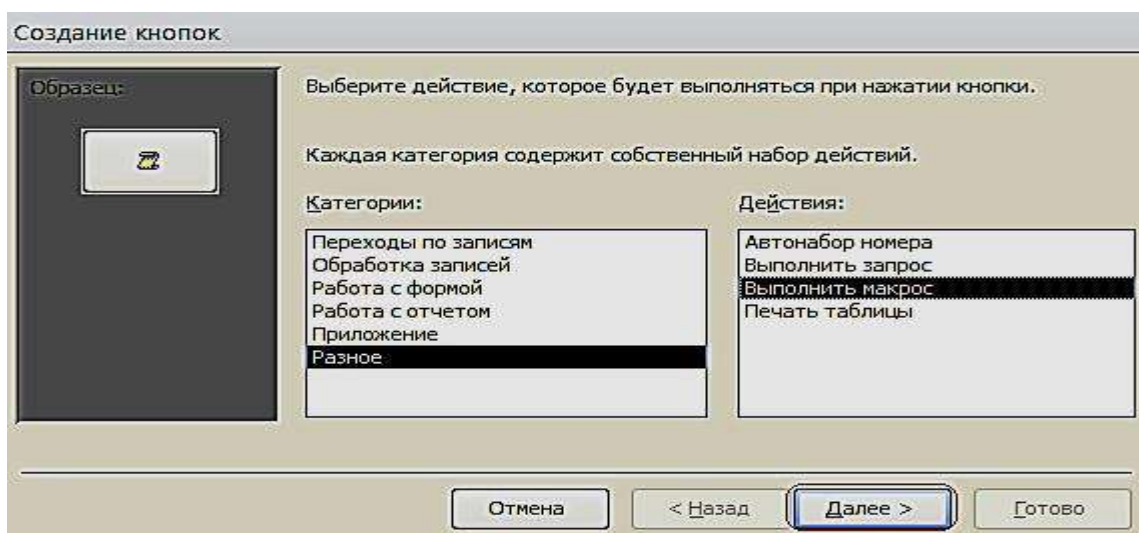


Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

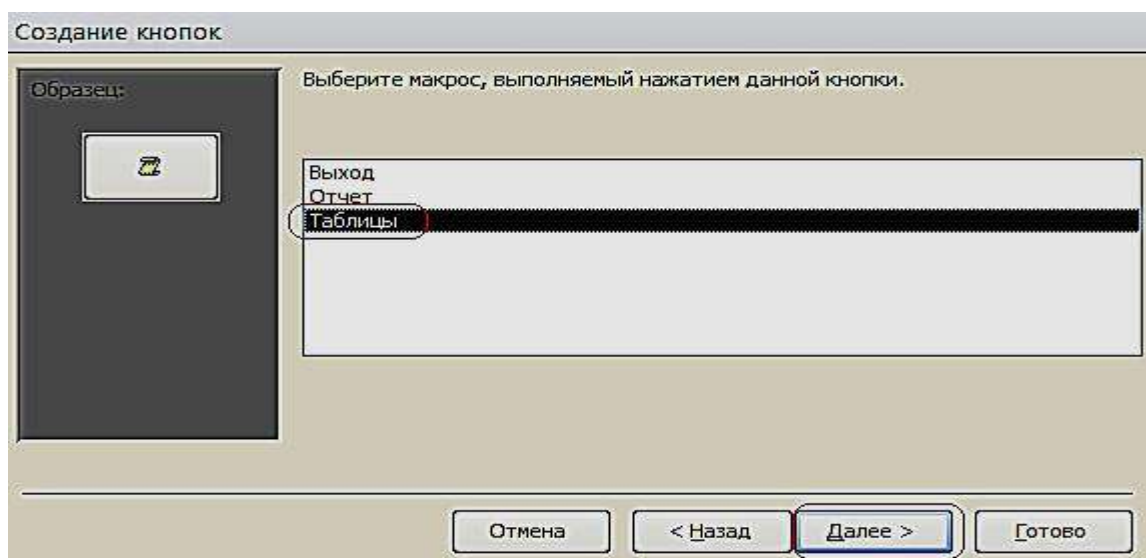


Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напишем название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

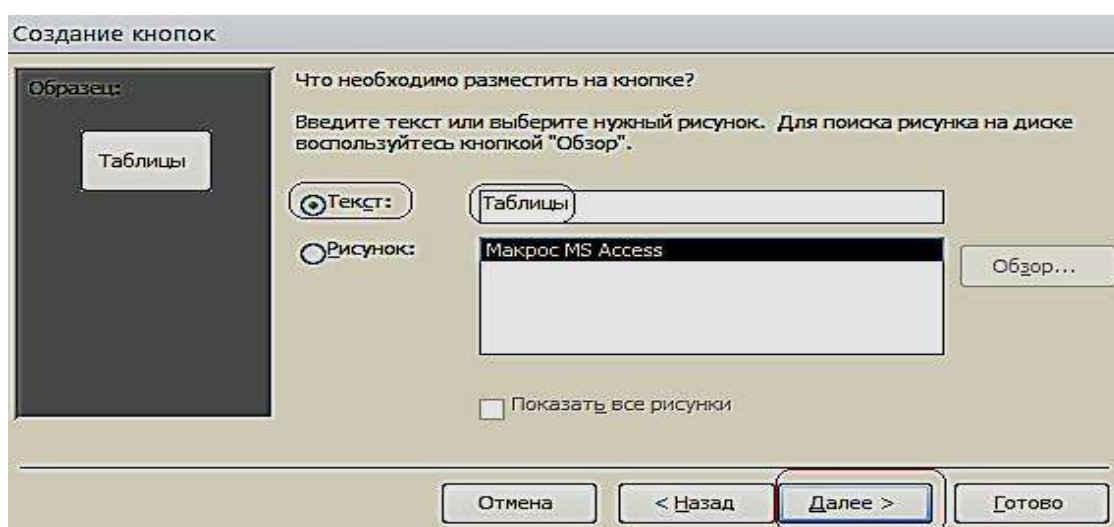


Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

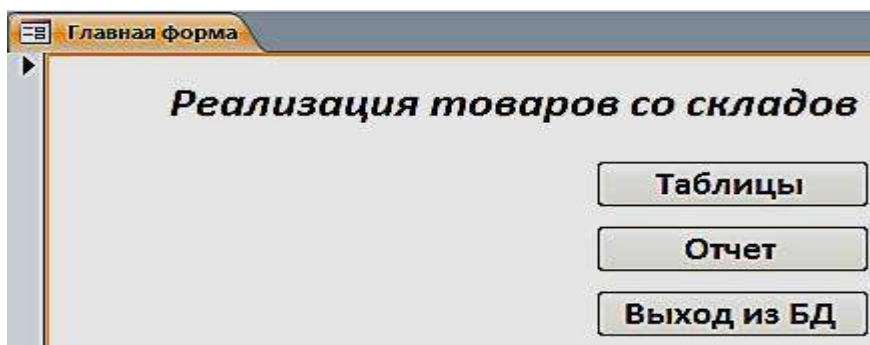


Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму**, нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

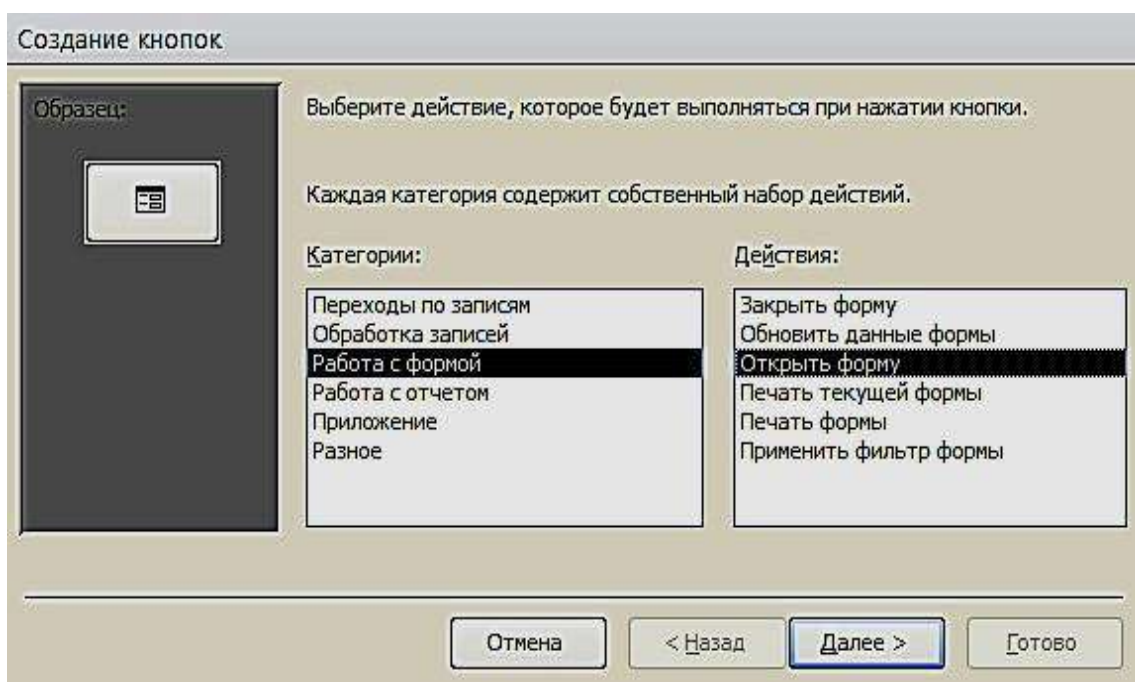


Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

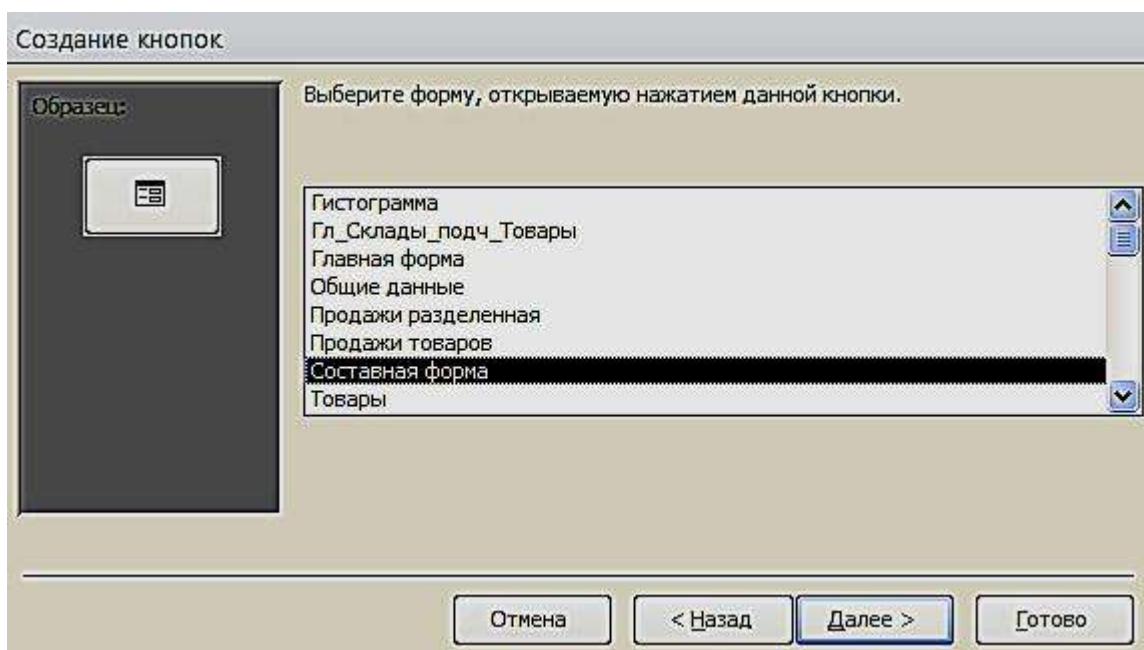


Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопку (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

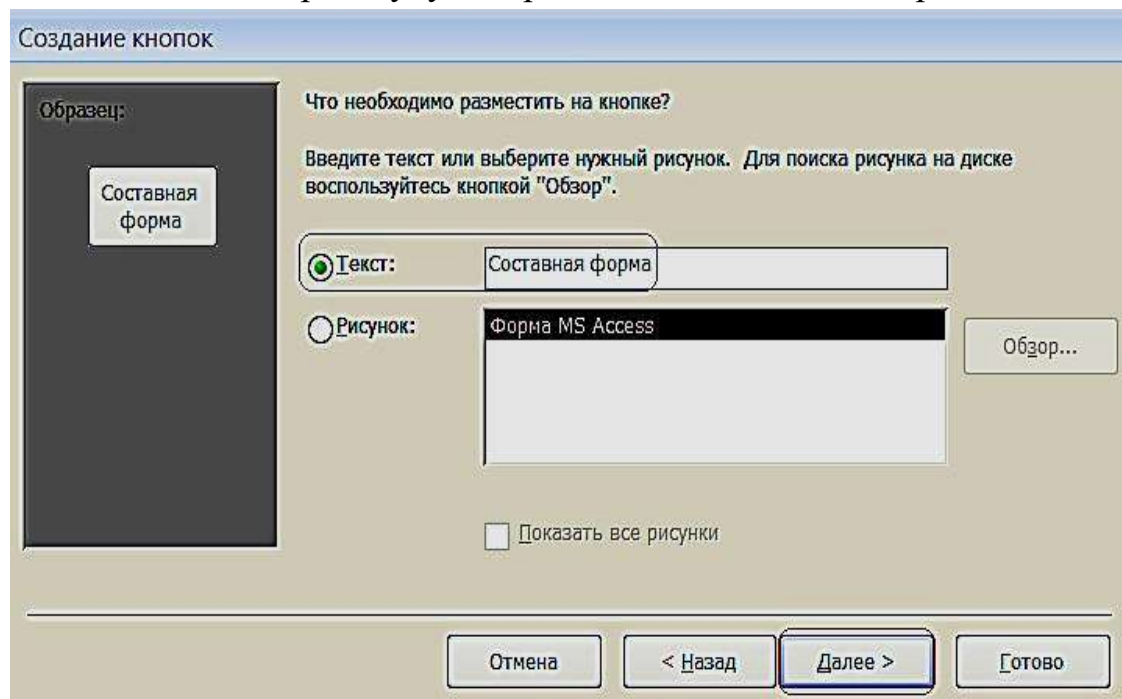


Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления «**Рисунок**».
8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).



Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «Формы»

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Указания к выполнению работы

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

Варианты заданий

Вариант № 1

Исходные данные:

- **Рабочие:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- **Цеха:** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
 - *Вычислить* общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а также среднемесячный заработок этого цеха.
 - *Создать* ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

Вариант № 2

Исходные данные:

- **Сотрудники:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- **Оплата труда:** должность, оклад
- **Отделы:** номер отдела, фамилия сотрудника *Определить:*
 - возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении

на работу и на текущее время; о количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет; о минимальный размер оклада.

- **Создать таблицу**, которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы.

Вариант № 3

Исходные данные:

Работники: фамилия, имя, отчество, цех.

- **Изделия:** наименование изделия, категория изделия (А, В, С), стоимость изготовления.
- **Итоги:** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

Рассчитать: о общее количество изделий каждой категории;

- о общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;
- **Создать ведомость** для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

Вариант № 4

Исходные данные:

- **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- **Расценки:** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, ...), цена 1 мин. разговора.
- **Заказ:** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.
- о *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. о **Создать таблицу**, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

Вариант № 5

Исходные данные:

- **Поставка:** поставщик, дата поставки, объем поставки.
- **Игрушки:** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.
- **Чеки:** номер чека, дата продажи, сумма.

- *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению A , B и X , выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают X и подходят ребенку от A до B лет.
- *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию:
наименование игрушек, которые подходят детям от 1 до 3 лет и их цены.

Вариант № 6 Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- **Предметы:** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

Журнал: оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. ○ *Определить* общее число активистов в списке.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «5» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «4» и «5», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «3», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

Вариант № 7

Исходные данные:

- **Авторы:** фамилия, имя отчество, название книги.
- **Книги:** год издания, количество экземпляров.
- **Местоположение:** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. ○ *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. ○ *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах заданного автора, которые находятся в коллекции.

Вариант № 8

Исходные данные:

- **Группа:** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- **Студент.** Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- **Результаты сессии:** оценки по 5-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет).
 - *Вычислить* средний балл, полученный каждым студентом за данной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.
 - *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

Вариант № 9 *Исходные*

данные:

- **Рейсы:** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.
 - **Самолеты:** шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.
 - **Билеты:** дата вылета, количество свободных мест в самолете.
- Определить:*
- номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город;
 - по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс;
 - общее количество рейсов через сутки в заданный город.
- *Создать таблицу*, которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

Вариант № 10 *Исход-*

ные данные:

- **Поставка:** артикул обуви (артикул начинается с буквы Ж – для женской обуви, М – для мужской, Д – для детской обуви, например: Д0321), наименование, объем поставки.
 - **Обувь:** цвет, стоимость.
 - **Наличие:** размер, количество.
- Определить:*
- стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в

наличии; ○ общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

Вариант № 11 Исходные данные:

- **Игроки:** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.
- **Футбольный клуб:** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.
- **Результаты:** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. ○ *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой команды, и суммарное штрафное время. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

Вариант № 12

Исходные данные:

- **Студенты:** фамилия, имя, дата рождения, дата поступления.
- **Выбор дисциплины:** код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «1», иначе – пробел).
- **Успеваемость:** средний балл, наличие задолженности.
 - *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и средний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

Вариант № 13 Исходные данные:

- **Рейсы:** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.

- **Поезда:** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.

- **Билеты:** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

Определить:

- количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером; ◦ количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- **Создать таблицу,** содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, 13:00 и 18:30).

Вариант № 14*Исходные данные:*

- **Сотрудники:** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.

- **Отделы:** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.

- **Движение по службе:** должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик). ◦ *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного. ◦ *Создать таблицу,* которая содержит список сотрудников пенсионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы.

- *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужчин пенсионного возраста.

Вариант № 15

Исходные данные:

- **Пациенты:** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, место жительства (город).
- **Палата:** количество мест в палате.
- **Учет:** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).

Определить: ○ количество иногородних граждан, прибывших в клинику; ○ количество пациентов с заданным диагнозом; ○ количество пациентов пенсионного возраста.

- *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

Вариант № 16

Исходные данные:

- **Пассажир:** фамилия, шифр багажа.
- **Багаж:** количество вещей, вес.
- **Учет:** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.

Определить: ○ общий средний вес одной вещи;

- багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи; ○ количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу*, содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

Вариант № 17

Исходные данные:

- **Компания:** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.
- **Курс:** дата, продажа, покупка.
- **Учет:** количество проданных акций, количество купленных акций.

Определить: ○ среднее количество проданных и купленных акций; ○ максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; ○ суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

Вариант № 18

Исходные данные:

- **Заказчик:** фамилия, адрес, телефон.
 - **Ремонт:** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
 - **Учет:** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.
- Определить:* ○ суммарную стоимость всех заказов; ○ количество заказов на ремонт заданного вида; ○ минимальная стоимость ремонта.
- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

Вариант № 19

Исходные данные:

- **Абоненты:** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- **Расценки:** код города, стоимость 1 минуты разговора.
- **Заказ:** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах. *Определить:* ○максимальную стоимость разговора; ○суммарную стоимость всех разговоров; ○общее количество разговоров в город с заданным кодом. □*Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

Вариант № 20

Исходные данные:

- **Товары:** шифр товара, наименование товара, категория (А, В, С), страна-производитель.
 - **Поставка:** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
 - **Учет:** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.
 - По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.
- Определить:* ○ суммарную прибыль от продажи всех товаров;
- наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

Вариант № 21

Исходные данные:

- **Продукция:** номер цеха изготовителя, наименование изделия
- **Стоимость:** код изделия, себестоимость
- **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных изделий, цена.

Определить: ○ суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изготовленных изделий; ○ общее количество изделий, изготовленных до заданной даты; ○ цену изделия по заданному наименованию.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

Вариант № 22

Исходные данные:

- **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- **Расценки:** разряд, стоимость одного часа.
- **Учет:** дата, количество отработанных часов.

Определить: ○ среднее количество часов, отработанных за день; ○ максимальную стоимость одного часа; ○ по заданной дате количество отработанных часов.

- *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о рабочих заданного цеха: ○ фамилия работника; ○ суммарная стоимость отработанного им времени.

Вариант № 23

Исходные данные:

- **Клиенты:** фамилия, адрес, телефон.
- **Заказ:** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.
- **Учет:** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

Определить: ○ количество заказов, выполненных мастером с заданной фамилией; ○ стоимость самого дорого заказа; ○ среднюю стоимость заказов.

- *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

Вариант № 24

Исходные данные:

- **Импортёры:** фирма-импортёр, страна, наименование товара.
- **Поставка:** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость 1 штуки в условных единицах.
- **Учет:** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:*
 - суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;
 - суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; ○ минимальную стоимость товара.
- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

Вариант № 25

Исходные данные:

- **Рабочие:** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- **Оплата:** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.
- **Учет:** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. *Определить:*
 - общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми мастерами заданного цеха;
 - сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая составляет 20 % от оплаты за качественную работу;
 - фамилию мастера, который изготовил максимальное количество качественных деталей.
- *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

Вариант № 26

Исходные данные:

- **Отделение:** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.

- **Лечение:** шифр болезни, продолжительность.
- **Оплата:** диагностика, стоимость 1 дня лечения, затраты на лекарство.
- **Суммарная стоимость:** отработанного им времени.
Определить: ○ по названию болезни затраты на лекарство; ○ среднюю стоимость 1 дня лечения;
 ○ рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.
- **Создать таблицу,** которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

Вариант № 27

Исходные данные:

- **Книги:** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.
- **Магазины:** шифр книги, номер магазина, цена.
- **Учет продаж:** код продажи, продано, остаток.
Определить: ○ количество проданных книг в данном магазине; ○ суммарную стоимость всех непроданных книг; ○ среднюю цену одной книги.
- **Создать таблицу,** которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

Вариант № 28

Исходные данные:

- **Детали:** наименование детали, цех-изготовитель
- **Изготовление:** шифр материала, шифр детали, затрата материала на 1 деталь.
- **Учет:** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.
Определить: ○ для всех деталей суммарные затраты материала на брак; ○ количество качественных деталей; ○ деталь, на которую тратится более всего материала. □ **Создать таблицу,** которая содержит шифр детали и процент брака.

Вариант № 29

Исходные данные:

- **Лекарство:** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.
 - **Стоимость:** шифр лекарства, код аптеки, цена за 1 упаковку.
 - **Продажа:** количество проданных упаковок, остаток.
- Определить:* ○ суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми аптеками и принадлежащее заданной категории.
- стоимость всех непроданных упаковок;
 - среднюю стоимость лекарства.
- **Создать таблицу,** которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

Вариант № 30

Исходные данные:

- **Продавцы:** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
 - **Товары:** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);
 - **Журнал регистрации:** количество проданных товаров по дням недели (понедельник, вторник, ..., суббота);
- Определить:* ○ общее количество товаров, проданных каждым продавцом; ○ фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.
- **Создать таблицу,** которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).
2. Гурвиц Г. Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере: М., 2012. 258 с.
3. Одиноккина С. В. Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

Дополнительная литература:

1. Домострой А. MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ>
<https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ>
2. Домострой А. MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q>
<https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q>
3. Домострой А. MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34>
<https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34>
4. Домострой А. MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s>
<https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s>
5. Домострой А. MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY>
<https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY>
6. Домострой А. MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE>
<https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE>
7. Домострой А. MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzyrOU>
<https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzyrOU>
8. Макарова Н. В. Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

по дисциплине

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Направленность

Материалы и технологии цифрового производства

форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

год набора: **2024**

Автор: Адас В.Е.

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатации горного оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 18.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 20.10.2023

(Дата)

Екатеринбург
2023

Оглавление

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП.....	3
Тема 1.1 Введение в предмет. Понятие ППП.....	4
Тема 1.2 Структура и основные компоненты ППП.....	10
Тема 1.3 Эволюция ППП. Примеры современных ППП.....	13
ЧАСТЬ II. ПППMSOFFICE.....	22
Тема 2.1 Структура и состав MS Office. Основные приложения	23
Тема 2.2 Введение в офисное программирование.....	29
Тема 2.3 Макросы. Использование макрорекордера.....	34
Тема 2.4 Среда разработки VBA.....	38

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП

ТЕМА 1.1 ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ ППП

Цели и задачи дисциплины

- Изучение основных принципов, используемых в разработке интегрированных программных продуктов.
- Изучение структуры, состава и назначения компонентов интегрированного ПО, а также средств организации взаимодействия между компонентами и инструментальных средств расширения функциональности.
- Формирование навыков работы со средствами автоматизации решения прикладных задач.
- Формирование навыков использования встроенных средств разработки.
- Требования к уровню освоения дисциплины
- В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать принципы построения прикладных информационных систем
- уметь использовать современные программные средства для обработки разнородной информации;
- уметь автоматизировать процесс решения прикладных задач с помощью встроенных языков программирования;
- иметь представление о современном состоянии и тенденциях развития рынка прикладного ПО.

Основные понятия и определения

Информационная система (ИС) - организационно упорядоченная совокупность документов (массивов документов) и информационных технологий, в том числе с использованием средств вычислительной техники и связи, реализующих информационные процессы. Информационные системы предназначены для хранения, обработки, поиска, распространения, передачи и представления информации.

Автоматизированная (информационная) система (АС) - совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для хранения и/или управления данными и ин-

формацией и производства вычислений и управляемая человеком-оператором (в этом главное отличие автоматизированной системы от автоматической).

Многоуровневое представление ИС - модель представления информационной системы в виде совокупности взаимосвязанных уровней, разделенных по функциональному назначению (рис. 1).



Рис. 1. Многоуровневое представление информационных систем.

Аппаратное обеспечение ИС - комплекс электронных, электрических и механических устройств, входящих в состав информационной системы или сети.

Программное обеспечение (ПО) — совокупность программ и данных, предназначенных для решения определенного круга задач и хранящиеся на машинных носителях.

Программа — последовательность формализованных инструкций, представляющих алгоритм решения некоторой задачи и предназначенная для исполнения устройством управления вычислительной машины. Инструкции программы записываются при помощи машинного кода или специальных языков программирования. В зависимости от контекста термин «программа» может относиться к исходным текстам, при помощи которых записывается алгоритм, или к исполняемому машинному коду.

Программист - специалист, занимающийся разработкой и проверкой программ. Различают системных и прикладных программистов.

Пользователь - человек, принимающий участие в управлении объектами и системами некоторой предметной области и являющийся составным элементом автоматизированной системы.

Прикладное программное обеспечение - программное обеспечение, ориентированное на конечного пользователя и предназначенное для решения пользовательских задач.

Прикладное ПО состоит из:

- отдельных прикладных программ и пакетов прикладных программ, предназначенных для решения различных задач пользователей;
- автоматизированных систем, созданных на основе этих пакетов.

Пакет прикладных программ - комплект программ, предназначенных для решения задач из определенной проблемной области. Обычно применение пакета прикладных программ предполагает наличие специальной документации: лицензионного свидетельства, паспорта, инструкции пользователя и т.п.

Классификация программного обеспечения

Любая классификация подразумевает выбор некоторого группировочного признака (или нескольких), на основании которого и производится отнесение объектов к тому или иному классу. Так, при классификации программного обеспечения по способу распространения можно выделить следующие категории (список не полный):

- Commercial Software - коммерческое (с ограниченными лицензией возможностями на использование), разрабатываемое для получения прибыли.
- Freeware - свободное ПО, распространяемое без ограничений на использование, модификацию и распространение.
- Shareware - условно-бесплатное ПО, с частичными ограничениями при работе в ознакомительном режиме (например, определенное количество запусков программы).
- Abandonware - «заброшенное» ПО, поддержка которого непосредственным разработчиком прекращена, но продолжается третьими лицами (например, партнерами или энтузиастами).
- Adware - ПО, в код которого включены рекламные материалы. Такое ПО распространяется бесплатно, но для отключения рекламных блоков необходима оплата.
- Careware - «благотворительное» ПО, оплату за которое разработчик (или распространитель) просит переводить на благотворительные нужды.

При классификации программного обеспечения по назначению в качестве критерия используют уровень представления ИС, на который ориентирована та или иная программа.

Соответственно выделяют следующие классы ПО:

1. Системное ПО - решает задачи общего управления и поддержания работоспособности системы в целом. К этому классу относят операционные системы, менеджеры загрузки, драйверы устройств, программные кодеки, утилиты и программные средства защиты информации.
2. Инструментальное ПО включает средства разработки (трансляторы, отладчики, интегрированные среды, различные SDK и т.п.) и системы управления базами данных (СУБД).
3. Прикладное ПО - предназначено для решения прикладных задач конечными пользователями.

Прикладное ПО - самый обширный класс программ, в рамках которого возможна дальнейшая классификация, например, по предметным областям. В этом случае группировочным признаком является класс задач, решаемых программой. Приведем несколько примеров:

- Офисные приложения - предназначены для автоматизации офисной деятельности (текстовые редакторы и процессоры, электронные таблицы, редакторы презентаций и т.п.)
- Корпоративные информационные системы - бухгалтерские программы, системы корпоративного управления, системы управления проектами (Project Management), инструменты автоматизации документооборота (EDM-системы) и управления архивами документов (DWM-системы)
- Системы проектирования и производства - системы автоматизированного проектирования (САПР, CAD/CAM-системы), системы управления технологическими (SCADA) и производственными (MES) процессами
- Научное ПО - системы математического и статистического расчета, анализа и моделирования
- Геоинформационные системы (ГИС)
- Системы поддержки принятия решений (СППР)
- Клиенты доступа к сетевым сервисам (электронная почта, веб-браузеры, передача сообщений, чат-каналы, клиенты файлообменных сетей и т.п.)
- Мультимедийное ПО - компьютерные игры, средства просмотра и редактирования аудио- и видеоинформации, графические редакторы и вьюеры, анимационные редакторы и т.п.

С точки зрения конечного пользователя такая классификация оправдана и наглядна, для разработчика же более значимым фактором является структура прикладной программы, в общем случае состоящей из нескольких компонентов. Назначение этих компонентов, связи между ними

и способность к взаимодействию определяют интеграцию прикладного ПО. Чем теснее связаны программные компоненты, тем выше степень интеграции.

В зависимости от степени интеграции многочисленные прикладные программные средства можно классифицировать следующим образом¹:

1. отдельные прикладные программы;
2. библиотеки прикладных программ;
3. пакеты прикладных программ;
4. интегрированные программные системы.

Отдельная прикладная программа пишется, как правило, на некотором высокоуровневом языке программирования (Pascal, Basic и т.п.) и предназначается для решения конкретной прикладной задачи. Такая программа может быть реализована в виде набора модулей, каждый из которых выполняет некоторую самостоятельную функцию (например, модуль пользовательского интерфейса, модуль обработки ошибок, модуль печати и т.п.).

При этом доступ к функциям модулей из внешних программ невозможен.

Библиотека представляет собой набор отдельных программ, каждая из которых решает некоторую прикладную задачу или выполняет определенные вспомогательные функции (управление памятью, обмен с внешними устройствами и т.п.). Библиотеки программ зарекомендовали себя эффективным средством решения вычислительных задач. Они интенсивно используются при решении научных и инженерных задач с помощью ЭВМ.

Условно их можно разделить на библиотеки общего назначения и специализированные библиотеки.

Пакет прикладных программ (ППП) - это комплекс взаимосвязанных программ, ориентированный на решение определенного класса задач. Формально такое определение не исключает из числа пакетов и библиотеки программ, однако у ППП, как отдельной категории, есть ряд особенностей, среди которых: ориентация на решение классов задач, унифицированный интерфейс, наличие языковых средств.

Интегрированная программная система - это комплекс программ, элементами которого являются различные пакеты и библиотеки программ. Примером служат системы автоматизированного проектирования, имеющие в своем составе несколько ППП различного

¹ Следует отметить отсутствие безусловных границ между перечисленными формами прикладного программного обеспечения

назначения. Часто в подобной системе решаются задачи, относящиеся к различным классам или даже к различным предметным областям.

Понятие пакета прикладных программ

Итак, пакет прикладных программ (ППП) – это комплекс взаимосвязанных программ для решения определенного класса задач из конкретной предметной области. На текущем этапе развития информационных технологий именно ППП являются наиболее востребованным видом прикладного ПО. Это связано с упомянутыми ранее особенностями ППП. Рассмотрим их подробнее:

- Ориентация на решение класса задач. Одной из главных особенностей является ориентация ППП не на отдельную задачу, а на некоторый класс задач, в том числе и специфичных, из определенной предметной области. Так, например, офисные пакеты ориентированы на офисную деятельность, одна из задач которой - подготовка документов (в общем случае включающих не только текстовую информацию, но и таблицы, диаграммы, изображения). Следовательно, офисный пакет должен реализовывать функции обработки текста, представлять средства обработки табличной информации, средства построения диаграмм разного вида и первичные средства редактирования растровой и векторной графики.
- Наличие языковых средств. Другой особенностью ППП является наличие в его составе специализированных языковых средств, позволяющих расширить число задач, решаемых пакетом или адаптировать пакет под конкретные нужды. Пакет может представлять поддержку нескольких входных языков, поддерживающих различные парадигмы. Поддерживаемые языки могут быть использованы для формализации исходной задачи, описания алгоритма решения и начальных данных, организации доступа к внешним источникам данных, разработки программных модулей, описания модели предметной области, управления процессом решения в диалоговом режиме и других целей. Примерами входных языков ППП являются VBA в пакете MS Office, AutoLISP/VisualLISP в Autodesk AutoCAD, StarBasic в OpenOffice.org
- Единообразие работы с компонентами пакета. Еще одна особенность ППП состоит в наличии специальных системных средств, обеспечивавших унифицированную работу с компонентами. К их числу относятся специализированные банки данных, средства

информационного обеспечения, средства взаимодействия пакета с операционной системой, типовой пользовательский интерфейс и т.п.

•

ТЕМА 1.2 СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ППП

Несмотря на разнообразие конкретных пакетных разработок, их обобщенную внутреннюю структуру можно представить в виде трех взаимосвязанных элементов¹ (рис. 2):

1. входной язык (макроязык, язык управления) - представляет средство общения пользователя с пакетом;
2. предметное обеспечение (функциональное наполнение) - реализует особенности конкретной предметной области;
3. системное обеспечение (системное наполнение) - представляет низкоуровневые средства, например, доступ к функциям операционной системы.

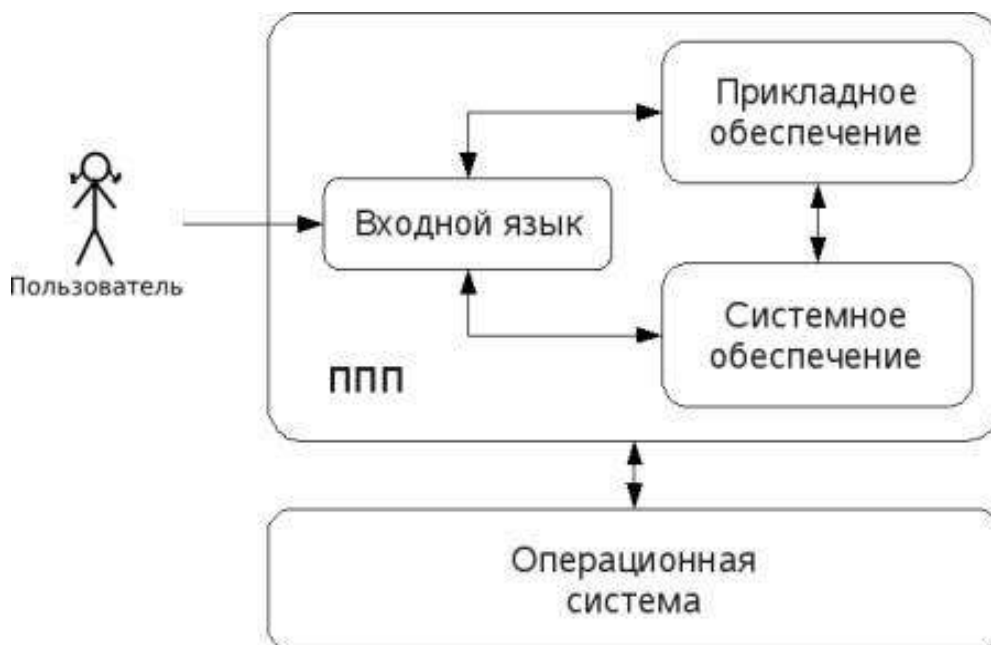


Рис. 2. Структура ППП.

Входной язык - основной инструмент при работе пользователя с пакетом прикладных программ. В качестве входного языка могут использоваться как универсальные (Pascal, Basic и т.п.), так и специализированные, проблемно-ориентированные языки программирования (Cobol - для бизнес-приложений, Lisp - списочные структуры данных, Fortran и MathLAB - математические задачи и т.п.).

Развитый пакет может обладать несколькими входными языками, предназначенными для выполнения различных функций в рамках решаемого класса задач. Так, например, в пакете OpenOffice.org поддерживаются языки StarBasic, Python, JavaScript и Java. StarBasic является основным входным языком, предназначенным для автоматизации работы с пакетом, для этого языка имеется интегрированная среда разработки и встроенный отладчик. Скрипты на языках Python и JavaScript загружаются и исполняются из внешних файлов. На Java (через SDK и функции API OpenOffice) можно создавать модули расширения и полнофункциональные приложения-компоненты.

Входные языки отражают объем и качество предоставляемых пакетом возможностей, а также удобство их использования. Таким образом, именно входной язык является основным показателем возможностей ППП. Однако стоит отметить, что в современных пакетах обращение пользователя к языковым средствам обычно происходит косвенно, через графический интерфейс.

Предметное обеспечение отражает особенности решаемого класса задач из конкретной предметной области и включает:

- программные модули, реализующие алгоритмы (или их отдельные фрагменты) прикладных задач;
- средства сборки программ из отдельных модулей.

Наиболее распространено в настоящее время оформление программных модулей в виде библиотек, подключаемых статически или динамически. В зависимости от использованного разработчиками подхода к проектированию и реализации ППП такие библиотеки содержат встроенные классы и описания их интерфейсов (при использовании объектно-ориентированного программирования). При использовании парадигмы структурного программирования в библиотечных модулях содержатся процедуры и функции, предназначенные для решения некоторых самостоятельных задач. В обоих случаях библиотеки связаны с другими модулями пакета лишь входной и выходной информацией.

Системное обеспечение представляет собой совокупность низкоуровневых средств (программы, файлы, таблицы и т.д.), обеспечивающих определенную дисциплину работы пользователя при решении прикладных задач и формирующих окружение пакета. К системному обеспечению ППП относят следующие компоненты:

- монитор - программа, управляющая взаимодействием всех компонентов ППП;

- транслятор(ы) с входных языков - для ППП характерно использование интерпретируемых языков;
- средства доступа к данным - драйверы баз данных и/или компоненты, представляющие доступ через унифицированные интерфейсы (ODBC, JDBC, ADO, BDE и т.п.);
- информационно-справочный модуль - предоставляет функции поддержки, среди которых информационные сообщения, встроенная справочная системы и т.п.

различные служебные программы, выполняющие низкоуровневые операции (автосохранение, синхронизация совместно используемых файлов и т.д.)

Приведенная логическая структура ППП достаточна условна и в конкретном ППП может отсутствовать четкое разделение программ на предметное и системное обеспечение. Например, программа планирования вычислений, относящаяся к прикладному обеспечению, может одновременно выполнять и ряд служебных функций (информационное обеспечение, связь с операционной системой и т.п.).

Кроме того, одни и те же программы в одном пакете могут относиться к предметному обеспечению, а в другом - к системному. Так, программы построения диаграмм в рамках специализированного пакета машинной графики естественно отнести к предметному обеспечению. Однако те же программы следует считать вспомогательными и относящимися к системному обеспечению, например, в пакете решения вычислительных задач.

ТЕМА 1.3 ЭВОЛЮЦИЯ ППП. ПРИМЕРЫ СОВРЕМЕННЫХ ППП

Этапы развития ППП

Первые ППП представляли собой простые тематические подборки программ для решения отдельных задач в той или иной прикладной области, обращение к ним выполнялось с помощью средств оболочки ОС или из других программ. Современный пакет является сложной программной системой, включающей специализированные системные и языковые средства. В относительно короткой истории развития вычислительных ППП можно выделить *4 основных поколения* (класса) пакетов. Каждый из этих: классов характеризуется определенными особенностями входящих состав ППП компонентов - входных языков, предметного и системного обеспечения.

Первое поколение

В качестве входных языков ППП первого поколения использовались универсальные языки программирования (Фортран, Алгол-60 и т.п.) или языки управления заданиями соответствующих операционных систем. Проблемная ориентация входных языков достигалась за счет соответствующей мнемоники в идентификаторах. Составление заданий на таком языке практически не отличалось от написания программ на алгоритмическом языке.

Предметное обеспечение первых ППП, как правило, было организовано в форме библиотек программ, т.е. в виде наборов (пакетов) независимых программ на некотором базовом языке программирования (отсюда впервые возник и сам термин «пакет»). Такие ППП иногда называют *пакетами библиотечного типа*, или *пакетами простой структуры*.

В качестве системного обеспечения пакетов первого поколения обычно использовались штатные компоненты программного обеспечения ЭВМ: компиляторы с алгоритмических языков, редакторы текстов, средства организации библиотек программ, архивные системы и т.д. Эти пакеты не требовали сколько-нибудь развитой системной поддержки, и для их функционирования вполне хватало указанных системных средств общего назначения. В большинстве случаев разработчиками таких пакетов были прикладные программисты, которые пытались приспособить универсальные языки программирования к своим нуждам.

Второе поколение

Разработка ППП второго поколения осуществлялась уже с участием системных программистов. Это привело к появлению специализированных входных языков на базе универсальных языков программирования. Проблемная ориентация таких языков достигалась не только за счет использования определенной мнемоники, но также применением соответствующих языковых конструкций, которые упрощали формулировку задачи и делали ее более наглядной. Транслятор с такого языка представлял собой препроцессор (чаще всего макропроцессор) к транслятору соответствующего алгоритмического языка.

В качестве модулей в пакетах этого класса стали использоваться не только программные единицы (т.е. законченные программы на том или ином языке программирования), но и такие объекты, как последовательность операторов языка программирования, совокупность данных, схема счета и др.

Существенные изменения претерпели также принципы организации системного обеспечения ППП. В достаточно развитых пакетах второго поколения уже можно выделить

элементы системного обеспечения, характерные для современных пакетов: монитор, трансляторы с входных языков, специализированные банки данных, средства описания модели предметной области и планирования вычислений и др.

Третье поколение

Третий этап развития ППП характеризуется появлением самостоятельных входных языков, ориентированных на пользователей-непрограммистов. Особое внимание в таких ППП уделяется системным компонентам, обеспечивающим простоту и удобство. Это достигается главным образом за счет специализации входных языков и включения в состав пакета средств автоматизированного планирования вычислений.

Четвертое поколение

Четвертый этап характеризуется созданием ППП, эксплуатируемых в интерактивном режиме работы. Основным преимуществом диалогового взаимодействия с ЭВМ является возможность активной обратной связи с пользователем в процессе постановки задачи, ее решения и анализа полученных результатов. Появление и интенсивное развитие различных форм диалогового общения обусловлено прежде всего прогрессом в области технических средств (графическая подсистема ЭВМ и средства мультимедиа, сетевые средства). Развитие аппаратного обеспечения повлекло за собой создание разнообразных программных средств поддержки диалогового режима работы (диалоговые операционные системы, диалоговые пакеты программ различного назначения и т. д.).

Прикладная система состоит из *диалогового монитора* - набора универсальных программ, обеспечивающих ведение диалога и обмен данными, и базы знаний об области. Информация о структуре, целях и форма диалога задает сценарий, в соответствии с которым монитор управляет ходом диалога. Носителями процедурных знаний о предметной области являются прикладные модули, реализующие функции собственной системы. Таким образом, создание прикладной системы сводится к настройке диалогового монитора на конкретный диалог, путем заполнения базы знаний. При этом программировать в традиционном смысле этого слова приходится лишь прикладные модули, знания о диалоге вводятся в систему с помощью набора соответствующих средств - редактора сценариев. Логично требовать, чтобы редактор сценариев также представлял собой диалоговую программу, отвечающую рассмотренным выше требованиям. Благодаря готовому универсальному монитору программист может сосредоточиться на решении чисто

прикладных задач, выделение же знаний о диалоге в сценарий обеспечивает в значительной степени необходимая гибкость программного продукта.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблеме создания *«интеллектуальных ППП»*. Такой пакет позволяет конечному пользователю лишь сформулировать свою задачу в содержательных терминах, не указывая алгоритма ее решения. Синтез решения и сборка целевой программы производятся автоматически. При этом детали вычислений скрыты от пользователя, и компьютер становится интеллектуальным партнером человека, способным понимать его задачи. Предметное обеспечение подобного ППП представляет собой некоторую базу знаний, содержащую как процедурные, так и описательные знания. Такой способ решения иногда называют концептуальным программированием, характерными особенностями которого является программирование в терминах предметной области использование ЭВМ уже на этапе постановки задач, автоматический синтез программ решения задачи, накопление знаний о решаемых задачах в базе знаний.

Краткий обзор некоторых ППП

Для иллюстрации ранее рассмотренных материалов приведем несколько примеров современных пакетов прикладных программ из различных предметных областей. Учитывая, что постоянно появляются новые версии программных продуктов, здесь будут рассматриваться не возможности конкретных версий, а лишь основные структурные компоненты, входящие в состав того или иного пакета.

Autodesk AutoCAD

Основное назначение ППП AutoCAD - создание чертежей и проектной документации. Современные версии этого пакета представляют существенно большие возможности, среди которых построение трехмерных твердотельных моделей, инженерно-технические расчеты и многое другое.

Первые версии системы AutoCAD, разрабатываемой американской фирмой Autodesk, появились еще в начале 80-х годов двадцатого века, и сразу же привлекли к себе внимание своим оригинальным оформлением и удобством для пользователя. Постоянное развитие системы, учет замечаний, интеграция с новыми продуктами других ведущих фирм сделали AutoCAD мировым лидером на рынке программного обеспечения для автоматизированного проектирования.

Языковые средства

В основе языковых средств ППП AutoCAD - технология Visual LISP, базирующаяся на языке AutoLISP (подмножество языка LISP) и используемая для создания приложений и управления в AutoCAD. Visual LISP представляет полное окружение, включающее:

- Интегрированную среду разработки, облегчающую написание, отладку и сопровождение приложений на AutoLISP
- Доступ к объектам ActiveX и обработчикам событий
- Защиту исходного кода
- Доступ к файловым функциям операционной системы
- Расширенные функции языка LISP для обработки списочных структур данных.

Для разработчиков совместимых приложений в AutoCAD включена поддержка ObjectARX. Это программное окружение представляет объектно-ориентированный интерфейс для приложений на языках C++, C# и VB.NET и обеспечивает прямой доступ к структурам БД, графической подсистеме и встроенным командам пакета.

Кроме того, в AutoCAD имеется поддержка языка Visual Basic for Applications (VBA), что позволяет использовать этот пакет совместно с другими приложениями, в частности, из семейства Microsoft Office.

Предметное обеспечение

К предметному обеспечению пакета в первую очередь относятся функции построения примитивов - различных элементов чертежа. Простые примитивы - это такие объекты как точка, отрезок, круг (окружность) и т.д. К сложным примитивам относятся: полилиния, мультилиния, мультитекст (многострочный текст), размер, выноска, допуск, штриховка, вхождение блока или внешней ссылки, атрибут, растровое изображение. Кроме того, есть пространственные примитивы, видовые экраны и пр. Операции построения *большой части* примитивов могут быть выполнены через пользовательский интерфейс, *все* - через команды языка.

Высокоуровневые средства представлены расширениями и приложениями AutoCAD для конкретных предметных областей. Например в машиностроении используется Autodesk Mechanical Desktop - предназначенный для сложного трехмерного моделирования, в том числе валов и пружин. Для проектирования деталей из листовых материалов предназначена система Copra Sheet Metal Bender Desktop (разработчик - Data-M Software GmbH). Моделирование динамики работы механизмов может выполняться в системе Dynamic Designer (Mechanical

Dynamics). В числе известных архитектурных и строительных приложений можно отметить системы АРКО (АПИО-Центр), СПДС GraphiCS (Consistent Software), ArchiCAD. Для проектирования промышленных объектов может использоваться система PLANT-4D (CEA Technology). Это лишь некоторые из областей использования AutoCAD.

Системное обеспечение

Среди системного обеспечения следует отметить основной формат файлов AutoCAD .dwg, который стал стандартом «де факто» для прочих САПР.

К системному же обеспечению относятся типовые и специализированные библиотеки деталей и шаблонов, использование которых позволяет существенно ускорить процесс проектирования. Здесь же упомянем требования отраслевых и государственных стандартов, которым должны соответствовать чертежи и спецификации.

Конфигурация и настройки различных режимов AutoCAD устанавливаются через т.н. системные переменные. Изменяя их значения можно задавать пути к файлам, точность вычислений, формат вывода и многое другое.

Adobe Flash

Adobe (ранее Macromedia) Flash - это технология и инструментарий разработки интерактивного содержания с большими функциональными возможностями для цифровых, веб- и мобильных платформ. Она позволяет создавать компактные, масштабируемые анимированные приложения (ролики), которые можно использовать как отдельно, так и встраивая в различное окружение (в частности, в веб-страницы). Эти возможности обеспечиваются следующими компонентами технологии: языком Action Script, векторным форматом .swf и видеоформатом .flv, всевозможными flash-плеерами для просмотра и редакторами для создания.

Рассмотрим интегрированную среду Adobe Flash как основное средство создания flash-приложений. При этом отметим, что языковые и системные средства относятся не только к этому пакету, а к технологии в целом.

Язык ActionScript

ActionScript — объектно-ориентированный язык программирования, который добавляет интерактивность, обработку данных и многое другое в содержимое Flash-приложений. Синтаксис ActionScript основан на спецификации ECMAScript (сюда же относятся языки

JavaScript и JScript). Библиотека классов ActionScript, написанная на C++, представляет доступ к графическим примитивам, фильтрам, принтерам, геометрическим функциям и пр.

ActionScript как язык появился с выходом 5 версии Adobe (тогда еще Macromedia) Flash, которая стала первой программируемой на ActionScript средой. Первый релиз языка назывался ActionScript 1.0. Flash 6 (MX). В 2004 году Macromedia представила новую версию ActionScript 2.0 вместе с выходом Flash 7 (MX 2004), в которой было введено строгое определение типов, основанное на классах программирование: наследование, интерфейсы и т. д. Также Macromedia была выпущена модификация языка Flash Lite для программирования под мобильные телефоны. ActionScript 2.0 является не более чем надстройкой над ActionScript 1.0, то есть на этапе компиляции ActionScript 2.0 осуществляет некую проверку и превращает классы, методы ActionScript 2.0 в прежние прототипы и функции ActionScript 1.0.

В 2005 году вышел ActionScript 3.0 в среде программирования Adobe Flex, а позже в Adobe Flash 9.

ActionScript 3.0 (текущая версия на момент подготовки этого материала) представляет, по сравнению с ActionScript 2.0 качественное изменение, он использует новую виртуальную машину AVM 2.0 и дает взамен прежнего формального синтаксиса классов настоящее классовое (class-based) Объектно-ориентированное программирование. ActionScript 3.0 существенно производительней предыдущих версий и по скорости приблизился к таким языкам программирования, как Java и C++.

С помощью ActionScript можно создавать интерактивные мультимедиа-приложения, игры, веб-сайты и многое другое.

Системное обеспечение

ActionScript выполняется виртуальной машиной (ActionScript Virtual Machine), которая является составной частью Flash Player. ActionScript компилируется в байткод, который включается в SWF-файл.

SWF-файлы исполняются Flash Player-ом. Flash Player существует в виде плагина к веб-браузеру, а также как самостоятельное исполняемое приложение. Во втором случае возможно создание исполняемых exe-файлов, когда swf-файл включается во Flash Player.

Для создания и просмотра видеофайлов в формате flv используются программные кодеки, поддерживающие этот формат.

Прикладное обеспечение

К прикладному обеспечению в рамках технологии Flash относятся средства создания роликов в форматах .swf, .flv и .exe. Основным инструментом является среда Adode Flash, включающая различные средства для создания и редактирования мультимедийного содержания, в т.ч. видео- и аудиофайлов, интегрированную среду разработки на ActionScript и множество дополнительных функций упрощения процесса создания роликов.

Пакет MatLab

MatLab (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, и язык программирования, используемый в этом пакете. По данным фирмы-разработчика, более 1000000 инженерных и научных работников используют этот пакет, который работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

Язык MatLab

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулерам (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов. Целью разработки служила задача использования программных математических библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения языка Фортран. Акцент был сделан на матричные алгоритмы.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов — функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы — функции и скрипты, приведенные в вид, удобный для машинного исполнения и, как следствие, более быстрые по сравнению с обычными.

Системное обеспечение

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Имеются интерфейсы для получения доступа к внешним данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model (COM) или Dynamic Data Exchange (DDE), а также

периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Для MATLAB имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MATLAB для решения определенного класса задач.

Прикладное обеспечение

MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности:

- Матрицы и линейная алгебра — алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и вектора, сингулярности, факторизация матриц и другие.
- Многочлены и интерполяция — корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие.
- Математическая статистика и анализ данных — статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие.
- Обработка данных — набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие.
- Дифференциальные уравнения — решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие.
- Разреженные матрицы — специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях.

В составе пакета имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов, функции для создания алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений.

ЧАСТЬ II. ППП MSOFFICE

ТЕМА 2.1 СТРУКТУРА И СОСТАВ MS OFFICE. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Структура MS Office и назначение компонентов

ППП Microsoft Office - это совокупность программных средств автоматизации офисной деятельности. В состав пакета входит множество приложений, каждое из которых предназначено для выполнения определенных функций и может быть использовано автономно и независимо от остальных. Весь набор офисных приложений можно разделить на *основные* и *дополнительные*.

Основные компоненты Microsoft Office

Список и назначение основных компонентов, входящих в состав Microsoft Office приведен в таб. 1.

Таблица 1. Основные компоненты Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Word	Текстовый процессор
Microsoft Excel	Табличный процессор
Microsoft PowerPoint	Система подготовки презентаций
Outlook	Система управления персональной информацией
Microsoft Access	Система управления базами данных
Microsoft Binder	Система управления подшивками
Microsoft FrontPage	Система управления Web-узлами
Microsoft PhotoDraw	Графический редактор
Microsoft Publisher	Настольная издательская система
Microsoft Project	Система управления проектами

Microsoft Team Manager	Система управления персоналом
------------------------	-------------------------------

Дополнительные компоненты MS Office

Кроме основных компонентов, в семейство Microsoft Office входит большое количество вспомогательных приложений, которые устанавливаются (или не устанавливаются) вместе с основными. Ими можно воспользоваться из основных приложений или вызвать независимо. В таб. 2 перечислены некоторые из вспомогательных приложений.

Таблица 2. Некоторые вспомогательные приложения Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Query	Интерпретатор запросов к внешним базам данных
Microsoft Organization Chart	Программа рисования блок-схем
Microsoft WordArt	Программа создания фигурных текстов
Microsoft Equation	Редактор математических формул
Microsoft Map	Программа отображения данных на географических картах
Microsoft Graph	Программа построения диаграмм
Microsoft Photo Editor	Графический редактор
Microsoft Draw	Средство рисования
Microsoft Find Fast	Служба индексации документов
Microsoft Extended Finder	Средство поиска документов в папках файловой системы и электронной почты
Microsoft Script Editor	Редактор сценариев
Microsoft ClipArt	Коллекция картинок и клипов
Панель Microsoft Office	Средство быстрого доступа к приложениям Office

Кроме основных и вспомогательных приложений, могут быть установлены и использованы различные расширения (надстройки). Их можно условно разделить на три группы:

1. *Самостоятельные приложения*, разработанные фирмой Microsoft, которые являются компонентами семейства Microsoft Office, но формально не входят в состав пакета. Примерами являются приложения Microsoft Project и Microsoft Team Manager.

2. *Надстройки* над компонентами Microsoft Office, разработанные фирмой Microsoft и представляющие собой дополнительные функции. Как правило, надстройки оформляются не в виде готовых к выполнению программ, а в виде документов специального типа: шаблонов, рабочих книг, библиотек динамической компоновки (DLL) и т.п.
3. *Приложения третьих фирм*, разработанные для пользователей Microsoft Office. В этот класс попадают как продукты сторонних фирм, так и собственные разработки пользователей. Сюда можно отнести средства распознавания текстов (OCR), автоматического перевода текста, средства управления большими массивами документов (перечисленные задачи не реализованы или слабо развиты в самом пакете MS Office).

Приведенный перечень основных компонентов носит условный характер, поскольку состав пакета зависит от следующих факторов:

1. *Устанавливаемый комплект (или редакция) пакета*. Пакет выпускается в нескольких редакциях, и состав приложений в разных редакциях различен.
2. *Источник установки*. Установка может быть выполнена с компакт-диска или с сетевого сервера. Наборы файлов, которые устанавливаются на компьютер, существенно различаются.
3. *Операционная система*. Microsoft Office может работать под управлением различных ОС: MS Windows и Mac OS. Эти операционные системы могут иметь разные версии и модификации, что также влияет на состав устанавливаемых компонентов.
4. *Наличие на компьютере в момент установки предшествующих версий*. Некоторые компоненты старых версий автоматически включаются в состав обновляемой версии Microsoft Office (если они уже установлены на компьютере).
5. *Параметры, заданные при установке*. В случае так называемой выборочной (т.е. по выбору пользователя) установки, можно указать несколько десятков независимых параметров, влияющих на состав пакета.

Несмотря на большое число различных приложений в составе пакета, все они в совокупности образуют единое целое. Для каждого из приложений MS Office характерно наличие следующих отличительных признаков:

1. совместимость по данным;
2. унифицированный интерфейс;
3. единые средства программирования.

Документы Microsoft Office

Единица данных самого верхнего уровня структуризации в Microsoft Office называется **документом**.

Документы классифицируются по типам в зависимости от того, какого сорта информация в них хранится. Как правило, документы разных типов обрабатываются разными приложениями Microsoft Office. Основные типы документов, с которыми работают программы Microsoft Office, перечислены в таб. 3.

Таблица 3. Основные типы документов Microsoft Office

Название	Расширение	Приложение	Краткое описание
Документ	.doc	Word	Основной тип документов Word. Содержит форматированный текст, т.е. текст с дополнительной информацией о шрифтах, отступах, интервалах и т.п., а также рисунки, таблицы и другие элементы
Рабочая книга	.xls	Excel	Основной тип документов Excel. Содержит данные различных типов: формулы, диаграммы и макросы
База данных	.mdb	Access	Основной тип документов Access. Содержит как собственно базу данных, то есть совокупность таблиц, так и соответствующие запросы, макросы, модули, формы и отчеты
Презентация	.ppt	PowerPoint	Основной тип документов PowerPoint. Содержит презентацию, состоящую из набора слайдов, заметок выступающего, раздаточных материалов и другой информации
Публикация	.pub	Publisher	Основной тип документов Publisher. Как и Word, содержит форматированный текст, рисунки, таблицы и т.п.
План проекта	.mpp	Project	Основной тип документов Project. Содержит календарный план проекта, описание задач, ресурсов и их взаимосвязи

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод: входящие в состав пакета MS Office приложения способны тесно взаимодействовать при решении прикладных задач; они создают единую информационную среду и позволяют обмениваться объектами. Документы Microsoft Office являются частными примерами объектов. Поэтому Microsoft Office является *документно-ориентированным пакетом* (средой).

Программная среда

Основным средством разработки приложений в MS Office является комплексное решение на основе языка Visual Basic, а именно - Visual Basic for Application (VBA). Эта технология включает макрорекордер, интерпретатор Visual Basic, интегрированную среду разработки с встроенным отладчиком, библиотеки времени выполнения (runtime library) и библиотеки типов, представляющие объекты пакета. Эти средства позволяют расширять функциональность пакета и адаптировать его к решению специализированных задач.

Интерфейс MS Office

Приложения Microsoft Office имеют унифицированный интерфейс, суть которого заключается в следующем: сходные функции имеют одинаковое обозначение (название команды или значок на кнопке), а несходные функции имеют различные обозначения.

В большей степени унификация коснулась интерфейсов таких приложений, как Microsoft Word, Microsoft Excel и Microsoft PowerPoint.

Одним из достоинств пакета Microsoft Office является последовательное использование графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface, GUI), представляемого операционной системой и различных элементов управления. Как правило, отдельные элементы группируются в более крупные конструкции, такие как окна, панели инструментов, меню. Рассмотрим характеристику каждой из этих групп.

Оконный интерфейс

Оконный интерфейс - такой способ организации пользовательского интерфейса программы, когда каждая интегральная часть располагается в *окне* — собственном субэкранном пространстве, находящемся в произвольном месте «над» основным экраном. Несколько окон одновременно располагающихся на экране могут перекрываться, находясь «выше» или «ниже» друг относительно друг

В MS Office использует окна четырех типов:

- окно приложения;
- окно документа; • диалоговое окно;
- форма.

Панели инструментов

Панели инструментов - это элементы пользовательского интерфейса, на которых могут располагаться такие элементы управления, как кнопки быстрого вызова и раскрывающиеся списки. Панели инструментов разных приложений могут содержать кнопки, сходные по функциям и внешнему виду, что упрощает освоение интерфейса Microsoft Office.

Панели инструментов могут быть:

- пристыкованными вдоль границы окна приложения;
- плавающими, т.е. находится в любой части окна приложения;
- представленными в отдельных окнах; в этом случае форму и размеры панели инструментов можно менять произвольно.

Меню

Меню представляет доступ к иерархическим спискам доступных команд. Результатом выбора команды из меню может быть:

- непосредственное выполнение некоторого действия;
- раскрытие еще одного меню;
- раскрытие диалогового окна или формы.

Меню интерфейса Microsoft Office, кроме строки меню любого приложения, можно разделить (по способу перехода к ним) на раскрывающиеся и контекстные (или всплывающие).

Элементы управления

Элементы управления - это объекты оконного интерфейса, реализующие типовые операции с интерфейсом: щелчок мышью, выбор из списка, выбор вариантов, прокрутка и т.п. К элементам управления относятся следующие: кнопки, текстовые поля (или поля ввода), флажки, переключатели, списки и раскрывающиеся списки, полосы прокрутки, палитры, счетчики и прочие, специфичные для некоторых приложений или условий.

ТЕМА 2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОФИСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Офисное программирование — это процесс разработки приложений, предназначенных для автоматизации офисной деятельности с использованием специализированных пакетов (MS Office, OpenOffice.org или подобных).

Офисное программирование имеет ряд особенностей, отличающих его от программирования в общем смысле:

- цели разработки;
- область применения;
- макроязык;
- среда разработки;
- поддержка объектно-ориентированного программирования.

Рассмотрим эти особенности на примере MS Office.

Цели разработки

В офисной среде *программный проект неразрывно связан с документом*, хранится как часть документа и не может существовать независимо от него. *Документ, а не программа, является целью разработки.*

Стандартные возможности среды по работе с документами велики. Однако возможность изменить типовой документ, снабдив его дополнительными функциями – это одна из важнейших задач офисного программирования. Для ее решения офисная среда представляет совокупность библиотек классов, которые составляют каркас (Framework) текстовых документов, электронных таблиц, презентаций, баз данных и приложений на основе этих документов. Всякий раз, когда создается новый документ, его каркас составляют объекты библиотек, заданные по умолчанию. Этот каркас можно существенно изменить, добавив в документ новые свойства. Расширение каркаса не требует от программиста значительных усилий – достаточно включить в него необходимые библиотеки классов.

Область применения

Область применения офисного программирования широка – от настройки отдельных документов до решения задач автоматизации офисной деятельности масштаба предприятия, в т.ч. ориентированных на совместную работу в глобальной сети.

Visual Basic for Application

Visual Basic для приложений (Visual Basic for Application, VBA) – это инструмент разработки приложений, который позволяет создавать программные продукты, решающие практически все задачи, встречающиеся в среде Windows. Эти продукты можно использовать, например, для оформления документов (подготовки текстов) или анализа данных таблиц (электронных таблиц). VBA – уникальное приложение, поскольку оно встраивается в другое приложение и расширяет его функциональные возможности.

Visual Basic for Application (VBA) - стандартный макроязык пакета Microsoft Office, предназначенный для расширения функциональных возможностей приложения в котором используется.

С помощью VBA можно:

- создать собственное диалоговое окно и придать ему требуемый внешний вид;
- создать макросы, расширяющие функциональные возможности приложения, в которое встроен VBA;
- изменить меню приложения Microsoft Office;
- управлять другим приложением Microsoft Office или принадлежащими ему данными;
- объединить данные из нескольких приложений Microsoft Office в одном документе;
- автоматически создавать или изменять страницы Web, совместно используя приложения Microsoft Office и VBA.

Для разработчика доступны следующие инструменты и средства, которые используются при создании проекта VBA:

- отладка приложений без предварительной компиляции;
- средства Win32 API;
- SQL и объекты доступа к данным для управления данными и извлечения их из внешних источников данных, таких как Microsoft SQL Server;
- построение и проверка элементов интерфейса непосредственно в среде разработки VBA (Integrated Development Environment, IDE);
- связывание программ и процедур с событиями, которые возникают в приложениях VBA.

Среда разработки

Среда приложений Office ориентирована в первую очередь на пользователей, а не на программистов и в ней можно создавать документы без всякого программирования. Поэтому программист обычно начинает работать с документами не на пустом месте, а с их заготовками, созданными пользователями, т.е. и сам программист может выступать в роли пользователя. Средства совместной работы над документами Office обеспечивают одновременную работу программистов и пользователей.

Среда MS Office предлагает два способа создания программ, отличающихся подходом к процессу: использование макрорекордера и ручное кодирование (на языке VBA). Эти подходы ориентированы на разные категории: непосредственно пользователей и программистов соответственно.

Макрорекордер (MacroRecorder) – это программный инструмент, записывающий действия пользователя при работе с документами и приложениями, с сохранением записи в виде макроса -исходного кода на языке VBA. При вызове сохраненного макроса воспроизводится вся сохраненная последовательность действий.

Макрорекордер представляет возможность создания программного проекта или, по крайней мере, его отдельных компонентов автоматически, без программирования. Для записи и воспроизведения макроса не требуется специальных знаний, поэтому пользователь может самостоятельно создавать программы (макросы), в общем случае даже не представляя себе, как они работают.

Для программиста макрорекордер полезен тем, что позволяет создавать фрагменты программы автоматически, тем самым увеличивая скорость разработки и уменьшая время отладки.

Интегрированная среда разработки на VBA (Visual Basic Environment, VBA) - встроенное в MS Office средство для написания, тестирования и отладки приложений на VBA. Среда VBA представляет все возможности для создания законченных офисных приложений, включая средства визуального проектирования пользовательского интерфейса. VBA ориентирована на использование программистами для разработки офисных приложений (это отнюдь не означает, что пользователи не могут применять VBA).

Поддержка ООП

Разработка приложений для MS Office тесно связана с парадигмой объектно-ориентированного программирования. Все документы (более того, сами компоненты пакета) в MS Office - суть объекты, наделенные собственными наборами свойств (характеристик объекта), методов (подпрограмм управления свойствами) и событий (подпрограмм, обрабатывающих изменения состояния объекта в результате некоторых действий). Соответственно, для обеспечения более полной интеграции с пакетом, входной язык (VBA) также поддерживает ООП.

Все объекты приложения MS Office образуют иерархическую структуру, которая определяет связь между ними и способ доступа. Такая структура называется объектной моделью (object model). За рамки объектной модели выходят, но также могут использоваться в офисных приложениях, внешние объекты, поддерживающие технологии DDE, OLE/ActiveX и ряд других.

В объектно-ориентированную концепцию удачно вписывается технология *визуального программирования*. Все отображаемые элементы графического интерфейса, такие как формы, элементы управления, меню и панели инструментов являются объектами, наделенными набором свойств и методов и способными реагировать на события (например, щелчки мыши, нажатия клавиш и т.п.). При визуальном подходе не требуется программного задания (хотя это и возможно) их основных свойств (например, ширина или высота, цвет фона и т.п.). Эти свойства можно задать при помощи мыши (например, ширину и высоту формы путем операции "перетаскивания" маркеров) или установить их в окне свойств (название формы, цвет фона формы и т. д.). Таким образом, визуальное программирование делает проектирование интерфейса программы более наглядным и быстрым. При этом сохраняется возможность управлять всеми объектами и программно.

Преимущества офисного программирования

Преимущества, которые получает конечный пользователь, использующий программируемые офисные документы:

- Пользователь получает документы, обладающие новыми функциями и способные решать задачи, характерные для проблемной области пользователя.

- Пользователь находится в единой офисной среде независимо от того, с каким документом он работает в данный момент и какой программист разрабатывал этот документ.
- Большинство доступных при работе с документами функций являются общими для всех документов, поскольку их предоставляет сама офисная среда. Единый стиль интерфейса разных документов облегчает работу с ними.
- Пользователь сам, не будучи программистом, способен создавать простые виды программируемых офисных документов, постепенно совершенствуясь в этой деятельности.

Преимущества, которые получает программист, работающий в Office:

- В распоряжении программиста находится мощная интегрированная среда. Для него эта среда представлена в виде совокупности хорошо организованных объектов, доступных в языке программирования и по принципу работы ничем не отличающихся от встроенных объектов языка или объектов, создаваемых самим программистом.
- Большинство повседневных задач становятся для него простыми, – чтобы их решить, зачастую достаточно стандартных средств.
- Там, где стандартных средств не хватает, где у документа должны появиться новые функциональные возможности, где необходимо создать документ по заказу, вступает в силу язык программирования – VBA, существенная особенность которого – возможность работы с объектами любого из приложений Office.
- Офисное программирование позволяет применять на практике идеи компонентного программирования. Компонентный подход предполагает взаимодействие компонентов, создаваемых в разных программных средах, на разных языках, на разных платформах и находящихся на разных машинах. Работа с компонентами (DLL, ActiveX, AddIns, ComAddIns) является неотъемлемой частью офисного программирования.

ТЕМА 2.3 МАКРОСЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАКРОРЕКОРДЕРА

Макросы

Независимо от используемых операционной системы и программных приложений MS Office пользователь часто выполняет одни и те же последовательности команд для многих рутинных задач. Вместо повторения последовательности команд каждый раз, когда необходимо выполнить какую-либо задачу, можно создать макрос (macro), который вместо пользователя будет выполнять эту последовательность. Термин macro произошел от греческого слова, означающего расширенный или растянутый.

Макрос – это программа (в контексте офисного программирования - созданная автоматически), состоящая из списка команд, которые должны быть выполнены приложением.

Основными преимуществами использования макросов являются:

- повышение точности и скорости работы, поскольку компьютеры лучше приспособлены для выполнения повторяющихся задач, чем человек;
- при выполнении макросов обычно нет необходимости в присутствии человека-оператора; в случае, если макрос очень длинный и выполняет операции, требующие значительного времени (например, поиск в базе данных и сортировка), пользователь может переключиться на другое приложение.

Макрос служит для объединения нескольких различных действий в одну процедуру, которую можно легко вызвать. Этот список команд состоит в основном из макрокоманд, которые тесно связаны с приложением, в котором создается макрос – т.е. с командами Word, Excel или других приложений Microsoft Office.

Можно выделить *три основные разновидности макросов*:

1. *Командные макросы* – это наиболее распространенные макросы, обычно состоящие из операторов, эквивалентным тем или иным командам меню или параметрам диалоговых окон. Основным предназначением такого макроса является выполнение действий, аналогичных командам меню – т.е. изменение окружения и основных объектов приложения.
2. *Пользовательские функции* – работают аналогично встроенным функциям приложения. Отличие этих функций от командных макросов состоит в том, что они

используют значения передаваемых им аргументов, производят некоторые вычисления и возвращают результат в точку вызова, но не изменяют среды приложения.

3. *Макрофункции* – представляют сочетание командных макросов и пользовательских функций. Они могут использовать аргументы и возвращать результат, подобно пользовательским функциям, а также могут изменять среду приложения, как и командные макросы. Чаще всего эти макросы вызываются из других макросов, и активно используются для модульного программирования.

Поддержка макросов позволяет порой обойтись вообще безо всякого программирования: достаточно включить автоматическую запись выполняемых пользователем действий и в результате получить готовый макрос, а затем назначить ему кнопку на панели инструментов или новую команду меню, которые будут использоваться для вызова. Простые макросы удастся создавать, не написав вручную ни одной строки программного кода.

Для разработки же серьезных приложений приходится программировать.

Таким образом, различают 2 способа разработки макроса:

- автоматическое создание, с использованием макрорекордера;
- написание макроса "с нуля", используя язык программирования VBA.

Отметим, что возможен и комбинированный подход: фрагменты будущей программы записываются автоматически, а затем они корректируются и дополняются "рукописным" кодом.

Для записи макросов из приложений Microsoft Office используется **макрорекордер**. Это встроенный инструмент, который фиксирует все действия пользователя, включая ошибки и неправильные запуски. При выполнении макроса интерпретируется каждая записанная макрорекордером команда точно в такой последовательности, в которой пользователь выполнял их во время записи.

Для **записи макроса** в приложении Microsoft Office можно использовать меню "Сервис/Макрос/Начать запись" или выбрать кнопку "Записать макрос" на панели инструментов Visual Basic. До начала записи нужно указать имя макроса и определить, где он будет храниться и как будет доступен. Затем выполнить действия, которые требуется сохранить в макросе. Для завершения записи нужно на панели инструментов "Остановка записи" щелкнуть кнопку "Остановить запись".

Для **выполнения макроса** необходимо:

1. Установить курсор в место вставки выполнения макроса.
2. Выбрать пункт меню "Сервис/Макрос/Макросы".
3. В появившемся диалоговом окне "Макрос" выбрать имя нужного макроса и выбрать "Выполнить".

Чтобы **просмотреть код** записанного макроса, надо выбрать меню "Сервис/Макрос/Макросы". В появившемся диалоговом окне выбрать имя нужного макроса и щелкнуть кнопку "Изменить". Исходный код указанного макроса будет загружен в окно редактора Visual Basic.

Структура записанного макроса

Макросы, создаваемые макрорекордером MS Office, сохраняются в специальной части файла данных, называемой *модулем*. Модуль VBA содержит исходный код программы на языке VBA. Фактически макрос является подпрограммой (а точнее, процедурой) VBA. Записанный макрос имеет строго определенную структуру. Ниже представлен исходный код простого макроса, созданного в Microsoft Word.

Листинг 1. Пример макроса

```
Sub Hello()  
' Макрос изменяет размер, начертание шрифта, выравнивание абзаца и  
' выводит надпись в активный документ MS Word  
,  
  
    Selection.Font.Size = 24  
    Selection.Font.Bold = wdToggle  
    Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter  
    Selection.TypeText Text:="Hello, World!"  
End Sub
```

В общем виде структуру кода макроса можно представить следующим образом²:

```
Sub имяМакроса ()
```

² Локализованные версии пакета MS Office позволяют использовать в макросах символы национальных алфавитов (например, в идентификаторах). Однако не следует пользоваться этой сомнительной возможностью во избежании сложностей с отладкой и портированием приложений на VBA.

```
' текст комментария
    Оператор1
    Оператор2 ...
    ОператорN
End Sub
```

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub, за которым следует имя макроса. Строку, содержащую ключевое слово Sub и имя макроса, называют *строкой объявления (declaration)* макроса. За именем макроса всегда следуют пустые круглые скобки (т.к. макрос является процедурой VBA без параметров).

За строкой объявления макроса следуют строки комментариев. *Комментарий (comment)* – это строка в макросе VBA, которая не содержит инструкций, являющихся частью этого макроса. Каждая строка комментария начинается с символа апострофа ('). Комментарии содержат имя макроса и текст, который был введен пользователем в текстовое поле "Описание" ("Description") диалогового окна "Запись макроса" ("Record Macro") в момент записи этого макроса.

Сразу за объявлением макроса следует *тело макроса (body)*. Каждая строка в теле макроса состоит из одного или более операторов VBA. *Оператор VBA (statement)* – это последовательность ключевых слов и других символов, которые вместе составляют одну полную инструкцию для VBA. Макрос VBA состоит из одного или нескольких операторов.

Конец макроса выделяется ключевой строкой End Sub, завершающей тело макроса.

ТЕМА 2.4 СРЕДА РАЗРАБОТКИ VBA

Visual Basic for Application (VBA) – это система программирования, которая используется как единое средство программирования во всех приложениях Microsoft Office. Всякая система программирования включает в себя, по меньшей мере, три составные части:

1. Язык (или языки) программирования.
2. Среду разработки, т.е. набор инструментов для написания программ, редактирования, отладки и т.п.
3. Библиотеку (или библиотеки) стандартных программ, т.е. набор готовых программ (процедур, функций, объектов и т.д.), которые можно использовать как готовые элементы при построении новых программ.

Для создания офисных приложений в MS Office имеется *интегрированная среда разработки* (Integrated Development Environment, *IDE*) с унифицированным интерфейсом. VBA IDE – это набор инструментов разработки программного обеспечения, таких как редактор Visual Basic (Visual Basic Editor, VBA), средства отладки, средства управления проектом и т.д.

Вызов VBA IDE из любого приложения выполняется через комбинацию клавиш Alt+F11 или меню "Сервис/Макрос/Редактор Visual Basic".

Структура VBA

VBA – это стандартное интерфейсное окно, содержащее меню, панели инструментов, другие окна и элементы, которые применяются при создании проектов VBA. Общий вид окна редактора Visual Basic представлен на рис. 3.

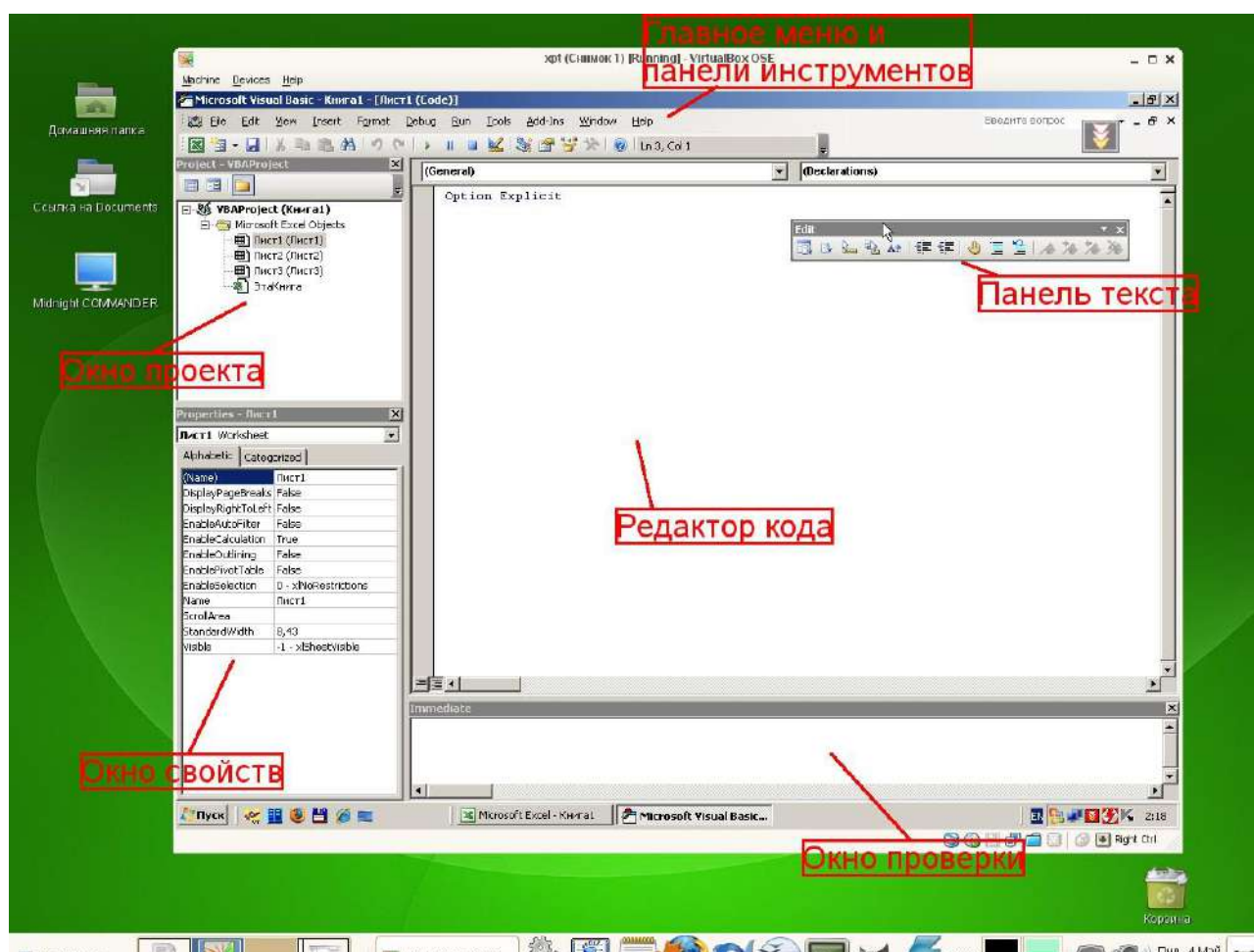


Рисунок 3. Окно редактора Visual Basic

Основными (открываемыми по умолчанию) являются три окна: окно проекта, окно свойств и окно редактирования кода. Краткое описание этих и некоторых других компонентов VBA приведено в таб. 4. Все они доступны через команды, представленные в меню "Вид".

Таблица 4. Назначение компонентов VBA

Наименование окна	Описание
Project (Проект)	Предназначено для отображения всех открытых проектов, а также их составляющих: модулей, форм и ссылок на другие проекты
Toolbox (Панель элементов)	Содержит элементы управления для конструирования форм
UserForm	Используется для создания форм путем размещения на них элементов
Наименование окна	Описание
	управления
Code (Программа)	Предназначено для просмотра, написания и редактирования программы на языке VBA. Поскольку среда разработки является многооконной, то для каждого модуля проекта можно открыть отдельное окно
Properties (Свойства)	Отображает свойства выделенных объектов. В этом окне можно задавать новые значения свойств формы и элементов управления
Object Browser (Просмотр объектов)	Отображает классы, свойства, методы, события и константы различных библиотек объектов. Используется для быстрого получения информации об объектах
Immediate (Проверка)	Предназначено для быстрого выполнения вводимых в него инструкций. В данном окне также выводятся результаты выполнения вводимых инструкций
Locals (Локальные переменные)	Автоматически показывает все переменные данной процедуры
Watches (Контрольные значения)	Применяется при отладке программ для просмотра значений выражений

Характеристики компонентов VBA

Окно проекта (Project)

Проект – это совокупность всех программных модулей, связанных с документом Microsoft Office. Окно *Project (Проект)* предназначено для быстрого получения информации о различных составляющих проекта.

Проект может содержать модули следующих видов:

- *Объекты основного приложения.* Проекты VBA выполняются совместно с другими приложениями. Приложение, в котором разрабатывается и выполняется проект VBA, называется основным.
- *Модули форм.* В VBA имеется возможность создавать пользовательские формы, предназначенные для ввода или вывода данных, а также процедуры обработки событий, возникающие в этих формах.
- *Модули кода.* Модульность - один из основных принципов парадигмы структурного программирования. Каждый модуль, как правило, содержит подпрограммы, сходные по назначению. Небольшие модули проще отлаживать и использовать повторно. В частности, в VBA имеются средства импорта/экспорта готового кода.
- *Модули классов.* VBA позволяет создавать и использовать собственные объекты. Описание объектов включается в модули класса. Каждый модуль класса содержит полную информацию об одном типе объекта.

С помощью окна проекта можно добавить или удалить какой-либо объект из проекта. Модули кода добавляются в проект командой "Вставить/Модуль". Формы создаются командой "Вставить/UserForm", а модули класса командой "Вставить/Модуль класса".

Окно проекта можно использовать также для быстрой навигации по формам проекта и программному коду. Для этого необходимо выбрать в контекстном меню соответственно команды "Объект" или "Программа".

Окно свойств (Properties)

Список свойств выделенного объекта выводится в окне Properties (Свойства). Для того чтобы выделить объект, необходимо с помощью окна проекта выбрать форму и перейти в режим конструктора, используя команду "View Object". Свойства объекта можно упорядочить в алфавитном порядке (Alphabetic (По алфавиту)) или по категориям (Categorized (По категориям)), выбрав соответствующую вкладку. Предусмотрена также

возможность получения быстрой справки по какому-либо свойству объекта. Для этого достаточно установить курсор на нужное свойство и нажать клавишу F1.

Окно просмотра объектов(Object Browser)

Окно Object Browser (Просмотр объектов) предназначено для просмотра объектов, доступных при создании программы. Точнее, в этом окне отображаются не сами объекты, а структура соответствующего класса объектов. Окно просмотра объектов может использоваться для поиска метода или свойства объекта.

Окно Code (Окно редактирования кода)

Окно Code (Программа) представляет собой текстовый редактор, предназначенный для написания и редактирования кода процедур приложения. Это окно появляется на экране, например, при создании нового модуля. Код внутри модуля организован в виде отдельных разделов для каждого объекта, программируемого в модуле. Переключение между разделами выполняется путем выбора значений из списка "Object" ("Объект"), который находится в левом верхнем углу окна. Каждый раздел может содержать несколько процедур, которые можно выбрать из списка "Procedure" ("Процедура") в правом верхнем углу.

Интеллектуальные возможности редактора кода:

1. При написании кода пользователю предлагается список компонентов, логически завершающих вводимую пользователем инструкцию.
2. На экране автоматически отображаются сведения о процедурах, функциях, свойствах и методах после набора их имени.
3. Автоматически проверяется синтаксис набранной строки кода сразу после нажатия клавиши Enter. В результате проверки выполняется выделение определенных фрагментов текста:
 - красным цветом – синтаксические ошибки; • синим цветом – зарезервированные ключевые слова;
 - зеленым цветом – комментарии.
4. Если курсор расположить на ключевом слове VBA, имени процедуры, функции, свойства или метода и нажать клавишу F1, то на экране появится окно со справочной информацией об этой функции.

Окно редактирования форм (UserForm)

Для создания диалоговых окон, разрабатываемых приложений VBA, используются формы. Редактор форм является одним из основных средств визуального программирования. При добавлении формы в проект (команда "Insert" – "UserForm" ("Вставить" – "UserForm")) на экран выводится незаполненная форма с панелью инструментов Toolbox (Панель элементов).

Используя панель инструментов Toolbox (Панель элементов) из незаполненной формы конструируется требуемое для приложения диалоговое окно. Размеры формы и размещаемых на ней элементов управления можно изменять. Также окно редактирования форм поддерживает операции буфера обмена. Кроме того, команды меню "Format" ("Формат") автоматизируют и облегчают процесс выравнивания элементов управления как по их взаимному местоположению, так и по размерам.

Окна отладочной информации

Окно Immediate (Проверка) позволяет ввести инструкцию и выполнить ее. При этом инструкция должна быть записана в одну строку, директивы которой будут выполнены после нажатия клавиши Enter. Данное окно можно использовать для быстрой проверки действий, выполняемой той или иной инструкцией. Это позволяет не запускать всю процедуру, что удобно при отладке программ.

Окно Locals (Локальные переменные) автоматически отображает все объявленные переменные текущей процедуры и их значения.

Окно Watches (Контрольные значения) применяется при отладке программ для просмотра значений выражений.



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»**

**НОВИКОВА Н.А
ДОПУСКИ И ПОСАДКИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**По курсу «Метрология, стандартизация и
сертификация» для студентов направления:
15.03.01 - «Машиностроение»,
15.03.02 - «Технологические машины и
оборудование» 21.05.04 «Горное дело»**

**Екатеринбург
2018**

Учебно-методическое пособие

По курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»
для студентов направления: 15.03.01 - «Машиностроение»,
15.03.02 - «Технологические машины и оборудование»

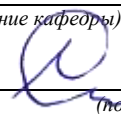
Автор: Новикова Н.А.

Одобрена на заседании кафедры

Эксплуатации горного
оборудования

(название кафедры)

Зав.кафедрой


(подпись)

Симисинов Д.И.

(Фамилия И.О.)

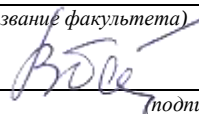
Протокол № 7 от 04.06.2018

(Дата)

Рассмотрена методической
комиссией
Факультета ГМФ

(название факультета)

Председатель


(подпись)

В.П.Барановский

(Фамилия И.О.)

Протокол № 10 от 20.06.2018

(Дата)

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Метрология, стандартизация и сертификация» является одной из важнейших дисциплин, так как неразрывно связана с главной задачей современного машиностроения – обеспечение высокого качества выпускаемой продукции. Качество изделий машиностроения, как и любого другого вида продукции, является физической категорией, зависящей от множества конструкторских, технологических и организационно-технологических факторов, проявляющихся на этапах жизненного цикла изделия. Установлено, что до 90% эксплуатационных свойств деталей изделий машиностроения может быть достигнуто за счет соответствующего нормирования точностей геометрических параметров элементов деталей и их поверхностей. К таким эксплуатационным свойствам следует отнести взаимозаменяемость деталей и сборочных единиц, износостойкость трущихся поверхностей, долговечность, герметичность и прочность соединений и др.

Знания, умения и навыки, полученные в результате изучения дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация» помогут студентам пользоваться государственными стандартами при нормировании точности геометрических параметров гладких цилиндрических и типовых деталей и сборочных единиц, обозначать их на рабочих чертежах.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ

Взаимозаменяемость – свойство независимо изготовленных деталей и сборочных единиц занимать свое место в изделии без дополнительной механической или ручной обработки при сборке, обеспечивая при этом нормальную работу собираемых узлов, механизмов, машин. Взаимозаменяемость не обеспечивается только точностью геометрических параметров, Взаимозаменяемыми должны быть форма, механические, электрические и другие количественные и качественные характеристики деталей и сборочных единиц. Такая взаимозаменяемость называется полной. Полную взаимозаменяемость экономически целесообразно применять для деталей, изготовленных с допусками не точнее 6-го качества.

При полной взаимозаменяемости:

- упрощается процесс сборки – он сводится к простому соединению деталей рабочими преимущественно невысокой квалификации;
- появляется возможность точно нормировать процесс сборки во времени, устанавливать необходимый темп работы и применять поточный метод;
- создаются условия для автоматизации процессов изготовления и сборки изделий;
- упрощается и удешевляется ремонт изделий, так как любая

изношенная или поломанная деталь или сборочная единица может быть заменена новой (запасной).

Иногда для удовлетворения эксплуатационных требований необходимо изготавливать детали и сборочные единицы с малыми экономически неприемлемыми или технологически трудно выполнимыми допусками. В этих случаях для получения требуемой точности сборки применяют групповой подбор деталей (селективную сборку), компенсаторы, регулирование положения некоторых частей машин и приборов, пригонку и другие дополнительные технологические мероприятия при обязательном выполнении требования к качеству сборочных единиц и изделий. Такую взаимозаменяемость называют неполной (ограниченной). Ее можно осуществлять не по всем, а только по отдельным геометрическим или другим параметрам.

Внешняя взаимозаменяемость — это взаимозаменяемость покупных и кооперируемых изделий (монтируемых в другие более сложные изделия) и сборочных единиц по эксплуатационным показателям, а также по размерам и форме присоединительных поверхностей. Например, в электродвигателях внешнюю взаимозаменяемость обеспечивают по частоте вращения вала и мощности, а также по размерам присоединительных поверхностей; в подшипниках качения — по наружному диаметру наружного кольца и внутреннему диаметру внутреннего кольца.

Внутренняя взаимозаменяемость распространяется на детали, сборочные единицы и механизмы, входящие в изделие. Например, в подшипнике качения внутреннюю групповую взаимозаменяемость

имеют тела качения и кольца.

2. ПОНЯТИЯ О РАЗМЕРАХ, ДОПУСКАХ И ПОСАДКАХ

Под размером понимают числовое значение линейной или угловой величины в выбранных единицах измерения. Различают номинальный, действительный и предельные размеры.

Номинальный размер — это размер, относительно которого определяются предельные размеры и который служит также началом отсчета отклонений. Номинальный размер, общий для отверстия и вала, образующих соединение, называется номинальным размером соединения. Это основной размер, полученный на основе кинематических, динамических и прочностных расчетов или выбранный из конструктивных, технологических, эксплуатационных, эстетических и других соображений и указанный на чертеже. Полученный, таким образом номинальный размер должен быть округлен до ближайшего стандартного из ряда нормальных линейных размеров по ГОСТ 6636-69 «Нормальные линейные размеры».

Действительный — это размер, установленный измерением с допустимой погрешностью. Величина допускаемой погрешности измерения, по которой выбирается необходимое средство измерения, регламентируется ГОСТ 8.051-81 в зависимости от точности изготовления, заданной на чертеже.

Предельные размеры — это два предельно допустимых размера, между которыми должен находиться или которым может быть равен действительный размер. Больший из двух предельных размеров

называется *наибольшим предельным размером*, а меньший-*наименьшим предельным размером*.

Принято обозначать номинальный, действительный и предельные размеры для отверстий - $D, D_r, D_{\max}, D_{\min}$;

для валов – $d, d_r, d_{\max}, d_{\min}$.

При выходе действительного размера за предельные – деталь считается бракованной.

Условие годности для отверстий: $D_{\min} \leq D_r \leq D_{\max}$;

для валов $d_{\min} \leq d_r \leq d_{\max}$.

Для упрощения простановки размеров на чертежах вместо предельных размеров проставляют предельные отклонения. Предельные отклонения подразделяют на верхнее и нижнее.

Верхнее — это алгебраическая разность между наибольшим предельным и номинальным размерами, *нижнее отклонение* — это алгебраическая разность между наименьшим предельным и номинальным размерами.

В ГОСТ 25346-89 приняты условные обозначения: верхнее отклонение отверстия — ES , вала — es , нижнее отклонение отверстия — El , вала — ei .

Согласно определениям:

Для отверстий

$$ES = D_{\max} - D ; \quad El = D_{\min} - D ;$$

Для валов

$$es = d_{\max} - d; \quad ei = d_{\min} - d;$$

Предельные отклонения могут иметь положительные и отрицательные значения, или одно из них может быть равным нулю.

Допуск размера — это разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями. Допуск обозначается IT или T_D — допуск отверстия и T_d — допуск вала.

Согласно определениям:

Допуск отверстия

$$T_D = D_{\max} - D_{\min};$$

Допуск вала

$$T_d = d_{\max} - d_{\min}.$$

Допуск размера всегда положительная величина.

Поле допуска - это поле, ограниченное верхним и нижним отклонениями. Для графического изображения полей допусков, позволяющего понять соотношения номинального и предельных размеров, предельных отклонений и допуска, введено понятие нулевой линии.

Нулевая линия — это линия, соответствующая номинальному размеру, от которой откладываются предельные отклонения размеров при графическом изображении допусков и посадок. При горизонтальном расположении нулевой линии положительные

отклонения откладываются вверх от нее, а отрицательные — вниз (рис. 2.1 и 2.2).



Рис. 1.4. Схема расположения полей допусков отверстий

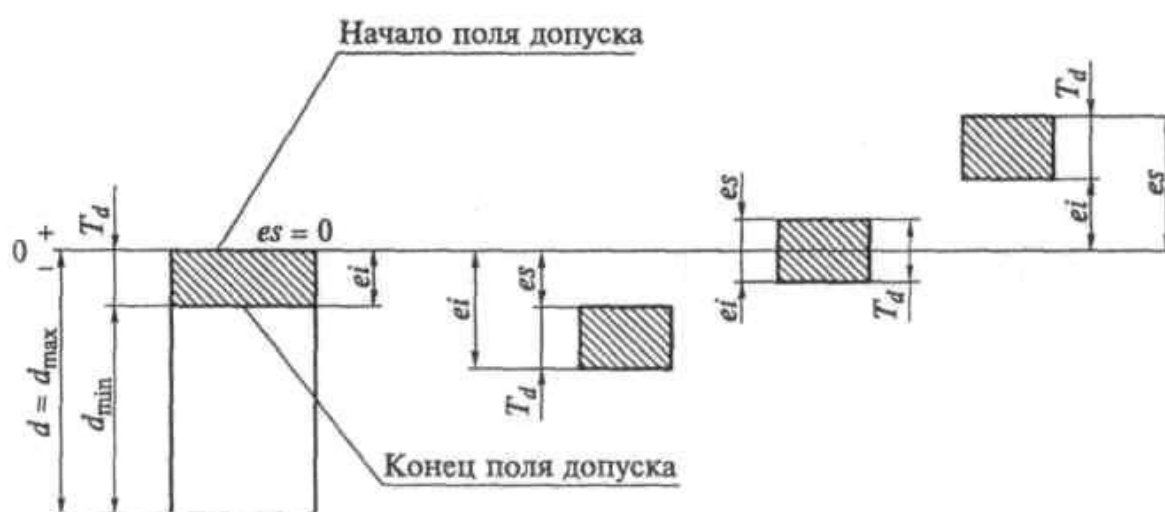


Рис. 1.5. Схема расположения полей допусков валов

В машинах и механизмах детали не находятся обособленно друг от друга, они собираются в определенные узлы, комплекты, группы. Поверхности деталей, по которым

происходит сопряжение одной детали с другой называют сопрягаемыми поверхностями.

Остальные поверхности называются свободными. Поверхности могут быть как цилиндрическими (ось вагона, подшипник скольжения), так и плоскими (шпонка, шпоночный паз). В терминологии по допускам и посадкам: *вал* - все охватываемые наружные поверхности, *отверстие* - внутренние охватываемые поверхности.

Посадкой – называется характер соединения деталей, определяемый разностью действительных размеров вала и отверстия. Различают три вида посадок: с зазором, с натягом и переходные посадки.

Посадкой с зазором называют такое соединение, у которого действительный размер отверстия больше действительного размера вала. Поле допуска отверстия располагается над полем допуска вала. (рис. 2.3). Основными характеристиками посадки с зазором являются:

$$\text{Наименьший зазор} \quad S_{\min} = D_{\min} - d_{\max};$$

$$\text{наибольший зазор} \quad S_{\max} = D_{\max} - d_{\min};$$

$$\text{средний зазор} \quad S_m = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2};$$

$$\text{действительный зазор} \quad S_d = D_d - d_d;$$

$$\begin{aligned} \text{допуск зазора (допуск посадки с зазором)} \quad T_s &= S_{\max} - S_{\min} = \\ &= T_D + T_d \end{aligned}$$

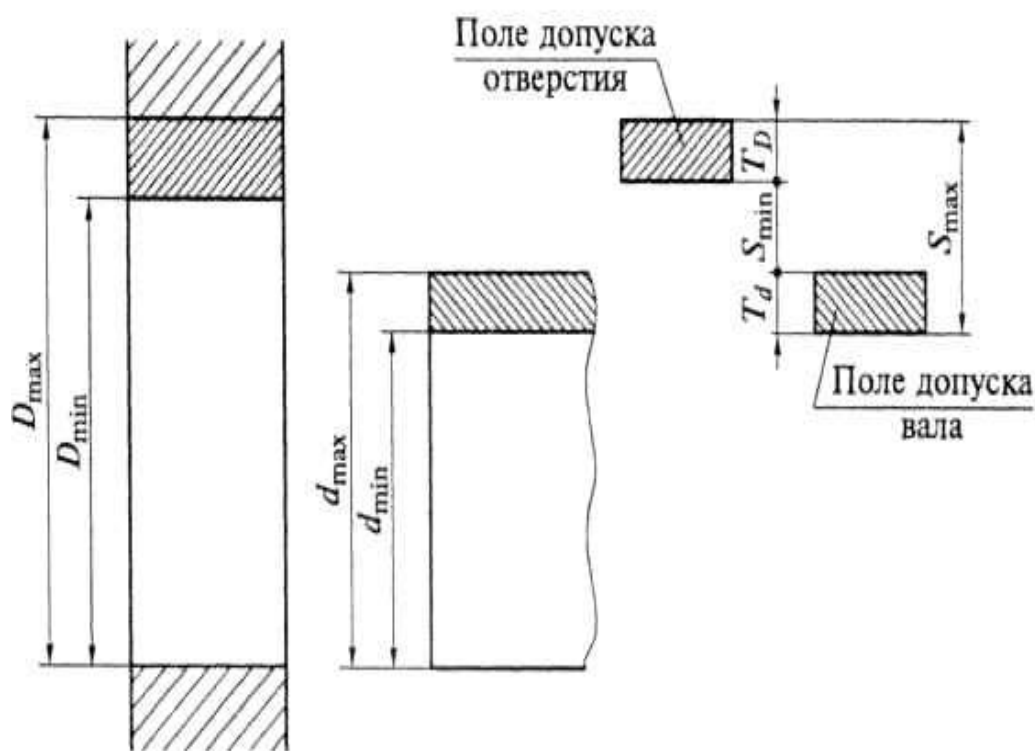


Рис.2.3 Схемы расположения полей допусков при посадках с зазором

посадкой с натягом называется посадка, у которой при любых условиях сборки, действительный размер вала больше действительного размера отверстия (поле допуска вала расположено над полем допуска отверстия) (рис. 2.4). Натяг обеспечивает взаимную неподвижность деталей после их сборки. Основными характеристиками посадки с натягом являются:

наименьший натяг $N_{\min} = d_{\min} - D_{\max} ;$

наибольший натяг $N_{\max} = d_{\max} - D_{\min};$

средний натяг $N_m = \frac{N_{\max} + N_{\min}}{2}$;

действительный натяг $N_d = d_d - D_d$

допуск натяга (допуск посадки с натягом) $T_N = N_{\max} - N_{\min} =$
 $= T_D + T_d$.

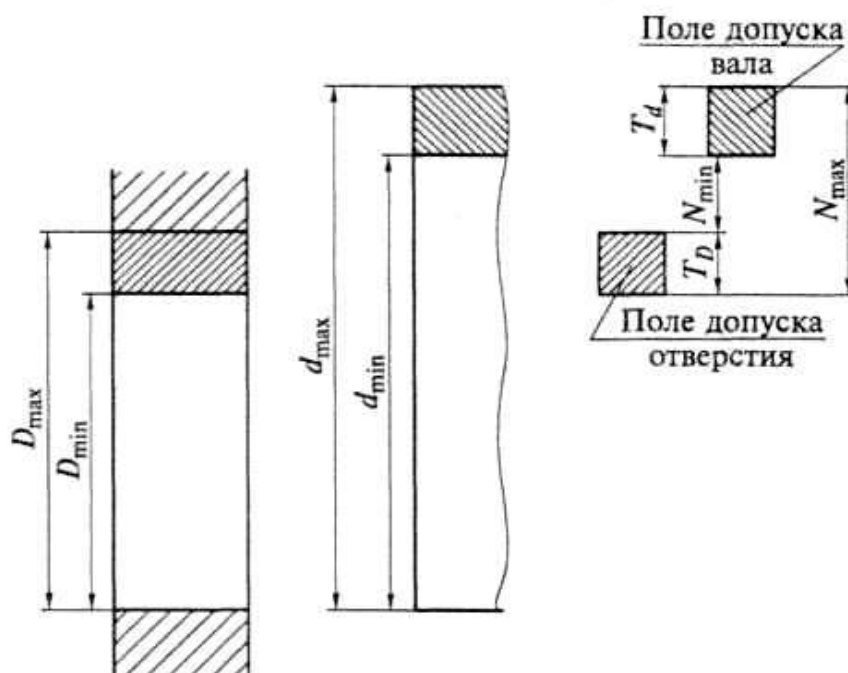


Рис.2.4 Схемы расположения полей допусков при посадках с натягом

Переходной посадкой называется посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга (поля допусков отверстия и вала перекрываются частично или полностью) (рис.2.5). Переходные посадки используются для неподвижных соединений, когда при эксплуатации необходима частая разборка и сборка, а также когда к центрированию деталей предъявляются повышенные требования. Основными характеристиками переходных посадок являются:

наибольший натяг	$N_{\max} = d_{\max} - D_{\min};$
наибольший зазор	$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min};$
действительный натяг	$N_d = d_d - D_d$
действительный зазор	$S_d = D_d - d_d;$
допуск посадки	$T_{N(S)} = N_{\max} + S_{\max} = T_D + T_d.$

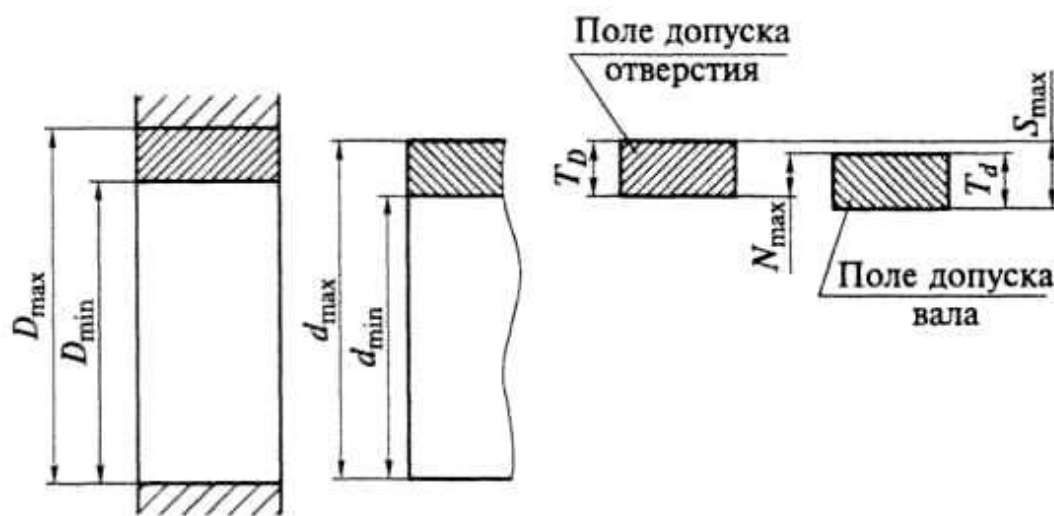


Рис.2.5 Схемы расположения полей допусков при переходных посадках

3. ЕДИНАЯ СИСТЕМА ДОПУСКОВ И ПОСАДОК

Системой допусков и посадок называют совокупность допусков и посадок, закономерно построенных на основе опыта, теоретических и экспериментальных исследований и оформленных в виде стандартов. Система предназначена для выбора минимально необходимых, но достаточных для практики вариантов допусков и по-

садок типовых соединений деталей машин. Единая система допусков и посадок (ЕСДП) гладких соединений изложена в стандартах: ГОСТ 25346-89; ГОСТ 25347-82; Согласно стандартам в ЕСДП установлены допуски и посадки для размеров до 1 мм; свыше 1 мм до 500 мм; свыше 500 мм до 3150 мм. Детали, размеры которых входят в каждый из этих диапазонов, имеют свои особенности при проектировании, обработке и контроле. Так, размеры диапазона свыше 0 до 1 мм наиболее часто реализуются в микроэлектронике с использованием нанотехнологий, размеры свыше 1 до 500 мм – в машиностроении, а размеры свыше 500 мм – в станкостроении, тяжелом машиностроении. Рассмотрим построение системы допусков и посадок для размеров от 1 до 500 мм.

3.1 Закономерности построения допусков

Основная закономерность построения допусков размеров IT , имеет вид

$$IT(T) = a i \quad (1.1)$$

Где a – число единиц допуска; i – единица допуска, мкм

Единица допуска функционально связана с номинальным размером и является масштабом для измерения допуска в закономерности (1.1).

На основании исследований точности механической обработки установлены следующие зависимости единиц допуска для размеров до 500 мм

$$i = 0,45 \sqrt[3]{D} + 0,001D, \quad (1,2)$$

где i — единица допуска, мкм; D — среднее геометрическое крайних размеров каждого интервала размеров, мм.

Каждый диапазон размеров разбивается на *интервалы* — основные и промежуточные. В пределах каждого интервала основные отклонения и допуски неизменны. Основные интервалы используются для определения всех допусков системы. В СДП для номинальных размеров от 1 до 500 мм предусмотрено 13 основных интервалов размеров. Для полей допусков, образующих посадки с большими величинами зазоров или натягов, введены дополнительные промежуточные интервалы, что позволяет уменьшить колебание зазоров и натягов и

Интервалы подразделяются на основные и промежуточные.

диапазон размеров до 500 мм разбит на 13 основных интервалов:

свыше 1 до 3 мм;	свыше 30 до 50 мм;	свыше 250 до 315 мм;
свыше 3 до 6 мм;	свыше 50 до 80 мм;	свыше 315 до 400 мм;
свыше 6 до 10 мм;	свыше 80 до 120 мм;	свыше 400 до 500 мм.
свыше 10 до 18 мм;	свыше 120 до 180 мм;	
свыше 18 до 30 мм;	свыше 180 до 250 мм;	

Промежуточные интервалы введены для номинальных размеров свыше 10 мм и делят каждый основной интервал на две, а в некоторых случаях — на три части. В пределах каждого интервала по зависимости (1.2.) установлена единица допуска

Детали разного назначения в различных машинах и механизмах должны быть изготовлены с различной точностью. Нормирование требуемых уровней точности осуществляется с

помощью квалитетов. Под **квалитетом** понимается совокупность допусков, изменяющихся в зависимости от номинального размера так, что уровень точности для всех номинальных размеров остается одинаковым. Допуск, характеризующий точность, в пределах одного квалитета зависит только от номинального размера, входящего в единицу допуска i .

В ЕСДП предусмотрено 20 квалитетов, которые обозначаются арабскими цифрами (01; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...;18). С увеличением номера квалитета точность понижается (допуск увеличивается).

Самые точные квалитеты (01, 0, 1, 2, 3, 4), как правило, применяются при изготовлении образцовых мер и калибров.

Квалитеты с 5-го по 12-й, как правило, применяются для сопрягаемых элементов деталей при образовании посадок.

Квалитеты с 12-го по 18-й применяют для несопрягаемых элементов деталей.

Допуск по квалитету обозначается буквами *IT* с указанием номера квалитета, например *IT8* - допуск по 8 квалитету.

Квалитеты отличаются друг от друга коэффициентом точности a (количеством единиц допуска) В табл. 1 приведено количество единиц допуска для каждого квалитета, начиная с 5 по 18.

Таблица 1

Число единиц допуска

квалитет	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
----------	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

«a»	7	10	16	25	40	64	100	160	250	400	640	1000	1600	2500
-----	---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

3.2 системы допусков и посадок

Стандарты предусматривают две равноправные системы посадок: систему отверстия и систему вала.

Система отверстия – система допусков и посадок, при которой для данного номинального размера и данного качества предельные отклонения отверстия остаются постоянными, а требуемые посадки достигаются за счет изменения предельных размеров вала (рис.3.1). В системе отверстия основной деталью является *основное отверстие*, которого нижнее отклонение $El=0$, а верхнее $ES = + T_D$.

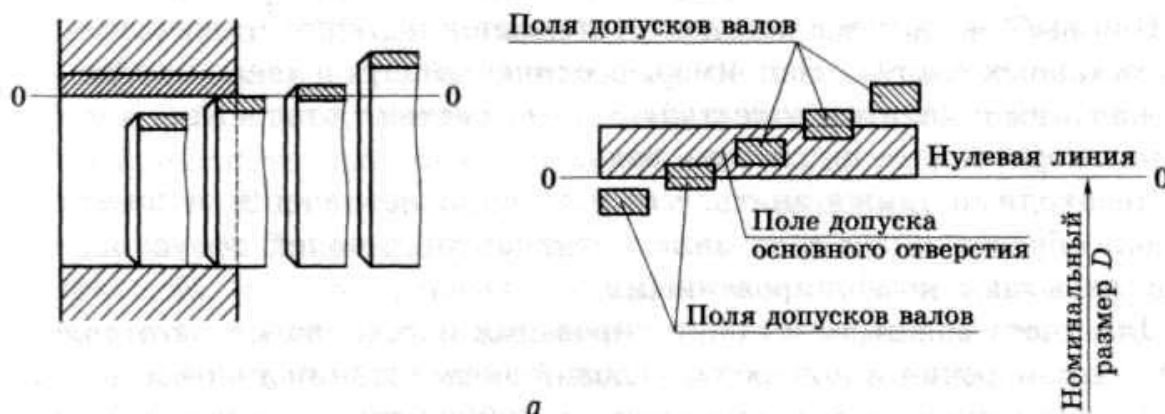


Рис.3.1 Посадки в системе отверстия

Система вала – система допусков и посадок, при которой для данного номинального размера и данного качества предельные отклонения вала остаются постоянными, а

требуемые посадки достигаются за счет изменения предельных размеров отверстия (рис.3.2). В системе вала основной деталью является *основной вал* у которого верхнее отклонение $es=0$, а нижнее $ei = -T_d$.



Рис.3.2. посадки в системе вала

Выбор системы посадки (отверстия или вала) определяют исходя из конструктивных, технологических и экономических соображений.

Предпочтительной является система отверстия. Это связано с тем, что отверстия обрабатываются дорогостоящим режущим инструментом (сверлом, протяжкой, зенкером, разверткой и т.п.), предназначенным для обработки только одного размера с определенным полем допуска. Вал, независимо от размера, в большинстве своем обрабатывается одним и тем же инструментом (резцом, шлифовальным кругом). Таким образом, количество типоразмеров инструмента для обработки отверстий будет значительно меньше при назначении посадки в системе отверстия. Система вала применяется в следующих случаях:

- когда на одном валу необходимо чередовать соединения нескольких отверстий одного номинального размера с различными посадками. На рис. 3.3, *а* представлено соединение поршневого пальца 1 с поршнем 2 и шатуном 3. Для нормальной работы этого узла соединение поршня и пальца должно быть выполнено по неподвижной посадке, а шатуна с пальцем — по подвижной посадке. Назначение посадок в системе отверстия (рис. 3.3, *б*) привело бы к неудобствам при обработке ступенчатого пальца и, главное, к порче отверстия шатуна при сборке. При назначении посадок в системе вала (рис. 3.3, *в*) эти недостатки исключаются.

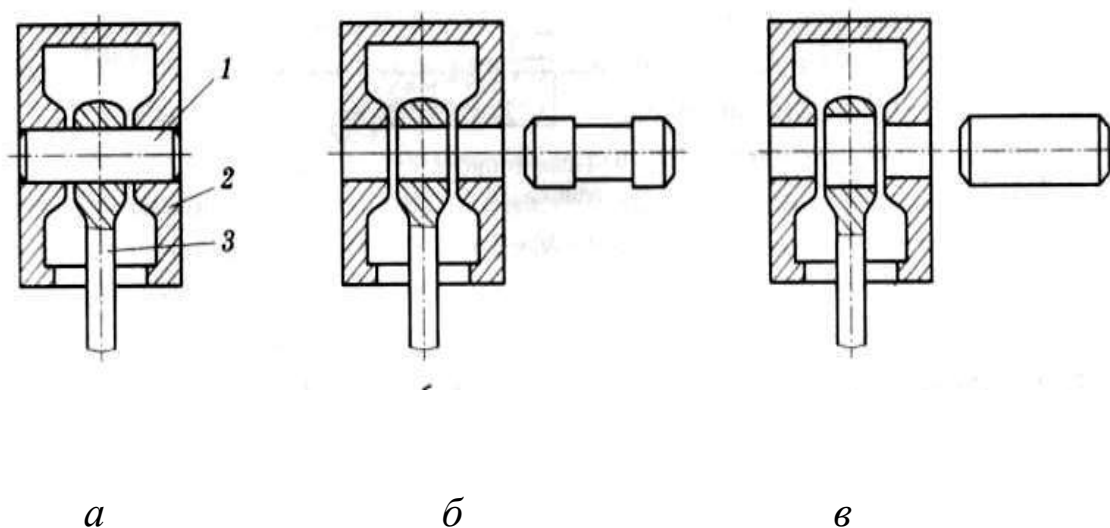


Рис.3.3 Соединение поршневого пальца с поршнем и шатуном двигателя автомобиля;

а – общий вид соединения: 1 – поршневой палец; 2- поршень; 3- шатун; *б*- соединение в системе отверстия; *в*- соединение в системе вала

- система вала также применяется в случаях, когда детали типа валиков или осей изготавливаются из калиброванных холодно-

тянутых прутков, дополнительная механическая обработка которых не предусматривается.

- и, наконец, посадка в системе вала назначается в случаях, когда вал является стандартной деталью или сборочной единицей (штифт, шплинт, шпонка, наружное кольцо подшипника и т.п.).

Необходимо также отметить, что возможно назначение и внесистемных посадок, образованных сочетанием стандартных полей допусков, которые иногда называют комбинированными.

3.3 Ряды основных отклонений

Основное отклонение- это одно из двух предельных отклонений (верхнее или нижнее), по величине и знаку которого определяется положение поля допуска относительно нулевой линии.

По ЕСДП таким отклонением является отклонение, ближайшее к нулевой линии. Стандарт предусматривает 28 рядов основных отклонений для валов и столько же основных отклонений для отверстий. Отклонения валов обозначаются строчными буквами латинского алфавита от *a* до *z* , а отверстия прописными буквами от *A* до *Z*.

Схематично ряды основных отклонений показаны на рис.3.4. Каждому основному отклонению на схеме соответствуют горизонтальная черта, от которой начинается поле допуска. Штриховкой показано направление поля допуска, а второе

отклонение зависит от того, по какому качеству будет выполнено данное предельное отклонение.

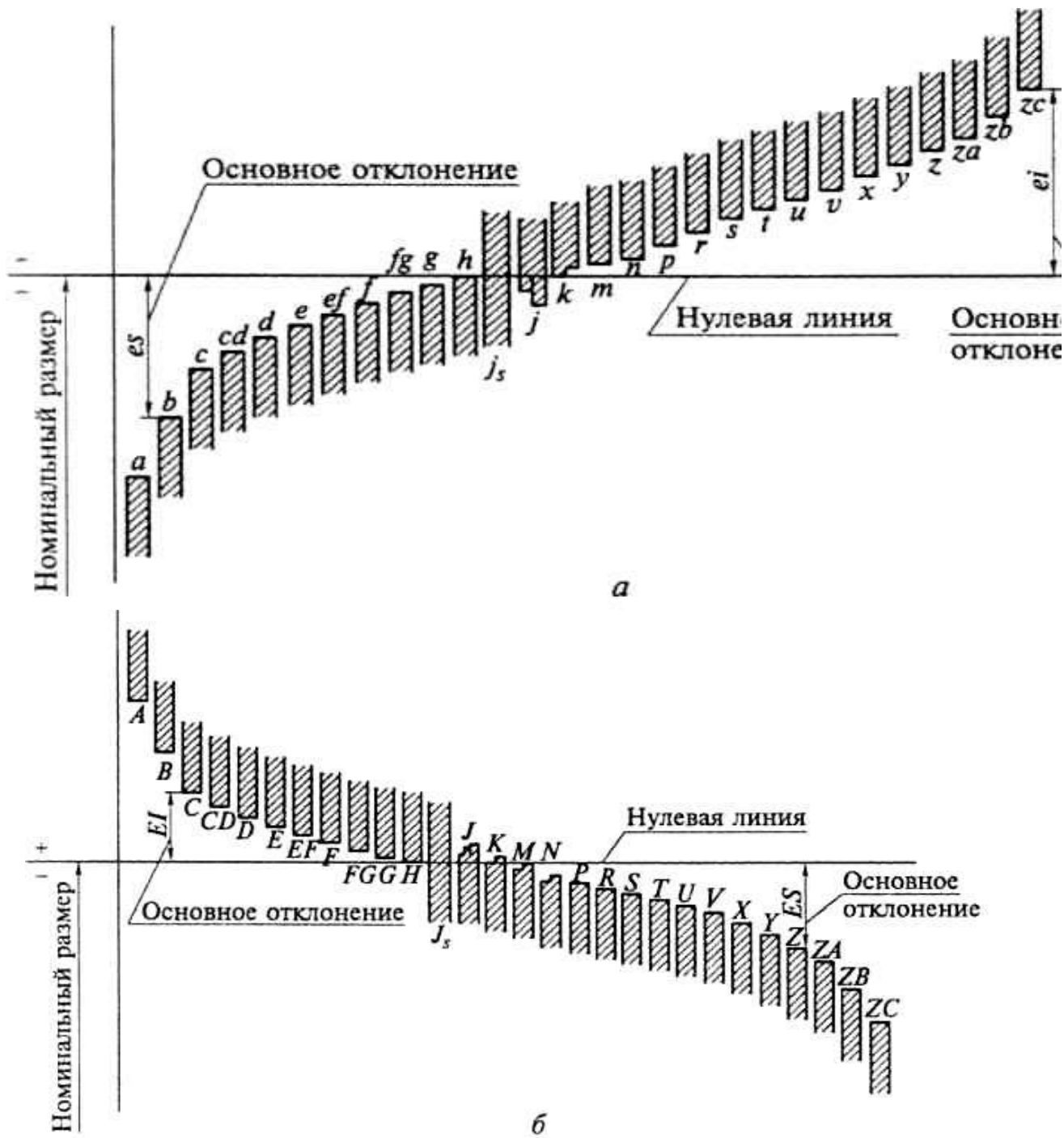


Рис.3.4. основные отклонения для валов (а), для отверстий (б)

3.4 Поля допусков

Поле допуска в ЕСДП образуется сочетанием одного из основных отклонений с допуском по одному из квалитетов. В соответствии с этим поля допусков обозначаются буквой основного отклонения и номерами квалитетов, например

для валов $h6, d11, b12, s8$ и т.д.;

для отверстий $A11, H8, S7$ и т.д.

По основному отклонению и допуску вычисляют второе предельное отклонение, ограничивающее данное поле допуска.

Если основное отклонение - верхнее, то нижнее отклонение определяют по зависимости:

для вала $ei = es - IT$;

для отверстия $El = ES - IT$.

Если основное отклонение – нижнее, то верхнее отклонение :

для вала $es = ei + IT$;

для отверстия $ES = El + IT$.

В системе ЕСДП можно образовывать поля допусков для любого квалитета, что позволяет получить более 500 полей допусков для валов и столько же полей допусков для отверстий. Однако не все возможные поля допусков могут найти применение даже в перспективе, на которую ориентирован стандарт, так как одновременное применение на практике всех полей допусков неприемлемо по экономическим соображениям (затрудняет унификацию изделий, различных инструментов и калибров). В ЕСДП для

диапазона размеров от 1 до 500 мм применяется отбор полей допусков, которые делятся на основные и дополнительные .

Основные поля допусков включают в себя предпочтительные (имеющие первоочередное применение) и рекомендуемые. Дополнительные поля допусков являются полями ограниченного применения и используются тогда, когда применение основных полей допусков не позволяет выполнить требования, предъявляемые к изделию.

3.5 Образование посадок

Посадки в системе ЕСДП образуются сочетанием полей допусков отверстия и вала.

Принципиально допускается любое сочетание полей допусков отверстия и вала. Предпочтение следует отдавать посадкам, образованным в системе отверстия или в системе вала. ГОСТ 25347 -82 устанавливает ряд стандартных посадок в системе отверстия и в системе вала. В каждой системе выделяются предпочтительные посадки, выделенные рамочками.



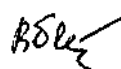
Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета

«__» _____ 2018 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от
«07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018

©Уральский государственный горный
университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА.....	4
1.1. Основные понятия статики	4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия	9
1.3. Произвольная плоская система сил.....	16
1.4. Равновесие систем тел	26
1.5. Произвольная пространственная система сил	34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения.....	44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА.....	55
2.1. Криволинейное движение точки	55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела	62
вокруг неподвижной оси	62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела	84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки.....	100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ	114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки	114
4.2. Колебания материальной точки.....	124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки.....	134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ.....	146
5.1. Теорема о движении центра масс системы	146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы	
относительно оси.....	148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы	153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию	
движений твёрдого тела	162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ	177
6.1. Принцип Даламбера для системы	177
6.2. Принцип возможных перемещений	182
6.3. Общее уравнение динамики.....	189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода	201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ.....	220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1	220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2	226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3	231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4	233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5	236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6	241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил**.

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной**, или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

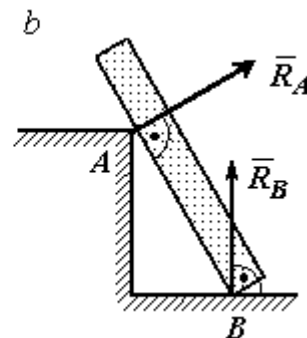
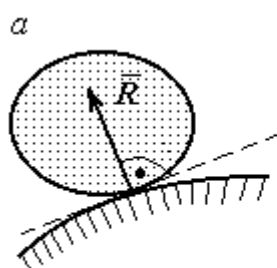


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормальям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

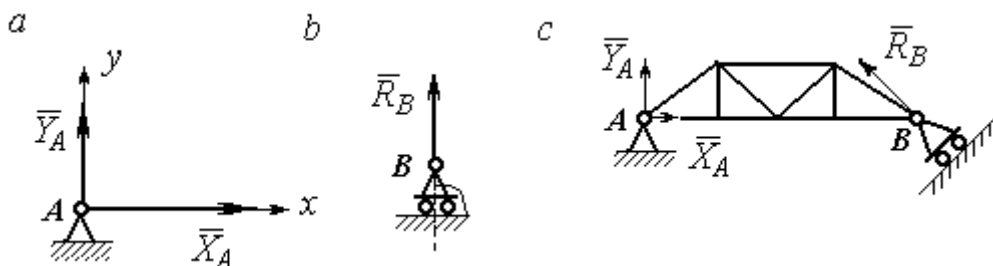


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

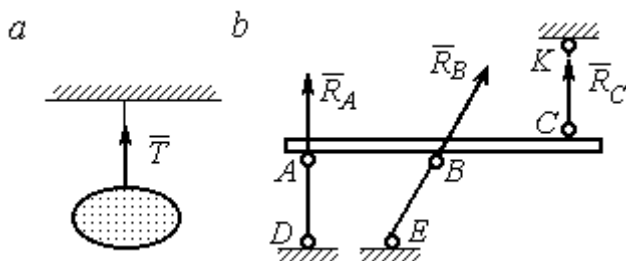


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира *A* разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

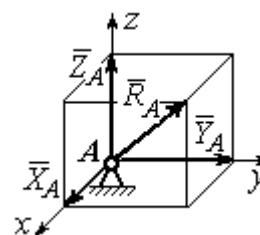


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

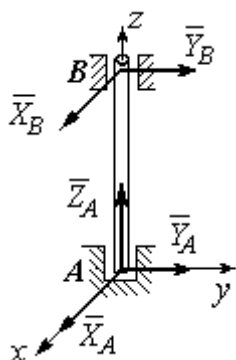


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника B разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям.

Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник A). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, a , на ось x :
 $F_x = F \cos \alpha$, $Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi$, $P_x = P \cos 90^\circ = 0$.

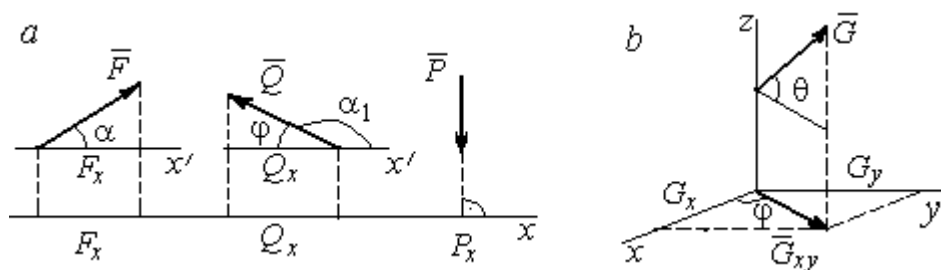


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
 a – проекция силы на ось; b – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, b вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость xy . По величине $G_{xy} = G \cos \theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz : $G_x = G_{xy} \cos \varphi = G \cos \theta \cos \varphi$,
 $G_y = G_{xy} \sin \varphi = G \cos \theta \sin \varphi$, $G_z = G \sin \theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120^\circ$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

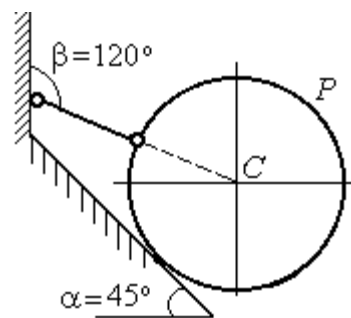


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$$

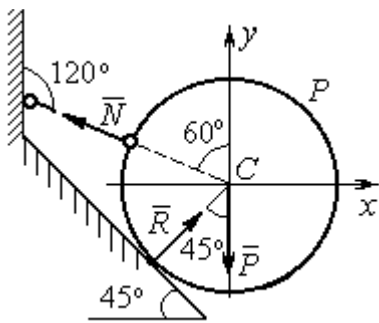


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N \cos 30^\circ + R \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N \cos 60^\circ + R \cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14,64 \text{ кН}$, $R = 17,93 \text{ кН}$.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней AC и BC , скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень BC горизонтален, стержень AC составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру C прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10 \text{ кН}$ и $G_2 = 12 \text{ кН}$. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок D так, что угол наклона участка троса CD к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней BC и AC .

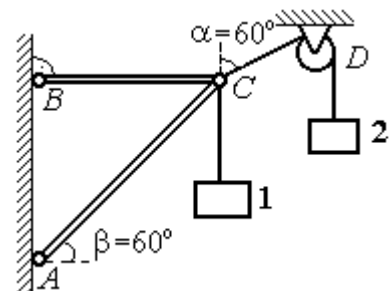


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла C , в котором закреплены стержни и тросы. На узел C действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней BC и AC (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xOy , как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2 \cos 60^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2 \cos 30^\circ + T_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$

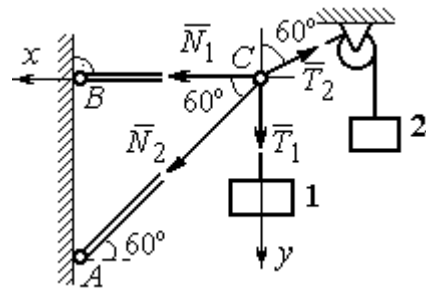


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел C при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12,7$ кН, $N_2 = -4,62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня AC направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном ABC

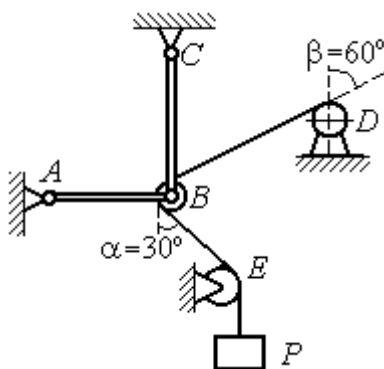


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

посредством каната, перекинутого через блоки B и D (рис. 1.11). Блок B установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней AB и BC , блок D укреплен так, что участок троса DB составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни AB и BC соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз P , переброшен через блок E и на отрезке BE составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока B , определить усилия в стержнях AB и BC при равновесии груза.

Решение

Рассмотрим равновесие блока B вместе с отрезками нити BE и BD . Освободим блок B от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать

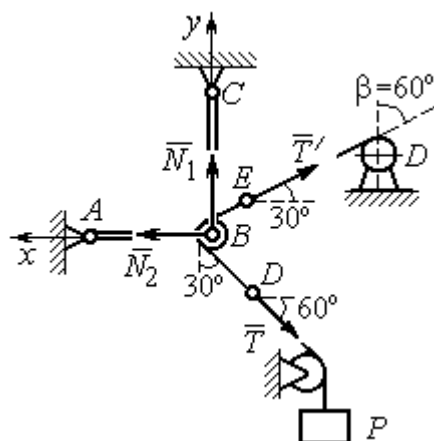


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок B , при его равновесии

силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити BD , приложенная в точке D , численно равная весу груза P , реакция $\vec{T}'$ нити BE , приложенная в точке E и также численно равная весу груза P и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и

выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T' \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ = 0; \quad \sum F_{ky} = N_1 + T' \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P = 20$ кН, получим: $N_1 = 7,32$ кН, $N_2 = 27,32$ кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса $CBDP$, натянутого грузом весом $P = 50$ Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса CB , BD , DP и натяжения оттяжек BA и DE , если угол отклонения оттяжки BC от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса BD от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

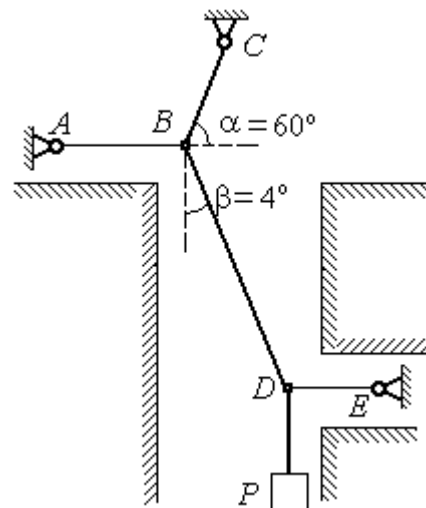


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла D , в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки DE и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP , равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат xDu , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла D :

$$\sum F_{kx} = S \cos 86^\circ - T_E = 0; \quad \sum F_{ky} = S \cos 4^\circ - T_P = 0.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке DP $T_P = P = 50$ Н, находим натяжение S на сред-

нем участке отвеса: $S = \frac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50,12$ Н. Из

первого уравнения находим натяжение $T_E = S \cos 86^\circ = 3,49$ Н.

Теперь рассмотрим равновесие узла B , на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки BA , реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса BC и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$,

а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла B :

$$\sum F_{kx} = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ - T_A = 0; \quad \sum F_{ky} = T_C \cos 30^\circ - S' \cos 4^\circ = 0.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке BC и натяжение T_A оттяжки BA : $T_C = \frac{S' \cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57,73$ Н; $T_A = T_C \cos 60^\circ + S' \cos 86^\circ = 32,36$ Н.

Задача 5. Груз $P = 20$ кН удерживается двумя стержнями AC , AD одинаковой длины и цепью AB , скреплённых в точке A , так, что плоскость треугольника ADC горизонтальна (рис. 1.15). Цепь BA отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние $CE = ED$. Трос закреплён одним концом в точке A , а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок K так, что отрезок

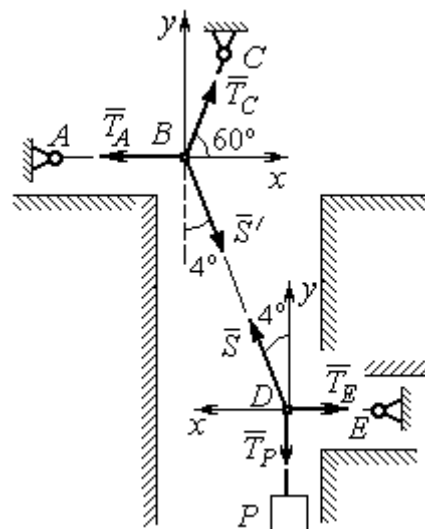


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах B и D при равновесии отвеса

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с

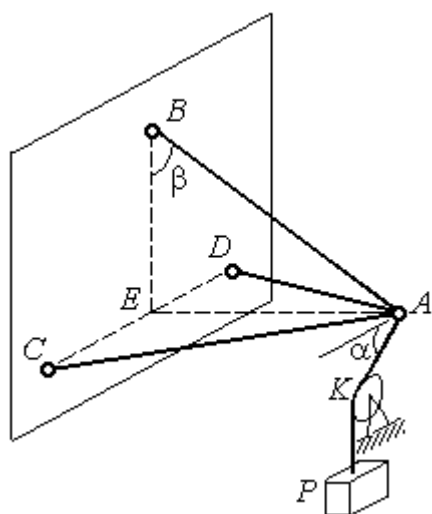


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

Решение

Рассмотрим равновесие узла A . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням,

реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

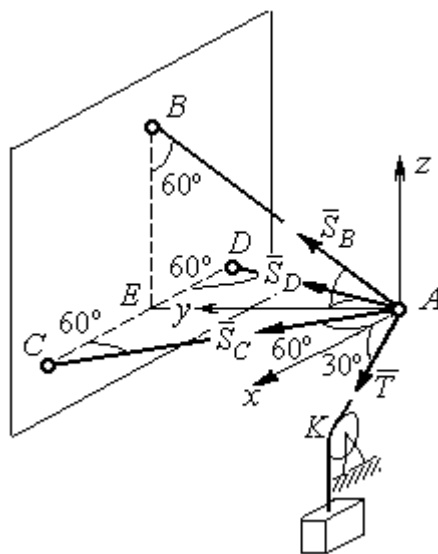


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A , при его равновесии

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27,32$ кН; $S_D = 7,32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC , соединённых в точке D . В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

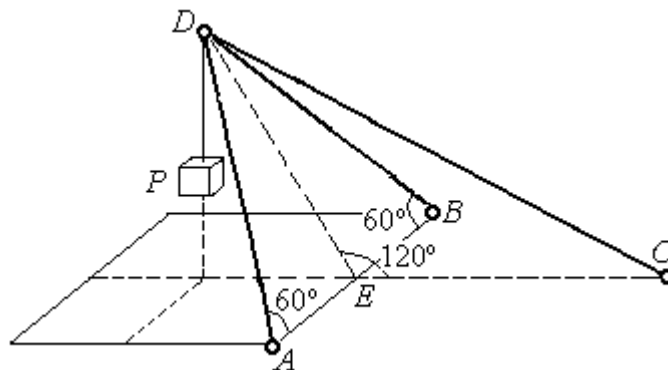


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D . Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

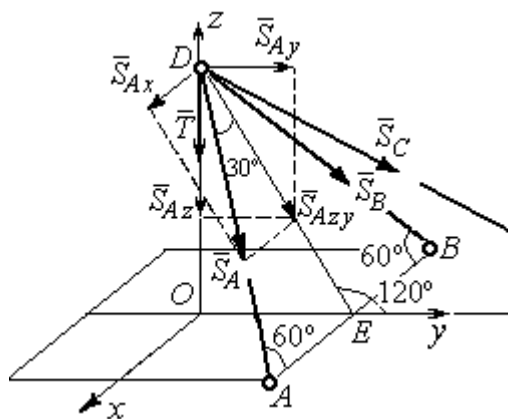


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D , при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz , а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz . На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A \cos 60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy} \cos 60^\circ = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy} \cos 30^\circ = -S_A \cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C \cos 30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C \cos 60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A \cos^2 30^\circ - S_B \cos^2 30^\circ - S_C \cos 60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил**.

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O , или просто **моментом силы $\vec{F}$** относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, а): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы**. Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

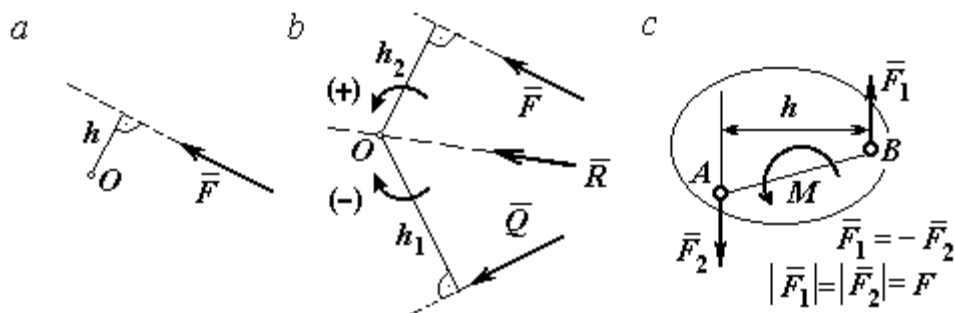


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, b – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо h и момент M : $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.19, *c*).

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

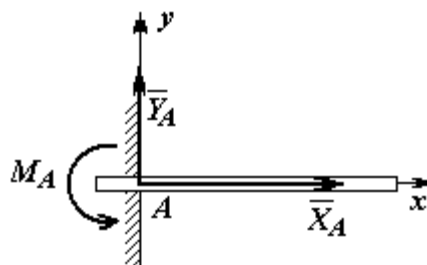


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На

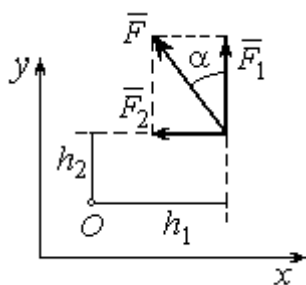


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F \cos \alpha$, $F_2 = F \sin \alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно

центра O . Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра O : $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределёнными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью q . Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

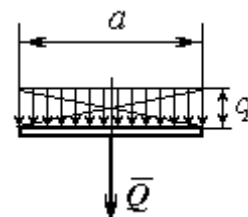


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

нодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка AB весом $P = 100$ кН прикреплена к стене шарниром A (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке B , перекинутого через блок D и несущего груз Q . Участок троса DB образует с вертикалью угол 30° . В точке C к балке подвешен груз G весом $G = 200$ кН. Определить вес груза Q , удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира A , пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0,25BA$.

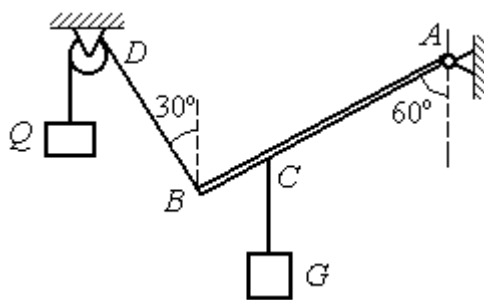


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка AB . На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка AB , реакция шарнира A , представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз Q , и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз G . Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.24.

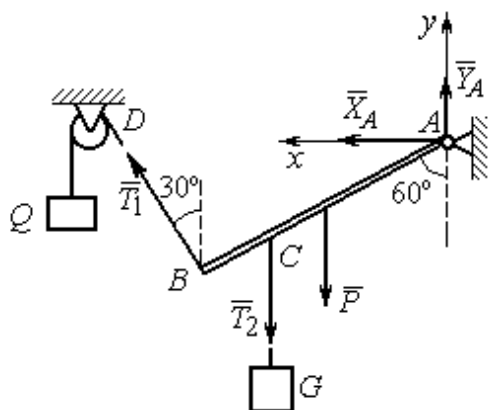


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1 \cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку A и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра A имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1 \ell + T_2 \frac{3}{4} \ell \cos 30^\circ + P \frac{1}{2} \ell \cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз Q , по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз G , численно равна весу груза G : $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q \cdot 0,5 = 0, \quad Y_A + Q \cdot 0,866 - 300 = 0, \quad -Q + 173,2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173,2$ кН, $X_A = -86,6$ кН, $Y_A = 150,01$ кН.

Задача 8. Рама ACE (рис. 1.25, a) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10 \text{ кН}$, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке AB нагрузка интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$. В точке E под прямым углом к отрезку CE рамы прикреплен трос, переброшенный через блок и несущий груз $P = 20 \text{ кН}$.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы ACE . Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.25, b .

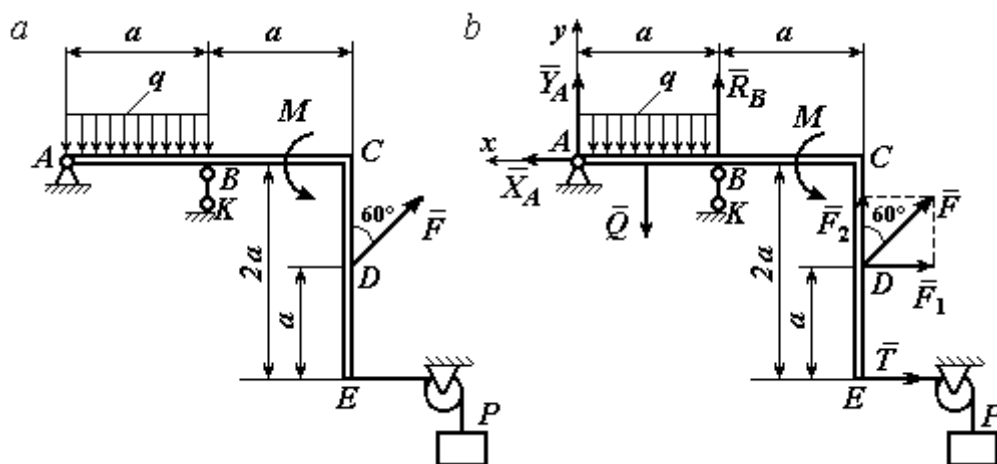


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
 a – конструкция и нагрузка рамы; b – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси Ax и вертикальной Ay . Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Действие груза P на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, b показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры BK выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы ACE действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси Ax, Ay , первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0. \quad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира A , проходят через центр A , плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, b). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы F на оси координат: $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра A : $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0,5a + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0. \quad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B . Решая эту систему, найдем: $X_A = 28,66$ кН; $Y_A = 59,66$ кН; $R_B = -60,66$ кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры A – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама $ABCED$

(рис. 1.26) в точке A закреплена жёсткой заделкой. В точке E к раме прикреплена нить, составляющая угол 60° к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом $P = 15$ кН. На раму

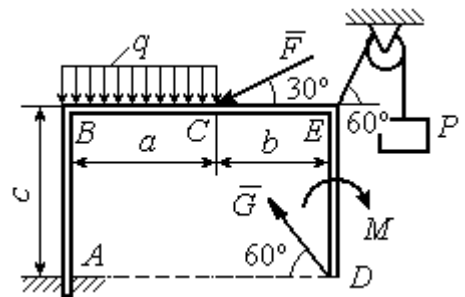


Рис. 1.26. Конструкция рамы

действуют: пара сил с моментом $M = 12$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке C под углом 30° к горизонтальному участку рамы BE , и равномерно распределенная на отрезке BC нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке D под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке A , если размеры рамы: $a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 5$ м.

Решение

Объектом равновесия является рама $ABCED$. Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке A и нить, натянутая грузом P . Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке A в виде силы, которую представим двумя ее составляющими – $\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке E , направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. За-

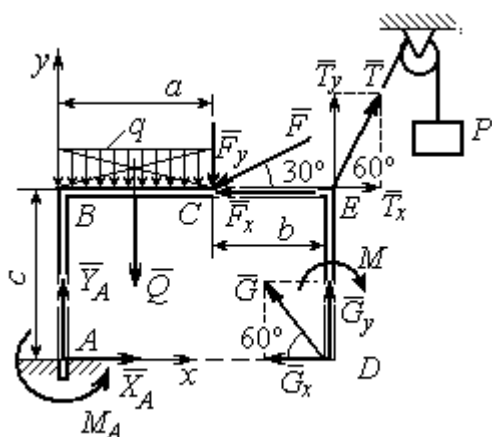


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

меняем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$.

Условия равновесия для такой системы

сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ + G \cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра A . В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям Ax и Ay : $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F \cos 30^\circ$, $F_y = F \cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра A равно c (как длина перпендикуляра, проведённого из центра A на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние a . По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a.$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G \cos 30^\circ \cdot (a + b)$;

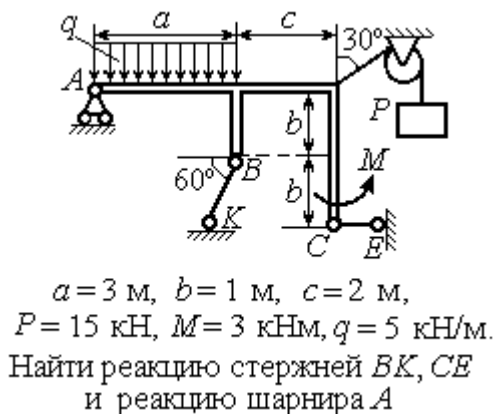
$M_A(\vec{T}) = -T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_k) = F \cos 30^\circ \cdot c - F \cos 60^\circ \cdot a - T \cos 60^\circ \cdot c + T \cos 30^\circ \cdot (a + b) + \\ + G \cos 30^\circ \cdot (a + b) - Q \frac{a}{2} - M + M_A = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A , откуда найдём значения реакций: $X_A = 11,16$ кН; $Y_A = -21,31$ кН; $M_A = -70,73$ Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 24,05$ кН.

Упражнения

Упражнение 1.1



Упражнение 1.2

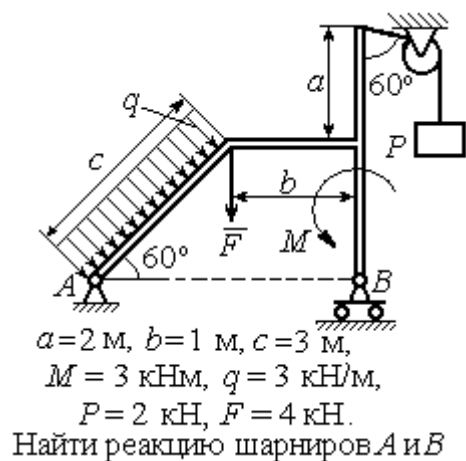
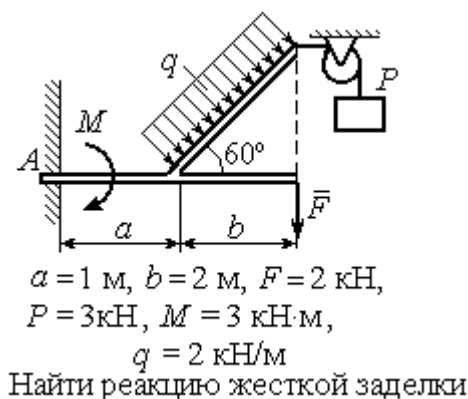


Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



Упражнение 1.4

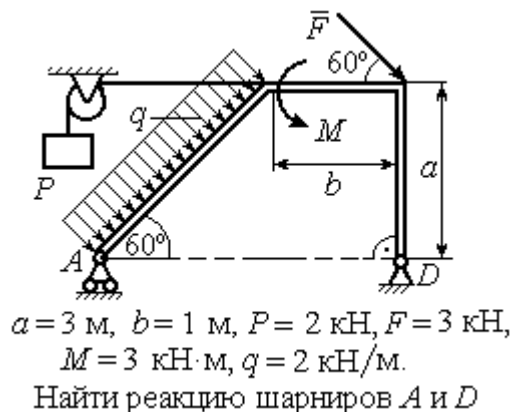


Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. При этом **реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом $Q = 100 \text{ кН}$ опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB . На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30° к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60° к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B , а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P . Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P , удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

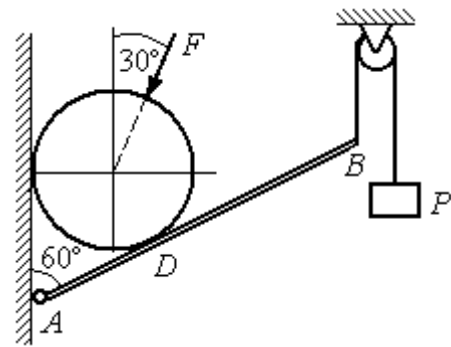


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и

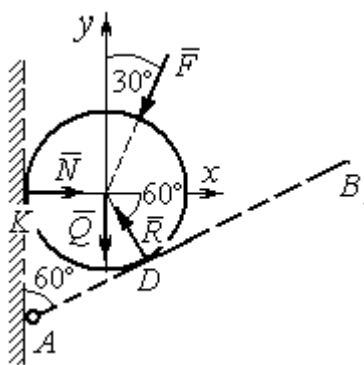


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = -F \cos 60^\circ - R \cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F \cos 30^\circ + R \cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A , (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P , и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на

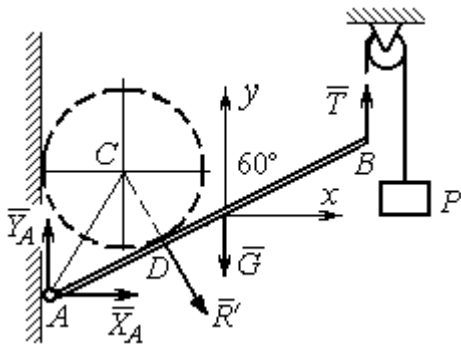


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$;

$$\sum F_{ky} = 0; \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R' \cos 60^\circ = 0, \quad (1.8)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R' \cos 30^\circ - G + T = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ + T \ell \cos 30^\circ = 0. \quad (1.10)$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165,47$ кН; $N = 107,74$ кН; $P = 95,26$ кН; $X_A = -82,73$ кН; $Y_A = 128,03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD , прикрепленной к вертикальной стене в точке A , и откоса BC , соединённого с балкой AD в точке C под углом

60° и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

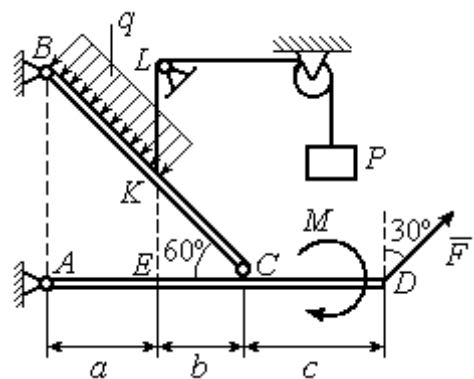


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30° к вертикали и равная по модулю $F=10$ кН, пара сил с моментом $M=8$ кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью $q=3$ кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом $P=5$ кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A , B и C , если $a=2$ м, $b=1$ м, $c=3$ м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD . Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

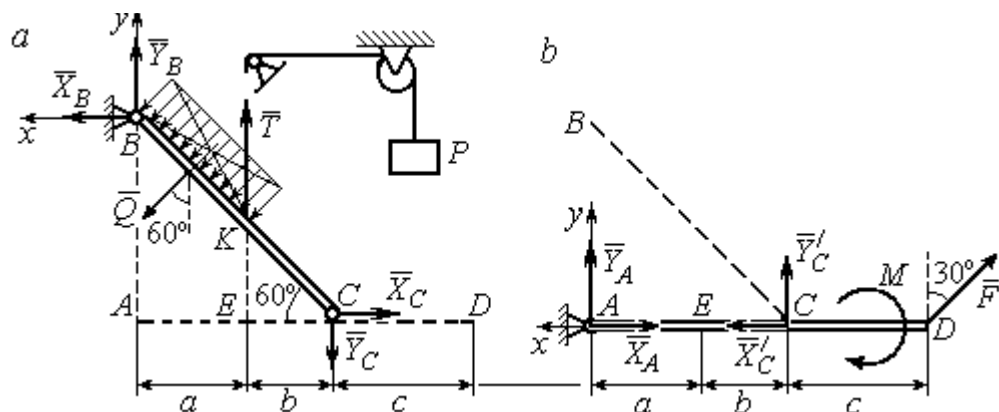


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кранштейна:
 а - силы, действующие на балку BC ; б - силы, действующие на балку AD

На рис. 1.34, а показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC : реакция $\vec{R}_B$ шарнира B , реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T=P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C . Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, а) и численно равной $Q=q \cdot BK = q \cdot \frac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил $(\vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T})$, действующая на балку BC , является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат xBy , как показано на рис. 1.34, a , и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \quad (1.11)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \quad (1.12)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \quad (1.13)$$

где $AB = (a+b)\operatorname{tg} 60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки AD (рис. 1.34, b).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира A и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира C . Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, b реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат xAy как показано на рис. 1.34, b , и составим уравнения равновесия балки AD , вычисляя моменты сил относительно центра C :

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \quad (1.15)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \quad (1.16)$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$$X_A = 5,99 \text{ кН}, Y_A = 5,99 \text{ кН}, X_C = 10,99 \text{ кН}, Y_C = -14,65 \text{ кН};$$

$$X_B = 0,6 \text{ кН}, Y_B = -13,65 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,47 \text{ кН}, \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18,31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13,65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB , а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10 \text{ кН}$, и пара сил с моментом $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если параметр a , определяющий размеры конструкции, равен $a = 2 \text{ м}$.

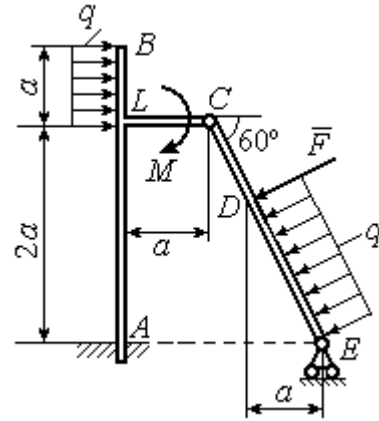


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

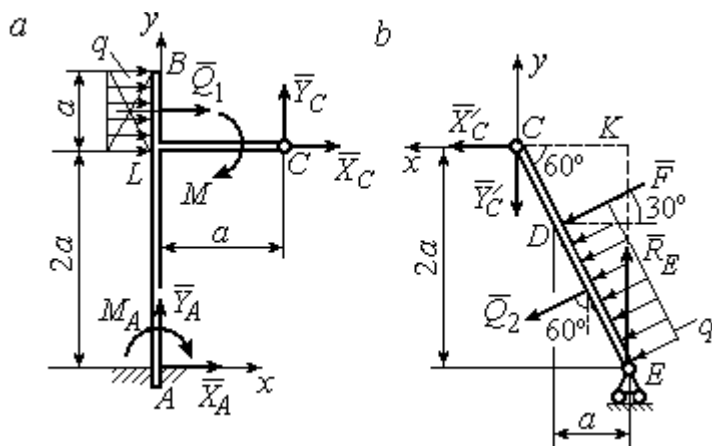


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
 а - силы и реакции связей, действующие на балку AB ;
 б - силы и реакции связей, действующие на балку CE

но равной $Q_1 = qa = 4 \text{ кН}$. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C .

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, а). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, числен-

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_A . Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a*, и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \quad (1.17)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \quad (1.18)$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \frac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b*, и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad (1.19)$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a \tan 30^\circ = 0. \quad (1.21)$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

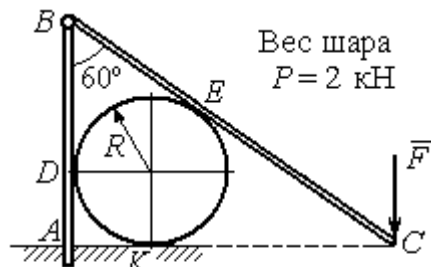
$$X_A = 11,59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}; \quad M_A = 42,87 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_C = -15,59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}; \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C : $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}$; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}$.

Упражнения

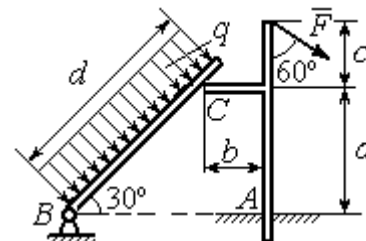
Упражнение 1.5



$$R = 1 \text{ м}, \quad F = 8 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B , реакцию опоры шара в точках D, K, E

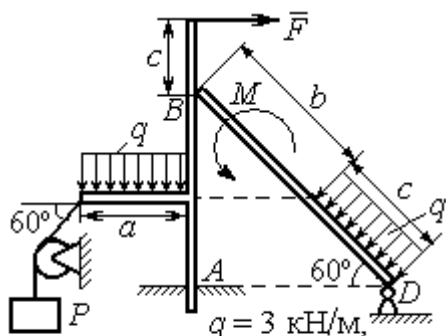
Упражнение 1.6



$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 1 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}, \quad d = 5 \text{ м}, \\ q = 3 \text{ кН/м}, \quad F = 4 \text{ кН}.$$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

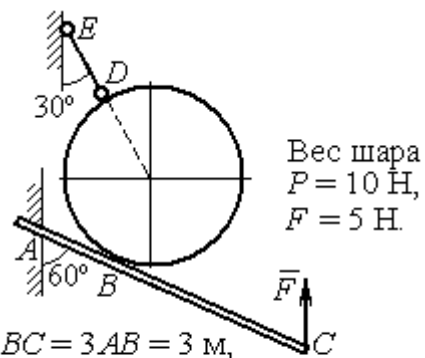
Упражнение 1.7



$$F = 4 \text{ кН}, \quad P = 3 \text{ кН}, \quad M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ a = 2 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м}, \quad c = 1 \text{ м}$$

Найти реакцию заделки A , шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$$BC = 3AB = 3 \text{ м},$$

Найти реакцию жесткой заделки A , реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения

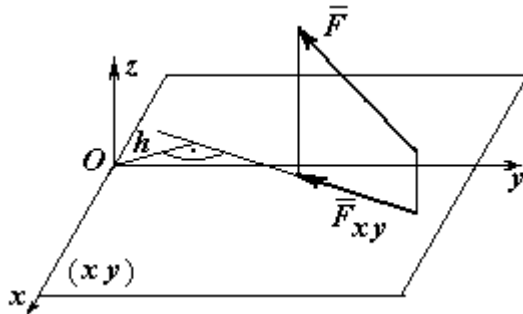


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z :

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy , перпендикулярной оси z ;

$\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плос-

кость xy ; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O . Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, \dots$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплён в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r .

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx .

Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива D по касательной в точке L параллельно плоскости zCx , так что радиус шкива D , проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30° .

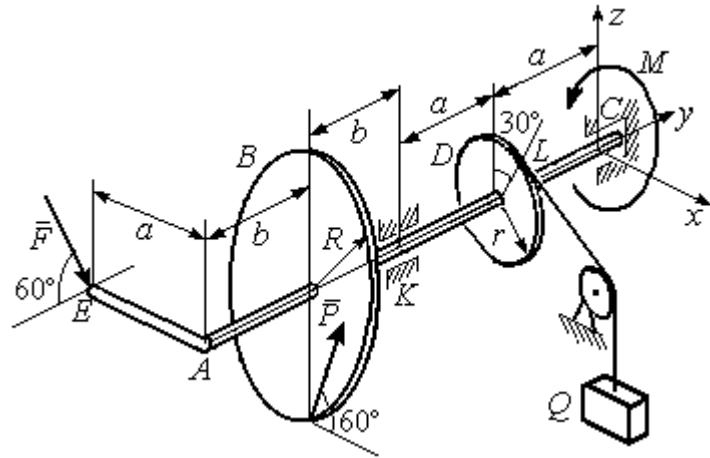


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива B , параллельна плоскости zCx и составляет угол 60° с направлением оси Cx . Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0,6$ м; $r = 0,3$ м; $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м.

Решение

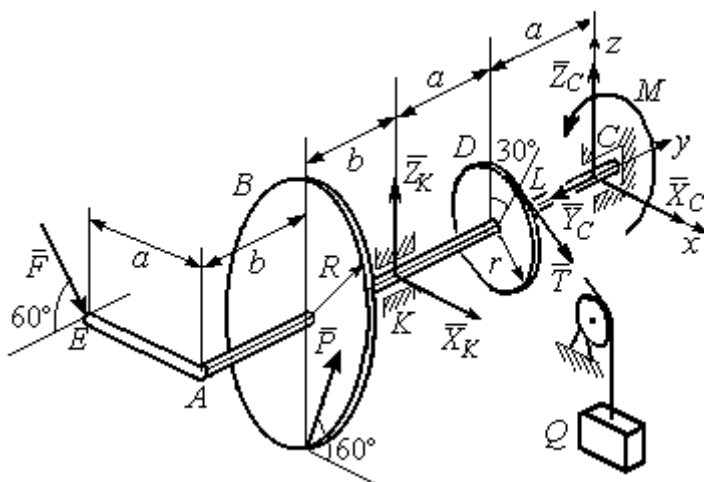


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K . Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника C рас-

кладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника K лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x, z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки L и по модулю равна весу груза Q .

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

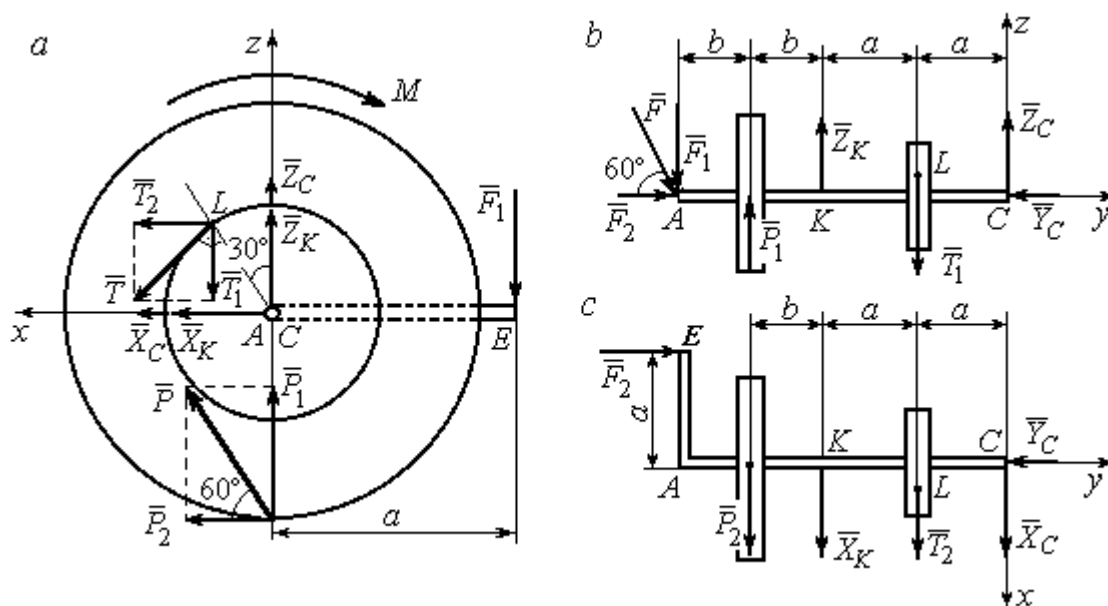


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z

На рис. 1.41, a показаны проекции вала и всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций сил относительно точки C , получим значения моментов этих сил относительно оси y . При вычислении моментов сил относительно оси x достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (рис. 1.41, b), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z (рис. 1.41, c).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P \cos 30^\circ$;
 $P_2 = P \cos 60^\circ$; $T_1 = T \cos 60^\circ$; $T_2 = T \cos 30^\circ$; $F_1 = F \cos 30^\circ$; $F_2 = F \cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P \cos 60^\circ + X_K + T \cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F \cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P \cos 30^\circ + Z_K - T \cos 60^\circ + Z_C - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T \cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P \cos 30^\circ \cdot (2a + b) + \\ + F \cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F \cos 30^\circ \cdot a - P \cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T \cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P \cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F \cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8,09 \text{ кН}, \quad Y_C = 1 \text{ кН}, \quad Z_C = 4,65 \text{ кН}, \quad Z_K = 2,92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10,02 \text{ кН}, \quad T = 18,6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9,4 \text{ кН}, \quad R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10,44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза Q равен реакции нити T .

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира A , подшипника B и удерживается в вертикальном положении стержнем CO , лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10 \text{ кН}$, приложенная на верхней стороне плиты в точке H под углом 30° к линии EC , и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5 \text{ кН}$, приложенная в точке D параллельно стороне AB .

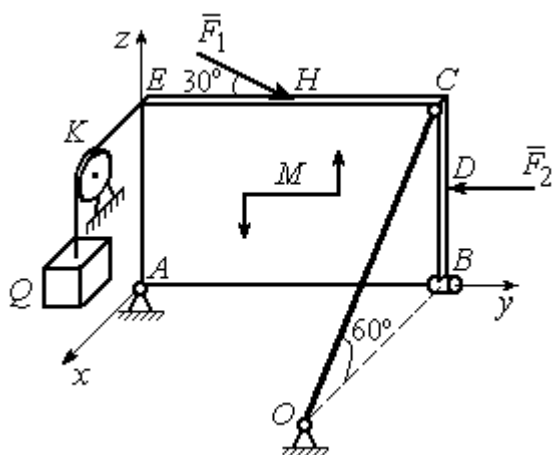


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K , подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A , подшипника B и реакцию стержня CO , если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A , нить, натянутая грузом Q , подшипник B и невесомый стержень CO .

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза

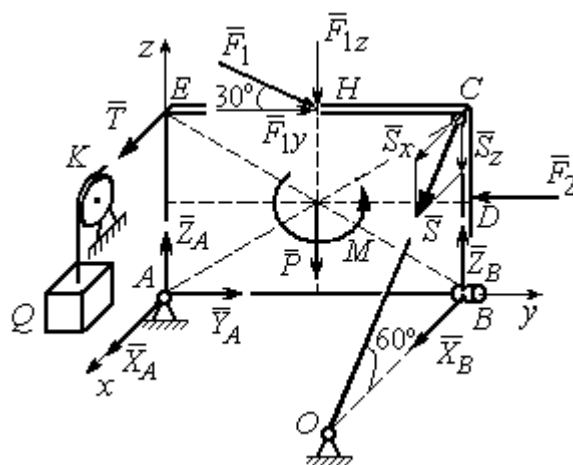


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

$T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay , и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1 \cos 60^\circ - P + Z_B - S \cos 30^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = & -F_1 \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - F_1 \cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0,5 \cdot AB + \\ & + F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S \cos 30^\circ \cdot AB + M = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S \cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S \cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17,53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12,89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга $ACEB$ весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках A и B цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60° (рис. 1.44). На фрамуге в точке H закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок K , несёт груз Q . При этом линия верёвки HK параллельна прямой ED . На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке C перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

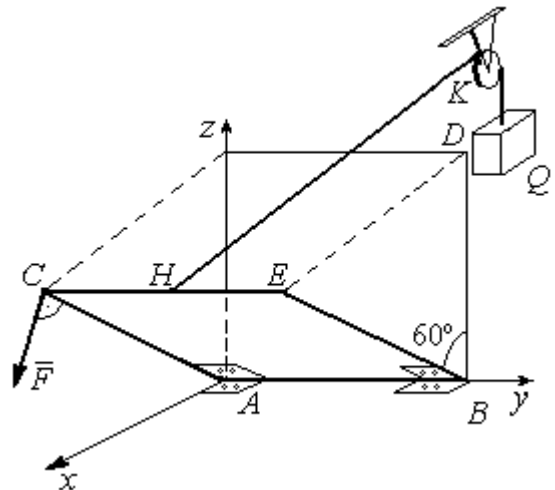


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза Q , необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров A и B , если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги $ABCE$. Изображаем внешние активные

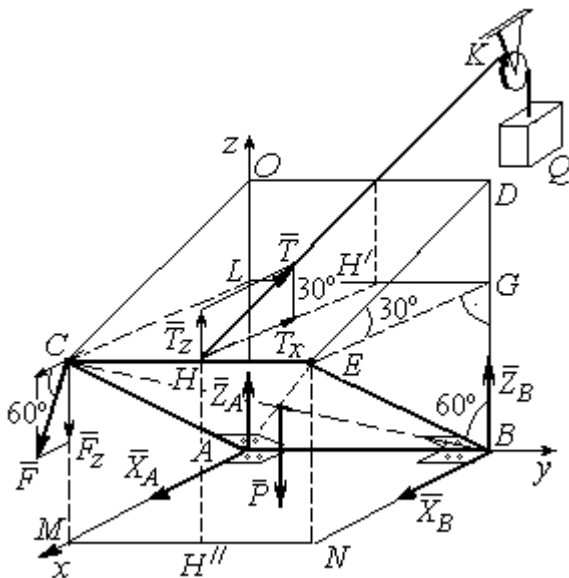


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира A и B (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом Q . Выберем систему координат $Axyz$, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров A и B раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в

плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось Ay), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси Ax определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость zAy относительно точки A – пересечения оси Ax и перпендикулярной ей плоскости zAy (см. рис. 1.46, a). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси Az достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость xAy относительно точки A (см. рис. 1.46, b).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, c).

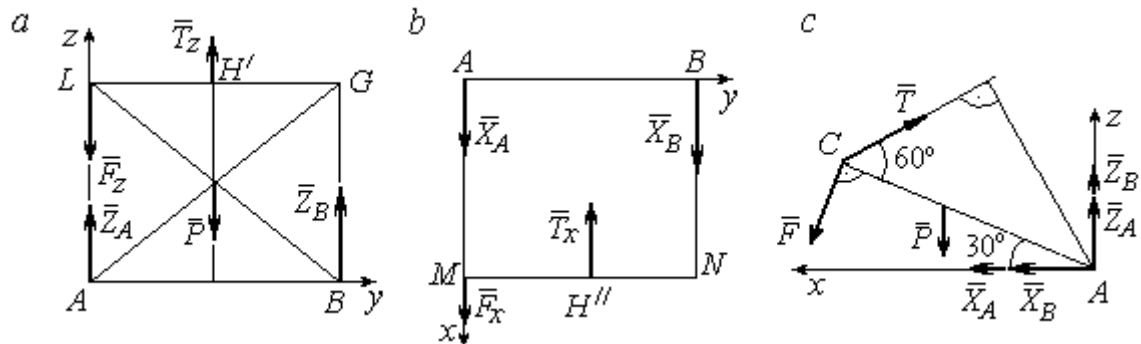


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:

a – проекция на плоскость zAy со стороны положительного направления оси x ;
 b – проекция на плоскость xAy со стороны положительного направления оси z ;
 c – проекция на плоскость zAx со стороны положительного направления оси y

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) &= T_z \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = \\ &= T \cos 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0,5 \cdot AC \cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0,5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T \cos 30^\circ \cdot 0,5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18,22 \text{ Н}, Z_B = 14,41 \text{ Н}, R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23,31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10,83 \text{ Н}, Z_A = 27,41 \text{ Н}, R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29,47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42,37 \text{ Н}$.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал AD (рис. 1.47) закреплён в подпятнике A и подшипнике C . Вал имеет шкив радиуса r и рукоять DH , перпендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

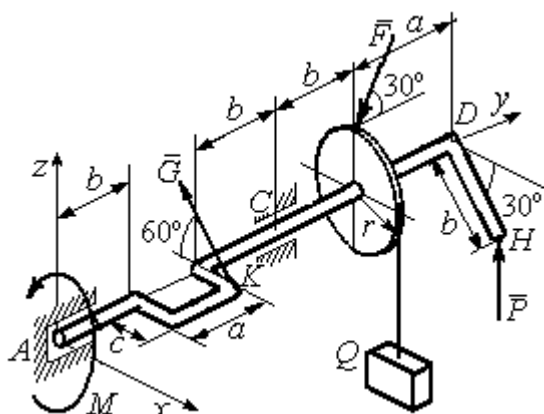


Рис. 1.47. Равновесие вала

пендикулярные оси вала. Рукоять DH образует угол 30° к направлению оси Ax . Колено вала расположено в горизонтальной плоскости xAy . Нить, удерживающая груз Q , намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом M . Сила $\vec{F}$ приложена в верхней

точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси Ay и находится в плоскости zAy . Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке H рукояти параллельно оси Az . Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке K стойки колена вала под углом 60° к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом M создаёт вращение вала вокруг оси Ay .

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН;
 $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0,3$ м;
 $a = 0,8$ м; $b = 0,4$ м; $c = 0,2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник A и подшипник C .

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

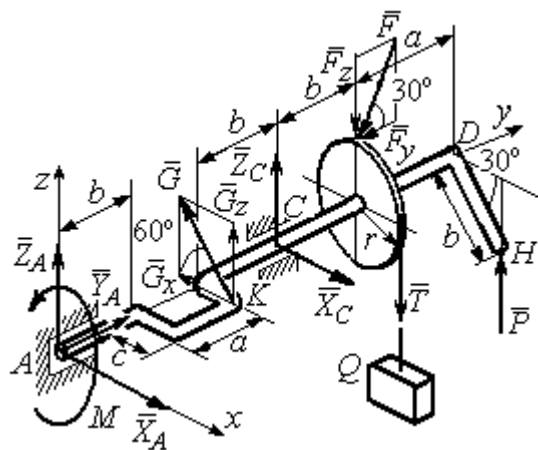


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G \cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G \cos 30^\circ + Z_C - F \cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r - \\ - T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb \cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G \cos 30^\circ$; $G_x = G \cos 60^\circ$; $F_z = F \cos 60^\circ$; $F_y = F \cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

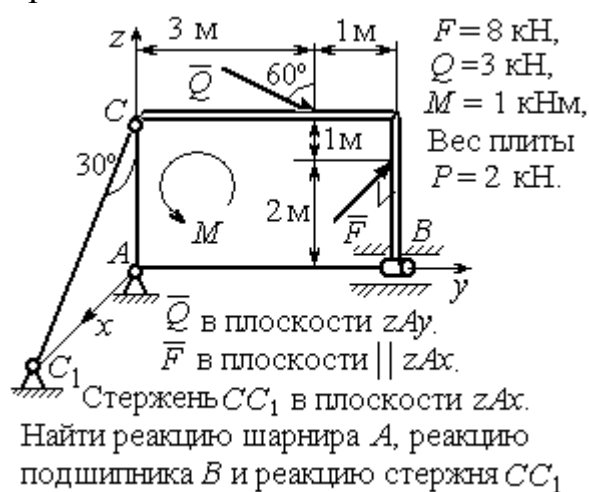
$$X_C = 2,25 \text{ кН}; Z_C = 13,57 \text{ кН}; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15,58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0,39 \text{ кН}; Y_A = 10,39 \text{ кН}; X_A = 0,75 \text{ кН}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10,42 \text{ кН}.$$

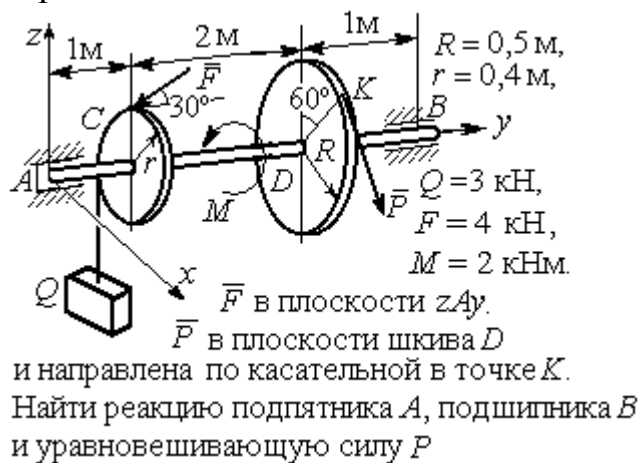
Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25,03 \text{ кН}$.

Упражнения

Упражнение 1.9



Упражнение 1.10



Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

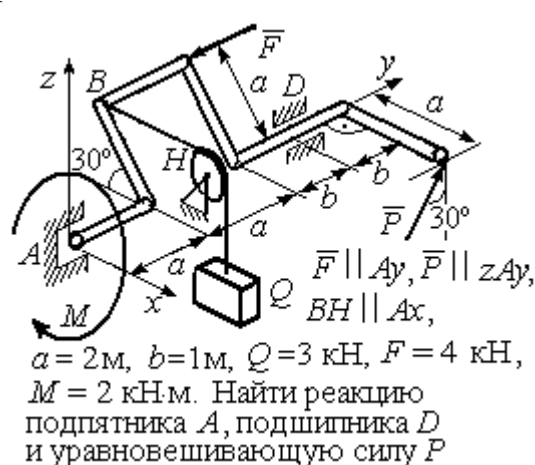


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**.

Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$

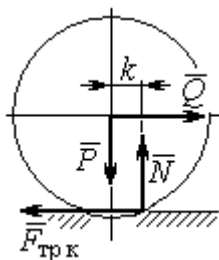


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

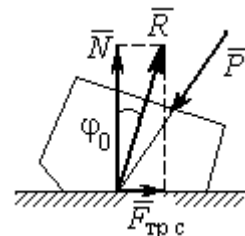


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$.

Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q , а к

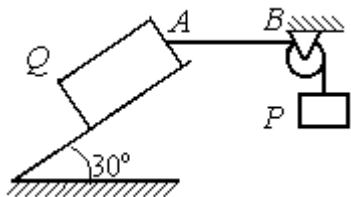


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

другому, перекинута через невесомый блок, подвешен груз весом P . Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30° к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P , при которых груз Q может начать скольжение по плос-

кости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P . На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\text{min}}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, а). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравнивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P , направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, a).

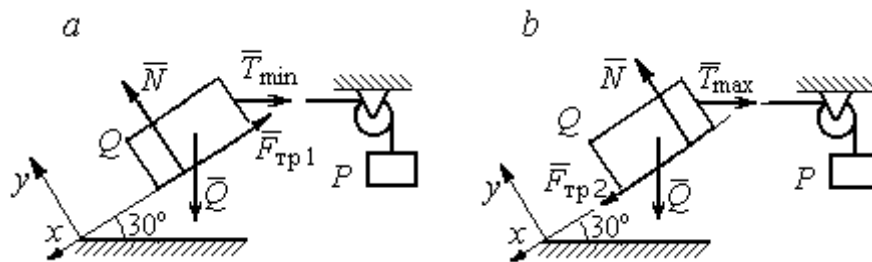


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
 a – минимальный вес уравнивающего груза;
 b – максимальный вес уравнивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\min} \cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\min} \cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7,21$ Н. Минимальное значение веса уравнивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7,21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P . На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, b).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза Q :

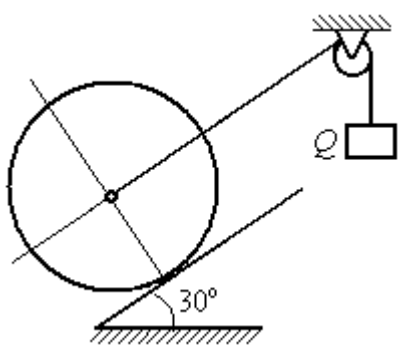
$$\sum F_{kx} = Q \cos 60^\circ - T_{\max} \cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q \cos 30^\circ + N - T_{\max} \cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P : $P_{\max} = T_{\max} = 63,54 \text{ Н}$.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравнивающего груза находится в пределах $8,87 < P < 48,87 \text{ Н}$.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса $r = 0,5 \text{ м}$, весом $P = 50 \text{ Н}$ удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец кото-



рой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_k = 0,02$ м. Наклонная плоскость составляет угол 30° с горизонтом.

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q , при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения f_c , при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q . На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1 , слева от нормально-

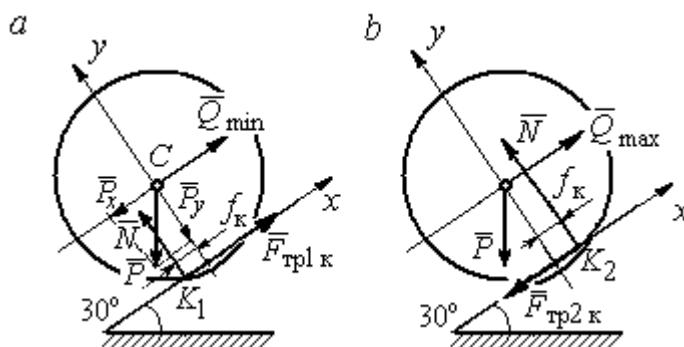


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

го к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1 :

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P \cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7,68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43,3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17,32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр}2\text{к}}, \vec{N}, \vec{P}) \propto 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P \cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр}2\text{к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P \cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P \cos 30^\circ \cdot f_k = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42,32 \text{ Н}$; $N = 43,3 \text{ Н}$; $F_{\text{тр}2\text{к}} = 17,32 \text{ Н}$.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7,68 \leq Q \leq 42,32 \text{ Н}$.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр}с}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр}с} > F_{\text{тр}к}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}с} = f_c N = 43,3 f_c$, где f_c – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр}к} = F_{\text{тр}1\text{к}} = F_{\text{тр}2\text{к}} = 17,32 \text{ Н}$. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43,3 f > 17,32$, откуда $f > 0,4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0,5$ м и $r = 0,2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB , соединённого цепью CD с

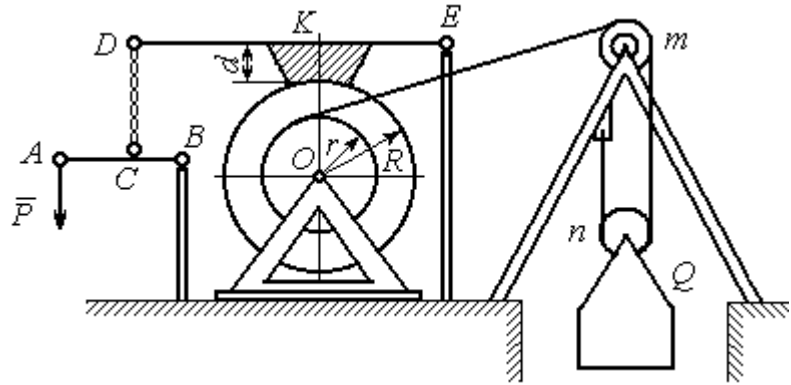


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0,4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n , удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m , составляет 30° .

Определить величину силы $\vec{P}$, уравнивающей груз Q , и реакции шарниров O и E , если вес ворота $G = 140$ Н, высота тормозной колодки $d = 0,1$ м, расстояния $AB = 1$ м, $BC = 0,1$ м; $ED = 1,2$ м; $EK = 0,6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того, чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, а). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n .

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \quad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{\text{бл}}$ – радиус блока n .

Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0,5Q = 500 \text{ Н}$.

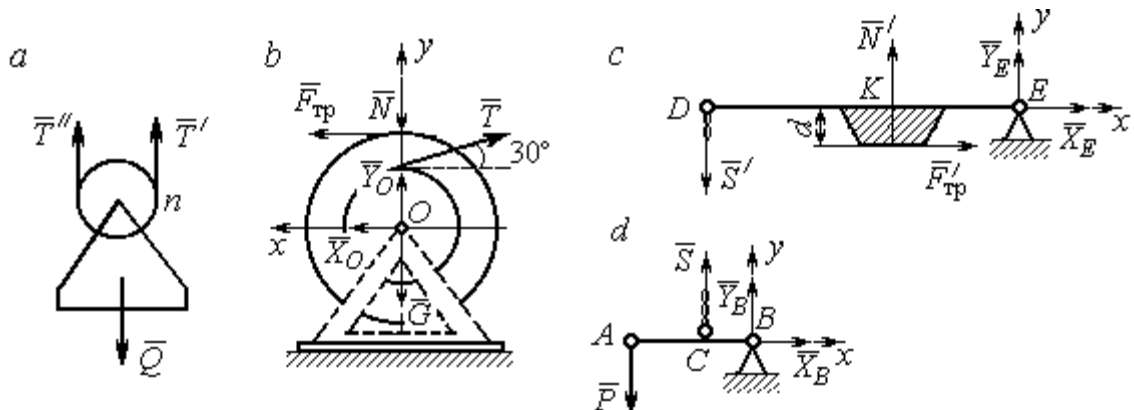


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
 а – равновесие груза; б – силы, действующие на барабан; в – силы, действующие на тормозной рычаг DE; д – силы, действующие на рычаг AB

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира O , представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, б).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил $(\vec{G}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}, \vec{N}, \vec{F}_{\text{тр}}) \sim 0$. Составим уравнение моментов относительно точки O :

$$-Tr + F_{\text{тр}}R = 0, \text{ откуда с учётом } T = T' \quad F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н.}$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{\text{тр}} = fN$, тогда $N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 500 \text{ Н}$.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, б:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{\text{тр}} - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T \cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира O :

$$X_O = 233 \text{ Н}; Y_O = 390 \text{ Н}; R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454,3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага DE (см. рис. 1.57, c).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке D на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира E , разложенная на составляющие $\vec{X}_E, \vec{Y}_E$ вдоль осей x, y . Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н}$, $N' = N = 500 \text{ Н}$, определим усилие S' , с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира E :

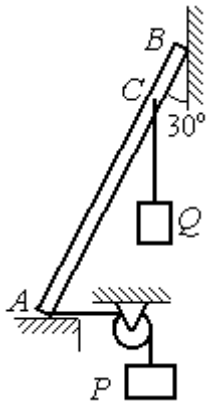
$$S' = 233,33 \text{ Н}; X_E = -200 \text{ Н}; Y_E = -266,67 \text{ Н}; R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333,34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравнивания груза Q , найдём рассматривая равновесие рычага AB (см. рис. 1.57, d). На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира B , показанная на рис. 1.57, d составляющими $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки B : $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдём $P = 23,3 \text{ Н}$.

Упражнения

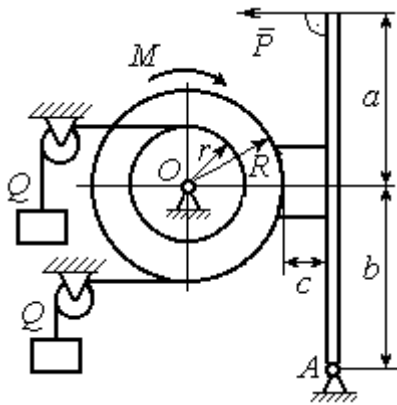
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0,2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30° . В точке C к стержню подвешен груз Q . Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P . В каких границах можно изменять вес груза P , не нарушая равновесия стержня?

$$AB = 3 \text{ м}, AC = 2 \text{ м}, Q = 200 \text{ Н}.$$

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r . На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q . К шкиву приложена пара сил с моментом M . Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0,4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравнивающую шкив. Найти реакцию шарнира A .

$$a = b = 1 \text{ м}; c = 0,1 \text{ м}; Q = 100 \text{ Н}; M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R = 0,6 \text{ м}; r = 0,2 \text{ м}.$$

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным, координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

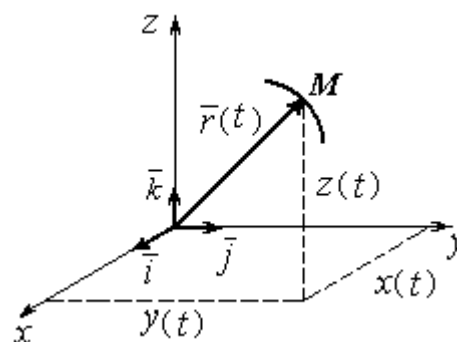


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x , V_y , V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки, или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x , a_y , a_z проекций вектора ускорения на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости:

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$;

$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно опреде-

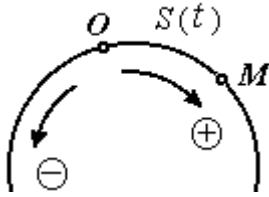


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

ляется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S} \vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось n):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

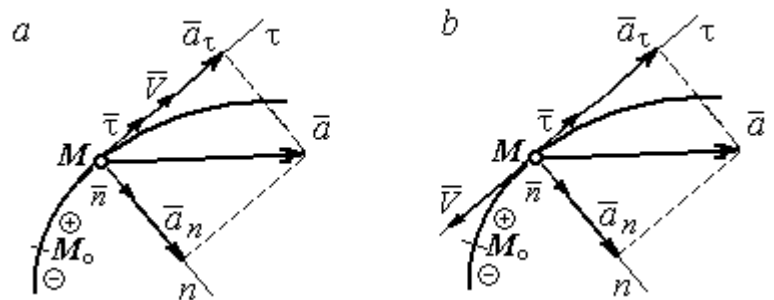


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где x, y – в сантиметрах, t – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени $t_1 = 0,25$ с, $t_2 = 0,75$ с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$.

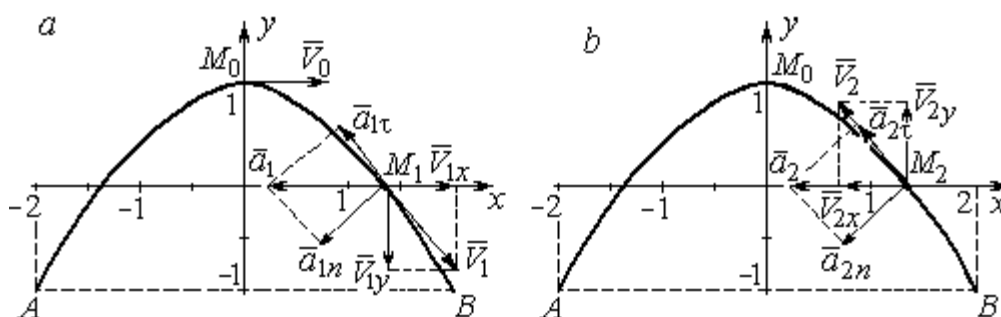


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к B ;
b – ускоренное движение точки на участке от B к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени $t_1 = 0,25$ с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1 :

$$x_1 = x(0,25) = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0,25) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi \cos \pi t; \quad V_y(t) = \dot{y} = -2\pi \sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0,25) = 2\pi \cos \frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0,25) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x} , a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0,25) = -2\pi^2 \sin \frac{\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = a_y(0,25) = -4\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2 \sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0,25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, а.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, а). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0,75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1 :

$$x_2 = x(0,75) = 2\sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}; \quad y_2 = y(0,75) = \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0,75) = 2\pi \cos \frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{2y} = V_y(0,75) = -2\pi \sin 2\pi \frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0,75) = -2\pi^2 \sin \frac{3\pi}{4} = -\pi^2 \sqrt{2} \text{ см/с}^2; \quad a_{2y} = a_y(0,75) = -4\pi^2 \cos 2\pi \frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0,75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени $t_2 = 0,75$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 ($t_0 = 0$) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения B на траектории ($t_B = 0,5$ с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 ($t_{M_0} = 1$ с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса $R = 1$ км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0 , где поезд выходит на за-

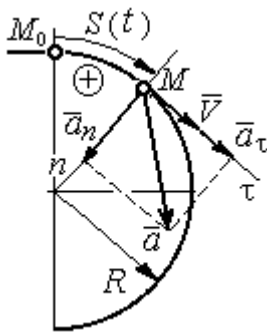


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты S . В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: $a_\tau = \text{const}$. Так как

$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: $C_1 = 15 \text{ м/с}$; $C_2 = 0$.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t.$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь $S = 500 \text{ м}$. Подставляя это условие во второе уравнение, получим $a_\tau = 7 \text{ м/с}^2$. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения $V_\tau = 85 \text{ м/с}$. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса $R = 1000 \text{ м}$ в момент времени $t = 10 \text{ с}$ равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 7,23 \text{ м/с}^2$. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 10,06 \text{ м/с}^2$. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса $R = 80 \text{ м}$. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной $V_0 = 18 \text{ км/ч}$ до конечной $V_1 = 9 \text{ км/ч}$.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь $S = 60 \text{ м}$.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_{\tau} = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_{\tau} = 5 + a_{\tau}t; \quad S = 5t + \frac{a_{\tau}t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2,5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м.

Получим систему:

$$-2,5 = a_{\tau}t_1; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_{\tau}t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_{\tau} = -0,16$ м/с².

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0,31$ м/с².

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_{\tau}^2} = 0,35$ м/с². В конце движения нормальное

ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0,08$ м/с². Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{\tau}^2} = 0,18$ м/с².

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой произвольный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ , при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: $\omega_z = \text{const}$. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: $\varepsilon_z = \text{const}$. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по

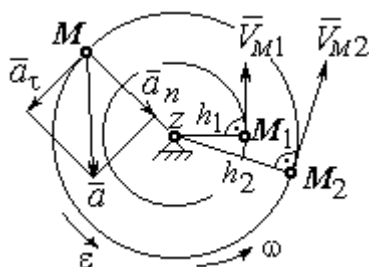


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от

этих точек до оси вращения: $\frac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \frac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого

тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$;

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке

контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

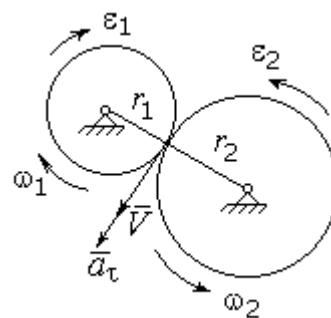


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси z происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2 \text{ мин} = 120 \text{ с}$; $\varphi_1 = 3600 \text{ об} = 7200\pi \text{ рад}$. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной

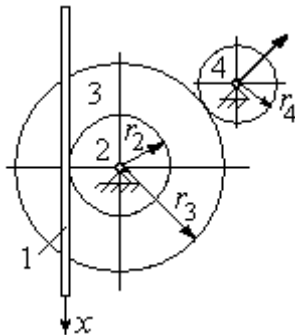


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2:

$$\omega_{2z} = \frac{V_{1x}}{r_2} = \frac{4\pi\cos\pi t}{6} = \frac{2\pi}{3}\cos\pi t \text{ рад/с.}$$

Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одно-

го тела другому: $\frac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \frac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \frac{V_{1x}r_3}{r_2r_4} = \frac{5\pi}{3}\cos\pi t \text{ с}^{-1}$.

Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

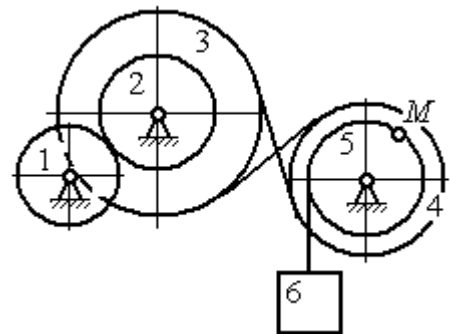


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную

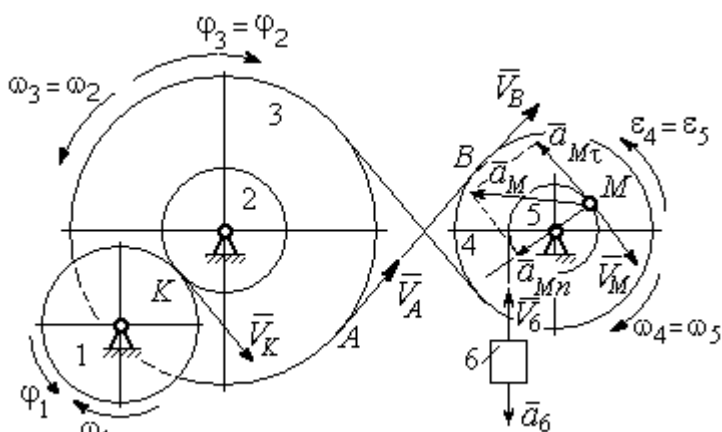


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1 .

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой

скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1 . Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1 .

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта K . Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3 = \omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2 .

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки A , где ремень сходит со шкива 3, и до точки B , где ремень набегаёт на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек A и B равны: $V_A = V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3 = \omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5 = \omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4 .

Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле:

$$V_M = \omega_5 r_5. \text{ В момент времени } t_1 = 1 \text{ с } \omega_5 = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4} = 5 \text{ рад/с и } V_M = 20 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке M и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки M : $V_6 = V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1 = 1$ с груз поднимается со скоростью $V_6 = 20$ см/с.

Определим ускорение точки M . Вектор ускорения точки M равен сумме векторов: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^n$ — касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5:

$$\omega_{5z} = \frac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25 \text{ рад/с.}$$

Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20 \text{ рад/с}^2$. Так как в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5 \text{ рад/с}$, $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$, $\varepsilon_{5z} = +20 \text{ рад/с}^2$), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5 .

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\omega_5 = 5 \text{ рад/с}$ и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^n = 100 \text{ см/с}^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128,06 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos \pi t + \sin \pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси x . Положительное направление движения задаётся направлением оси x (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t$.

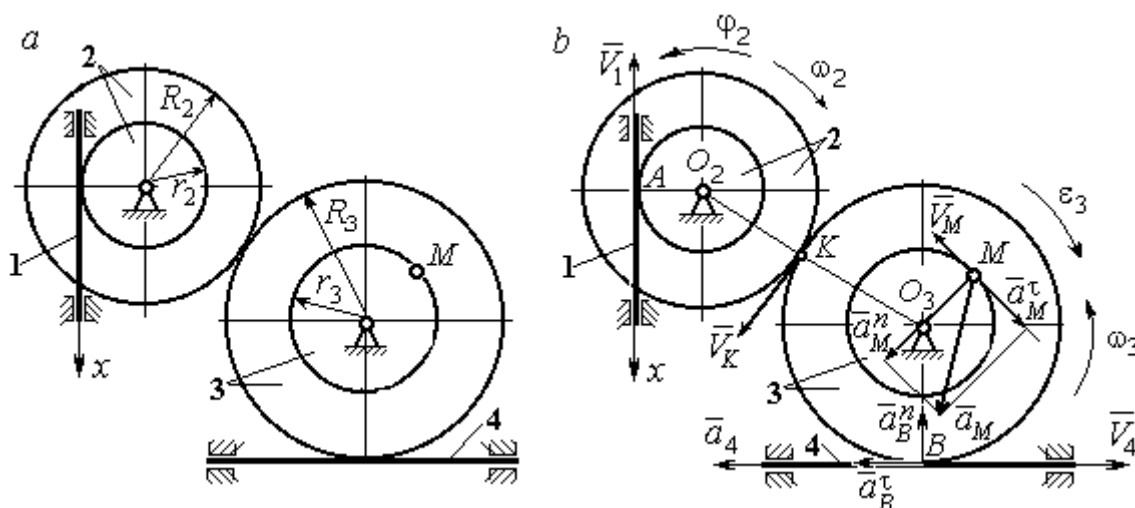


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_2 .

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке K . Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, b дуговой стрелкой ω_3 .

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки M в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, b).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки B касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки M . Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}$; $\varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.11, b направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3 .

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^\tau = 2\pi^2$ см/с². Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^\tau$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, б).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M : $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \pi^2 \sqrt{5}$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^\tau$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^\tau = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с². Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B .

Упражнения

Упражнение 2.1



Упражнение 2.2



Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

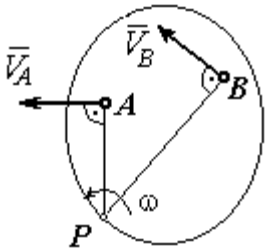
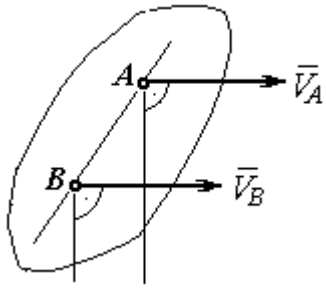
Плоскопараллельным, или **плоским** движением твёрдого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

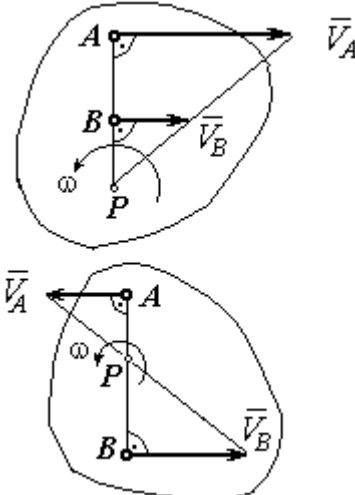
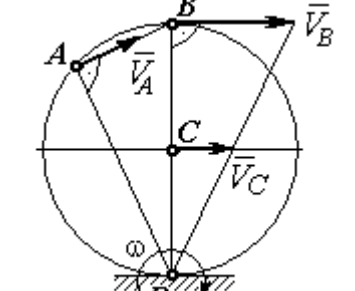
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твёрдого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A \cos \alpha = V_M \cos \beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M .

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью

$\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа.

Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC , коромысла AB и штока AD , если $O_1C = 20$ см, $OB = 2 \cdot OA = 40$ см, $AD = 60$ см.

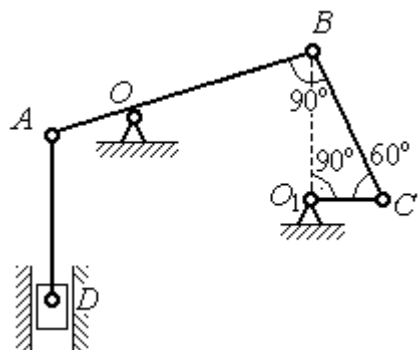


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C , в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O , параллельно оси вращения кривошипа.

Скорость точки B направлена перпен-

дикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

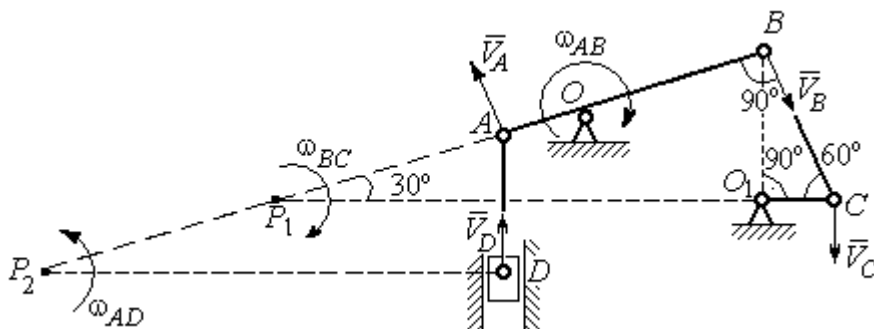


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_1} = 0,5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC . Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \frac{V_B}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB} .

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B : $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD . Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD} .

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA ,

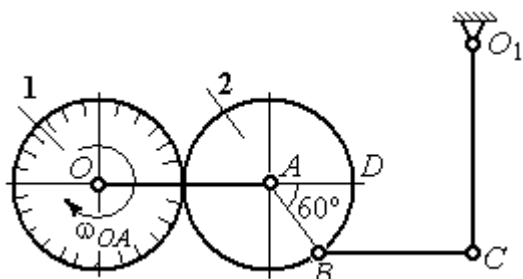


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в

точке B шарнирно прикреплен шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC , коромысла CO_1 , а также скорости точек A, B, C, D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 4 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2 .

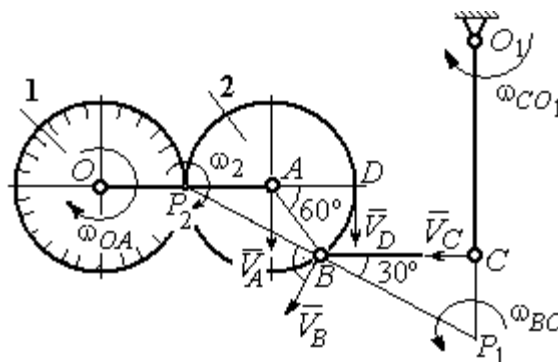


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по

теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D : $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1 . Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1 , которая будет

мгновенным центром скоростей шатуна BC . Расстояние $P_1B = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_1B} = \frac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC} .

Скорость точки C : $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \frac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC .

$$\text{Угловая скорость коромысла } CO_1: \omega_{CO_1} = \frac{V_C}{O_1C} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \text{ рад/с.}$$

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной

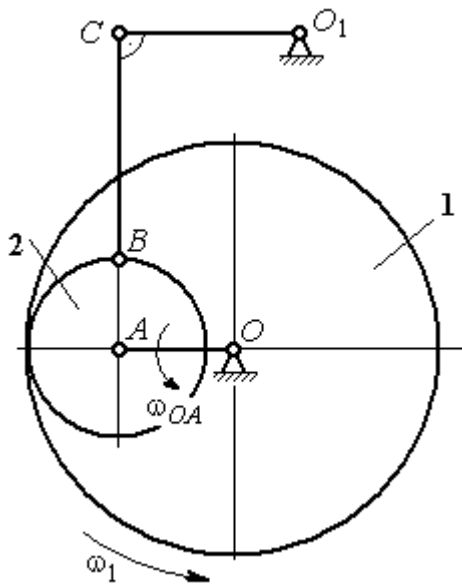


Рис. 2.17. Планетарный механизм

$OA = 25$ см вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью $\omega_{OA} = 3,6$ рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса $r_1 = 45$ см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с. Шатун BC , шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B , приводит в движение кривошип CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 . Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1 , скорости точек A , B , C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна $BC = 100$ см, длина кривошипа $CO_1 = 50$ см.

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D , и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D . Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда $P_2D = 20$ см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{P_2D} = 2,25$ рад/с. Направление уг-

ловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2 .

Скорость точки B , которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

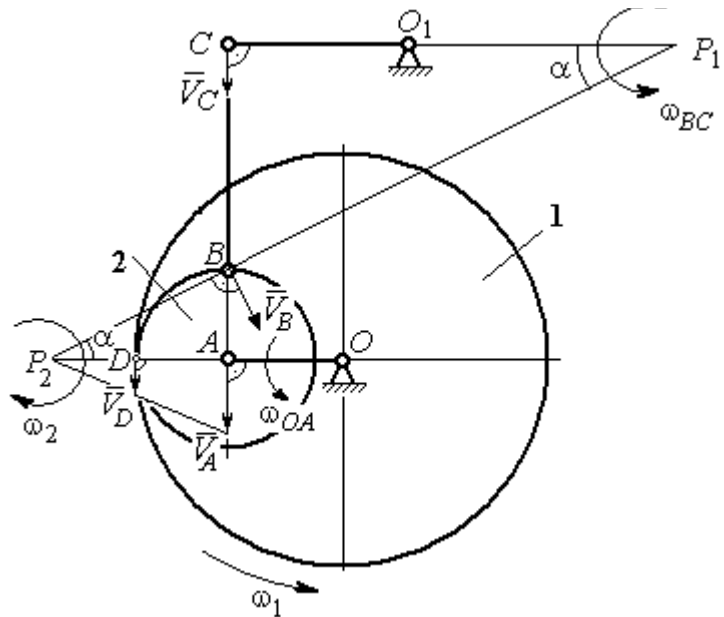


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна BC . Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC : $P_1B = \frac{BC}{\sin \alpha}$, где $\sin \alpha = \frac{AB}{P_2B} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда

$P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_1B} = 0,45$ рад/с. Скорость

точки C шатуна BC найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию, проходящую через эти точки. Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos \alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{O_1C} = 1,8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

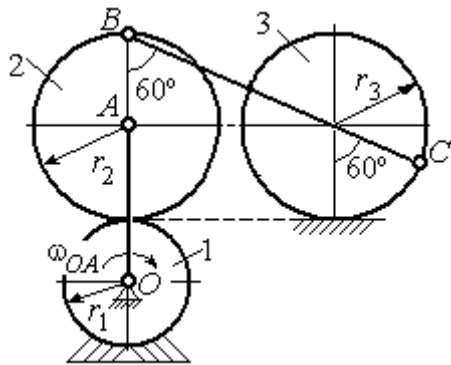


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2 . Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC , закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C . Колесо 3 катится

без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A , B , C и угловые скорости шатуна BC , шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 96$ см/с.

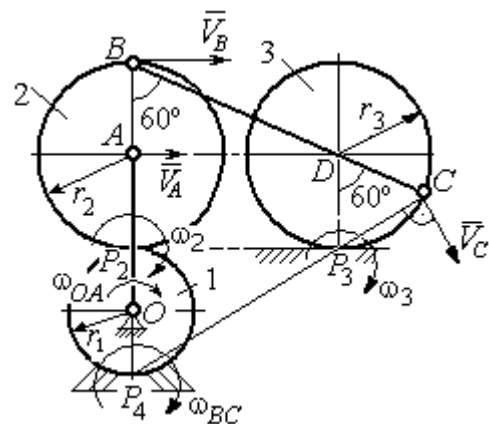


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C . По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC , вращаясь вокруг неподвижной оси O , приводит в движение два шатуна CD и CE , присоединённых к кривошипу в точке C . Шатун CE прикреплен в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплен ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

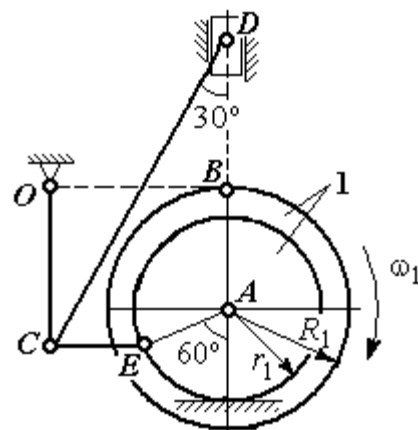


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A , E , C , D и угловые скорости диска 1, шатунов CE , CD и кривошипа CO , если известна скорость точки B на ободу диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности

рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

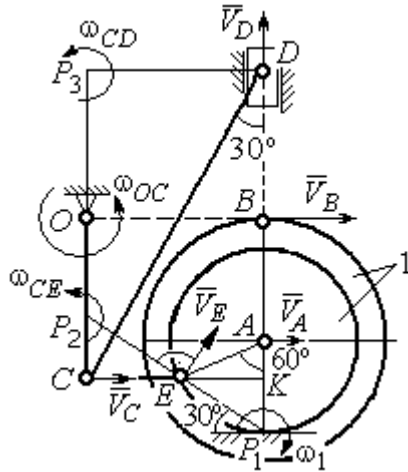


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1

$$\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 2 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Скорость точки E

$$V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$

и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны,

соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E . Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

$$\text{Расстояние } EP_2 = \frac{EC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см.}$$

$$\omega_{CE} = \frac{V_E}{EP_2} = 0,86 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E , на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой

$$\omega_{CE}. \text{ Скорость точки } C \text{ шатуна } CE \quad V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \frac{V_E}{2} = 2 \text{ см/с.}$$

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \frac{V_C}{OC} = 0,5$ рад/с.

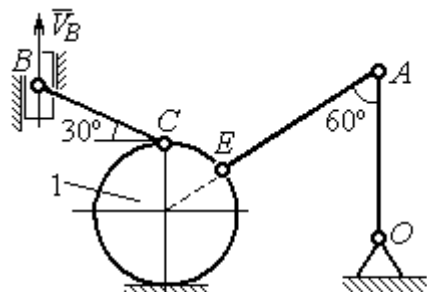
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D . Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3 , полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ) \operatorname{ctg} 30^\circ = 9,92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD : $\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,21$ рад/с.

Скорость ползуна D : $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD} (CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1,2$ см/с.

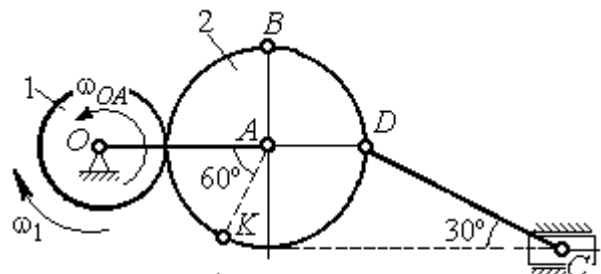
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
 $BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
 Найти: ω_{OA} , ω_{AE} , ω_{CB} , ω_1 , V_C , V_A , V_E

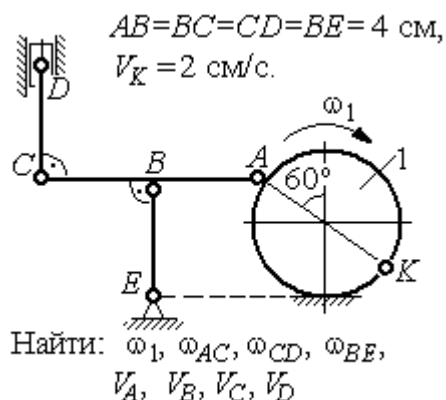
Упражнение 2.4



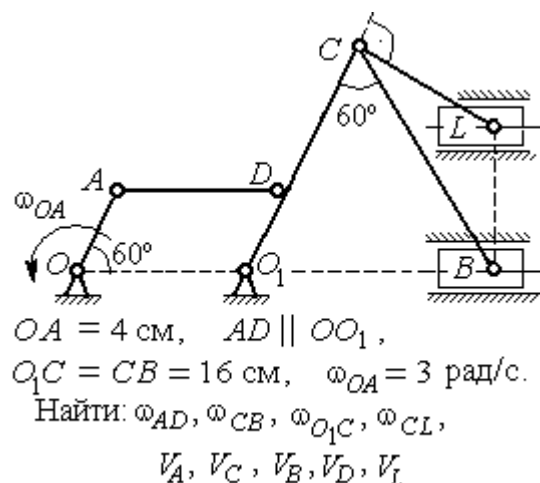
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
 $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
 Найти: ω_2 , ω_{DC} , V_B , V_K , V_D , V_C

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

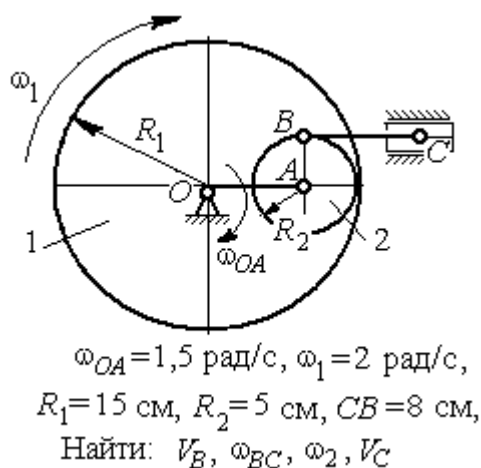
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

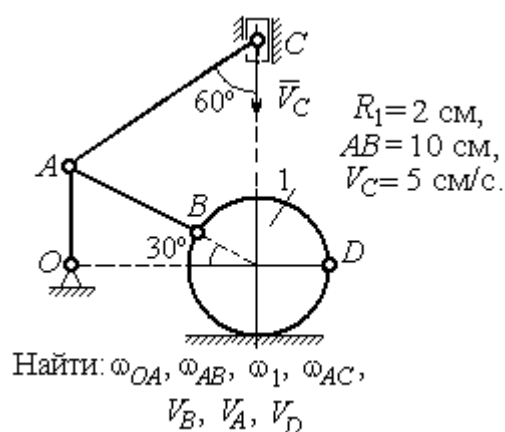


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твёрдого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, a), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, b). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM$; $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A .

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство $\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n$, где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень D гидравлического прессы приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $OABD$. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка L рычага имеет скорость $V_L = 0,6$ м/с и ускорение $a_L = 0,5$ м/с². Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0,6$ м, длина звена $AB = 0,4$ м. Определить скорость и ускорение поршня D , угловую скорость и ускорение звена AB .

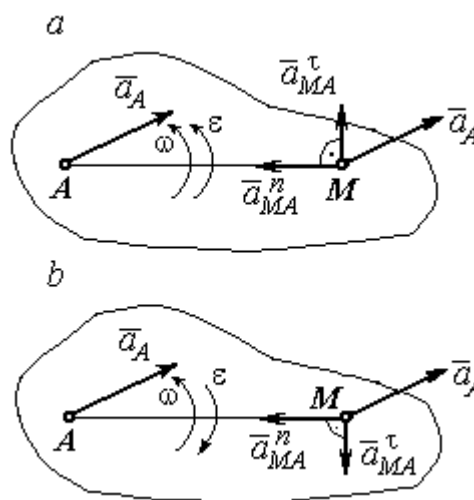


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
 a – ускоренное движение;
 b – замедленное движение

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL : $\omega_{OL} = \frac{V_L}{OL} = \frac{2}{3}$ рад/с.

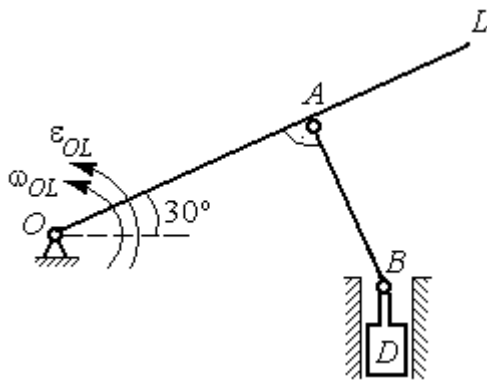


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^\tau + \vec{a}_L^n$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0,4$ м/с². Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^\tau = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0,3 \text{ м/с}^2, \quad \epsilon_{OL} = \frac{a_L^\tau}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0,4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ – определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB . Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0,4\sqrt{3}$ м.

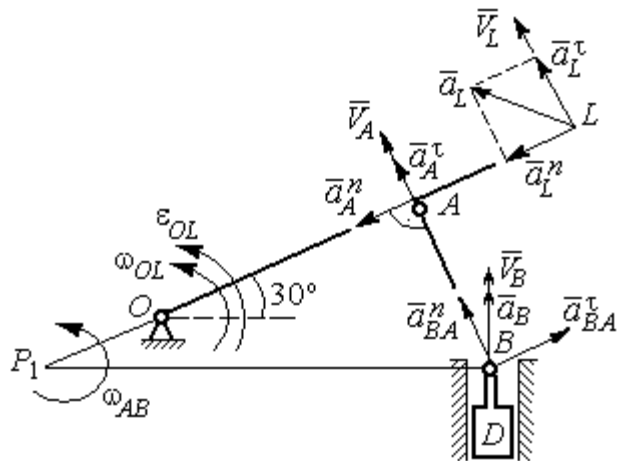


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_1A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A . Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O , ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a_A^n = \omega_{OL}^2 \cdot OA = 0,27 \text{ см/с}^2; a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,13 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0,2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x , y , где ось x проходит вдоль линии звена AB , ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau + a_{BA}^n; a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^n + a_{BA}^\tau.$$

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B : $a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$ и величину касательного ускорения: $a_{BA}^\tau = 0,46 \text{ см/с}^2$. Угловое ускорение стержня AB

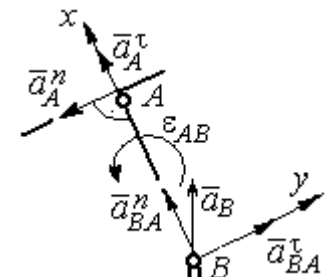


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 1,15 \text{ рад/с}^2$. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B : $a_D = a_B = 0,38 \text{ см/с}^2$.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0,6$ м катится без скольжения по прямой

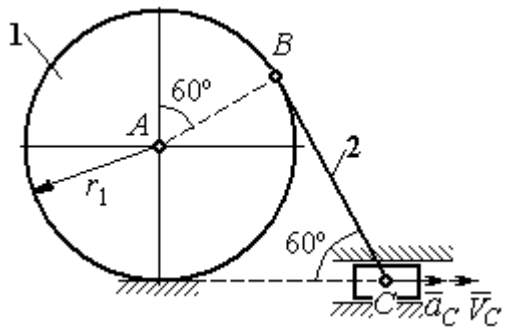


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

молинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра

A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с².

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B . Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов:

$P_1B = r_1\sqrt{3} = 1,04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C : $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1,8$ м.

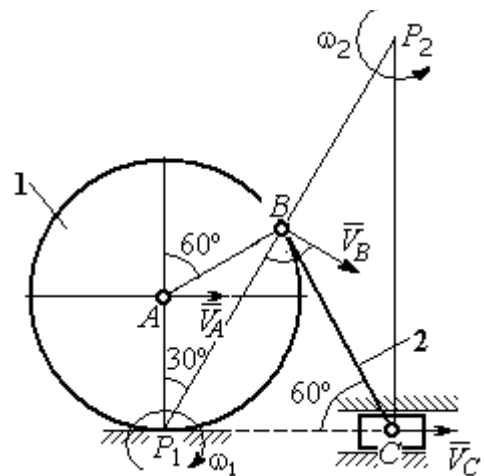


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{P_2C} = 5 \text{ рад/с}$. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки B найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 5,2 \text{ м/с}$.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \frac{V_B}{P_1B} = 5 \text{ рад/с}$. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = 3 \text{ м/с}$.

Найдём ускорение точки A .

Примем точку B за полюс и выразим ускорение точки A через полюс B :

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{AB}^\tau$, $\vec{a}_{AB}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{AB}^\tau$ точки A выбраны в предположении ускоренного движения диска.

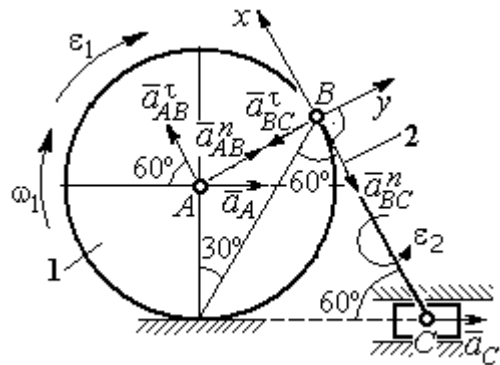


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса B выразим через полюс C : $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса C ; $\vec{a}_{BC}^\tau$, $\vec{a}_{BC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении шатуна 2 вокруг полюса C . Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}_{BC}^\tau$ точки B выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки A выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1 A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускоре-

ние a_{AB}^τ точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a_{AB}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a_{AB}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2; \quad a_{BC}^n = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2 C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние $P_2 C$ от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x , y , выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x: -a_A \cos 60^\circ = a_{AB}^\tau - a_{BC}^n - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y: a_A \cos 30^\circ = a_{AB}^n - a_{BC}^\tau + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a_{AB}^\tau = a_A$, найдём ускорение точки A : $a_A = 18,67 \text{ м/с}^2$. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2,29 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение ша-

туна 2: $\varepsilon_2 = \frac{|a_{BC}^{\tau}|}{BC} = 2,2 \text{ рад/с}^2$. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^{τ} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2 , насаженная в центре на кривошип OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $r_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$. Длина стержня $BC = 1 \text{ м}$.

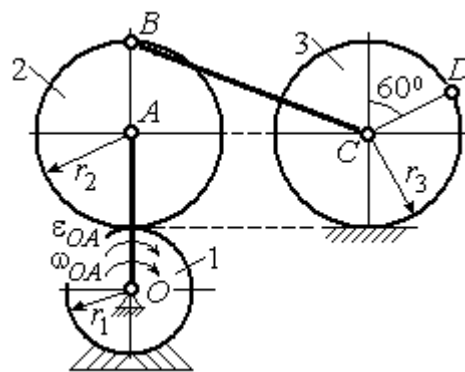


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $r_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$. Длина стержня $BC = 1 \text{ м}$.

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость его точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2,4 \text{ м/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с. Скорость точки B шестерни 2:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 4,8 \text{ м/с.}$$

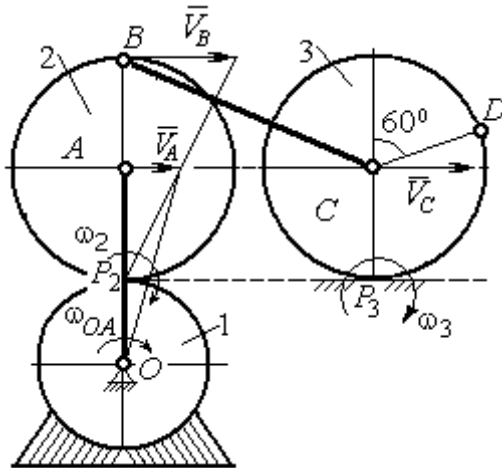


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение.

При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B = 4,8$ м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C , направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B . Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B .

Вектор $\vec{a}_{CB}^n$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B , вектор $\vec{a}_{CB}^\tau$ перпендикулярен стержню BC . Направление вектора $\vec{a}_{CB}^\tau$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC , показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB} .

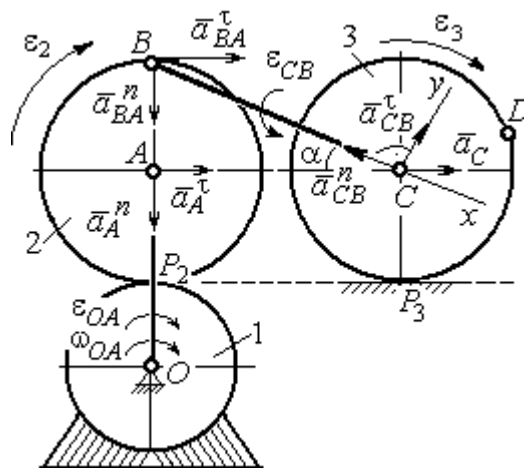


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A . Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A , вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярен линии BA . Направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA . Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A . Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}_A^\tau$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9,6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1,2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14,4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости

равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, по-

лучим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3 \text{ рад/с}^2$ и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1,2 \text{ м/с}^2$.

Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C . Получим систему уравнений:

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin \alpha = -a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha - a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC , $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$; $\cos \alpha = 0,92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C : $a_C = 12,83 \text{ м/с}^2$, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B : $a_{CB}^\tau = 33,95 \text{ м/с}^2$. Величина углового ускорения стержня BC :

$\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 33,95 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор

касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать

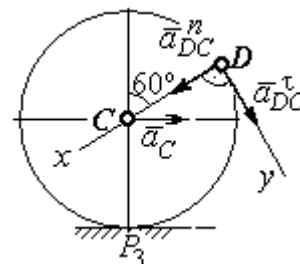


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как дви-

жение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C

равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равен-

ство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32,07 \text{ рад/с}^2$.

Выразим ускорение точки D через полюс C , ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Модули ускорений

$$a_C = 12,83 \text{ м/с}^2; a_{DC}^n = \omega_3^2 DC = 57,6 \text{ м/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 DC = 12,83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a_{DC}^n; \quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46,49 \text{ м/с}^2$; $a_{Dy} = 19,25 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Величина ускорения точки } D: a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 50,32 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C , B и A , так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx} , a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ} .

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA , вращающийся вокруг неподвижной оси O , шестерню 1 радиуса r_1 , насаженную

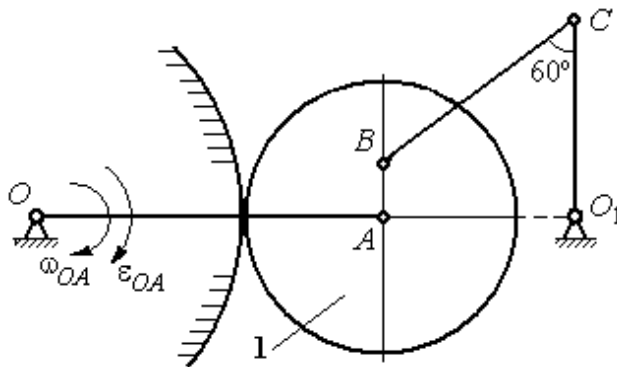


Рис. 2.36. Механизм качалки

на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC , присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1 . В положении,

указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1 , если $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $\epsilon_{OA} = 4$ рад/с²; $OA = 0,8$ м; $r_1 = 0,4$ м; $AB = 0,2$ м; $BC = 0,6$ м. Для этого же положения определить ускорение точки C .

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,6$ м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1 .

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B $P_1B = 0,45$ м. Скорость точки B : $V_B = \omega_1 \cdot P_1B = 1,8$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2 , лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C , является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC \cos 30^\circ = 0,52$ м; $\cos \alpha = \frac{AP_1}{BP_1} = 0,89$; $P_2B = \frac{BK}{\cos \alpha} = 0,58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 3,1$ рад/с.

Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC} .

Расстояние

$$P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin \alpha = 0,04 \text{ м.}$$

Скорость точки C шатуна BC :

$V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0,12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0,5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \frac{V_C}{CO_1} = 0,24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC , выразим ускорение точки C через полюс B : $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B ; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B .

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A .

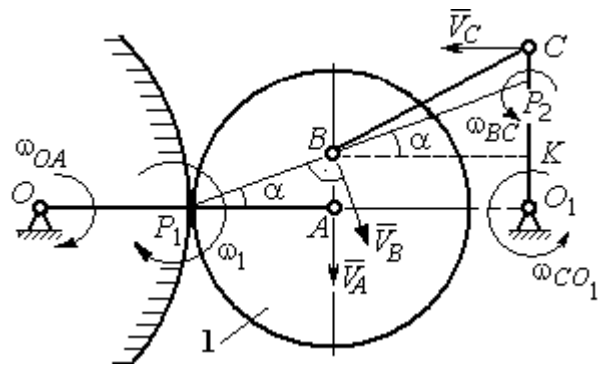


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA , а точка C – коромыслу CO_1 , вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих

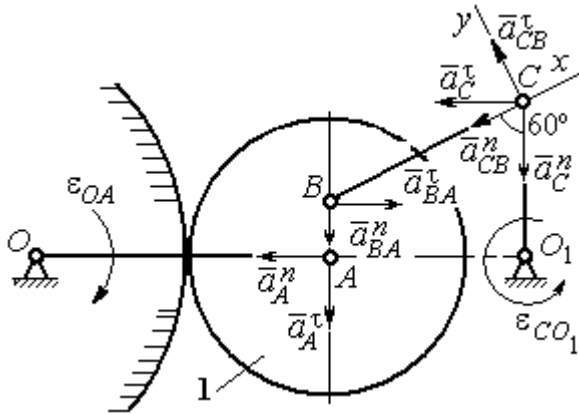


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

точек можно представить в виде сумм векторов:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau,$$

где $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_A^\tau$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O ; $\vec{a}_C^n$, $\vec{a}_C^\tau$ – нормальная и касательная составляющие

вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1 .

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0,03 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5,77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3,2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3,2 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференциру-

ем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \frac{a_A^\tau}{r_1} = 8 \text{ рад/с}^2$.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1,6 \text{ м/с}^2$.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}_{CB}^\tau$ и $\vec{a}_C^\tau$. Выберем ось x вдоль шатуна BC , как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a_C^n \cos 60^\circ - \vec{a}_C^\tau \cos 30^\circ = -a_{CB}^n - a_{BA}^n \cos 60^\circ + a_{BA}^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ,$$

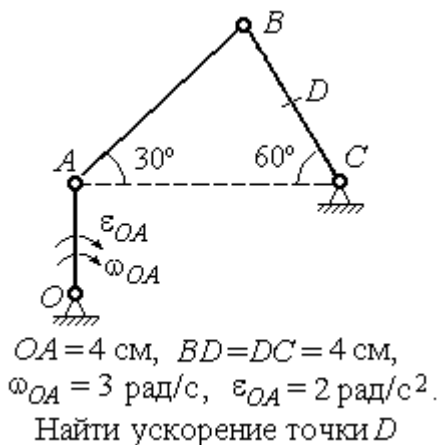
откуда найдём ускорение $a_C^\tau = 11,94 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{|\vec{a}_C^\tau|}{CO_1} = 23,88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a_C^τ свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}_C^\tau$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

Упражнения

Упражнения 2.9



Упражнения 2.10

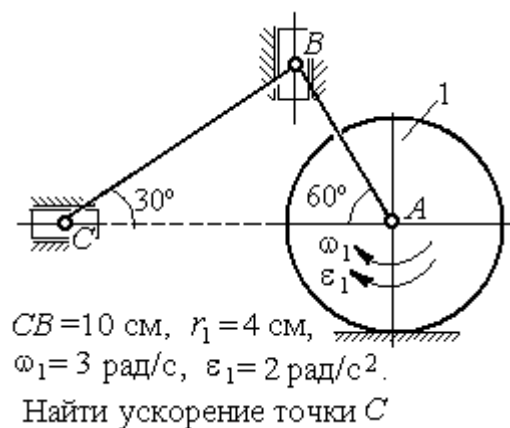


Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной**.

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным**.

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса:

$|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

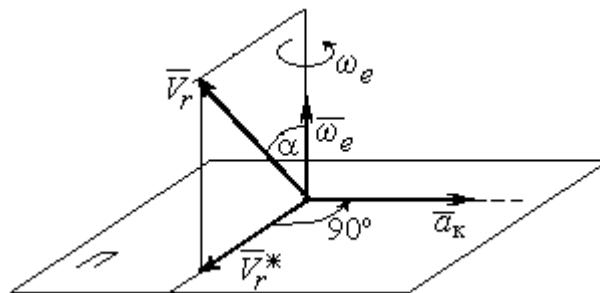


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость Π , перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости Π вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси O , перпендикулярной

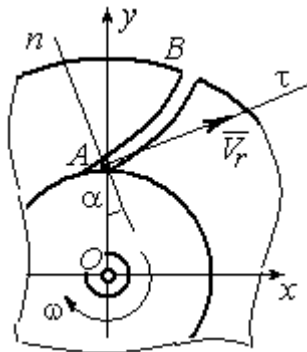


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу AB с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке A и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат xOy , если радиус $OA = 0,5$ м, радиус кривизны канала в точке A $\rho = 0,8$ м, угол между нормалью n к кривой AB в точке A и радиусом OA $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки A компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу OA и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой AB (стенки канала) в точке A .

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей:

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси x, y . Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8,46 \text{ м/с}; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

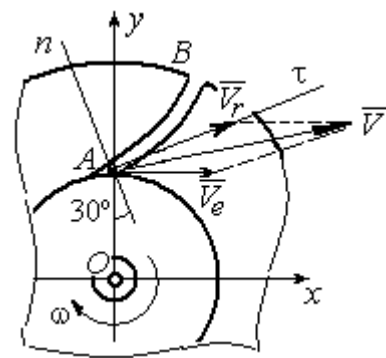


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8,69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки A вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$, где $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

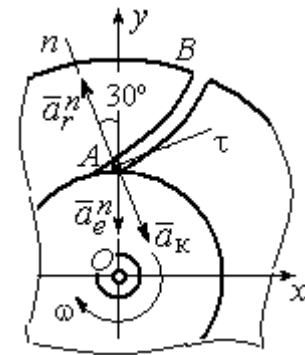


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке A выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = 0, \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2; \quad a_e^\tau = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2; \quad a_k = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат xOy . Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_k \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_k \cos 30^\circ = -101,96 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Модуль ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106,28 \text{ м/с}^2.$$

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворо-

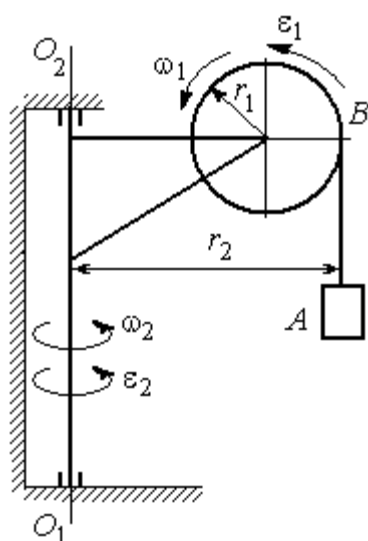


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

та крана (рис. 3.5) груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан B радиуса $r_1 = 0,5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3 \text{ рад/с}^2$, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0,5 \text{ рад/с}^2$.

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза A на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана B из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$. Скорость подъёма груза A в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1)r_1 = 1,5 \text{ м/с}$. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0,5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2 : $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5,22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_k$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_k$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1,5$ м/с². Направление вектора $\vec{a}_r^\tau$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

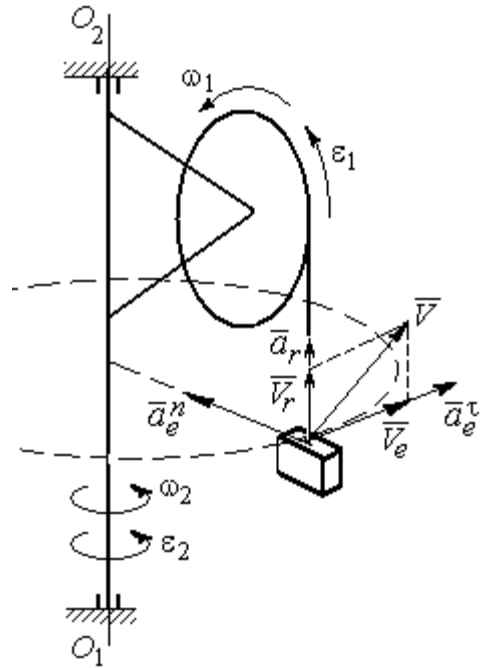


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2 = 2,5 \text{ м/с}^2$; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2 = 5 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса a_k равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_k = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2 + (a_r^\tau)^2} = 5,79 \text{ м/с}^2$.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ .

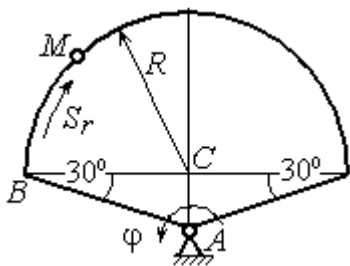


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M . Уравнение движения точки:

$B\ddot{M} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска $R = 9$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A , относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом:

$\alpha = \frac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1 .

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\phi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с.

Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\phi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\phi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла ϕ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e .

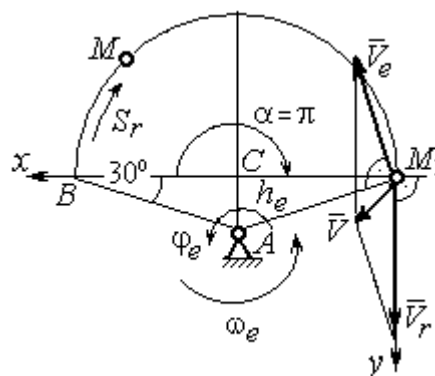


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = \omega_e AM_1 = \frac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10,39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x , M_1y , как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 5,2 \text{ см/с}, \quad V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = 47,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47,8 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k.$

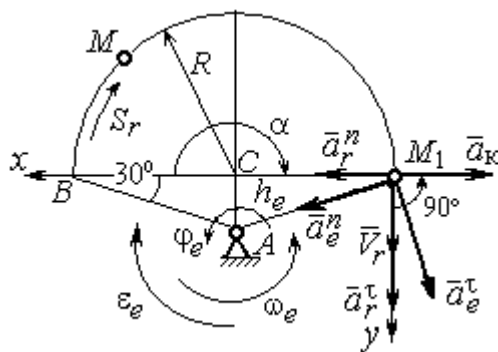


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$, где $\vec{a}_e^\tau$ и $\vec{a}_e^n$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

ма о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1 .

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1 \text{ с}$ равно $355,3 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4$ рад/с².

Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\phi}_e = -4$ рад/с²), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с². Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega V_r = 113,1$ см/с². По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y , как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 230,4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250,3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2 , проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ . Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30° к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t - 1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r . Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M

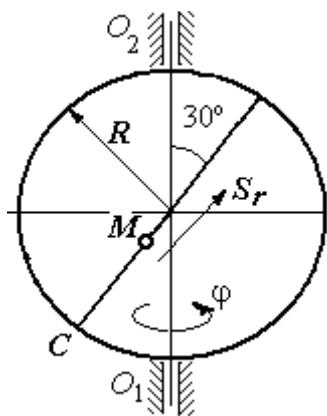


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r , пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1 .

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi t|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω .

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1 . Очевидно, $KM_1 = 0,5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, а).

(На рис. 3.11, а символ $\odot$ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ $\oplus$ – «от нас».)

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r| =$

$= |8(4t - 1)|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24,33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

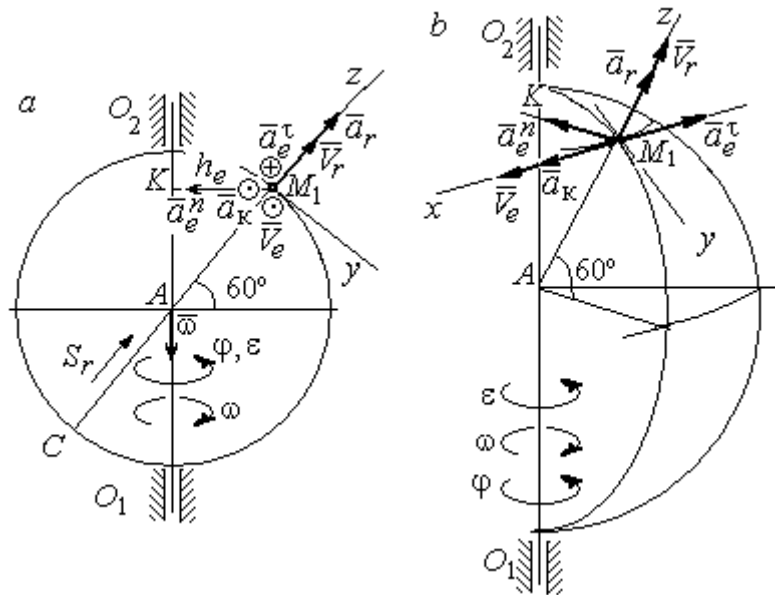


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
а – плоская модель движения;
б – пространственная модель движения

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$.

Относительное ускорение точки $a_r = |\ddot{S}_r| = 32 \text{ см/с}^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = |\dot{\omega}| = |4t - 4\pi \sin \pi t|$. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $\varepsilon = 4 \text{ рад/с}^2$. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4 \text{ рад/с}^2$) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε . Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^\tau = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле $a_e^n = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_e^n = 8 \text{ см/с}^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150° . Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_k = 2|\omega||V_r|\sin 150^\circ = 48 \text{ см/с}^2$. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, a это будет проекция на линию KM_1 . Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, a вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x , M_1y и M_1z , как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, a ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

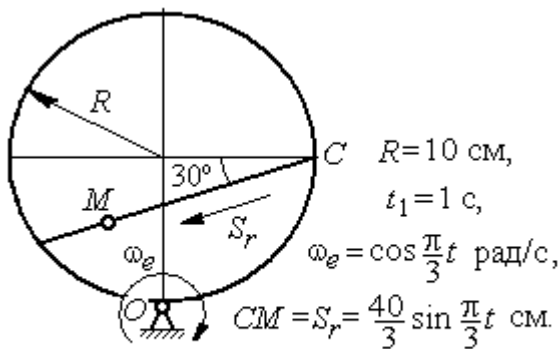
$$a_x = -a_e^\tau + a_k = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6,93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Модуль абсолютного ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49,32 \text{ см/с}^2.$$

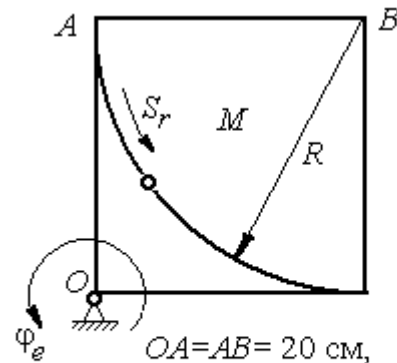
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1 \text{ с}$

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ описывается **дифференциальными уравнениями**:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m \ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m \ddot{z} = \sum F_{kz},$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz},$$

где $V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb},$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0 , направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f . Дойдя до края стола в точке B , частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h . На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

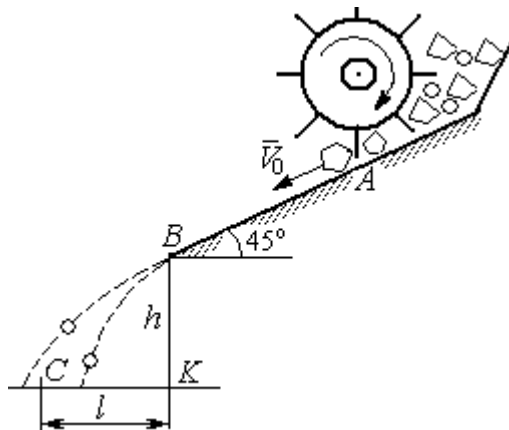


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1,2$ м, угол наклона $\alpha = 45^\circ$, высота точки отрыва $BK = h = 1,5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0,4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат xAy , направив ось x вдоль линии движения, а ось y – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

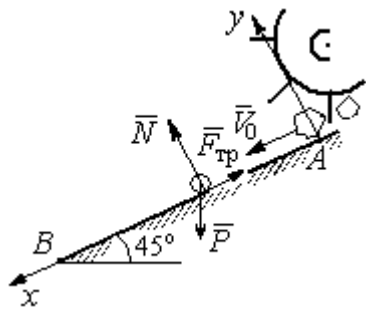


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси y частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения,

которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1 - f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0,4: \frac{dV_x}{dt} = 4,18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4,18t + C_1$; $x = 2,09t^2 + C_1t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке AB сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4,18t + 1$; $x = 2,09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4,18t_B + 1$, $S = 2,09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8,36S}$. При длине стола $S = 1,2$ м скорость отрыва $V_B = 3,32$ м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B , направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g.$$

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3$; $x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4 определяются из начальных условий движения: при $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось x , $V_{Bx} = V_B \cos 45^\circ = 2,35$ м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: $C_4 = 0$, $C_3 = 2,35$. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2,35t$.

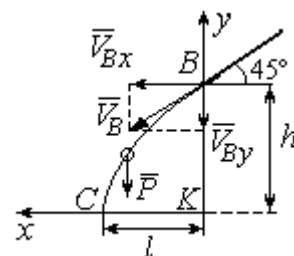


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y . Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\frac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y : при $t = 0$, $y(0) = h = 1,5$ м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B \cos 45^\circ = -2,35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\vec{V}_B$ на ось y . Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2,35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4,91t^2 - 2,35t + 1,5$.

В момент $t = t_{\Pi}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2,35t_{\Pi}, \quad 0 = -4,91t_{\Pi}^2 - 2,35t_{\Pi} + 1,5.$$

Исключая в системе время t_{Π} , выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1,12\ell - 1,68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0,85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0,4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0,4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0,4$) – не долетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0,3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0,5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно

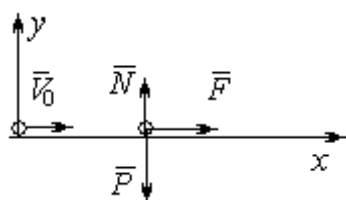


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k , при котором скорость точки за первую секунду от начала движения

увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось x положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс x у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента k , получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51,86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой $m = 1$ кг, находясь на высоте $h_1 = 2$ м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью $V_0 = 4$ м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0,5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматри-

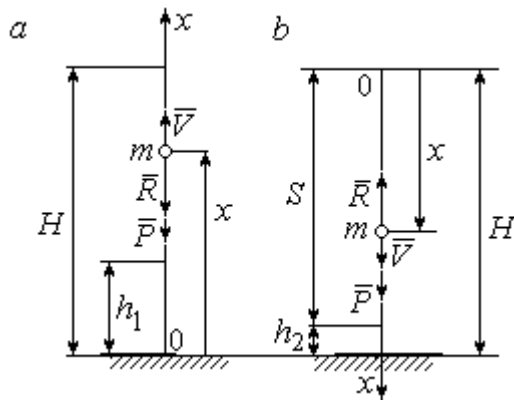


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

вается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H , на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x , вдоль

которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x : $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x :

$P_x = -P = -mg$; $R_x = -0,5mV^2$. Полагая $\dot{x} = \frac{dV}{dt}$, получим уравнение движения

точки в виде: $\frac{dV}{dt} = -(g + 0,5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx} = \frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения

представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g + 0,5V^2} = -2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g + 0,5V^2) = -x + C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C = h_1 + \ln(g + 0,5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x = h_1 + \ln\left(\frac{g + 0,5V_0^2}{g + 0,5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x = H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H , получим: $H = h_1 + \ln\left(1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2,6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки:

$m \frac{dV}{dt} = P_x + R_x = mg - 0,5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду:

$\frac{dV^2}{g - 0,5V^2} = 2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g - 0,5V^2) = -x + C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1 = \ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением

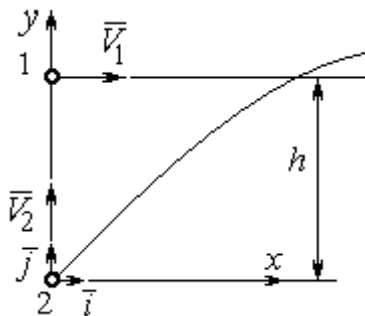
$$x = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V^2}\right).$$

Расстояние S , которое пролетела точка с высоты H , приобретя скорость,

$$V_0: S = \ln\left(\frac{g}{g - 0,5V_0^2}\right). \text{ Высота } h_2 \text{ этого положения от уровня Земли: } h_2 = H - S$$

(см. рис. 4.5, b). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2,6$ м высота $h_2 = 0,91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1



на высоте h . Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y , точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2 . В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представле-

на в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$,

$\vec{j}$ системы координат xu : $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где $p, q - \text{const}$. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y : $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

Уравнения движения точки в проекциях на оси xu имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p, \quad m_2\ddot{y} = q - m_2g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

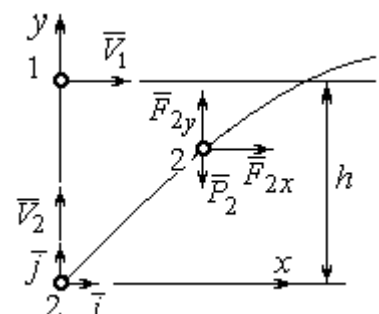


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y : $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y : $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \quad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы $m = 2$ кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения $f = 0,4$. На тело действует сила $F = kt + 0,5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь $S = 2$ м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы $m = 1$ кг, находящуюся на высоте $H = 10$ м над уровнем Земли, бросили под углом $\varphi = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью V_0 . Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту $h = 7$ м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Ox под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными**. В случае гармонического возмущения $Q = H \sin pt$, где H , p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin p t$, а в случае возникновения резонанса

($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{h t}{2 p} \cos p t$. Значения

произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной

пружины $c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

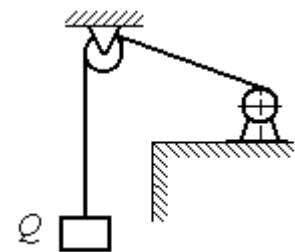


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось Ox , вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты x (точка O) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, a положение нерастянутой пружины соответствует положению

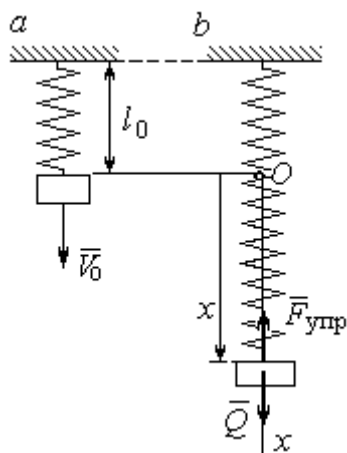


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
 a – положение груза на начало колебаний; b – положение груза в произвольный момент времени

груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, b), обозначенном координатой x , к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox : $F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем не-

однородное дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 14,14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0,69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,71$ м. Окончательно, движение груза после заземления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0,69\cos 14,14t + 0,71\sin 14,14t + 0,69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max\left[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}\right] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1,68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134,4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60° . Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0,12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

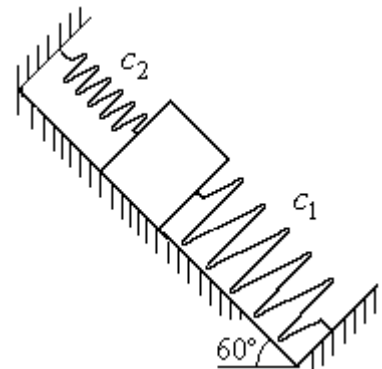


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикрепленного к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_3 = c_1 + c_2 = 900 \text{ Н/м}$ (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x

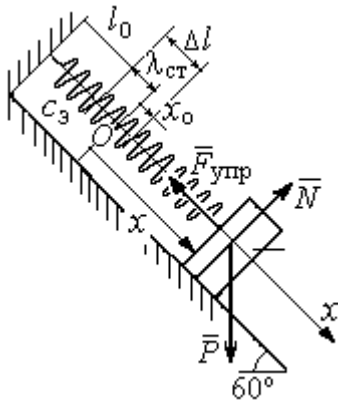


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox : $m\ddot{x} = P_x - F_{\text{упр}x}$.

Проекция силы упругости пружины на ось Ox :

$F_{\text{упр}x} = -c_3 \Delta \ell$, где $\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}})$ – удлинение

пружины, включающее её растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ относительно положения нерастянутой пружины и

растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P \cos 30^\circ - F_{\text{упр}} = 0,87mg - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0.$$

Находим $\lambda_{\text{ст}} = \frac{0,87mg}{c_3} = 0,085 \text{ м}$.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0,87mg = c_3 \lambda_{\text{ст}}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_3 x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10 \text{ рад/с}$.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{\text{ст}} = 0,035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0,035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2\sin\omega_2t + C_2\omega_2\cos\omega_2t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0,035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0,035$ м. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины $c = 350$ Н/м. Груз массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 0,3$ м.

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

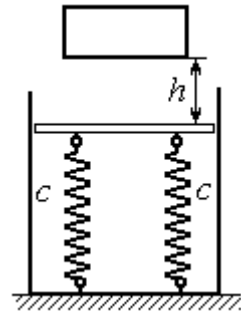


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Решение

Заменяем две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_{\text{э}} = 2c = 700$ Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, с предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_{\text{э}}\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, c), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния

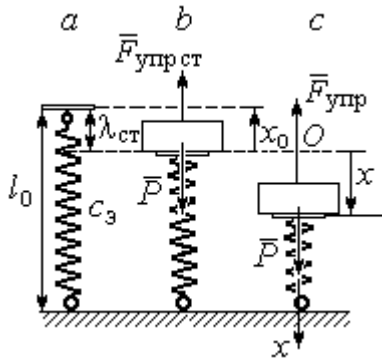


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
 a – недеформированная пружина;
 b – положение статического равновесия груза; c – произвольное положение

(см. рис. 4.13, a) составляет величину: $\Delta l = x + \lambda_{\text{ст}}$. Величина $\lambda_{\text{ст}}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, b): $P - F_{\text{упр ст}} = P - c_3 \lambda_{\text{ст}} = 0$.

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + c_3 x = 0 \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 11,83 \text{ рад/с} - \text{угловая частота колебаний.}$$

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c_3} = -0,07 \text{ м}$.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая $s = 0,3$, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: $V = 2,43 \text{ м/с}$. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V = 2,43 \text{ м/с}$.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0,07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0,2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0,07\cos 11,83t + 0,2\sin 11,83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0,28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c . К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A . В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза $m = 1$ кг, жесткость пружины $c = 10$ Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a \sin pt$ см, где амплитуда $a = 0,02$ м, частота колебаний платформы $p = 7$ рад/с.

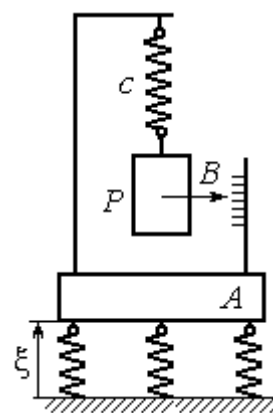


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x , связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x + \lambda_{\text{ст}}$, где $\lambda_{\text{ст}}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия

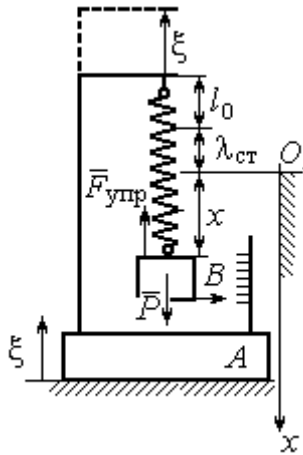


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

груза, определяемое из условия $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины.

В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме:

$$\Delta \ell = (x + \lambda_{\text{ст}} + \xi).$$

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Дифференциальное

уравнение движения груза в проекции на ось Ox :

$m\ddot{x} = P_x + F_{\text{упр}x}$, где проекции $P_x = P$, $F_{\text{упр}x} = -c\Delta \ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} + \xi)$. Расчётная

схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -h \sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 3,16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m} = 0,2$ м/с²;

p – угловая частота вынужденных колебаний, $p = 7$ рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x = x_1 + x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения

$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -h \sin pt.$$

Решив однородное уравнение, находим: $x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b \sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2 \sin pt + \omega^2 b \sin pt = -h \sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2} \sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = 0$. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{hp}{p^2 - \omega^2} \cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\frac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0,01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0,01 \sin 3,16t + 0,05 \sin 7t - 0,02 \sin 7t = -0,01 \sin 3,16t + 0,03 \sin 7t.$$

Упражнения

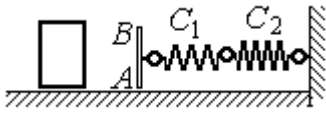


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы $m = 0,5$ кг, получив начальную скорость $V_0 = 6$ м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью $C_1 = 120$ и $C_2 = 40$ Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если $k = 0,5$ Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы $m = 1$ кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости $C = 160$ Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость $V = 4$ м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

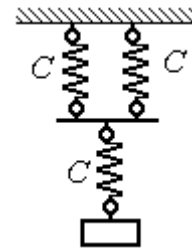


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется ска-

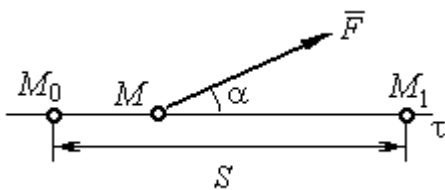


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

лярная величина $A(\vec{F}) = FS \cos \alpha$, где F – модуль силы; S – конечное перемещение точки приложения силы; α – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на

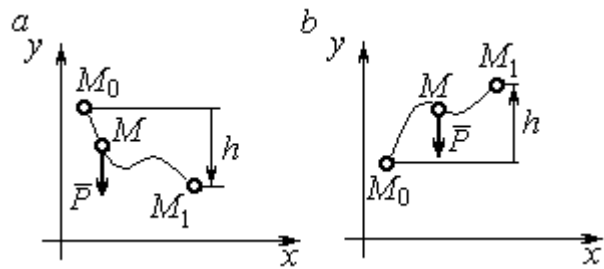


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

расстояние h определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1 ; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 . При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m \frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью $V_0 = 6$ м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s,$$
 где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть $V = 0$. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = (P - F_{\text{тр}})s,$$
 откуда находим требуемую для остановки груза силу трения:

ния: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}} = 5,81$ кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов $R = 1$ м и $r = 0,5$ м (рис. 4.20). Линия OO_1 , соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30° . На стержень надет шарик весом $P = 10$ Н. В точке A , положение которой на дуге радиуса R определяется углом $\alpha = 60^\circ$, шарiku сообщают начальную скорость V_0 , после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90^\circ$ относительно линии центров.

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и поэтому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её

из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A ,

$$h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r) \text{ (см. рис. 4.21);}$$

V_A, V_B – скорость шарика в точках A и B ,

причём $V_A = V_0, V_B = 0,5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении

кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда

$$V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7,67 \text{ м/с.}$$

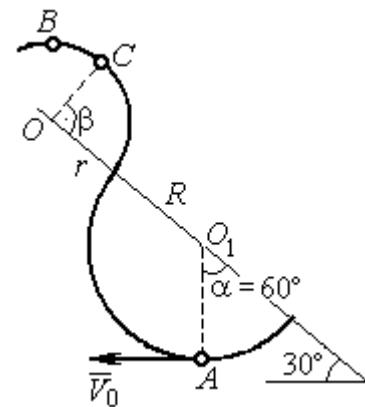


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

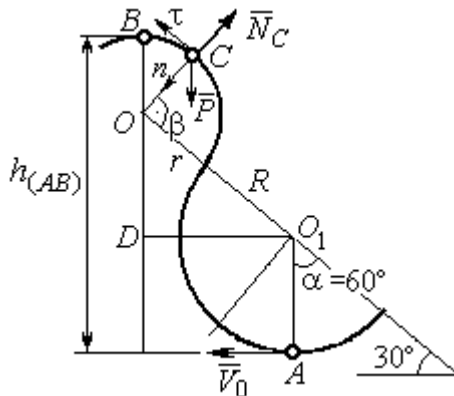


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарiku, в момент, когда он находится в точке C . Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn . Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C .

Для определения скорости шарика в точке C воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения C в положение B . Получим равенство $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения C в положение B . С учётом известных значений $V_B = 0,5 V_0 = 3,84$ м/с и $h_{(CB)} = r \cos 30^\circ = 0,43$ м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} = 4,82$ м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P \cos 30^\circ - m \frac{V_C^2}{r} = -38,7$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой AB и гладкой дуги окружности радиуса $r = 0,8$ м, сопряжённых в точке B так, что прямая AB является касательной к окружности в точке B (рис. 4.22). Положение точки B на дуге задаётся углом 30° относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой $m = 0,5$ кг начинает движение из точки A со скоростью $V_0 = 0,2$ м/с.

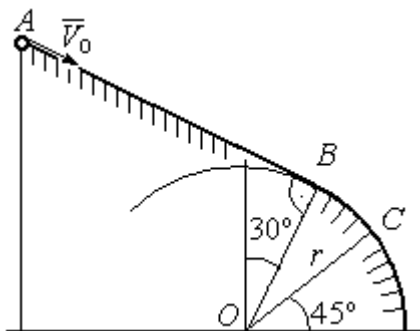


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины S должен быть желоб AB ,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C , определяемой углом 45° относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0,4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C . Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид:

$m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C . Реакция опоры

$$N_C = P \cos 45^\circ - m \frac{V_C^2}{r}.$$

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg \cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2,36$ м/с.

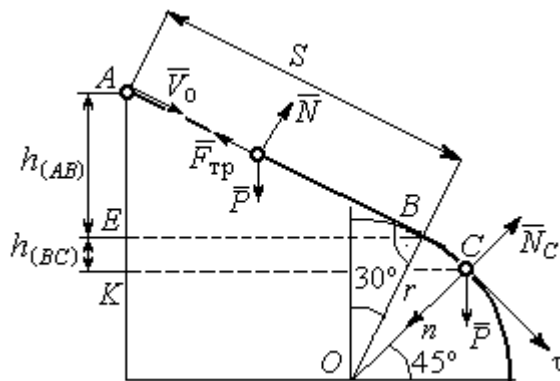


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C . На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB , сила трения $\vec{F}_{тр}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки

$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{тр}S$, где S – длина участка AB ; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S \sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB , составим проекцию уравнения движения шарика на ось y , перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB :

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке O (рис. 4.24). В начальный момент

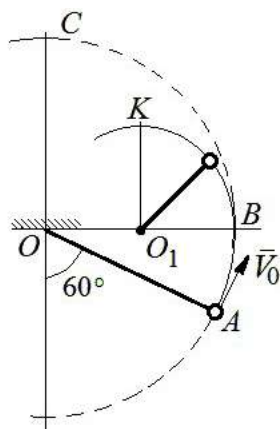


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

груз находился в положении A , при котором линия OA составляет с вертикалью угол 60° . В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1 , расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A , чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K . На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $nK\tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0,5l$ с

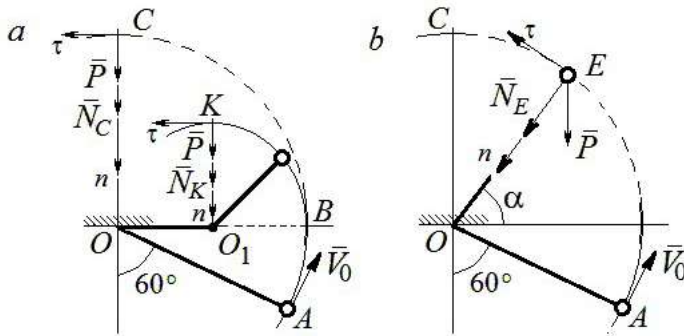


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
 а – нить навивается на препятствие;
 б – свободное движение

центра O_1 (рис. 4.25, а). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид:

$$m \frac{V_K^2}{r} = P + N_K, \text{ где } V_K \text{ – скорость}$$

груза в точке K ; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза;

$r = 0,5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m \frac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \frac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K . Имеем равенство

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}, \text{ где } h_{(AK)} \text{ – перепад высот точек } A \text{ и } K;$$

$h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, а). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\frac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки K . Однако, натяжение нити в точке K обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения A с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, b). Построим в точке E оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке K . Уравнение движения груза в проекции на ось En имеет вид: $m \frac{V_E^2}{l} = P \sin \alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке E ; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке E составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения A в положение E . Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек A и E ; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l \sin \alpha$ (см. рис. 4.25, b). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl \sin \alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке E натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl \sin \alpha$. Приравнявая выражения, получим $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B . Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l . Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой $m = 0,5$ кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса $R = 0,6$ м и прямолинейного участка BD , сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60° . Начальная скорость шарика $V_0 = 5$ м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью $c = 100$ Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

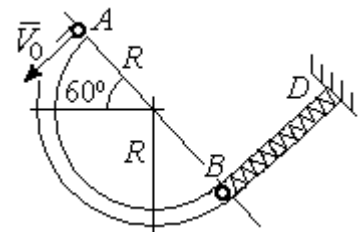


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B . Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B . Получим:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}, \quad \text{где } h_{(AB)} - \text{перепад высот точек } A \text{ и } B,$$

$$h_{(AB)} = 2R \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (рис. 4.27).}$$

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B :

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6,74 \text{ м/с}.$$

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном

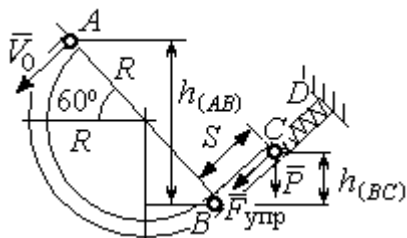


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

отрезке трубки BD . На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарiku (см. рис. 4.27).

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC . На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на от-

резке BC , имеем уравнение
$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{\text{упр}}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2},$$

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C ; $h_{(BC)} = S \sin 30^\circ = 0,5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6,74 \text{ м/с}$, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0,05S - 0,23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0,45 \text{ м}$.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ , с начальной скоростью V_0 . Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R , сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

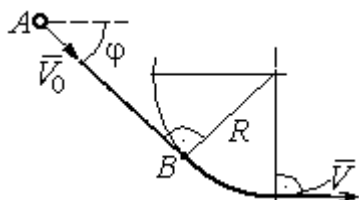


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт – сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью $C = 100$ Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0,3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0,5$ кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB , окружности радиуса $R = 1$ м, затем – по горизонтальному участку BD . Определить давление шарика на трубку в точке C . Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD , если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0,4$.

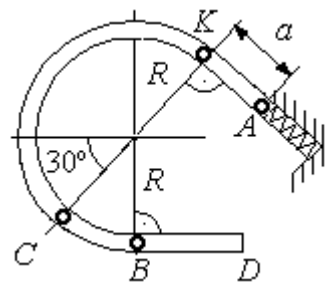


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C , координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k, \quad my_C = \sum m_k y_k, \quad mz_C = \sum m_k z_k,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды $ABCD$, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через

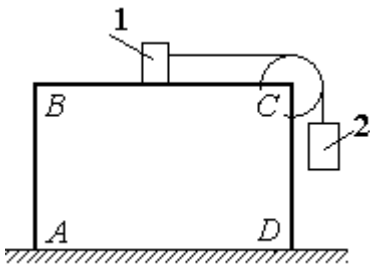


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 $m_1 = 15$ кг, груза 2 $m_2 = 20$ кг, пирамиды $m = 50$ кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока C и пирамиды $ABCD$.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат Axy , как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось Ax , имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или } \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, a не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные

условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси Ax остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, a .

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

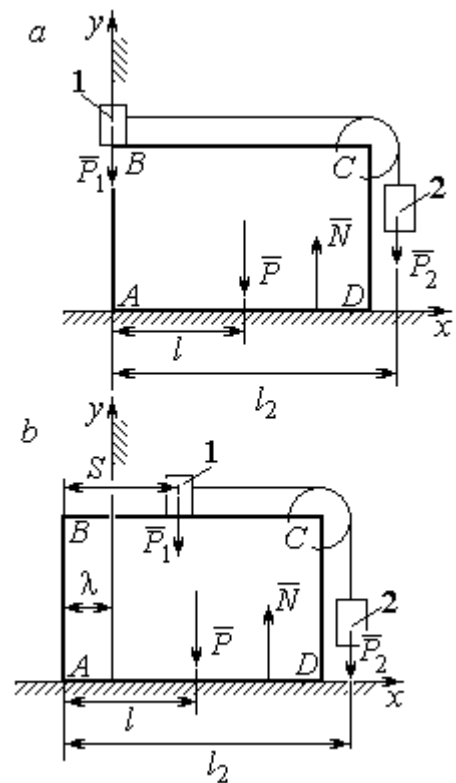


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: a – начальное положение; b – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние S

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, a). Тогда начальная координата центра масс системы:

$$x_{C0} = \frac{m_2 l_2 + m l}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние S , и положение призмы показано на рис. 5.2, b . На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние S призма $ABCD$ сместилась влево на расстояние λ . Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнявая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды

$$\lambda = \frac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}.$$

Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0,18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом R , массой m относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Для неоднородных тел момент инерции относительно оси z вы-

числяется по формуле: $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси z называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , кинетический момент: $L_z = J_z \omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси.** Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же

оси:
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R . Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z . На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t \text{ Н}\cdot\text{м}$, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 50 \text{ кг}$, $m_3 = 20 \text{ кг}$. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0,6 \text{ м}$; $r = 0,4 \text{ м}$; $i_z = 0,5 \text{ м}$.

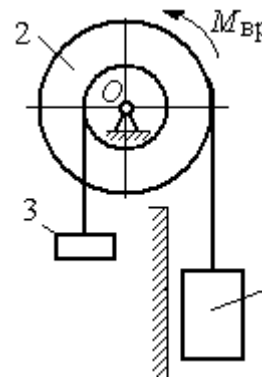


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{\text{вр}}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c . Направления векторов

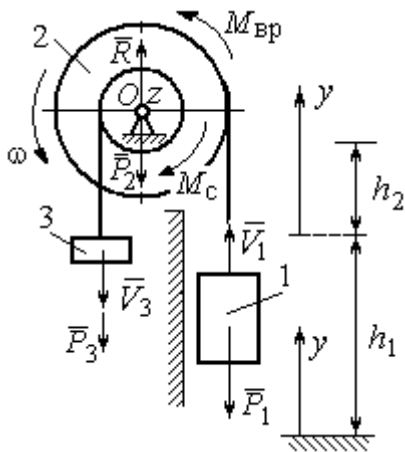


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси y , вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси z , проходящей через центр O :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e).$$

Кинетический момент системы относительно оси z равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} + L_z^{\text{пр}}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z : $L_z^{\text{бар}} = J_z \omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси z , $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси z : $L_z^{\text{гр}} = M_z(m_1 \vec{V}_1) = m_1 V_1 R$; $L_z^{\text{пр}} = M_z(m_3 \vec{V}_3) = m_3 V_3 r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} + L_z^{\text{пр}} = m_2 i_z^2 \omega + m_1 V_1 R + m_3 V_3 r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ – и подставим их в выражение кинетического момента.

$$\text{Получим } L_z = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \omega = (m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{V_1}{R}.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - M_c - P_1 R + P_3 r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (M_{\text{вр}} - M_c - P_1 R + P_3 r) R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0,58 + 0,35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0,58t + 0,175t^2; \quad y(t) = 0,29t^2 + 0,058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1,62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1,86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2) \frac{dV_1}{dt} = (-M_c - P_1 R + P_3 r) R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6,61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь урав-

нение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6,61$. Интегрируя

его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути

$\frac{V_1^2}{2} = -6,61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1 . Из началь-

ных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1,86$ м/с, получим: $C_3 = 1,73$.

Максимальную высоту h_2 , на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6,61h_2 + 1,73$, откуда $h_2 = 0,26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1,88$ м.

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0,5$ м/с. Длина стрелы

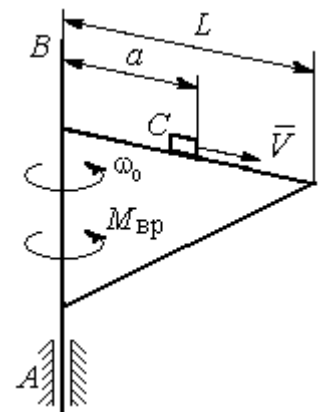


Рис. 5.5. Поворотный кран

$L = 10$ м, масса тележки с грузом $m_1 = 100$ кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза $J = 1800$ кг·м². Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}} = 400$ Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с, а тележка находилась на расстоянии $a = 1$ м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с гру-

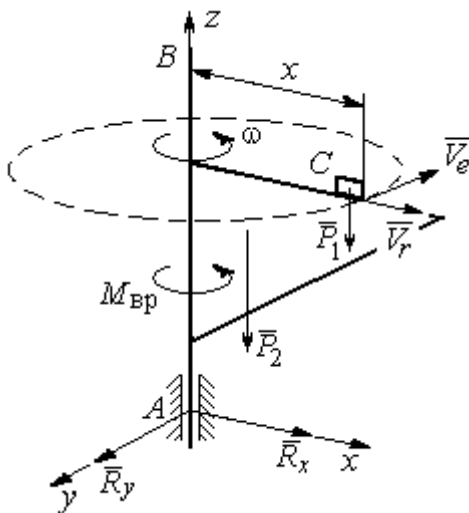


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

зом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{\text{вр}}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z , направленной вдоль линии AB .

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{\text{вр}}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{\text{вр}}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}}$. Кинетический момент крана как твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси z . Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ – относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1 \vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1 \vec{V}_e + m_1 \vec{V}_r) = M_z(m_1 \vec{V}_e) = m_1 V_e x = m_1 \omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = (J + m_1 x^2)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = (J + m_1 a^2)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $(J + m_1 x^2)\omega - (J + m_1 a^2)\omega_0 = M_{\text{вр}} t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \frac{M_{\text{вр}} t + (J + m_1 a^2)\omega_0}{(J + m_1 x^2)}$. Момент времени t_k , когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $V t_k = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_k) = 0,93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении

$T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z : $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z ; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

параллельном движении: $T = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2$, где m – масса тела; V_C , ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FScos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом M** при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом OA (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными m и r , и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

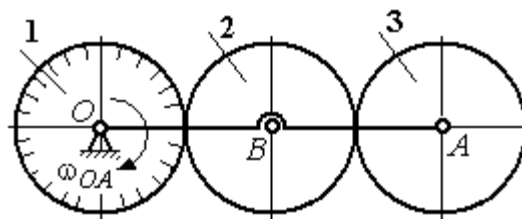


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма T равна сумме энергий колёс 2 и 3:

$T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

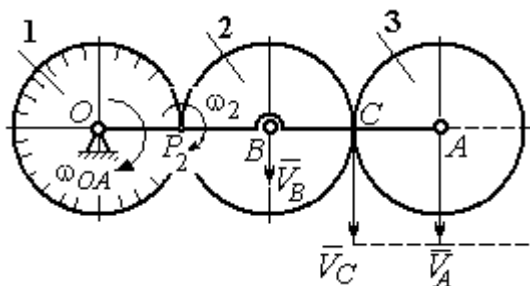


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA .

Скорость точки B , лежащей на кривошипе OA : $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C , считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA}r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA}r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного

движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA}r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1 . Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R . Их общий вес равен Q , а общий радиус инерции относительно оси z , проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: $P_1 = 40$ Н, $Q = 60$ Н, $F = 50$ Н, $M = 45$ Н·м, $R = 0,8$ м, $r = 0,6$ м, $i_z = 0,4$ м.

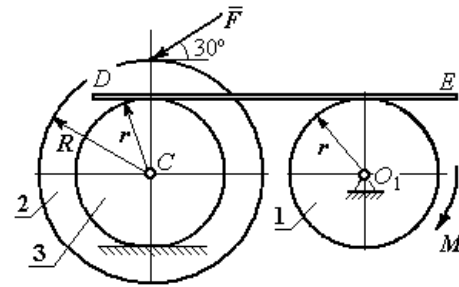


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

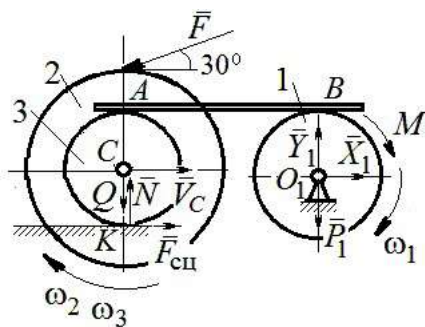


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1 , ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, движется плоскопараллельно.

Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле:

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2, \text{ где } m \text{ – общая масса катка и колеса, } m = \frac{Q}{g}, J_{zC} \text{ – мо-}$$

мент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g} \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдём сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1 , разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M \omega_1 = M \frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90° .

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$\begin{aligned} N(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F}) \vec{\omega}_2 = \\ &= -F(r+R)\omega_2 \cos 30^\circ = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K , противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cos 30^\circ + M \frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] \text{ и приравниваем суммарной мощности внешних}$$

сил. Получим:

$$\frac{1}{g} a_C \left[2P_1 + Q \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] = -F \left(1 + \frac{R}{r} \right) \cos 30^\circ + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2,88 \text{ м/с}^2$. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \frac{2a_C}{r} = 9,6 \text{ рад/с}^2$.

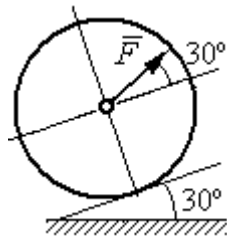


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

Задача 59. Каток радиуса r , весом P закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы $F = 2P$. В начальном положении центр катка имел скорость V_0 .

На какое расстояние S переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние S вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F \cos 30^\circ S$ и сила тяжести:

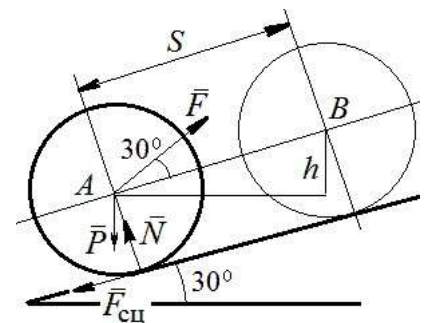


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

$A(\vec{P}) = -Ph$, где h – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

Кинетическая энергия катка $T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} J_{zA} \omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \frac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \frac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, по-

лучим энергию катка в виде: $T = \frac{3}{4}mV_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S : $\frac{3}{4}mV_B^2 - \frac{3}{4}mV_A^2 = F\cos 30^\circ S - Ph$, где $V_A = V_0$, $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30^\circ$.

$$\text{Найдём искомое перемещение: } S = \frac{9V_0^2}{4g(2\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)}.$$

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l , на другом конце которого привязан груз массы m_2 . Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

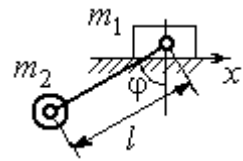


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

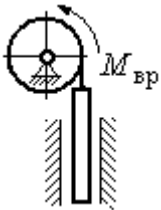


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{вр} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

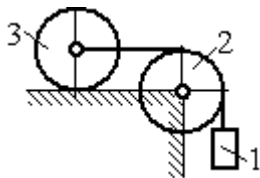


Рис. 5.15. Схема движения системы
приложен момент M .

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3 , радиуса r . В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h , если к катку 3 приложен момент M .

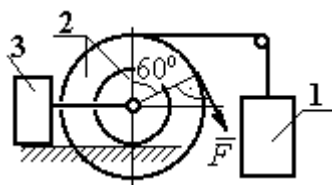


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно

плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твёрдого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}^e$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e$, $ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e$, $ma_{Cz} = \sum F_{kz}^e$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F_{kx}^e , F_{ky}^e , F_{kz}^e – проекции внешних сил.

Вращательное движение твёрдого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$ или алгебраическим уравнением: $J_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z ; J_z – момент инерции тела относительно оси z .

Плоскопараллельное движение твёрдого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e; ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e; J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где a_{Cx} , a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F_{kx}^e , F_{ky}^e – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0,8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

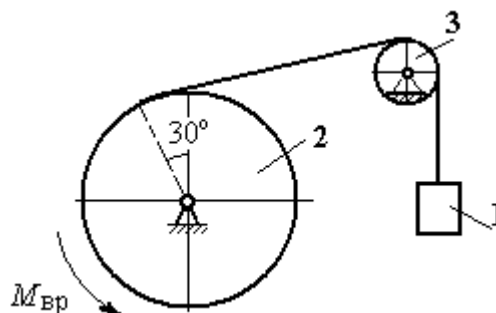


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось x по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось x : $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

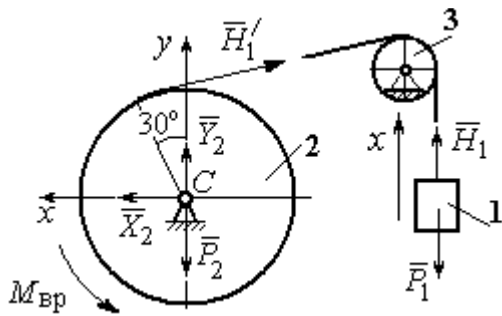


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}'_1$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}'_1$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z :

$$J_z \varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H'_1 r, \text{ где момент инерции барабана } J_z = \frac{m_2 r^2}{2}.$$

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}'_1$, напомним уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \quad m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим $a_1 = 1,82 \text{ м/с}^2$, $H_1 = 581,8 \text{ Н}$. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H'_1 \cos 30^\circ = 0, \quad m_2 a_{Cy} = Y_2 + H'_1 \cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503,84 \text{ Н}$, $Y_2 = -94,7 \text{ Н}$, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512,66 \text{ Н}$.

Задача 60. Барабан весом G , радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30° , опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M .

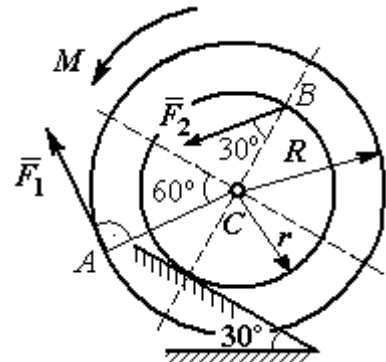


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравнивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: $R = 0,6 \text{ м}$, $r = 0,2 \text{ м}$, $G = 100 \text{ Н}$, $F_1 = 60 \text{ Н}$, $F_2 = 25 \text{ Н}$, радиус инерции барабана $i_z = 0,4 \text{ м}$.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M , нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления барабана с поверхностью.

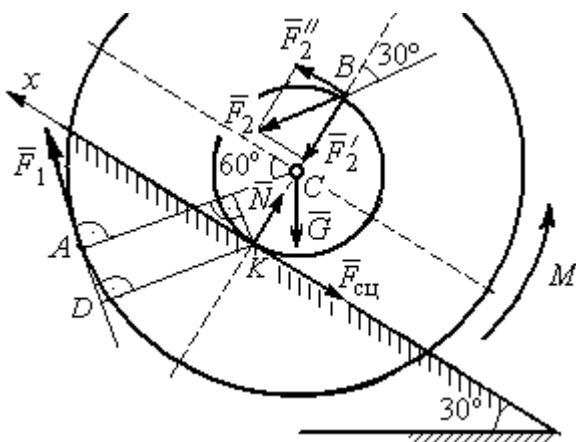


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

Для определения момента M , приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки K . Точка K выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2 \cos 30^\circ$, $F_2'' = F_2 \sin 30^\circ$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки K : $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки K :

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r \cos 30^\circ).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r \cos 30^\circ) + F_2 \sin 30^\circ \cdot 2r - Gr \sin 30^\circ + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину удерживающего момента $M = 30,61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента M , удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1,2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось x , направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1R + F_2r\cos 60^\circ + F_{\text{сц}}r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) = -F_1 \left(\frac{R}{r} - \cos 30^\circ \right) + 2F_2 \cos 60^\circ - G \cos 60^\circ + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0,6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0,3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x .

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с².

Задача 61. Механизм

(рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

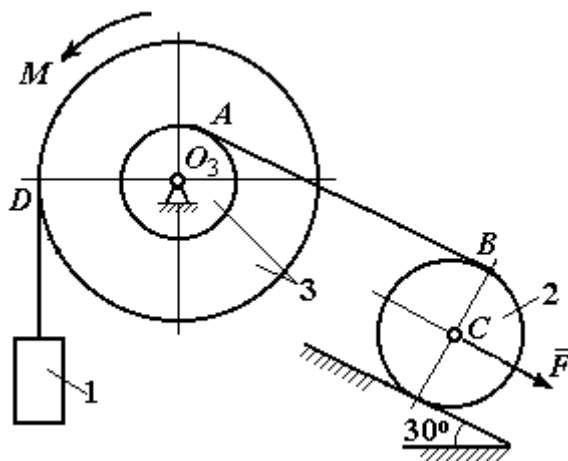


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M , приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2 . Радиусы ступеней барабана 3: R_3 , r_3 , радиус инерции барабана i_3 .

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

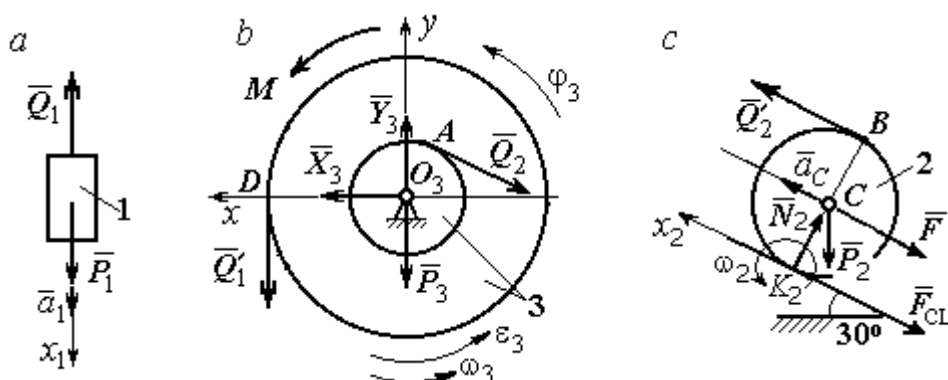


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1 , ускорением a_1 . К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, а). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1.$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс O_3 . На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$), пара сил с моментом M и реакции нитей $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3} (F_k) = Q'_1 R_3 + M - Q_2 r_3 = Q'_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

Момент инерции барабана относительно оси z : $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}'_2$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = Q'_2 - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q'_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q'_2 R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q'_2 2r + F_{\text{сц}} 2r, \quad J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см.

рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}'_2$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{12P}{g} a_C &= 2P - Q_1; & \frac{18P}{g} a_C &= 3Q_1 + P - Q_2, \\ \frac{2P}{g} a_C &= Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; & \frac{P}{g} a_C &= Q_2 + F_{\text{сц}}, \end{aligned}$$

откуда находим: $a_C = 0,09g$, $Q_1 = 0,92P$, $Q_2 = 2,14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, b), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x , y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0,92P$ и $Q_2 = 2,14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1,85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4,98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5,31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1 , радиусом r_1 , ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1gr_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

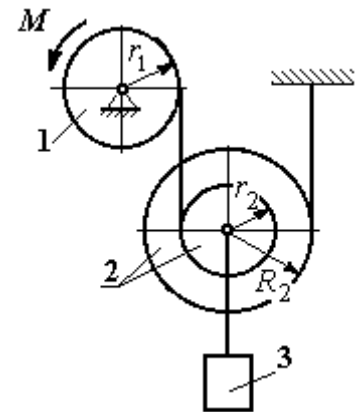


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

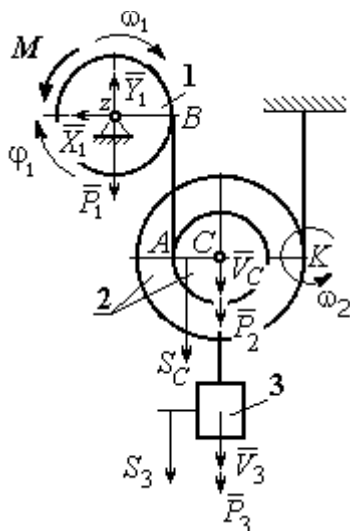


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z . Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \frac{m_1r_1^2}{2}$.

Диск 2 вращается вокруг неподвижной оси z . Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{J_{2z}\omega_2^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{2z} = \frac{m_2R_2^2}{2}$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3V_3^2}{2}$.

Работа сил тяжести: $A(P_1) = 0$, $A(P_2) = -m_2g\Delta y_2$, $A(P_3) = m_3g\Delta y_3$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2:

$T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A . Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2} \left[\frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{R_2} \right)^2 + m_2 \left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2} \right) + m_3 \right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M . Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$

следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M \frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3.$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3 \frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g \text{ м/с}^2$.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3 . Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x : $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 – реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на

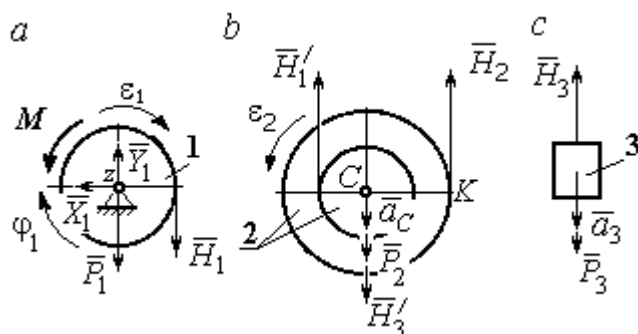


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z . На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция

подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции

диска 1 относительно оси z , $J_{1z} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, b) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \quad J_{2C} \varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2.$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, c). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных

ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$,
 $\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1} \frac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}'_1$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}'_3$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8} m_1 a_3 = H_1 - m_1 g; \quad 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1; \quad 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с², $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P , радиуса r . Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r . Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

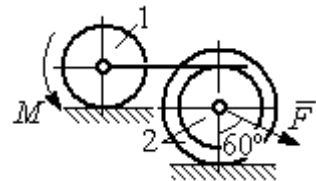


Рис. 5.26. Система катков

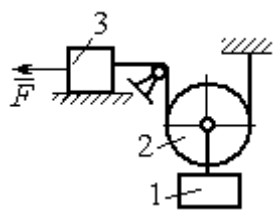


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = t$, радиуса r , затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = t$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2,5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3t$ прикреп-

лён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = t$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r . Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2t$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3t$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

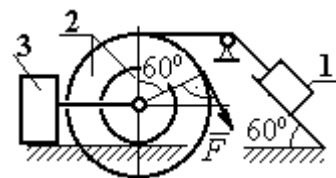


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

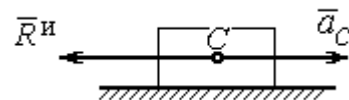


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

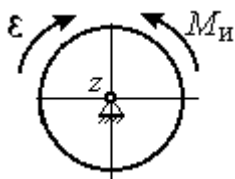


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z \epsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z ; ϵ – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ϵ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

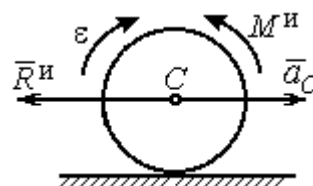


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{\text{и}} = J_C \varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{\text{и}} = 0, \quad \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{\text{и}} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{\text{и}}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{\text{и}}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра O .

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы $m_1 = 10$ кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60° с горизонтом, и посредством нити, переброшенной

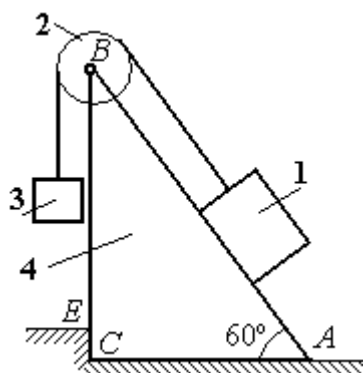


Рис. 6.4. Клин с грузами

через блок 2, укрепленный в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы $m_3 = 5$ кг (рис. 6.4). Клин ABC массы $m_4 = 15$ кг стоит гранью AC на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ E .

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина ABC , блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира B блока 2 для данной системы являются внутренними.

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

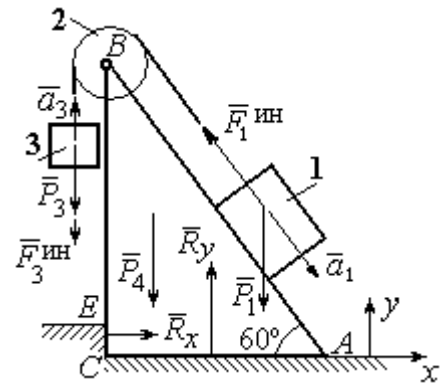


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{\text{ин}} + \vec{F}_3^{\text{ин}} = 0$.

Выберем оси xu , как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось x . Получим: $R_x - F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a, b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы:

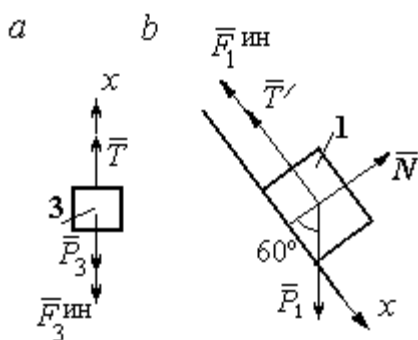


Рис. 6.6. Равновесие грузов

силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{\text{ин}}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось x , расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{\text{ин}} = 0$, где $F_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$.

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{\text{ин}}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось x , выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим:

$$a_1 = a_3 = \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}. \text{ Тогда давление клина на уступ:}$$

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ.$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём $R_x = 11,97 \text{ Н}$.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2 , радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 . Лебёдка уста-

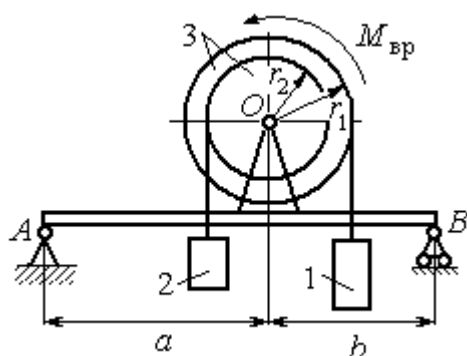


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

новлена на горизонтальной балке AB , которая закреплена в точке A на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке B . Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой

ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана $r_1 = 0,8 \text{ м}$, $r_2 = 0,2 \text{ м}$, радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_3 = 0,6 \text{ м}$, масса груза 1 $m_1 = 100 \text{ кг}$, противовеса 2 $m_2 = 30 \text{ кг}$, масса барабана $m_1 = 50 \text{ кг}$, величина вращающего момента $M_{\text{вр}} = 1050 \text{ Н} \cdot \text{м}$, расстояния от крайних точек балки A и B до линии вертикального диаметра барабана $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{вр}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O . Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

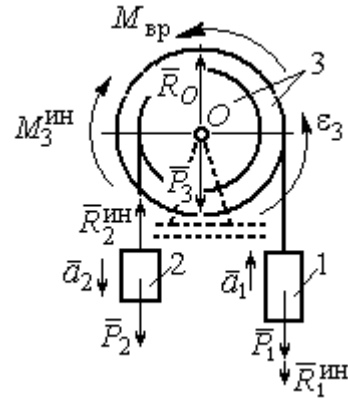


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0; \quad M_{вр} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}}r_2 + P_2r_2 - P_1r_1 - R_1^{\text{ин}}r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\epsilon_3$, $J_{3O} = m_3i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\epsilon_3 = \frac{a_1}{r_1}$ и

$$a_2 = \frac{r_2}{r_1}a_1, \text{ найдём ускорение груза 1: } a_1 = \frac{r_1(M_{вр} + P_2r_2 - P_1r_1)}{m_3i_3^2 + m_2r_2^2 + m_1r_1^2}. \text{ Подставляя}$$

данные задачи, получим $a_1 = 3,49 \text{ м/с}^2$.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1a_1 = 349 \text{ Н}$; $R_2^{\text{ин}} = m_2a_2 = 26,17 \text{ Н}$.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O :

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088,63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия

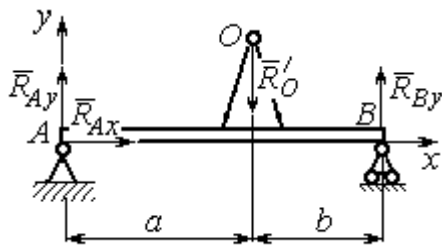


Рис. 6.9. Равновесие балки

саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O , реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B . Составим уравне-

ния равновесия балки:

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0, \quad \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a + b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём ре-

акции опор балки: $R_{By} = R_O \frac{a}{a + b} = 1392,42 \text{ Н}$; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696,21 \text{ Н}$.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419,18 \text{ Н}$, $R_{Ay} = 346,62 \text{ Н}$.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m . Массой нити и блока пренебречь.

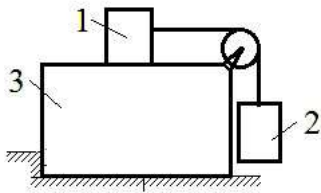


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1 , нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1 .

Какой вращающий момент M , постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P , прикрепленный в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

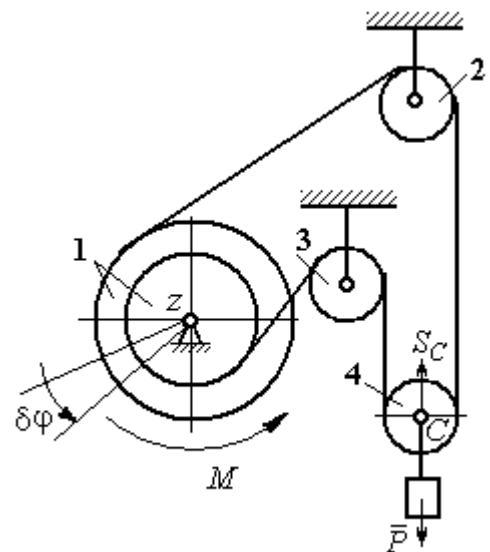


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M . По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C . Предположим, в меха-

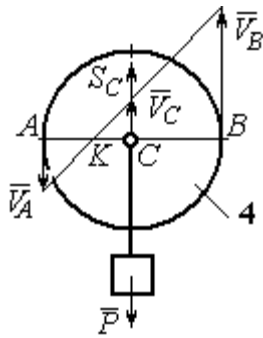


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

низме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки K . Здесь скорость точки A блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки B – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BK}{AK} = \frac{r_4 + CK}{r_4 - CK}, \text{ где } r_4 - \text{радиус блока 4 (см.}$$

рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек A и B $V_A = \omega_1 r_1$,

$$V_B = \omega_1 R_1, \text{ найдём расстояние: } CK = \frac{(R_1 - r_1)r_4}{R_1 + r_1}.$$

Угловая скорость блока 4 $\omega_4 = \frac{V_B}{r_4 + CK} = \frac{\omega_1(R_1 + r_1)}{2r_4}$. Скорость его цен-

тра: $V_C = \omega_4 \cdot CK = \frac{\omega_1(R_1 - r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки

C и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме:

$$dS_C = d\varphi_1 \frac{(R_1 - r_1)}{2}. \text{ Поскольку действительное перемещение является одним из}$$

возможных (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим связь между возможными переме-

$$\text{щениями барабана 1 и груза: } \delta S_C = \frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2}.$$

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных

$$\text{перемещений, представим его в окончательном виде: } M\delta\varphi_1 - P\frac{\delta\varphi_1(R_1 - r_1)}{2} = 0,$$

$$\text{откуда найдём значение уравновешивающего момента: } M = \frac{P(R_1 - r_1)}{2}.$$

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r , и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = =Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

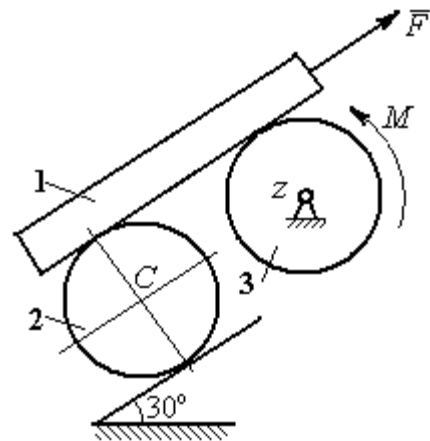


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F , параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и

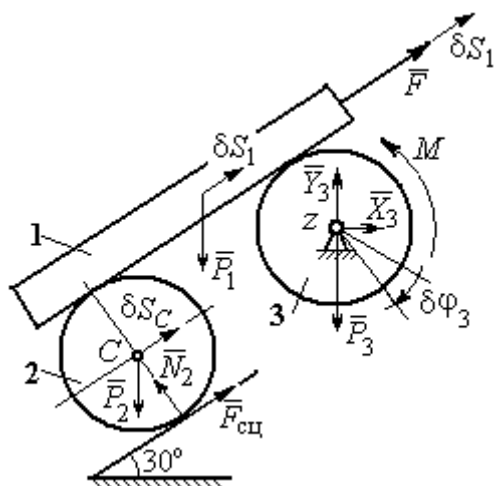


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

$\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C , а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1 . Допустим, скорость бруса равна V_1 . Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом M , приложенных к блоку 2. Ка-

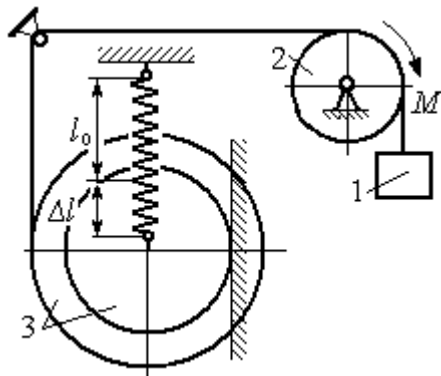


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

ток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов r и $R = 2r$ с общей массой $3m$. Масса груза 1 равна m . При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

Какой величины уравновешивающий момент M приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M , приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

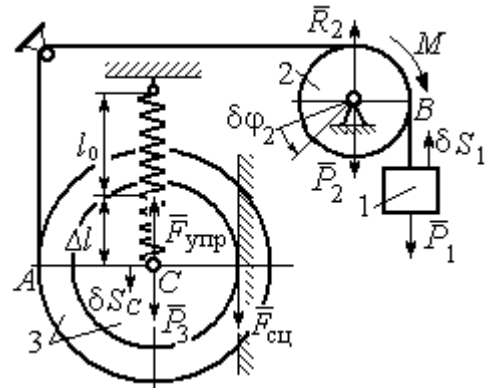


Рис. 6.16. Расчётная схема уравнивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C , направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1 . Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C . Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C . Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \frac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей.

Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r} \delta S_C = 3\delta S_C; \quad \delta \varphi_2 = \frac{R+r}{r^2} \delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3 \delta S_C - c \Delta \delta S_C + M \frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравнивающего момента $M = \frac{1}{3} mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F , приложенной к внешнему рычагу, и силой Q , сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

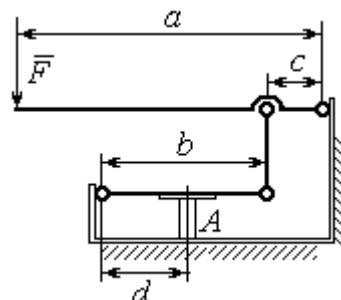


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

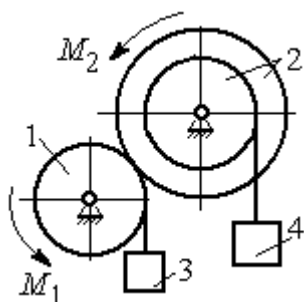


Рис. 6.18. Схема уравнивания валов

грузов, удерживающихся нитями, намотанными на валы (рис. 6.18).

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скрепленных на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравнивающего момента M_2 , приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P .

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с, если $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 = 15$ Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; $R_2 = 0,8$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,4$ м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_{2C} = 0,6$ м.

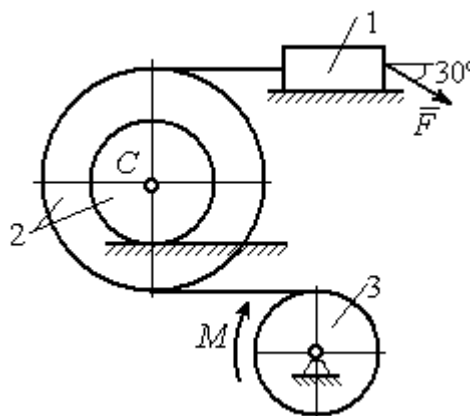


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция шарнира O

блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении по-

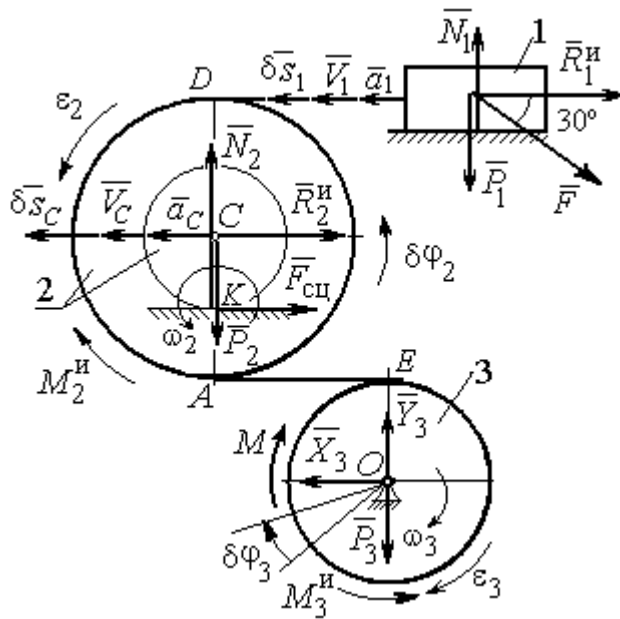


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

ворота, создаваемого моментом M . Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2 , а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{\text{и}}, \vec{R}_2^{\text{и}}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{\text{и}}, \vec{M}_3^{\text{и}}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3 .

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K

находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2}.$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M \delta \varphi_3 = M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F \delta s_1 \cos 150^\circ = -F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) &= \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = \\ &= M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ = (0,85 + 23,35t) \delta s_C. \end{aligned}$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{н}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C, \quad R_2^{\text{н}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{н}} = J_{2C} \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{н}} = J_{3O} \varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g} \frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{н}}) = -R_1^{\text{н}} \delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{н}}) = -R_2^{\text{н}} \delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = & -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2} \delta s_C - \\ & - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2} \delta s_C = -52,75 a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9,81 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0,85 + 23,35t) \delta s_C - 52,75 a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0,02 + 0,45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0,02 + 0,45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0,01t^2 + 0,075t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21).

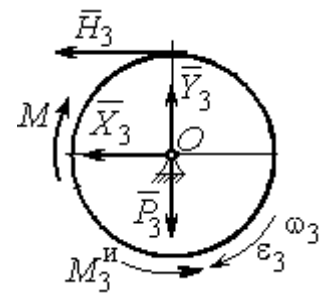


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения:

$M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя

в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1 \text{ с}$, $M(1) = 9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ найдём реакцию нити $H_3(1) = 20,75 \text{ Н}$.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0, Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1 \text{ с}$:

$X_3 = -20,75 \text{ Н}$, $Y_3 = 15 \text{ Н}$. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25,6 \text{ Н}$.

Задача 69. Груз 2 весом P_2 , поднимаемый лебёдкой (рис. 6.22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3 . Нерастяжимая нить одним концом при-

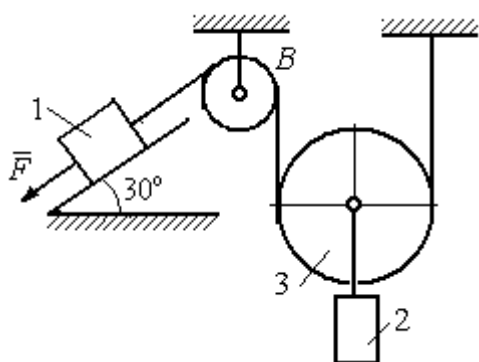


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

цеплена к грузу 1 весом P_1 , лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок В, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока B и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1 . Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

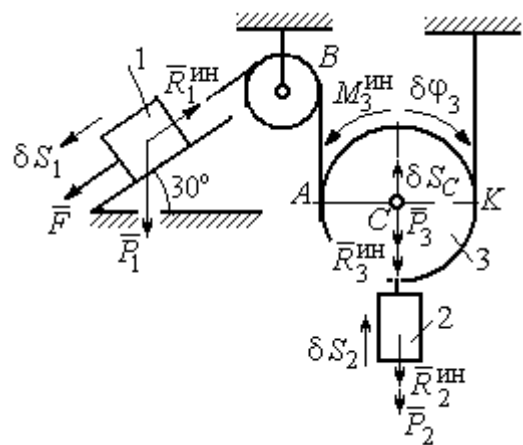


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1 . В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C , а сам блок повернулся на угол $\delta \varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1\delta S_1 \cos 60^\circ - P_2\delta S_2 - P_3\delta S_C - \\ - R_1^{\text{и}}\delta S_1 - R_2^{\text{и}}\delta S_C - R_3^{\text{и}}\delta S_C - M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{и}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{и}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{и}} = \frac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta\varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \frac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \frac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\frac{1}{2}P\delta S_1 = \frac{17}{8g}Pa_1\delta S_1$. От-

сюда $a_1 = \frac{4}{17}g = 0,23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \frac{a_1}{2} = 0,12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0,12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0,06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

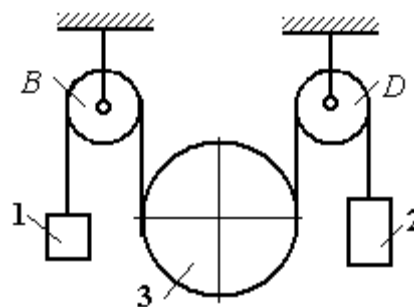


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,

$\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D . Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо

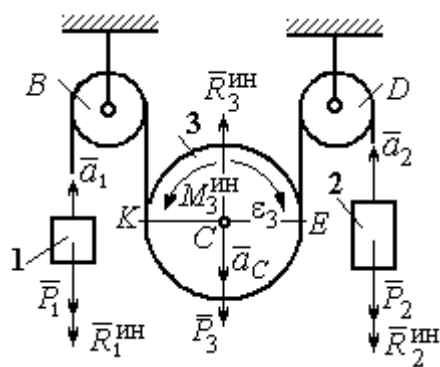


Рис. 6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

составлять для каждого из независимых перемещений.

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ϵ_3 , направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{\text{ин}} = J_{3C} \epsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \frac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс.

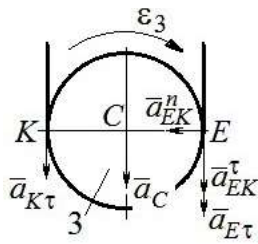


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}_{EK}^n + \vec{a}_{EK}^\tau$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K ; $\vec{a}_{EK}^n$, $\vec{a}_{EK}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$.

Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a_{EK}^\tau$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a_{EK}^\tau = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \frac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \frac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a_{CK}^\tau = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D . Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2 .

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1 , а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

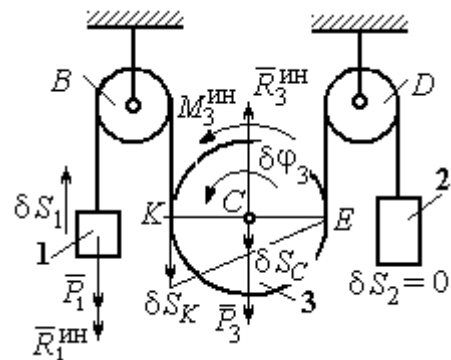


Рис. 6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \frac{V_K}{2r} = \frac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_1$. Тогда элементар-

ный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \frac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C} \varepsilon_3 \delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2r} \cdot \frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

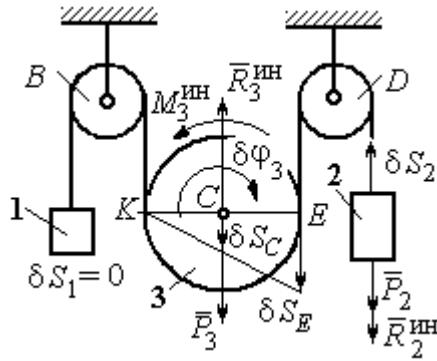


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{\text{ин}}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{\text{ин}}\delta s_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3r^2}{2g}\left(\frac{a_2 - a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2 , получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2.

Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса r и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов r и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень,двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{вр} = mgr \sin \omega t$.

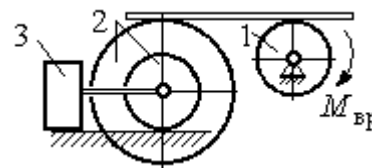


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1,5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t + 1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны P , вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана r и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

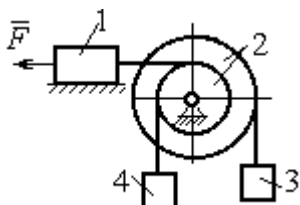


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщёнными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщённые координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$, называемые **вариациями обобщённых координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина Q_k , $k = 1, 2, \dots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \dots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы $m_5 = 50$ кг.

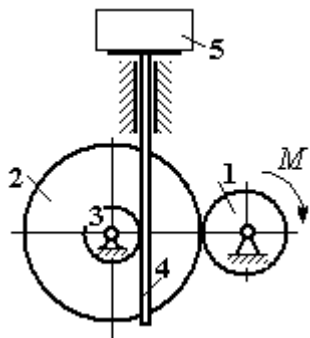


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс $r_1 = 5$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 6$ см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс $m_1 = 0,8$ кг, $m_2 = 1,6$ кг, $m_3 = 0,6$ кг, масса зубчатой рейки $m_4 = 1$ кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость $V_5 = 1$ м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату x , отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты x имеет вид:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно:

$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$, $T_3 = \frac{J_3 \omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$,

$J_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5 = V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5:

$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5 = \frac{m_5 V_4^2}{2}$.

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

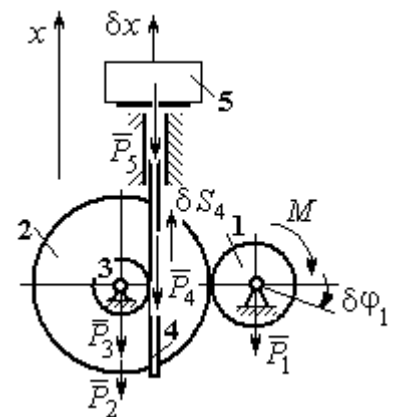


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$

$$\text{следует } \omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = \frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \\ &= \frac{m_1 r_1^2}{4} \left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3} \right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4} \left(\frac{V_4}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} = \\ &= \left[\frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right] \frac{V_4^2}{2} = 28,05 V_4^2 = 28,05 \dot{x}^2. \end{aligned}$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4 , а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta \varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta \varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta \varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 r_3} \delta x$. В результате сумма работ сил на возможном

перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) \delta x$. От-

сюда обобщённая сила Q_x , соответствующая координате x :

$$Q_x = -(m_5 + m_4)g + M \frac{r_2}{r_1 r_3} = -500,31 + 40M.$$

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56,1 \ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение

движения имеет вид: $56,1 \ddot{x} = -500,31 + 40M$ или $\ddot{x} = -8,92 + 0,71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8,92 + 0,71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13,27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c . Радиусы ступеней блока r и $R = 1,5r$, радиус катка 3 равен r . Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M . Качение катка

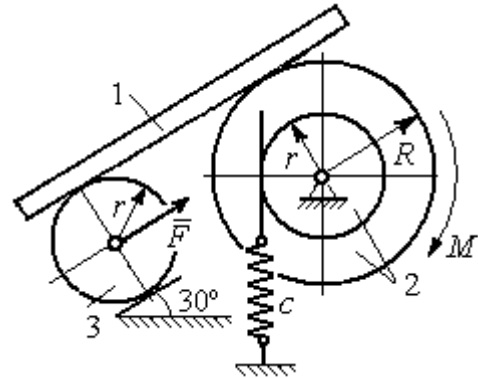


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0,2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0,5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \text{ где } T - \text{кинетическая энергия системы; } Q_x - \text{обобщенная}$$

сила, соответствующая обобщенной координате x .

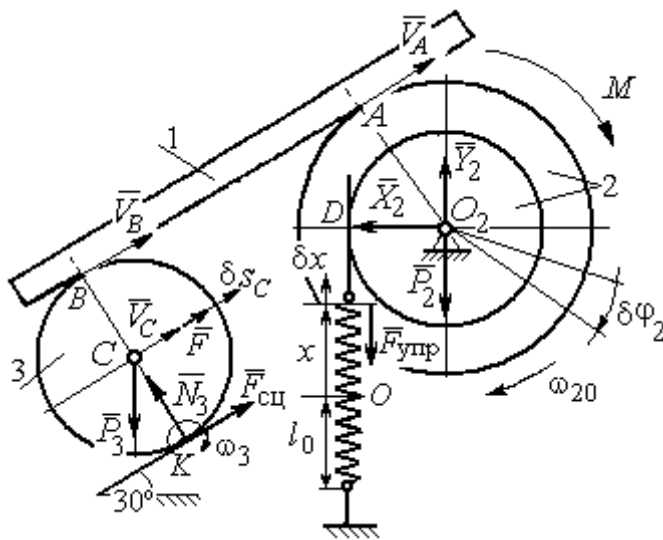


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z , $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая

энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C , ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2 , ω_3 , а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_A}{2r} = \frac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} (r\sqrt{2})^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2} \right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r} \right)^2 \right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x , показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние

$\delta s_C = \frac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M , сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M : $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C \cos 120^\circ = -P_3\frac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F : $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\frac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x : $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x \cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ и, подставляя их в общий вид уравнений}$$

Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10,2x = 4,34 \text{ (здесь } g = 9,81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10,2} = 3,19$ рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0,42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3,19t + C_2 \cos 3,19t + 0,42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастяннутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0,42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0,5$ рад/с, то при $r = 0,2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20}r = 0,1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3,19C_1 \cos 3,19t - 3,19C_2 \sin 3,19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0,03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0,03 \sin 3,19t - 0,42 \cos 3,19t + 0,42$ м. Уравнение колебательного движения

блока 2: $\varphi_2 = \frac{x}{r} = 0,15 \sin 3,19t - 2,1 \cos 3,19t + 2,1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r . Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

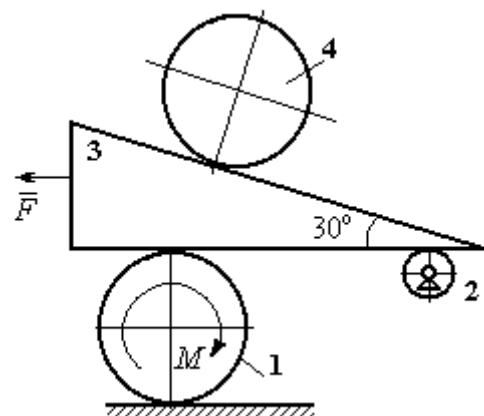


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30°. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

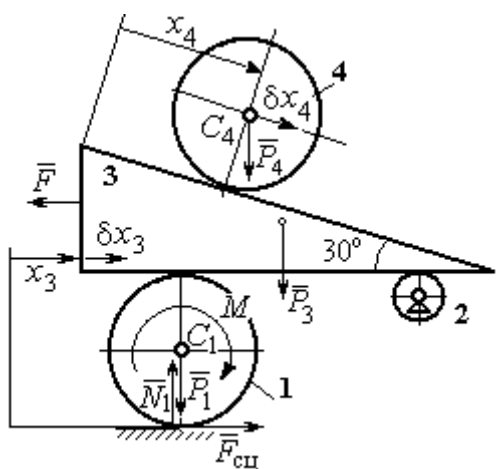


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4} , Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия

катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2} \dot{x}_3$;

J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}.$$

При расчёте кинетической энергии катка 4 по

формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ.$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении

$$\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}.$$

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

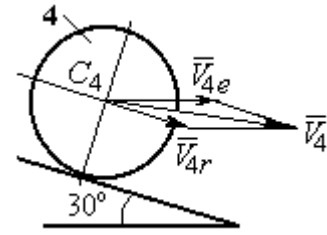


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

$$= \frac{P}{2g} \left(\frac{27}{8} \dot{x}_3^2 + \frac{3}{2} \dot{x}_4^2 + \dot{x}_3 \dot{x}_4 \sqrt{3} \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3 , оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M , приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r} \right) \delta x_3.$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3 : $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4 , оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4 \delta x_4 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} P \delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4 : $Q_{x_4} = \frac{1}{2} P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{27P}{8g} \ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_4; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) = \frac{3P}{2g} \ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g} \ddot{x}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6,75\ddot{x}_3 + 1,73\ddot{x}_4 = g; \quad 3\ddot{x}_4 + 1,73\ddot{x}_3 = g.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0,07g$, $\ddot{x}_4 = 0,29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0,035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0,145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины c . Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен r . Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса R . К блоку 3 приложена пара сил с моментом M . Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

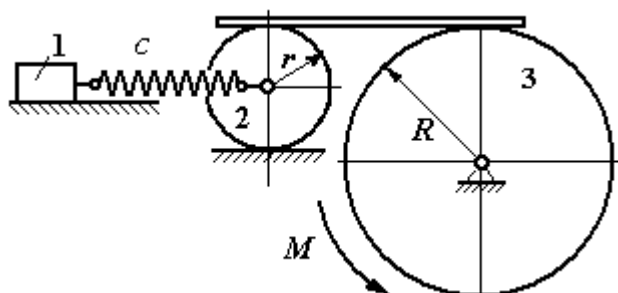


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0 .

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно $P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 20 \text{ Н}$, $P_3 = 30 \text{ Н}$, $M = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $R = 24 \text{ см}$, $c = 207 \text{ Н/м}$, $\Delta l_0 = 5 \text{ см}$.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно

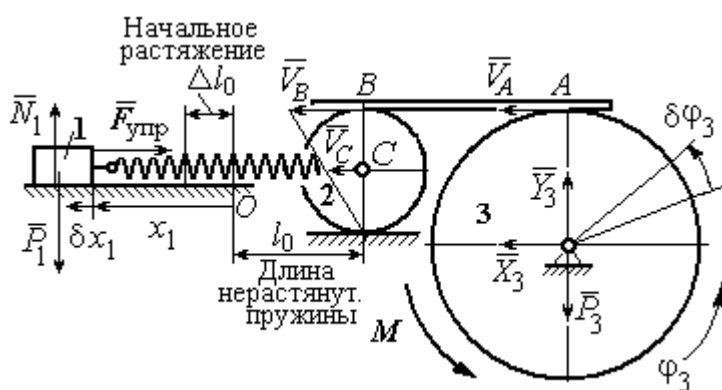


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

но недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2}V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_3} = Q_\phi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x , Q_ϕ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и ϕ_3 .

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллель-

ное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4}m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R$.

Тогда $T_2 = \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3:

$T_3 = \frac{1}{2}J_{3z}\omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Оконча-

тельно $T_3 = \frac{1}{4}m_3 \dot{\phi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_3 R\right)^2 + \frac{3}{16}m_2 \dot{\phi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\phi}_3^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1 \dot{\phi}_3 R + \left(\frac{1}{8}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{1}{4}m_3\right) \dot{\phi}_3^2 R^2. \end{aligned}$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta \varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1 : $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x , соответствующая координате x_1 : $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta \varphi_3$: $\delta \varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка С движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta \varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \dot{\varphi}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2} m_1 R \dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \dot{\varphi}_3 R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} m_1 R \ddot{\varphi}_3; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \frac{1}{2} m_1 R \ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \ddot{\varphi}_3 R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\phi}_3$:

$$1,02\ddot{x}_1 + 0,12\ddot{\phi}_3 = -207x_1; \quad 0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\phi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительно колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4,35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0,02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1 \sin 15t + C_2 \cos 15t - 0,02.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0,05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0,05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0,07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15 \cos 15t - C_2 15 \sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0,07\cos 15t - 0,02 \text{ м.}$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0,12\ddot{x}_1 + 0,15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим:

$\ddot{\varphi}_3 = 33,33 + 12,6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное урав-

нение первого порядка: $\frac{d\omega_3}{dt} = 33,33 + 12,6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33,33t + 0,84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения

блока 3: $\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + C_3t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0,056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16,665t^2 - 0,056\cos 15t + 0,056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0,06\cos 15t - 0,01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r , движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P/r$, прикрепленной одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

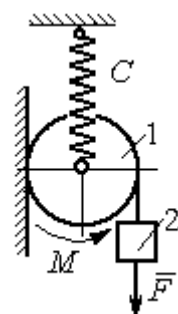


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$

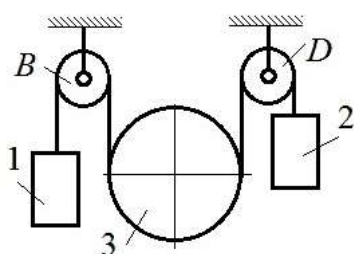


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передает движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P , который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

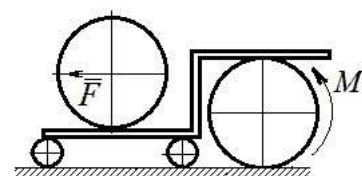


Рис. 6.42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

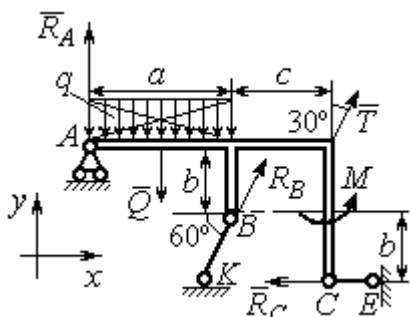


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$$T = 15 \text{ кН}, \quad Q = 15 \text{ кН}.$$

$$R_B \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B \cos 30^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{a}{2} + R_B \cos 30^\circ \cdot a + R_B \cos 60^\circ \cdot b + T \cos 30^\circ \cdot (a + c) + M - R_C \cdot 2b = 0.$$

$$R_B = -3,8 \text{ кН}, \quad R_C = 5,6 \text{ кН}, \quad R_A = 5,3 \text{ кН}.$$

1.2

$$Q = 9 \text{ кН}, \quad T = 2 \text{ кН}.$$

$$X_A + T \cos 30^\circ + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ + R_B - T \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{c}{2} + R_B (b + c \cos 60^\circ) - F c \cos 60^\circ + M -$$

$$-T \cos 60^\circ (b + c \cos 60^\circ) - T \cos 30^\circ (a + c \sin 60^\circ) = 0.$$

$$R_B = 10,02 \text{ кН}, \quad X_A = -9,53 \text{ кН}, \quad Y_A = -0,52 \text{ кН}.$$

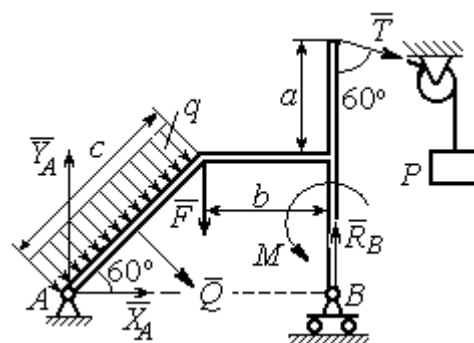


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

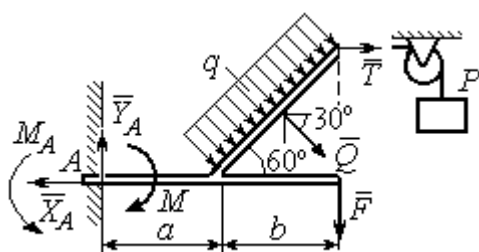


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$$Q = 8 \text{ кН}, \quad T = 3 \text{ кН}.$$

$$-X_A + T + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-T 2b \cos 30^\circ - F(a + b) + M_A - M -$$

$$-Q \cos 60^\circ \left(a + \frac{b}{2} \right) - Q \cos 30^\circ (b \cos 30^\circ) = 0.$$

$$M_A = 18,61 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_A = 9,93 \text{ кН}, \quad Y_A = 6 \text{ кН}.$$

1.4

$$Q = 6,93 \text{ кН}, T = 2 \text{ кН}.$$

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - F\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

$$R_A = 0,72 \text{ кН}, X_B = -5,5 \text{ кН}, Y_B = 5,34 \text{ кН}.$$

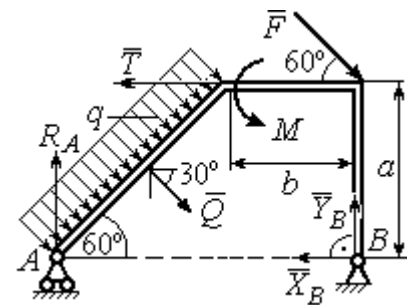


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

1.5

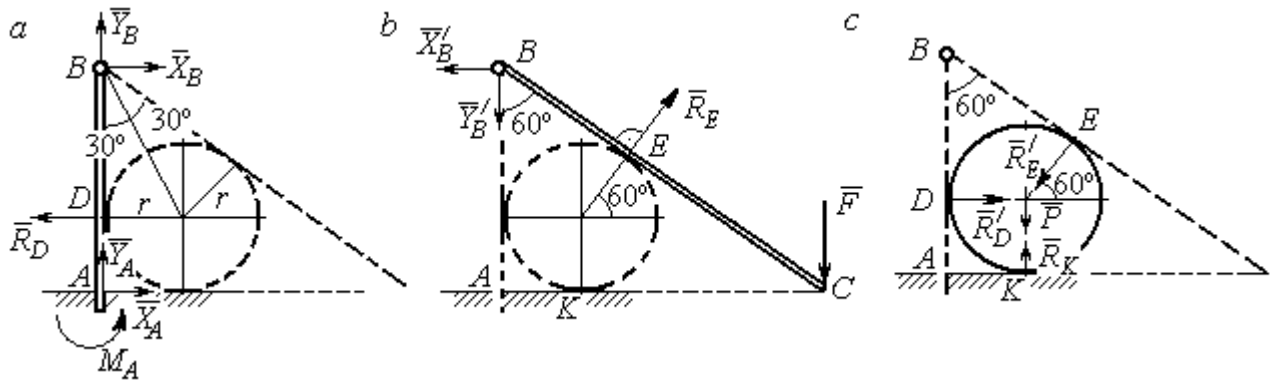


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:

a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$$X_B = X'_B, Y_B = Y'_B, R_D = R'_D, R_E = R'_E.$$

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg} 30^\circ = 2,73 \text{ м}.$

$$X_A - R_D + X_B = 0, Y_A + Y_B = 0, M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка *BC*. $BE = BD = 1,73 \text{ м}.$ $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4,73 \text{ м}.$

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, RE\sin 60^\circ - Y'_B - F = 0, R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$$R_E = 21,87 \text{ кН}, Y_B = 10,94 \text{ кН}, X_B = 10,94 \text{ кН}, R_D = 10,94 \text{ кН};$$

$$R_K = 20,94 \text{ кН}, X_A = 0, Y_A = -10,94 \text{ кН}, M_A = 18,93 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.6

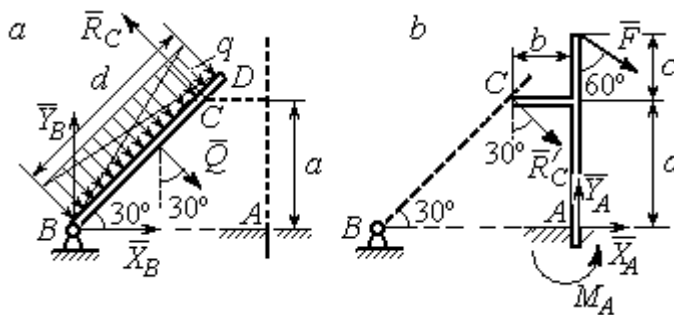


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
а – равновесие балки BD ; б – равновесие балки AC

Балка BD . $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q \cos 60^\circ - R_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q \cos 30^\circ + R_C \cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q \frac{d}{2} + R_C 2a = 0.$$

Балка AC . $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C \cos 60^\circ + F \cos 30^\circ = 0, \quad Y_A - R'_C \cos 30^\circ - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C \cos 60^\circ \cdot a + R'_C \cos 30^\circ \cdot b - F \cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0,61 \text{ кН}, \quad Y_B = 8,3 \text{ кН}, \quad R_C = 9,37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8,15 \text{ кН}, \quad Y_A = 10,11 \text{ кН}, \quad M_A = 11,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.7

Балка AB . $Q_1 = 6$ кН.

$$T = P = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + R_B - T \cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T \cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_1 \frac{a}{2} +$$

$$+ T \cos 30^\circ a + T \cos 60^\circ c \cos 30^\circ -$$

$$- F[c + (b + c) \cos 30^\circ] = 0.$$

Балка DB . $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad Y_D - Q_2 \cos 60^\circ = 0, \quad M + R'_B(b + c) \cos 30^\circ + Q_2 \frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1,49 \text{ кН}, \quad Y_A = 8,6 \text{ кН}, \quad M_A = 8,86 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad R_B = -1,01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1,59 \text{ кН}, \quad Y_D = 1,5 \text{ кН}.$$

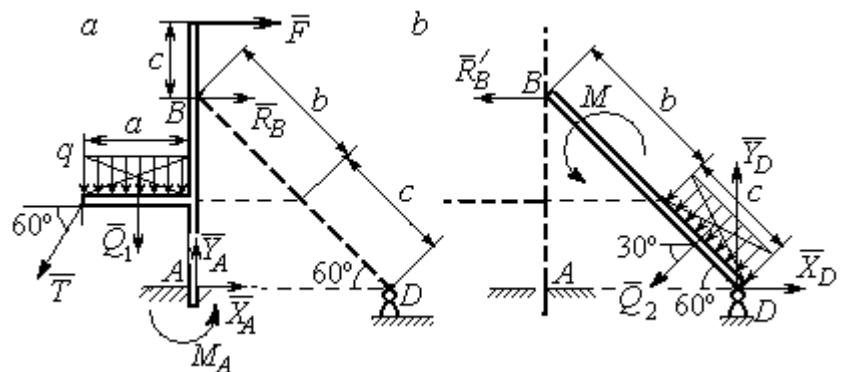


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
а – равновесие балки AB ; б – равновесие балки BD

1.8

Шар.

$$R_B \cos 60^\circ - R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_B \cos 30^\circ + R_D \cos 30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B \cos 30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC \cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 2,89 \text{ кН}, Y_A = 0 \text{ кН}, M_A = -11,55 \text{ кН} \cdot \text{м}, R_B = 5,77 \text{ кН}, R_D = 5,77 \text{ кН}.$$

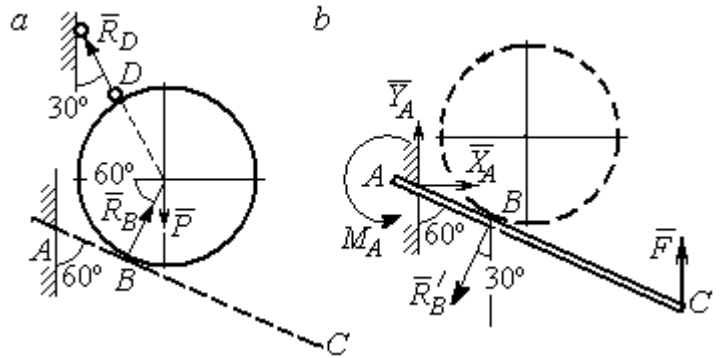


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
а – равновесие шара; б – равновесие балки AC

1.9

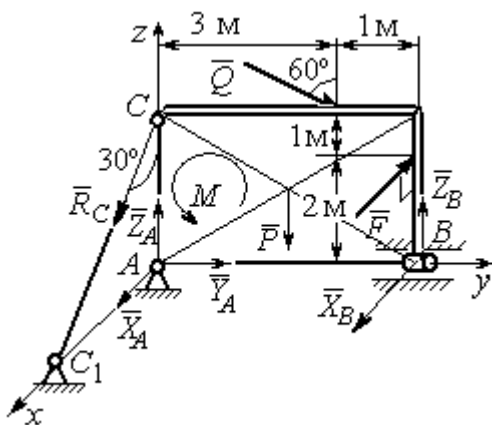


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C \cos 60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q \cos 60^\circ \cdot 3 - Q \cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C \cos 60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0, -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,34 \text{ кН}, Y_A = 2,6 \text{ кН};$$

$$Z_A = 8,92 \text{ кН}, R_C = 10,67 \text{ кН};$$

$$X_B = 8 \text{ кН}, Z_B = 3,82 \text{ кН}.$$

1.10

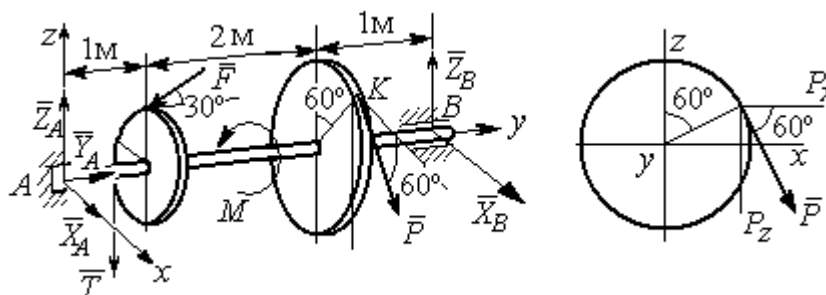


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + P \cos 60^\circ + X_B = 0, \quad Y_A - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F \cos 60^\circ - P \cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T \cdot 1 - F \cos 60^\circ \cdot 1 + F \cos 30^\circ \cdot r - P \cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0, \quad -P \cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,46 \text{ кН}, \quad Z_A = 5,48 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 2,4 \text{ кН}, \quad Z_B = 5,06 \text{ кН}.$$

1.11

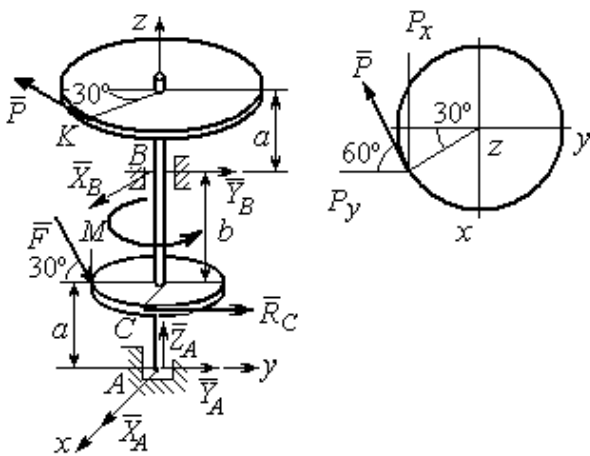


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$$R_C = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + X_B - P \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P \cos 60^\circ + R_C + F \cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P \cos 60^\circ(2a+b) - R_C a -$$

$$F \cos 30^\circ \cdot a + F \cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P \cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$$X_A = -1,85 \text{ кН}, \quad Y_A = -5,64 \text{ кН}, \quad Z_A = 2 \text{ кН}, \quad P = 6,4 \text{ кН}, \quad X_B = 7,39 \text{ кН}, \quad Y_B = 2,38 \text{ кН}.$$

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН.}$$

$$X_A + T + X_D = 0; \quad Y_A - F + P \cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P \cos 30^\circ = 0;$$

$$F \sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a) \cos 30^\circ = 0;$$

$$T \sin 30^\circ - P \cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + P \cos 60^\circ + F \cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0,8 \text{ кН}, \quad Y_A = 2,56 \text{ кН}, \quad Z_A = 1,3 \text{ кН};$$

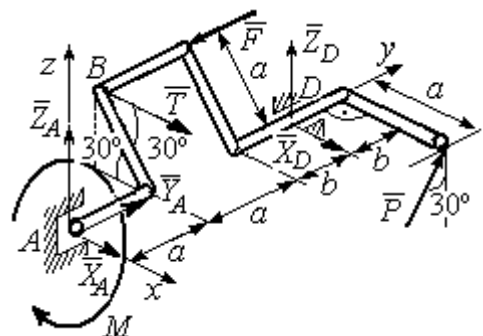


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2,89 \text{ кН}, X_D = 0,76 \text{ кН}, Z_D = -3,80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P :

$$T_{\min} + F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0$$

Максимальный вес груза P :

$$T_{\max} - F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$-F_{\text{тр}B} \cdot AB \sin 30^\circ + N_B \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot AC \sin 30^\circ = 0;$$

$$F_{\text{тр}A} = f N_A, F_{\text{тр}B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31,77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130,51 \text{ Н}.$$

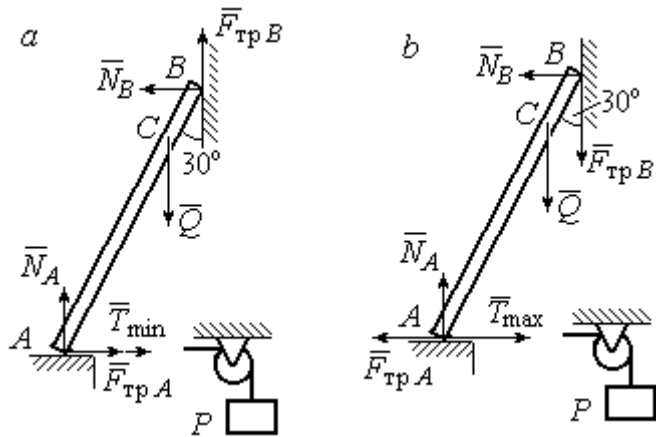


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
а – расчёт минимального веса груза;
б – расчёт максимального веса груза

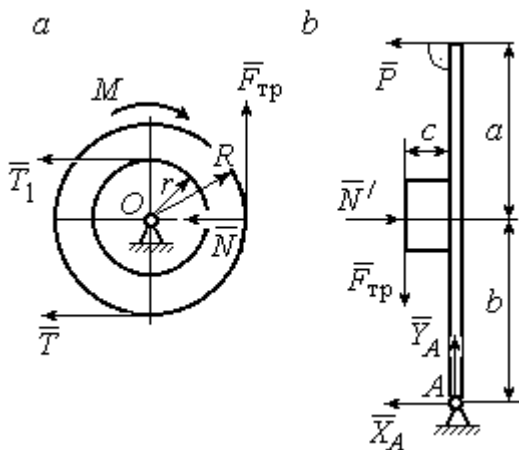


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:

а – равновесие шкива; б – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266,67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666,67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a + b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346,67 \text{ Н}, Y_A = 266,67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\phi}_1 = 3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2}, \quad \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

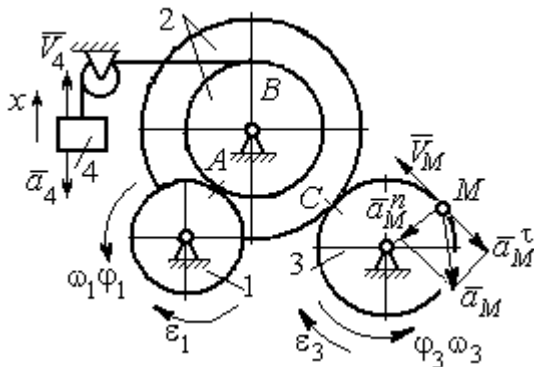


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z} \frac{R_1}{r_2} \frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) \frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с.}$$

$$V_M(1) = \omega_3(1)R_3 = 40 \text{ cm/c.}$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3} \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6,58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau, \quad a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160 \text{ cm/c}^2, \quad a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65,8 \text{ cm/c}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ cm/c}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z} R_1 = \left(3 + \pi \cos \frac{\pi t}{2} \right) 8; \quad V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ cm/c.}$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2; \quad a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39,48 \text{ cm/c}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2,05 \text{ M/c}, \quad V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3} \left(1 - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6,83 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3} \left(\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{3} \right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3,65 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

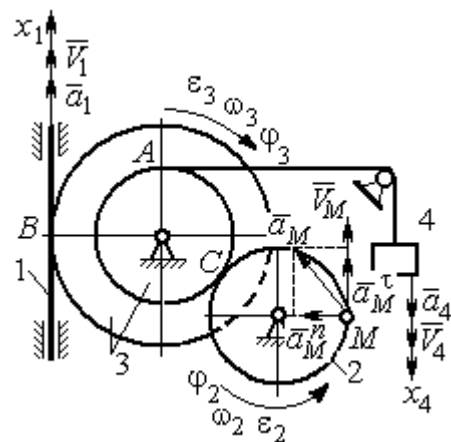


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \omega_2 = \omega_3 \frac{r_3}{R_2} = 10,25 \text{ рад/с}; \quad V_M = \omega_2 R_2 = 2,05 \text{ м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_3}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \frac{r_3}{R_2} = 5,47 \text{ рад/с}^2.$$

$$a_M^n = \omega_2^2 R_2 = 20,4 \text{ м/с}^2; \quad a_M^\tau = \varepsilon_2 R_2 = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = 20,43 \text{ м/с}^2.$$

$$V_1 = \omega_3 R_3 = 2,73 \text{ м/с}; \quad a_1 = \dot{V}_1 = \dot{\omega}_3 R_3 = \varepsilon_3 R_3 = 2,19 \text{ м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2 = BC \cos 30^\circ = 4,33 \text{ см}; \quad CP_2 = 2,5 \text{ см}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 1,15 \text{ рад/с}; \quad V_C = \omega_{BC} CP_2 = 2,87 \text{ см/с};$$

$$\omega_1 = \frac{V_C}{CP_1} = 0,72 \text{ рад/с}; \quad EP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см};$$

$$V_E = \omega_1 EP_1 = 2,49 \text{ см/с}; \quad EP_3 = 2AE \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см};$$

$$\omega_{AE} = \frac{V_E}{EP_3} = 0,24 \text{ рад/с}; \quad EA = AP_3;$$

$$V_A = \omega_{AE} AP_3 = 1,44 \text{ см/с}, \quad \omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,24 \text{ рад/с}.$$

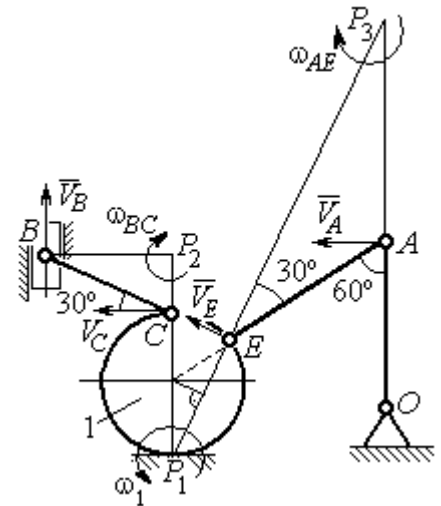


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

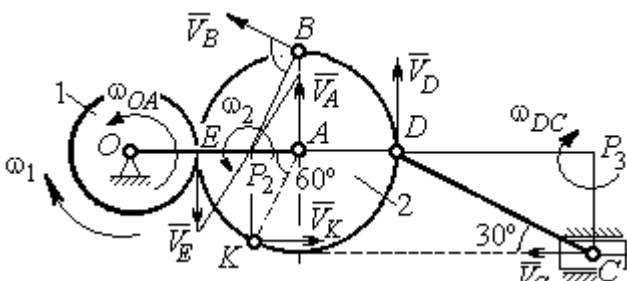


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E = \omega_1 r_1 = 18 \text{ см/с}.$$

$$V_A = \omega_{OA} (r_1 + r_2) = 18 \text{ см/с}.$$

$$EP_2 = P_2 A = 3 \text{ см}, \quad \omega_2 = \frac{V_E}{EP_2} = 6 \text{ рад/с}.$$

$$V_K = \omega_2 P_2 K = 31,18 \text{ см/с}.$$

$$V_B = \omega_2 P_2 B = 40,25 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_2 P_2 D = 54 \text{ см/с}.$$

$$DC = 2r_2, \omega_{DC} = \frac{V_D}{DP_3} = 5,197 \text{ рад/с}; V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ, V_C = 31,18 \text{ см/с}.$$

2.5

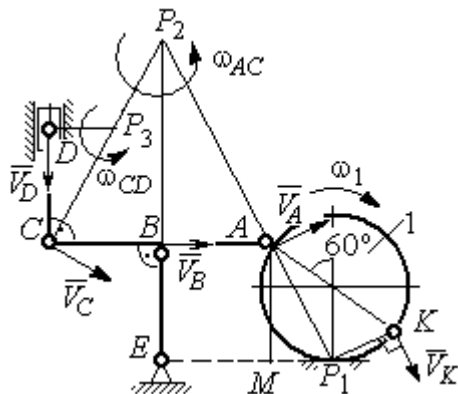


Рис. 7.19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$$BE = 1,5R_1; R_1 = 2,67 \text{ см}.$$

$$KP_1 = R_1; \omega_1 = \frac{V_K}{KP_1} = 0,75 \text{ рад/с}.$$

$$AP_1 = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см}; V_A = \omega_1 P_1 A = 3,46 \text{ см/с}.$$

$$AP_2 = 2AB = 8 \text{ см}; \omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,43 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; V_B = 2,99 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BE} = \frac{V_B}{BE} = 0,75 \text{ рад/с}; V_C = V_A = 3,46 \text{ см/с}; CP_3 = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = 4,62 \text{ см};$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,75 \text{ рад/с}; V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ; V_D = 1,73 \text{ см/с}.$$

2.6

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12 \text{ см/с}; \omega_{AD} = 0, V_D = V_A.$$

$$\omega_{O_1C} = \frac{V_D}{DO_1} = 3 \text{ рад/с};$$

$$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48 \text{ см/с}.$$

$$CB = CP = 16 \text{ см}; \omega_{CB} = \omega_{CL} = \frac{V_C}{CP} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$PL = \frac{CP}{\cos 30^\circ} = 18,48 \text{ см}; PB = 2BC \cos 30^\circ.$$

$$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55,44 \text{ см/с};$$

$$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83,13 \text{ см/с}.$$

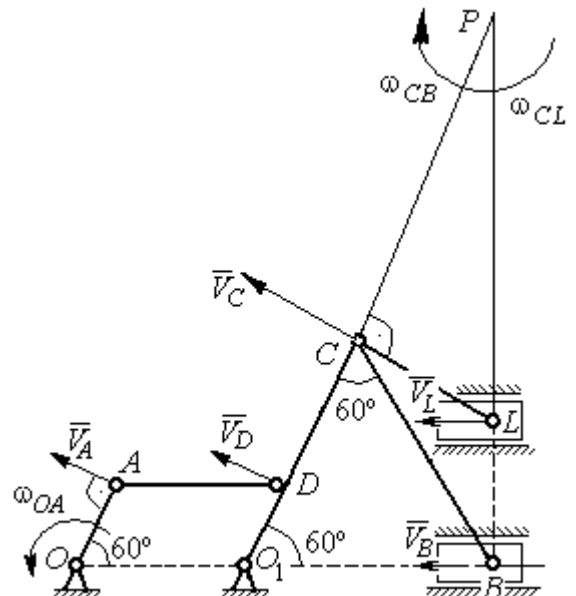


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$$V_D = \omega_1 R_1 = 30 \text{ см/с}; \quad V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15 \text{ см/с}.$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21,21 \text{ см/с}.$$

$$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ; \quad V_C = 15 \text{ см/с}.$$

$$CP_3 = CB; \quad \omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_3} = 1,87 \text{ рад/с}.$$

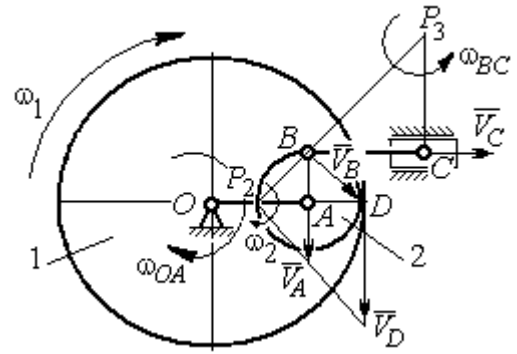


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

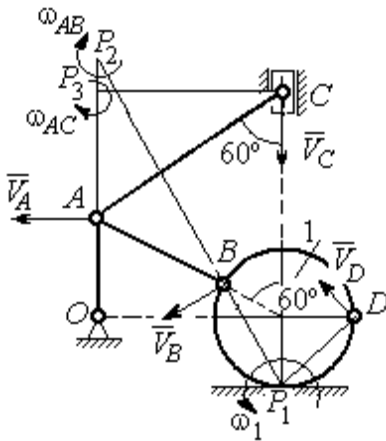


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$$AC = AB + R_1 = 12 \text{ см}; \quad CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10,39 \text{ см}.$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_3} = 0,48 \text{ рад/с}; \quad V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2,89 \text{ см/с}.$$

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0,29 \text{ рад/с}.$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17,32 \text{ см}.$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5,02 \text{ см/с}.$$

$$OA = (AB + R_1) \sin 30^\circ = 6 \text{ см}; \quad \omega_{OA} = \frac{V_A}{AO} = 0,48 \text{ рад/с}.$$

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ см}; \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1,45 \text{ рад/с}.$$

$$DP_1 = R_1 \sqrt{2} = 2,82 \text{ см}; \quad V_D = \omega_1 DP_1 = 4,09 \text{ см/с}.$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ см/с}; \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \tan 60^\circ = 27,71 \text{ см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0,43 \text{ рад/с}; \quad V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; \quad V_B = 10,38 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1,29 \text{ рад/с}.$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau, a_O = 0.$$

$$\bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau = \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_{BC}^\tau$$

$$a_{AO}^n = \omega_{AO}^2 \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{AO}^\tau = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 13,86 \text{ см.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2,56 \text{ см/с}^2; a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 13,31 \text{ см/с}^2; a_{BC}^\tau = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a_{BC}^\tau = -a_{AO}^n \cos 60^\circ + a_{AO}^\tau \cos 30^\circ - a_{BA}^n = 13,63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{|a_{BC}^\tau|}{BC} = 1,7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau.$$

$$a_{DC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot DC = 6,65 \text{ см/с}^2; a_{DC}^\tau = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6,8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{(a_{DC}^n)^2 + (a_{DC}^\tau)^2} = 9,51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с}; P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2,4 \text{ рад/с.}$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ; V_B = 6,93 \text{ см/с.}$$

$$P_3 B = BC \cos 30^\circ = 8,66 \text{ см;}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0,8 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \text{ Найти } a_B.$$

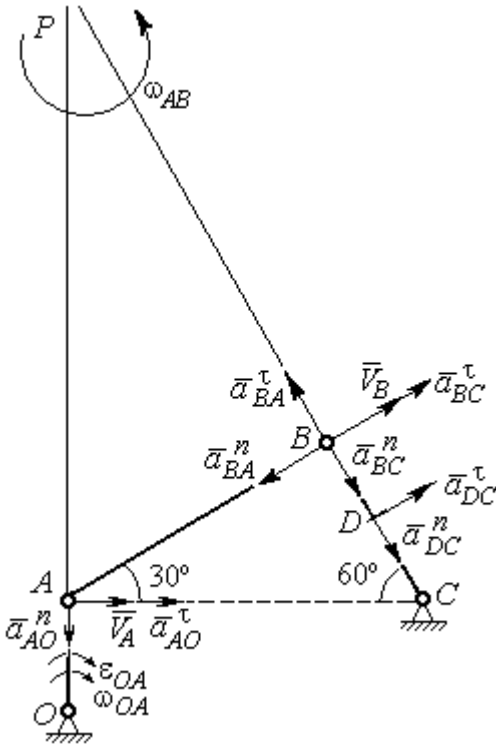


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

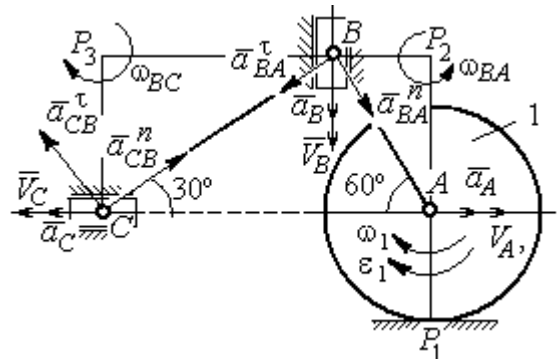


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

Проекция на BA : $a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^n$.

$$a_A = a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ cm/c}^2; \quad AB = BC \operatorname{tg} 30^\circ = 5,77 \text{ cm.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot BA = 33,23 \text{ cm/c}^2; \quad a_B = 43,03 \text{ cm/c}^2.$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau.$$

Проекция на BC : $a_C \cos 60^\circ = a_B \cos 60^\circ - a_{CB}^n$,

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 6,4 \text{ см/с}^2; \quad a_C = a_B - 2a_{CB}^n = 30,23 \text{ см/с}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 11,55 \text{ cm.}$$

Так как $CM_1 \cos 30^\circ = 10 \text{ см} = R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{40\pi}{9} \cos \frac{\pi t}{3}; \quad V_r(1) = 6,98 \text{ cm/c.}$$

$$\omega_e(1) = 0,5 \text{ рад/с}; OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4,23 \text{ см.}$$

$$V_e = \omega_e OM_1; \quad V_e(1) = 2,12 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r \cos 30^\circ = -3,93 \text{ m/c}; V_{My} = -V_r \cos 60^\circ = -3,49 \text{ m/c};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5,26 \text{ cm/c.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau, \quad a_e^n = \omega_e^2 OM_1; \quad a_e^n(1) = 1,06 \text{ cm/c}^2.$$

$$\dot{\omega}_e = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{\omega}_e(1) = -0,91 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_e = |\dot{\omega}_e(1)| = 0,91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_{\rho}^{\tau}(1)=\varepsilon_{\rho} \cdot OM_1 = 3,85 \text{ cm/c}^2.$$

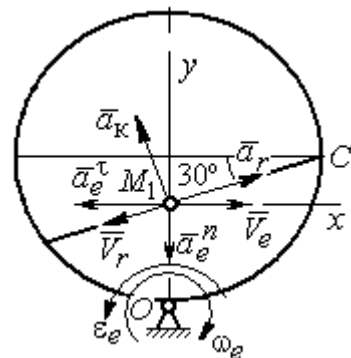


Рис. 7.25. Расчётная схема
к упражнению 3.1

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27} \sin \frac{\pi t}{3}, \quad \dot{V}_r(1) = -12,66; \quad a_r = |\dot{V}_r(1)| = 12,66 \text{ см/с}^2$$

$$a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 6,98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r \cos 30^\circ - a_k \cos 60^\circ = 3,62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r \cos 60^\circ + a_k \cos 30^\circ = 11,31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11,87 \text{ см/с}^2.$$

3.2

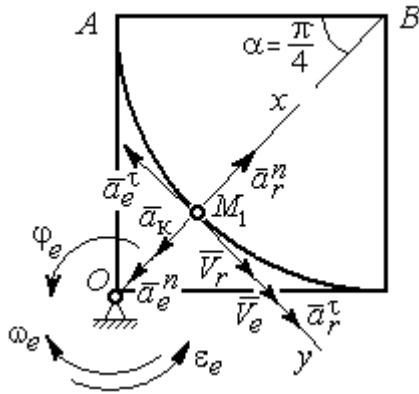


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1 :

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4}; \quad OM_1 = 8,28 \text{ см.}$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t; \quad V_r = |\dot{S}_r(1)| = 31,42 \text{ см/с.}$$

$$\dot{\phi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\phi}_e(1) = -3 \text{ рад/с}, \quad \omega_e = |\dot{\phi}_e(1)| = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24,6 \text{ см/с.}$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot V_{Mx} = V_e + V_r = 56,02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0; \quad V_M = 56,02 \text{ см/с.}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau \cdot a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74,52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2; \quad \epsilon_e = |\dot{\omega}_e|; \quad a_e^\tau(1) = \epsilon_e OM_1 = 16,56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi; \quad a_r^\tau = |\dot{V}_r| = 10\pi = 31,42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49,36 \text{ см/с}^2; \quad a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r|; \quad a_k(1) = 62,84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_k = -88 \text{ см/с}^2; \quad a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14,86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89,24 \text{ см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60^\circ - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30^\circ;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3,4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3,4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1,7t^2 + V_0t.$$

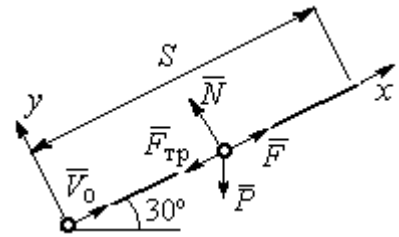


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6,8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3,4 + V_0.$$

$$k = 8,4; \quad V_0 = 1,6 \text{ м/с}.$$

4.2

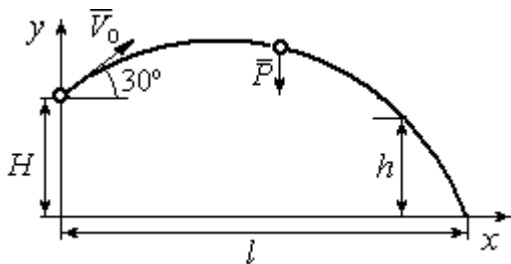


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \quad \dot{x} = V_0\cos 30^\circ; \quad x = V_0t\cos 30^\circ.$$

$$m\ddot{y} = -P; \quad \dot{y} = -gt + V_0\cos 60^\circ;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t\cos 60^\circ + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h :

$$t = 1 \text{ с}; \quad y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3,81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \quad x = l; \quad y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0t_{\text{пад}}\cos 30^\circ; \quad 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0t_{\text{пад}}\cos 60^\circ + H.$$

$$\text{Находим: } t_{\text{пад}} = 1,64 \text{ с}; \quad l = 5,41 \text{ м}.$$

4.3

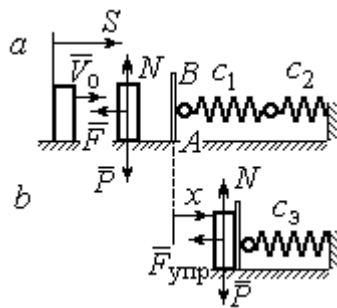


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3:
а – движение груза до начала колебаний; б – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, а):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0$; $S = 0$; $\dot{S} = V_0$.

$$\text{Решение: } S = \frac{mV_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) = 6(1 - e^{-t}) \text{ м.}$$

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0,21 \text{ м/с.}$

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, б):

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} = -c_3 x; \quad c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м.}$$

Начальные условия движения: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 7,75 \text{ рад/с,}$

где константы: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_1}{\omega} = 0,28 \text{ м.}$ Закон движения груза $x = 0,28 \sin 7,75 t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_3 = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}} = P - c_3(\lambda_{\text{ст}} + x) = -c_3 x.$$

Общее решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = 10,33 \text{ рад/с.}$$

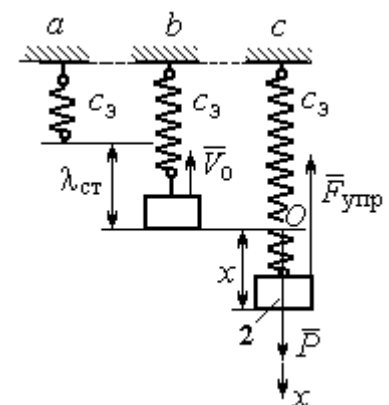


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4:
а – нерастянутая пружина;
б – положение статического равновесия; в – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0,39$ м.

Закон движения груза: $x = 0,39 \sin 10,33 t$.

Амплитуда $A = 0,39$ м, частота $\omega = 10,33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)]$.

Уравнение движения человека,двигающегося

вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\frac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \leq 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \leq 2gr$, или

$$V_0^2 + 2g[l \sin \varphi + r(1 - \cos \varphi)] \leq 2gr. \text{ Откуда } r \geq \frac{V_0^2 + 2gl \sin \varphi}{2g \cos \varphi}.$$

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg[R + R \cos 60^\circ - a \cos 30^\circ].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

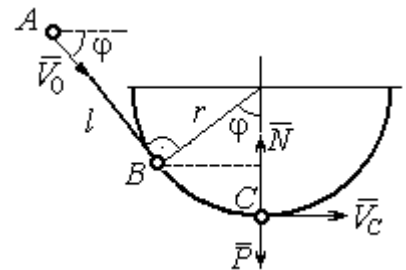


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

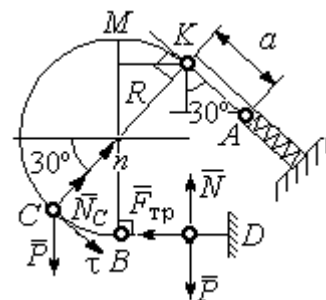


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: $s = 5,39$ м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60^\circ.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство

$$N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60^\circ = \frac{1}{R} \left[mV_B^2 - 2mgR(1 - \cos 60^\circ) \right] + mg\cos 60^\circ, \text{ где кинетическая}$$

энергия шарика в точке B : $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR \left[(1 + \cos 60^\circ) - \frac{a}{R} \cos 30^\circ \right]$. Получим:

$N_C = 18,71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

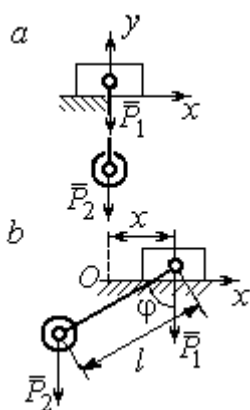


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:

a – начальное положение системы;
 b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, $x_0 = 0$ (см. рис.7.33);
 x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения гру-

за 2:
$$x = \frac{m_2l}{m_1 + m_2} \sin\varphi.$$

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно

оси z : $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2} \omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно

оси z : $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 gr$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 gr.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \frac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

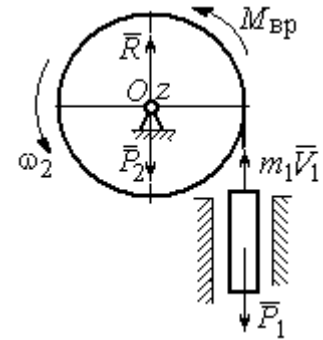


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$.

Энергия вращательного движения блока 2:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega_2^2, \text{ где осевой момент инерции блока:}$$

$$J_O = \frac{m_2 r^2}{2}, \text{ угловая скорость блока } \omega_2 = \frac{V_1}{r}. \text{ Кинетическая энергия катка 3:}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_3^2, \text{ где момент инерции катка относительно оси, проходя-$$

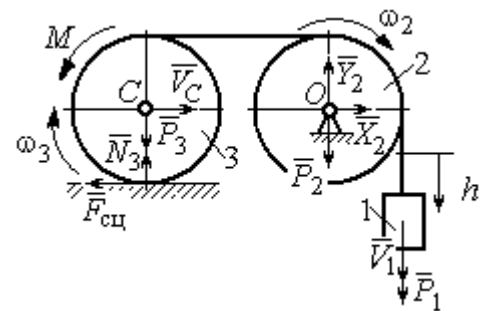


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая

скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа внешних сил на перемещении h : $\sum A(F_k) = P_1 h - M \frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3) \frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h.$$

Скорость груза на высоте h : $V_1 = 4 \sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r} \right) h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

5.4

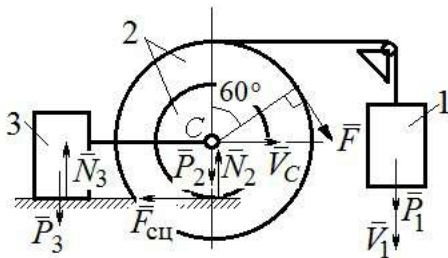


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1 . Скорость центра масс катка V_C .

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$,

$J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g} V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1:

$$T_1 = \frac{9P}{2g} V_C^2.$$

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы):

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{17P}{2g} V_C^2. \text{ Производная } \frac{dT}{dt} = \frac{17P}{g} V_C \frac{dV_C}{dt} = \frac{17}{g} V_C a_C.$$

Мощности сил $\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_{\text{сц}}, \vec{P}_3, \vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = FV_C \cos 60^\circ + FR\omega_2. \quad \text{Мощность силы } \vec{P}_1$$

$$N(\vec{P}_1) = P_1 V_1. \text{ Суммарная мощность внешних сил: } \sum N(F^e) = 7PV_C.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии си-

$$\text{стемы: } \frac{17P}{g} V_C a_C = 7PV_C, \text{ откуда } a_C = \frac{7}{17} g \text{ м/с}^2.$$

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц}1}, \quad J_{1O} \varepsilon_1 = F_{\text{сц}1} r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц}2} + F \cos 30^\circ;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = F_{\text{сц}2} 3r - Q' r.$$

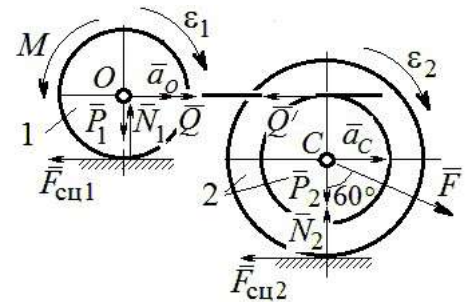


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц}1}, \vec{F}_{\text{сц}2}$ – силы сцепления

катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \frac{m_1 r^2}{2}$,

$$J_{2C} = m_2 i_2^2. \text{ Подставляя кинематические соотношения } \varepsilon_2 = \frac{a_C}{3r}; \quad a_O = \frac{4}{3} a_C;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4a_C}{3r}, \text{ с учётом данных задачи, получим систему уравнений:}$$

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц1}}; \quad \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц1}} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц2}} + P\sqrt{3}; \quad \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц2}} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \frac{3(3\sqrt{3}-16)g}{46} \approx -0,7g$. Каток

движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2,6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. До-

пустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

Уравнения движения тел:

$$m_3 a_3 = F - Q_3, \quad m_2 a_C = Q'_3 + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_3 r - Q_2 r, \quad m_1 a_1 = Q'_1 - P_1.$$

С учётом, что $|\vec{Q}_3| = |\vec{Q}'_3|$, $|\vec{Q}_1| = |\vec{Q}'_1|$ и

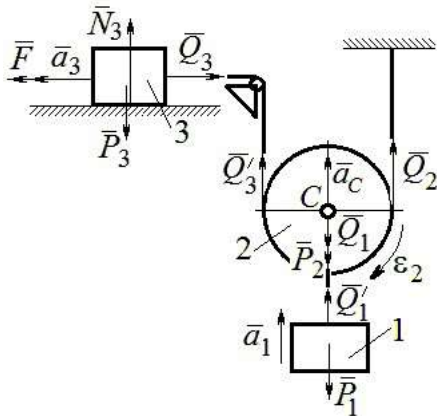


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

$$a_C = a_1, \quad a_3 = 2a_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}, \quad J_{2C} = \frac{m_2 r^2}{2}, \quad \text{под-}$$

ставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2,5mg - Q_3; \quad ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2; \quad m_1 a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \frac{2}{17}g \approx 0,12g$; $Q_3 = 2,26mg$; $Q_2 = 2,15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями.

Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1 a_1 = P_1 \cos 30^\circ - Q_1; \quad m_3 a_3 = Q_3;$$

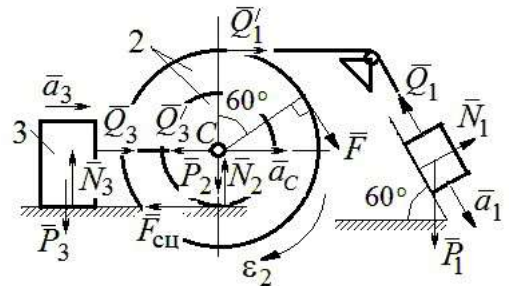


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q'_1 - Q'_3 - F_{\text{сц}} + F \cos 60^\circ; J_{2C} \varepsilon_2 = Q'_1 R + FR + F_{\text{сц}} r, J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R+r}$, $a_C = \frac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q'_1 = Q_1$ и $Q'_3 = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1; \quad \frac{2}{3} ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2} mg; \quad 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

$$\text{Находим } a_1 = \frac{3}{46} (5 + 3\sqrt{3})g \approx 0,44g; \quad Q_1 = 0,21mg; \quad Q_3 = 0,44mg.$$

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести — $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$. Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, а). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0, \quad N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, б, в). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил — для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 — на вертикальную:

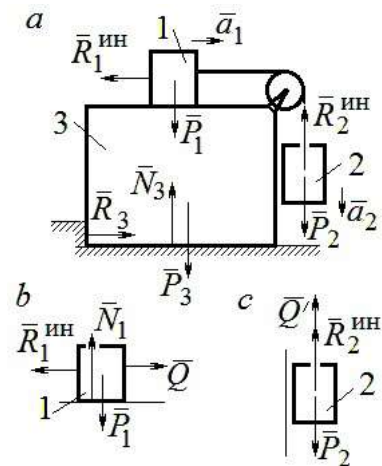


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0; P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0,5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2,5mg$.

6.2

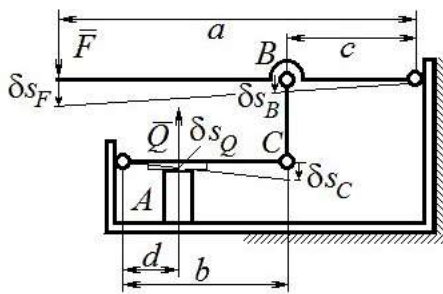


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A(\vec{F}) + \delta A(\vec{Q}) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\frac{\delta s_F}{\delta s_B} = \frac{a}{c}$, $\frac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \frac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C , причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \frac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \frac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2 . Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(\vec{P}_3) + \delta A(\vec{P}_4) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

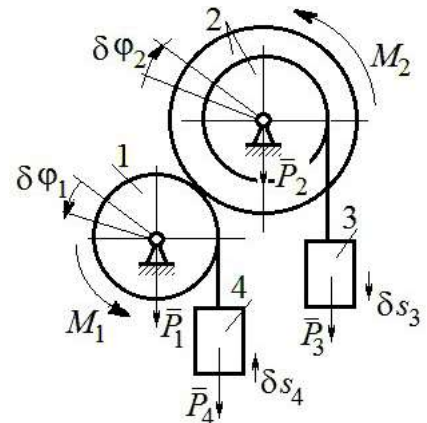


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 + M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta \varphi_1, \delta \varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta \varphi_2 r$, $\delta \varphi_1 = 3 \delta \varphi_2$, $\delta s_4 = 3r \delta \varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{вр}$ (рис. 7.43).

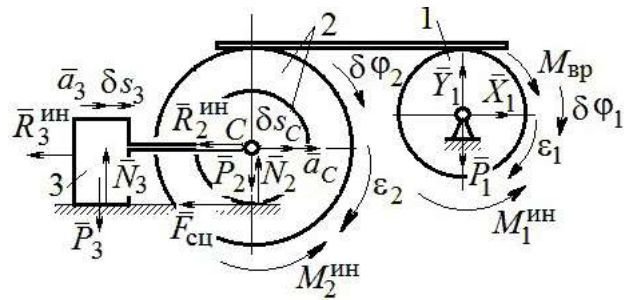


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta \varphi_1, \epsilon_1$ и $\delta \varphi_2, \epsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3, a_C = a_3, \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r}, \epsilon_2 = \frac{a_3}{r}, \delta \varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r}, \epsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = m a_3$;

$$R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2m a_3; M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \epsilon_2 = 4,5 m r a_3; M_1^{\text{ин}} = \frac{m_1 R_1^2}{2} \epsilon_1 = 1,5 m r a_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{вр} \delta \varphi_1 = (m g \sin \omega t) 3 \delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) &= -R_3^{\text{ин}} \delta s_3 - R_2^{\text{ин}} \delta s_C - M_2^{\text{ин}} \delta \varphi_2 - M_1^{\text{ин}} \delta \varphi_1 = \\ &= -m a_3 \delta s_3 - 2m a_3 \delta s_3 - 4,5 m a_3 \delta s_3 - 1,5 m a_3 3 \delta s_3 = -12 m a_3 \delta s_3. \end{aligned}$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g \sin \omega t - 12a_3) \delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0,25g \sin \omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0,25g \sin \omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза:

$$s_3 = \frac{0,25g}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

6.5

Система с идеальными связями. Активные

силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F \delta s_1 + P_3 \delta s_3 - P_4 \delta s_4 \text{ и сил инерции}$$

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}} \delta s_1 - R_3^{\text{ин}} \delta s_3 - R_4^{\text{ин}} \delta s_4 - M_2^{\text{ин}} \delta \varphi_2,$$

$$\text{где модули сил инерции: } R_1^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_1, R_3^{\text{ин}} = \frac{P_3}{g} a_3,$$

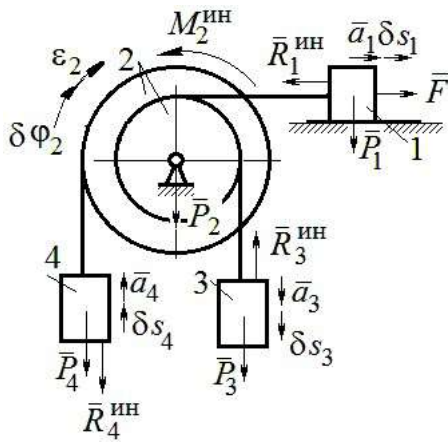


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

$$R_4^{\text{ин}} = \frac{P_1}{g} a_4, M_2^{\text{ин}} = \frac{P_2}{g} i_2^2 \varepsilon_2.$$

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$,

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r}, \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}. \text{ Общее уравнение динамики:}$$

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) &= P(t+1) \delta s_1 + P \delta s_1 - 2P \delta s_1 - \\ &- \left(\frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{P}{g} a_1 \delta s_1 + \frac{2P}{g} 2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g} 2r^2 \frac{a_1}{r} \frac{\delta s_1}{r} \right) = P \left(t - \frac{14a_1}{g} \right) \delta s_1 = 0. \end{aligned}$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \frac{1}{14} g t$, или $\ddot{x}_3 = \frac{1}{14} g t$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными

условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \frac{1}{84} g t^3 \approx 0,012 g t^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0 . Обобщённая скорость $\dot{x}$.

Кинетическая энергия катка:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2, \text{ где } \omega_1, V_C - \text{угловая}$$

скорость катка и скорость его центра масс, $V_C = \dot{x}$, $\omega_1 = \frac{V_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC} = \frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2 = 2V_C = 2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T = T_1 + T_2 = \frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x , дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum \delta A(F_k) = P_1\delta x - F_{\text{упр}}\delta x + (P_2 + F)\delta s_2 - M\delta\phi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2 = 2\delta x$, $\delta\phi_1 = \frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}} = cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum \delta A(F_k) = (3P - cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x = 3P - cx$.

$$\text{Уравнение Лагранжа } \frac{7P}{g}\ddot{x} = 3P - cx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{4g}{7r}x = \frac{3g}{7}.$$

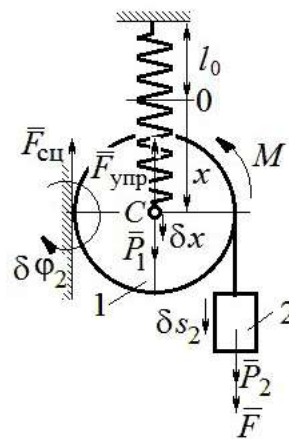


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями):

$$x = \frac{3}{4}r(1 - \cos\omega t). \text{ Закон движения груза: } s_2 = 2x = \frac{3}{2}r(1 - \cos\omega t).$$

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1 , x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые

от неподвижных центров блоков B и D (рис.

7.46, a). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g}, \quad T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3 r^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r} \right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, a): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

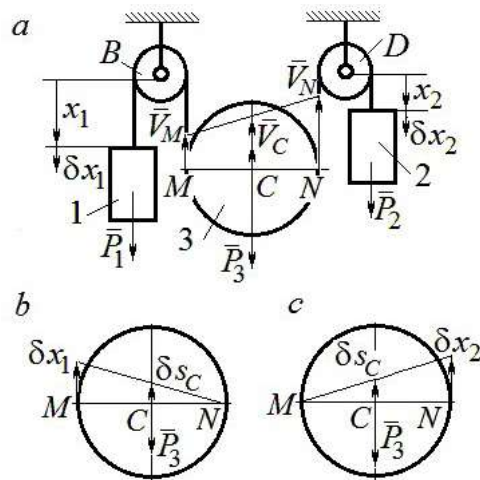


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7:

a – кинематика механизма;

b, c – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 , оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, b):

$$\sum \delta A(F_k) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_1.$$

$$\text{Обобщённая сила } Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2 , так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, a, c):

$$\sum \delta A(F_k) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2.$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3, \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \quad \text{или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g.$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31}g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31}g$. Ускорение центра масс блока

$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31}g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы.

Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

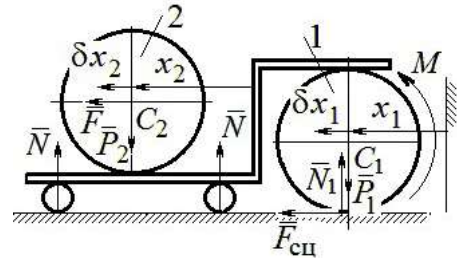


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 (\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 ($\delta x_1 \neq 0$), оставляя другую координату x_2 неизменной ($\delta x_2 = 0$). Работу совершают момент M и сила $\bar{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_k) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4P \delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_k) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2 , равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g} \left(\frac{11}{2} \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 \right) = 4P, \quad \frac{P}{g} (2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1) = P, \text{ или}$$
$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g, \quad 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси

x_1 . Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2. – СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х томах. – М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Ляицев, С. А. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.

Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

**Екатеринбург
2017**

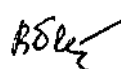


Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов*

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017

©Уральский государственный горный
университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	4
1.1. Основные виды связей и их реакции.....	4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары.....	5
1.3. Условия равновесия систем сил.....	7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.....	8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.....	17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки.....	26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.....	29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.....	32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении.....	46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.....	57
3.1. Основные понятия сложного движения точки.....	57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении.....	60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ.....	73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки.....	73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ...	73
4.3. Колебания материальной точки.....	80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки.....	84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки.	95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы.....	103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы.....	104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии.....	114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.....	124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики.....	124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики.....	126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода.....	136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа.....	137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы.....	145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей.

Гибкая связь. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

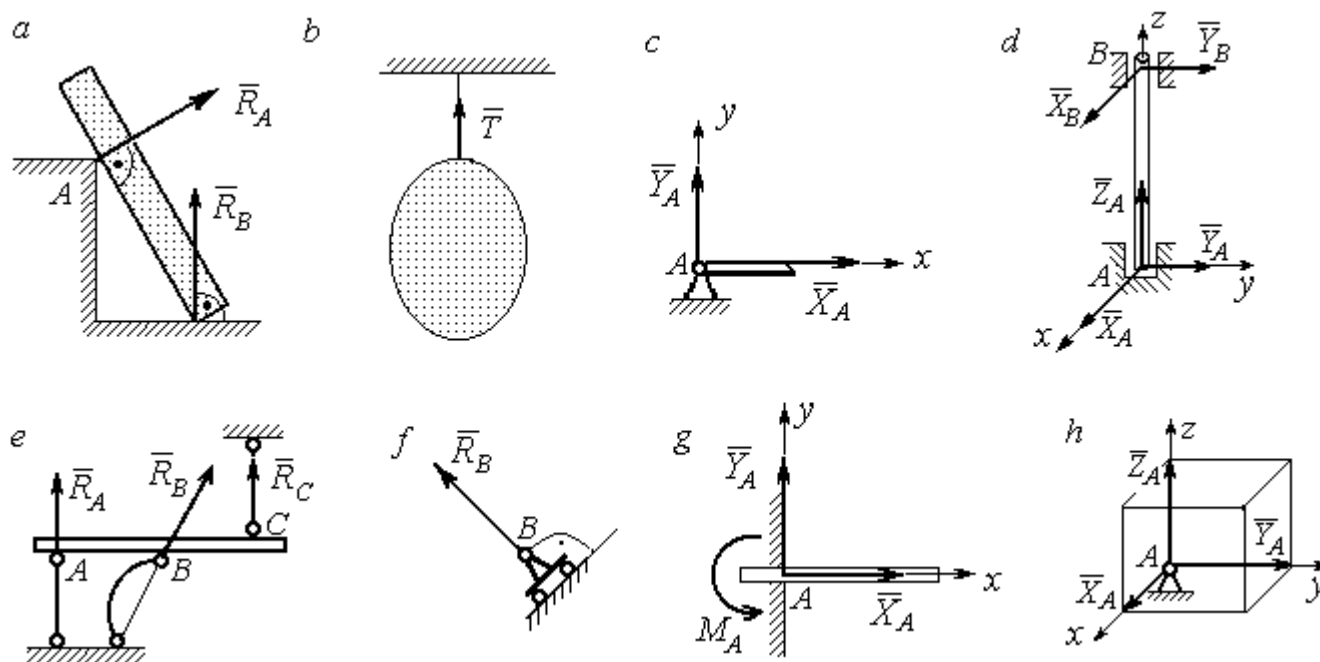


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:

- a* – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, с). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, d) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, e). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, f) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, g) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A . При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы F относительно центра O $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра O , называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние h от центра O до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, a).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

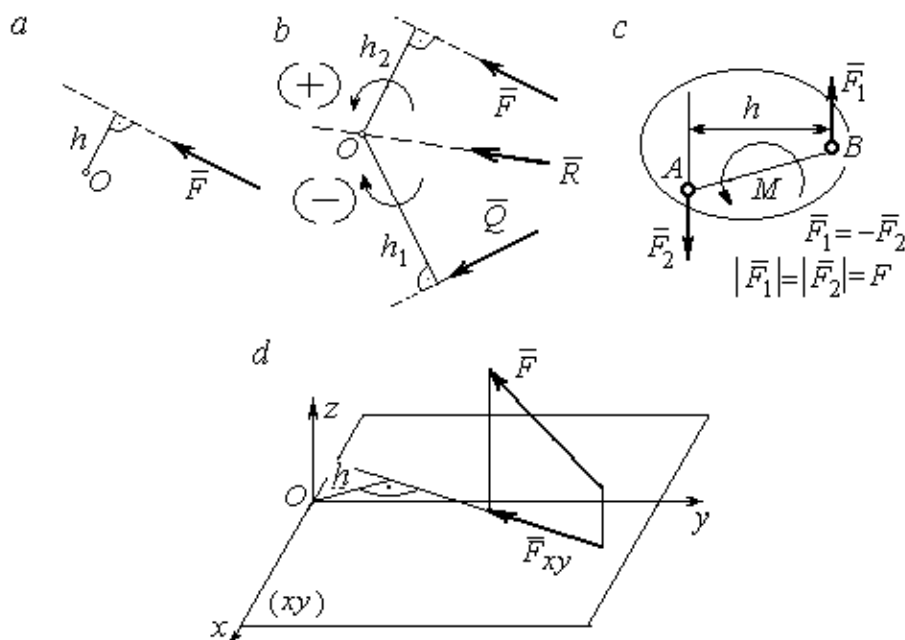


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
 a, b – момент силы относительно центра; c – момент пары сил;
 d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, b показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, c), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары**, называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, c).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси z : $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $xу$, перпендикулярную оси z , h – плечо проекции F_{xy} относительно центра O – точки пересечения оси z и плоскости xOy .

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A .

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k)=0, \sum M_y(\vec{F}_k)=0, \sum M_z(\vec{F}_k)=0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z ; $M_x(\vec{F}_k), M_y(\vec{F}_k), M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними**, в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

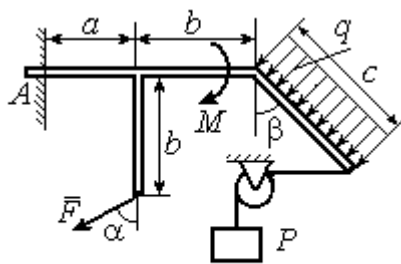
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

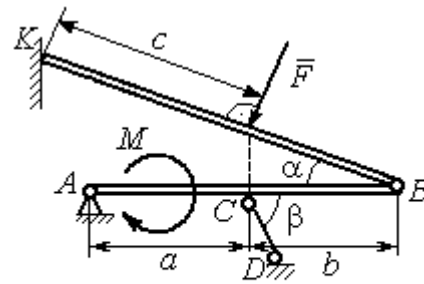
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

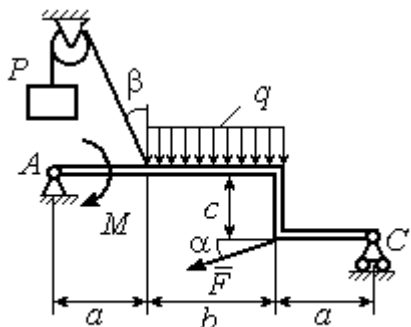
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

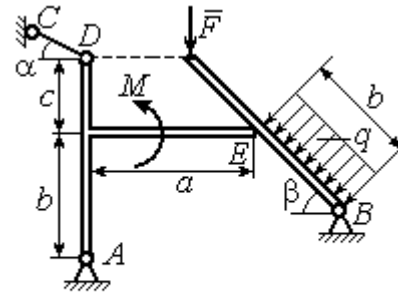
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

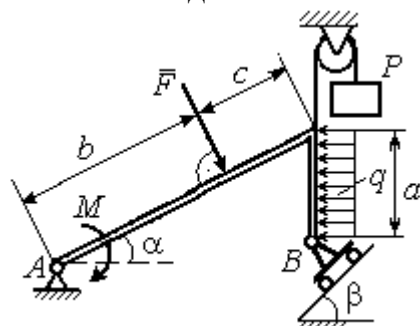
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B , реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

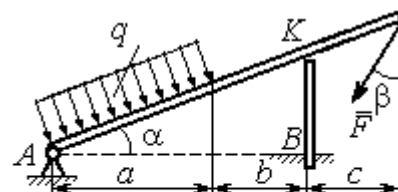
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакции шарниров A и B

Задача 2

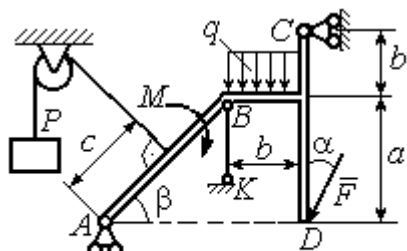


Найти реакцию шарнира A , реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

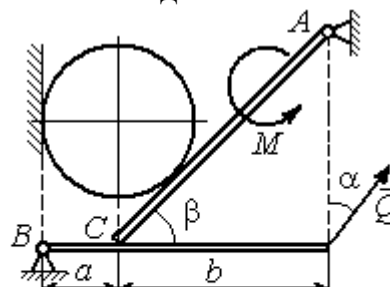
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

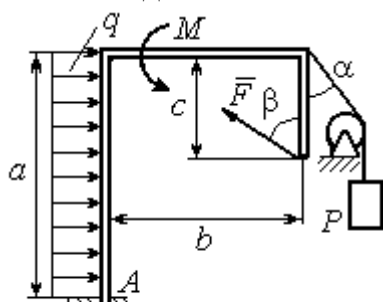
Задача 2



Вес шара P . Найти реакцию шарниров A, B , давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравнивающую силу Q

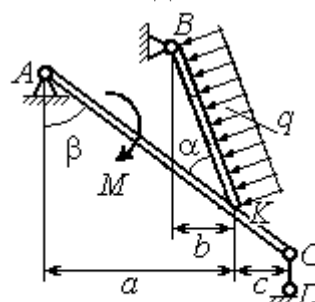
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

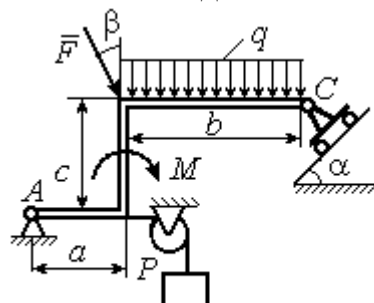
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B , реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

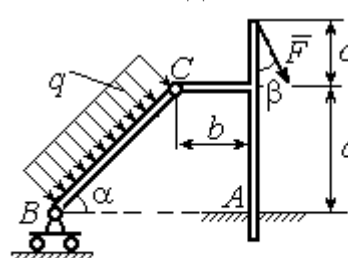
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

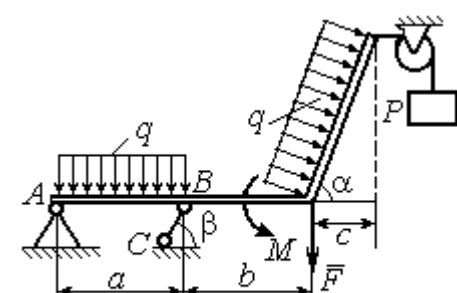


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

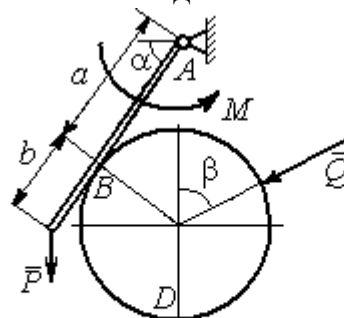
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

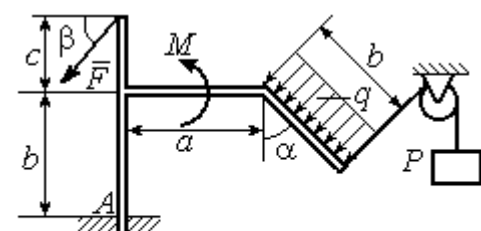
Задача 2



Найти реакцию шарнира A , давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

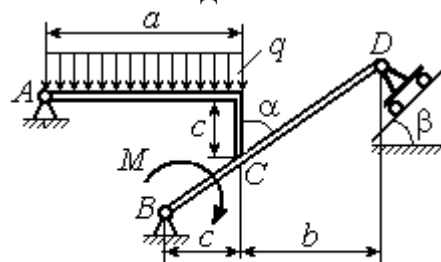
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

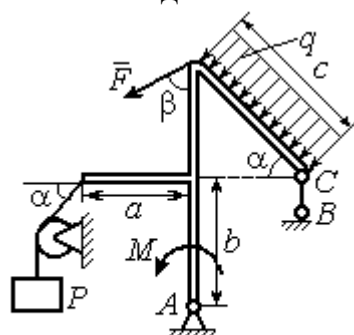
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

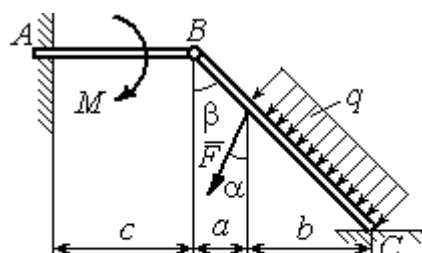
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



Найти реакцию жесткой заделки в точке A , реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

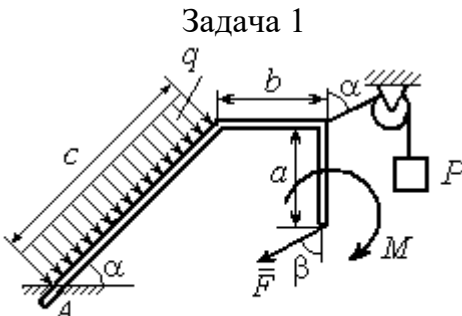
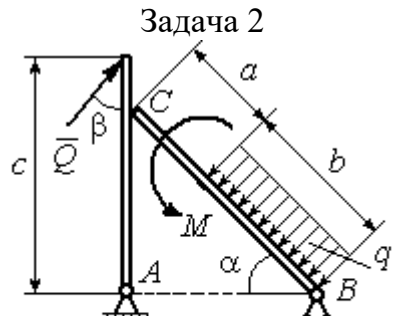
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1  Найти реакцию жесткой заделки в точке А	Задача 2  Найти реакцию шарниров А, В, реакцию опоры в точке С и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

**Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил.
Равновесие системы тел.**

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P , кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F , кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q , кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M , кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α , град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β , град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a , м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b , м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c , м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F , кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q , кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M , кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α , град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β , град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a , м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b , м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c , м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1. Рама ACE (рис. 1.7) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK . На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке AB . В точке E под прямым углом к участку балки CE прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK , если $a = 2$ м.

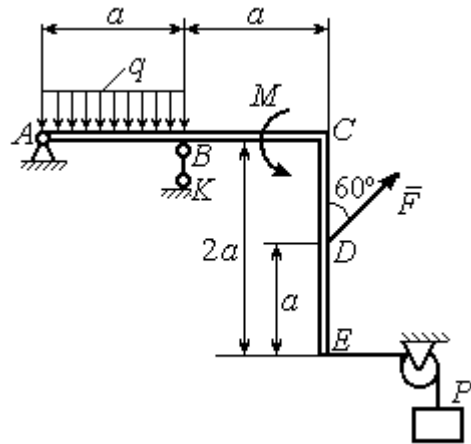


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат xAy , например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира A двумя

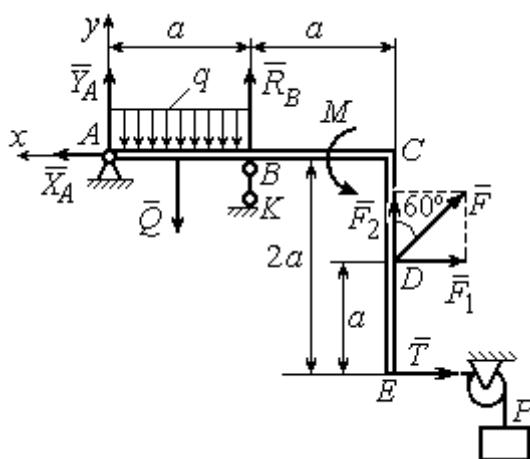


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

её составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK . Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза P на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси x , y , и моменты сил относительно центра A , уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F \cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \frac{a}{2} + R_B a + M + F \cos 60^\circ \cdot 2a + F \cos 30^\circ \cdot a + T 2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра A использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F \cos 30^\circ$, $F_2 = F \cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B :

$$X_A - 28,66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121,32 = 0.$$

Решая систему, найдем $X_A = 28,66$ Н, $Y_A = 59,66$ Н, $R_B = -60,66$ Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28,66^2 + 59,66^2} = 66,18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка $ABLC$ с вертикальной частью AB и горизонтальной переключиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной переключине CL , а в точке E закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил

с моментом $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E , если $a = 2 \text{ м}$.

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, a). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\bar{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL , направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a = 4$

кН. Кроме силы $\bar{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция

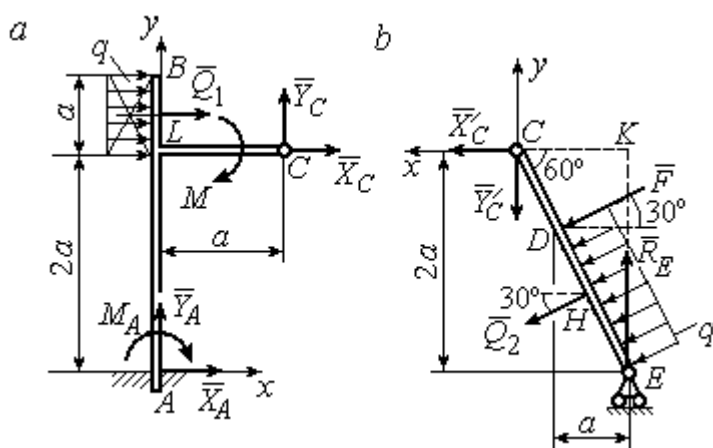


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
 a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
 b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

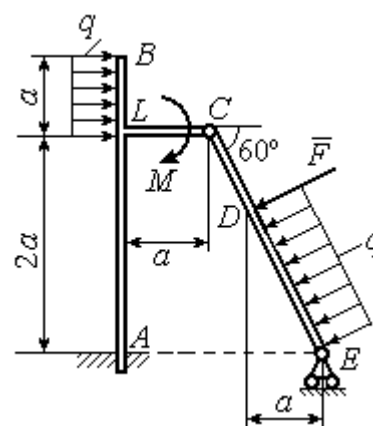


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

жёсткой заделки в точке A , имеющая своими составляющими силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A , а также реакция шарнира C , разложенная на составляющие $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ (см. рис. 1.10, a). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy , как показано на рис. 1.10, a , и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки EC . Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка ED , направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8 \text{ кН}$. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке E и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира C . Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, a , b). Действующие на балку EC силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат xCy , как показано на рис. 1.10, b , и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку C . Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F \cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \quad \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \frac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a \tan 30^\circ$. Заменяя в

уравнениях величины X'_C на X_C , а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0, \quad Y_A + Y_C = 0, \quad -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15,59 = 0, \quad -Y_C + R_E - 9 = 0, \quad 2,31R_E - 27,14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11,59 \text{ кН}, \quad Y_A = -2,76 \text{ кН}, \quad M_A = 42,87 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$X_C = -15,59 \text{ кН}, \quad Y_C = 2,76 \text{ кН}, \quad R_E = 11,76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки A и шарнира C :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11,91 \text{ кН}, \quad R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15,83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q . Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравнивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M . Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

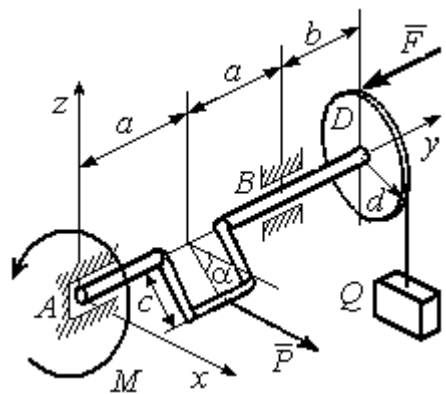
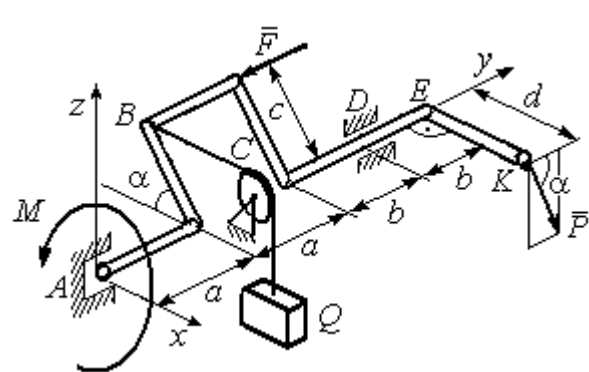
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравнивающего груза Q	 Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоятка вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

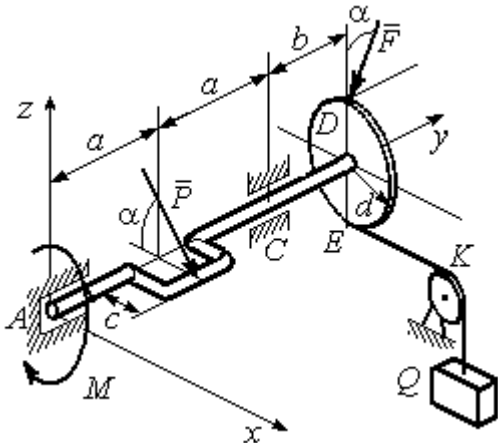
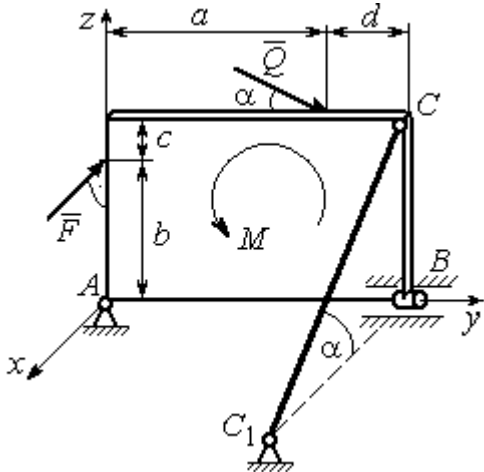
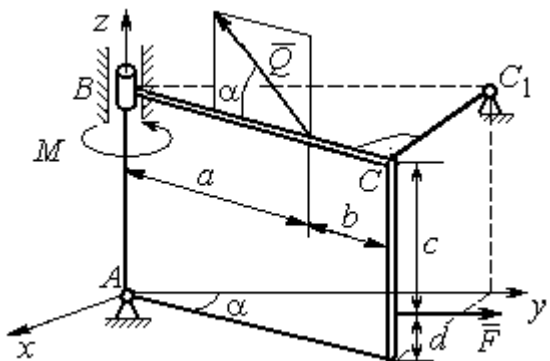
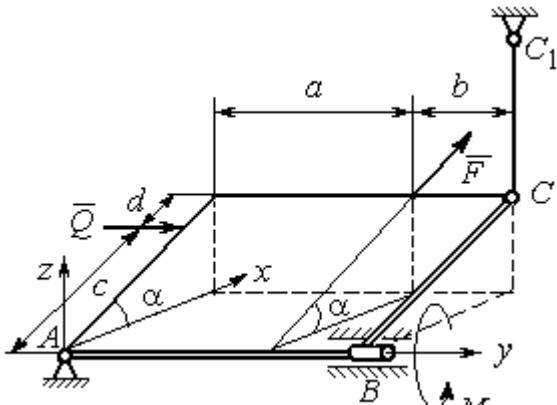
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	 Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

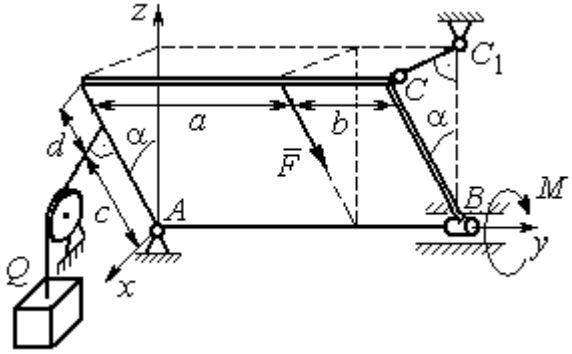
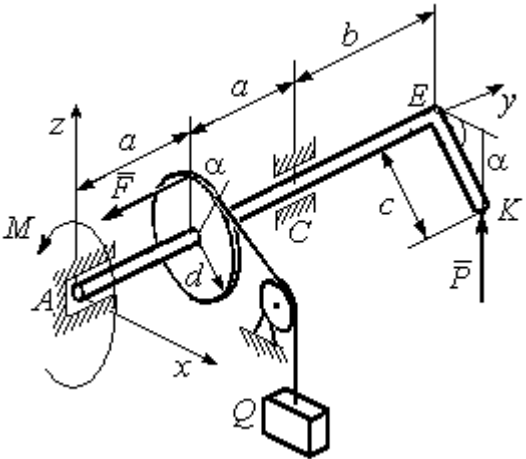
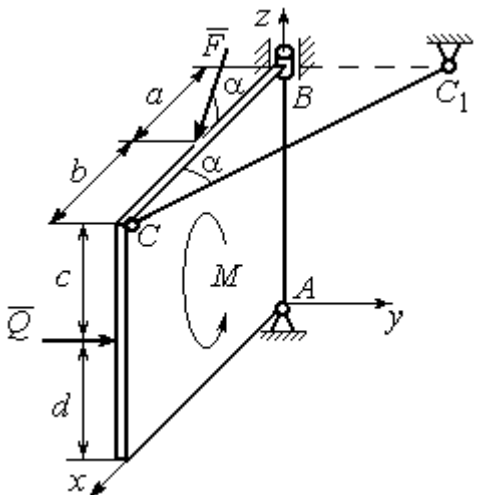
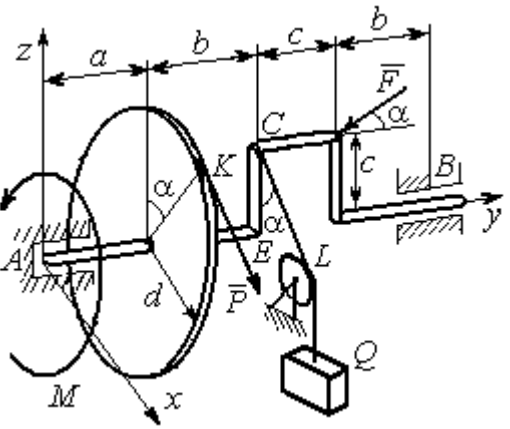
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится в плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{P}$ параллельна оси Az; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравнивающего груза Q
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	 Сила $\vec{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy; отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K. Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравнивающего момента M

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.

Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

**Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил**

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F , кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q , кН	—	12	—	12	8	12	10	—	10	12
M , кН·м	12	—	10	8	12	6	8	6	8	—
α , град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a , м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b , м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c , м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d , м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P , кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F , кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q , кН	—	14	—	10	10	12	14	—	12	14
M , кН·м	10	—	12	12	12	8	10	10	10	—
α , град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a , м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b , м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c , м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d , м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P , кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F , кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q , кН	—	10	—	12	14	10	16	—	12	6
M , кН·м	12	—	16	14	8	10	8	12	10	—
α , град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a , м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b , м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c , м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d , м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике C и подшипнике K . Вал имеет шкив I радиуса R и шкив II радиуса r , перпендикулярные оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx . Нить, удерживающая груз Q , сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом M , закручивающая вал

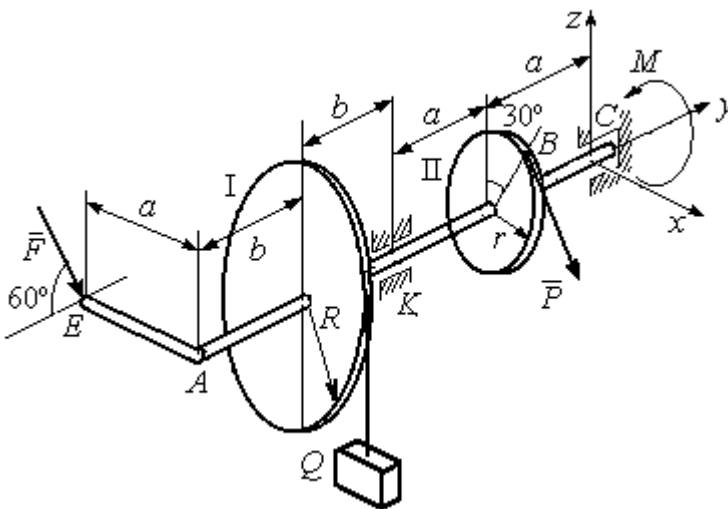


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

вокруг оси Cy . Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной zCy , и составляет угол 60° с направлением оси Cy . Сила $\vec{P}$ приложена в точке B шкива II, определяемой центральным углом 30° , и направлена по касательной. Определить величину уравнивающего момента M и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0,6$ м, $r = 0,3$ м, $a = 0,8$ м, $b = 0,4$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q , подпятник C и подшипник K .

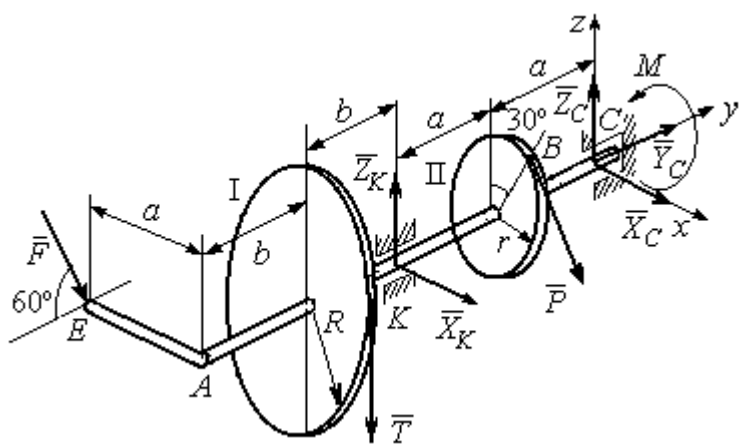


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника C раскладываем на три со-

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника K лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K$, $\vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки K и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M) \propto 0$, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

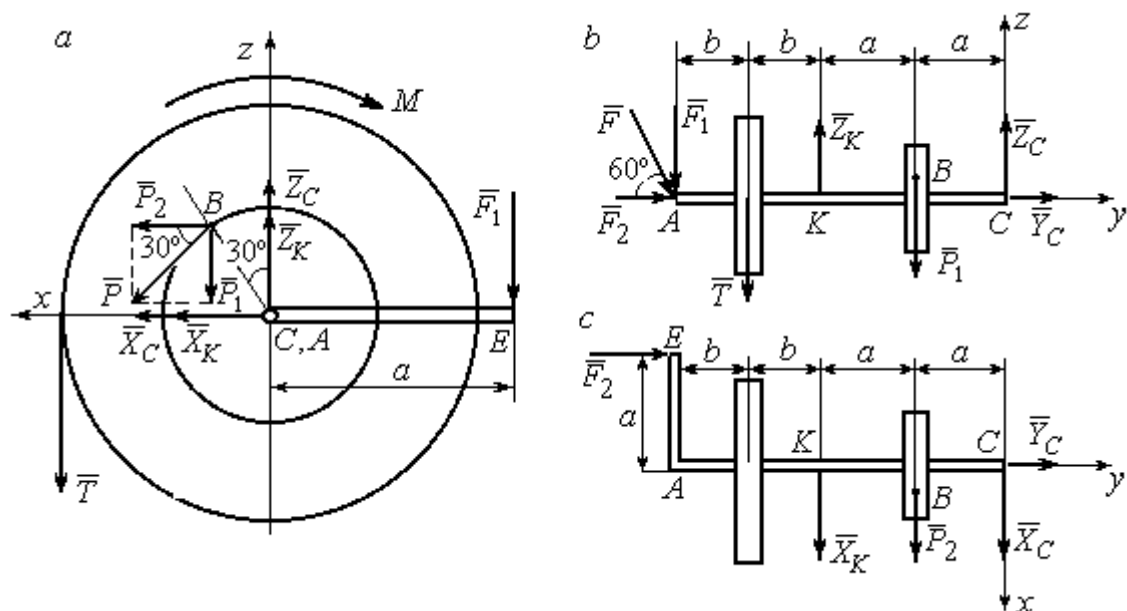


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

- a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y ;
- b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x ;
- c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z .

На рис. 1.16, *a* показаны проекции всех сил на плоскость zCx . Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки C , получим значения моментов исходных сил относительно оси y .

Для вычисления моментов сил относительно оси x достаточно найти моменты проекций сил на плоскость zCy относительно точки C (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость xCy относительно точки C , получим значения моментов сил относительно оси z .

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= P_2 + X_K + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0, \\ \sum F_{kz} &= -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) &= P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_k) &= -F_1 a + TR + Pr - M = 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_k) &= P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.\end{aligned}$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P \cos 60^\circ = 0,5P, \quad P_2 = P \cos 30^\circ = 0,87P,$$

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 0,87F, \quad F_2 = F \cos 60^\circ = 0,5F \quad (\text{см. рис. 1.16 } a, b),$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}0,87 \cdot 4 + X_K + X_C &= 0, \quad 2 \cdot 0,5 + Y_C = 0, \quad -4 \cdot 0,5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0,87 = 0, \\ 0,5 \cdot 4 \cdot 0,8 - 1,6Z_K - 3 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 0,4) &+ 2 \cdot 0,87(2 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,4) = 0, \\ -0,87 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 - M &= 0, \quad 0,87 \cdot 4 \cdot 0,8 + 1,6 \cdot X_K - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0.\end{aligned}$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2,24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6,39$ кН, $X_K = -1,24$ кН, $Z_K = 0,35$ кН, $M = 2,3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6,84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1,29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy . В точке A плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y

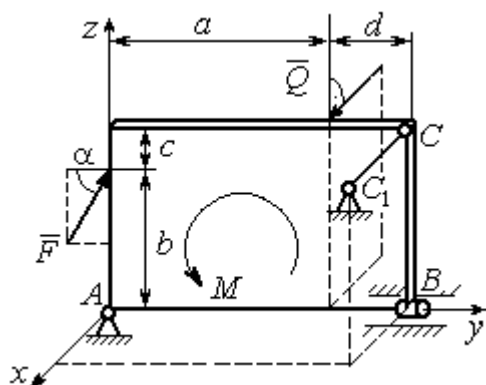


Рис. 1.17. Равновесие плиты

опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1 , прикрепленного шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

На плиту действует сила $\bar{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно

её плоскости, и сила $\bar{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M . Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: $P = 1$ кН, $Q = 500$ Н, $F = 400$ Н, $M = 300$ Н·м, $\alpha = 35^\circ$, $a = 2$ м, $b = 1,5$ м, $c = 0,2$ м, $d = 0,4$ м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$,

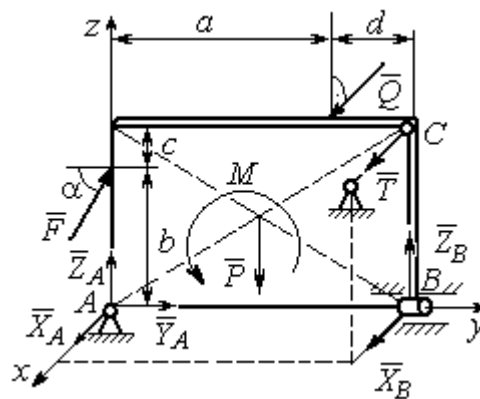


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

направленные вдоль координатных осей x , z . Реакция стержня $\bar{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + F \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0, Z_A + F \sin \alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, -F \cos \alpha \cdot b - P \cdot 0,5(a + d) + Z_B(a + d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0, Q \cdot (b + c) + T \cdot (b + c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0, -Q \cdot a - T \cdot (a + d) - X_B \cdot (a + d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0, Y_A + 400 \cdot 0,82 = 0, Z_A + 400 \cdot 0,57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0,82 \cdot 1,5 - 1000 \cdot 0,5 \cdot 2,4 + Z_B \cdot 2,4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1,7 + T \cdot 1,7 = 0, -500 \cdot 2 - T \cdot 2,4 - X_B \cdot 2,4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500 \text{ Н}, X_B = 83,33 \text{ Н}, Z_B = 580 \text{ Н},$$

$$X_A = -83,33 \text{ Н}, Y_A = -328 \text{ Н}, Z_A = 192 \text{ Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389,09 \text{ Н},$$

цилиндрического шарнира B: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585,95 \text{ Н}.$

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $OM = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O , принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки:

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется

нормальным ускорением точки и вычисляется по формуле: $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, где ρ –

радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

$\dot{\varphi}$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела** (в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной**, или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M ; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A ; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A , модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M .

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b, c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB , соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

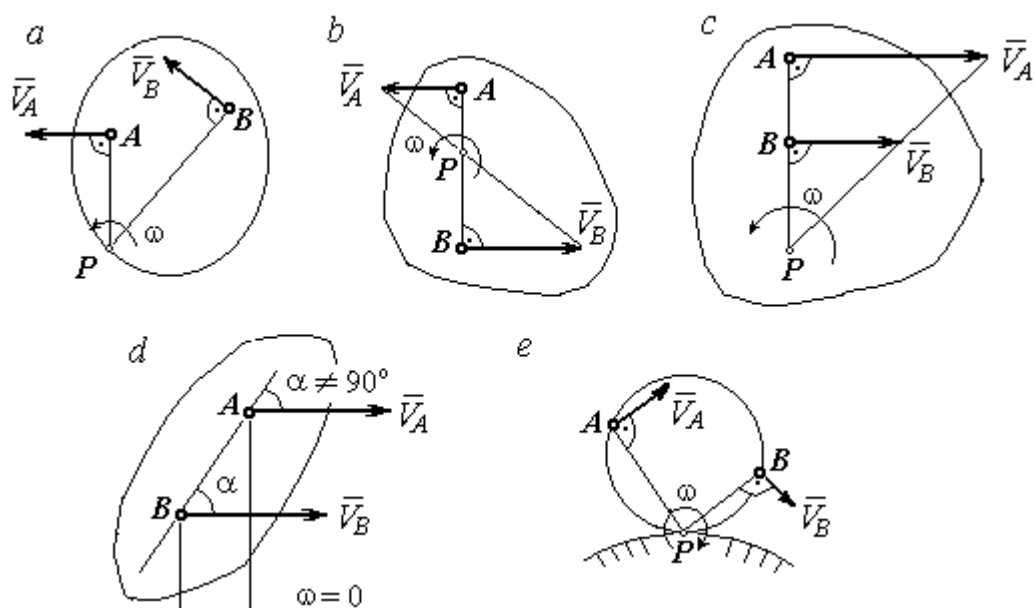


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, e).

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{MA}^{\tau}$, $\vec{a}_{MA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A .

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A . Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{MA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, a), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, b). Численно величины касательного и

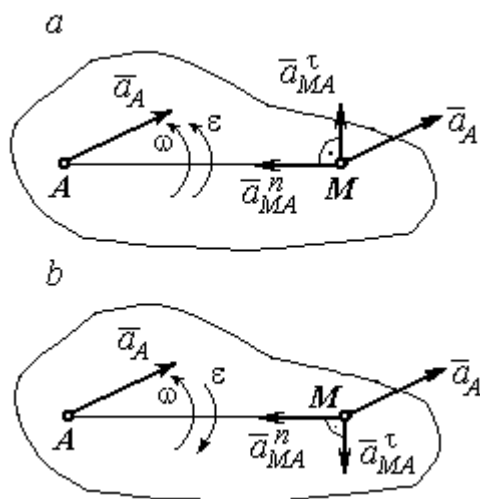


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:

a – ускоренное движение;
 b – замедленное движение

нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM,$$

где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M , то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

$$\vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n,$$

где $\vec{a}_M^\tau$, $\vec{a}_M^n$, $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

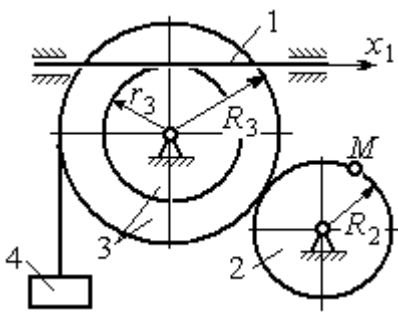
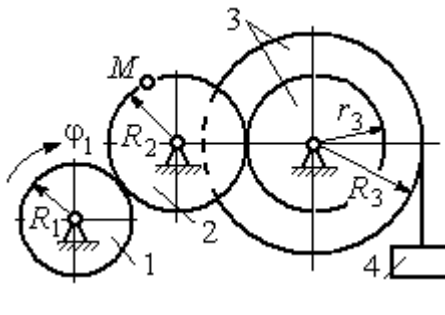
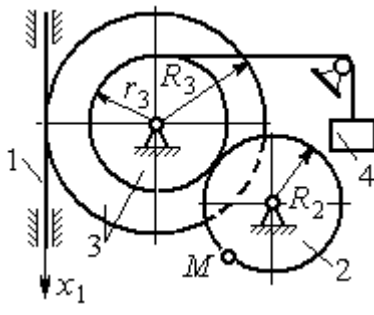
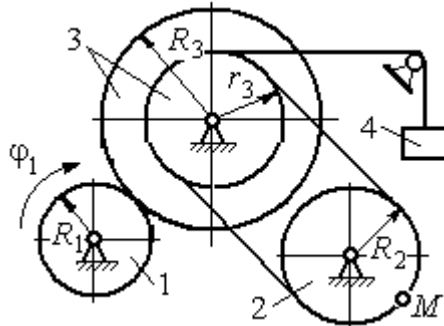
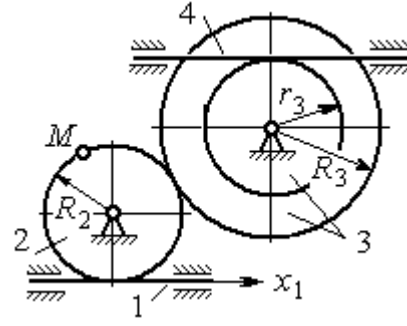
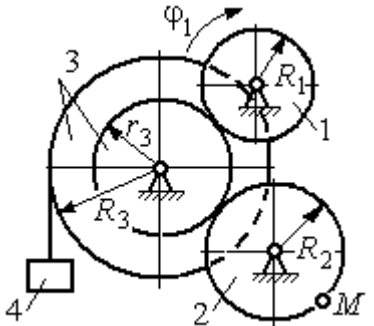
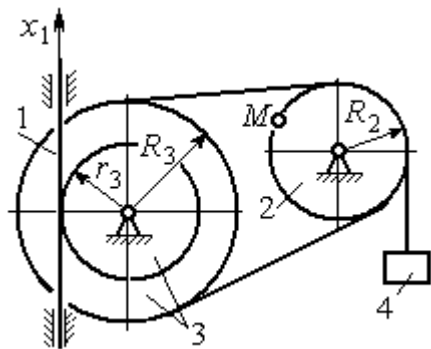
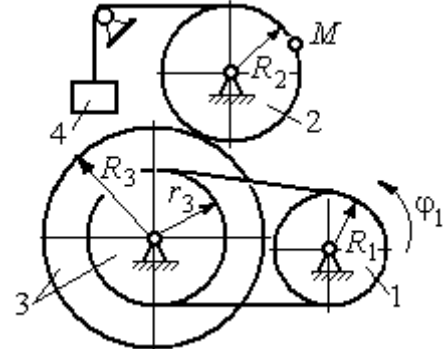
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		
Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28	
		

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.

Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

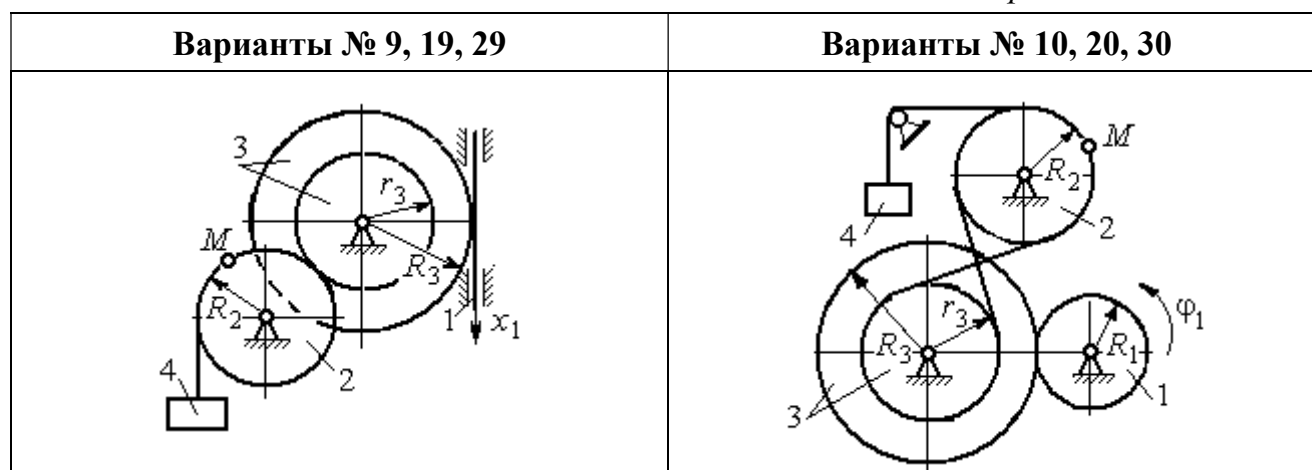


Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела.
Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
1	—	40	45	35	$x_1(t) = (3t - 1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	—	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	—	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	—	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	—	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	—	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	—	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	r_3 , см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1 , с
15	—	20	30	20	$x_1(t) = 3t^2 - \cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \cos(\pi t/2)$	1
17	—	20	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	1
19	—	22	50	18	$x_1(t) = t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	4
21	—	20	40	20	$x_1(t) = t + (3t - 4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 12 \cos(\pi t/6)$	3
23	—	45	60	40	$x_1(t) = 4t^2 + \sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + 4 \cos(\pi t/2)$	2
25	—	15	35	25	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t) = 2t^3 + \sin(\pi t/2)$	1
27	—	15	35	15	$x_1(t) = 2 \sin(\pi t/2) - \cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
29	—	35	50	10	$x_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, а) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на момент времени t_1 , а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2 , φ_3 , а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4 .

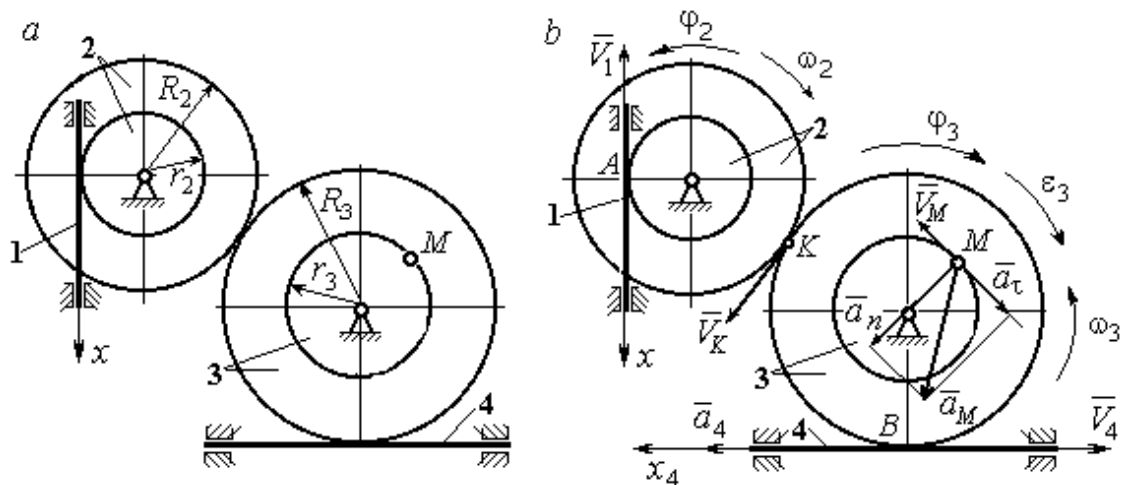


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x . Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси x . Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Эту же скорость будет иметь точка A – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{|4t - 5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0,2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0,2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2 . При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая ско-

рость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2,5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0,5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0,5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3 , как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки M рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки M (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2,5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с². Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3 , диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с². Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с². Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8,06$ см/с². Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

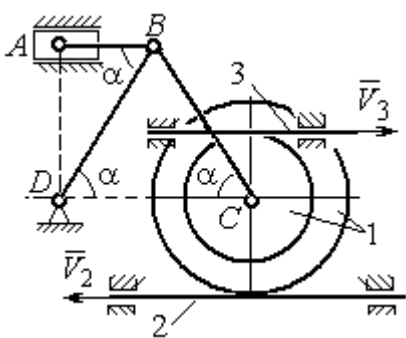
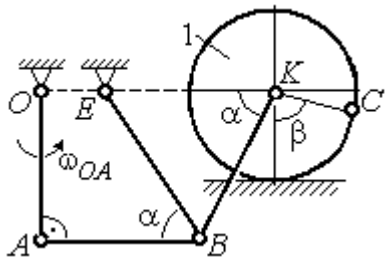
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с². Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21							Варианты № 2, 12, 22						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, \omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}, \omega_{BE}, \omega_{BK}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	r_1 , см	AD , см	α , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	OE , см	α , град	β , град	V_C , см/с
1	10	5	20	30	8	10	2	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	12	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	22	5	12	2	60	120	12

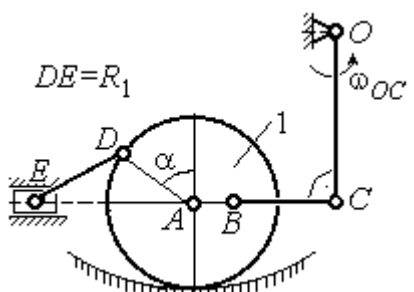
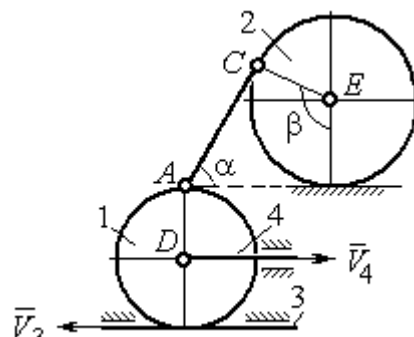
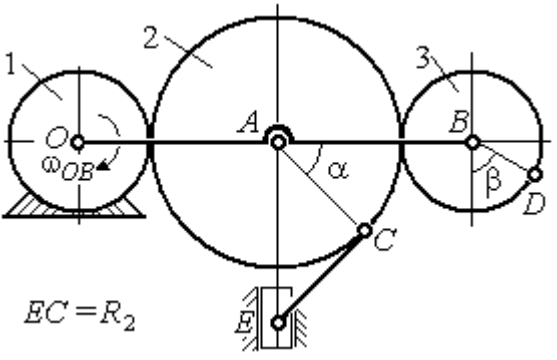
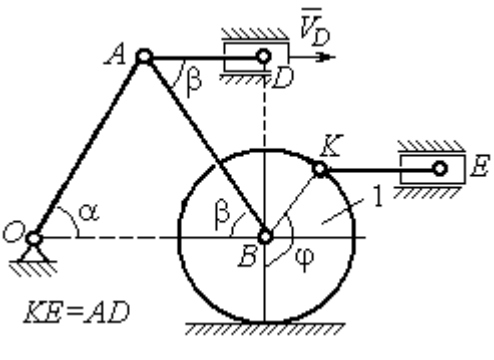
Варианты № 3, 13, 23							Варианты № 4, 14, 24						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$							 Найти: $V_A, V_C, V_E, \omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	OC , см	AB , см	BC , см	α , град	ω_{OC} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	α , град	β , град	V_3 , см/с	V_4 , см/с
3	12	18	10	35	60	4	4	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	14	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	24	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25							Варианты № 6, 16, 26						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	α , град	β , град	ω_{OB} , рад/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	ϕ , град	V_D , см/с
5	10	20	12	60	0	6	6	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	16	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	26	15	30	60	60	120	15

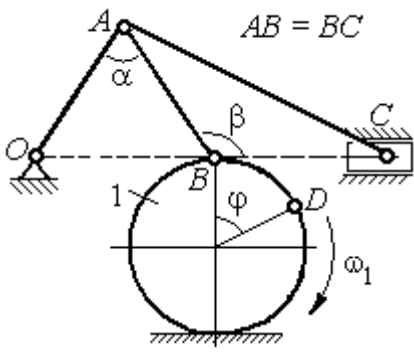
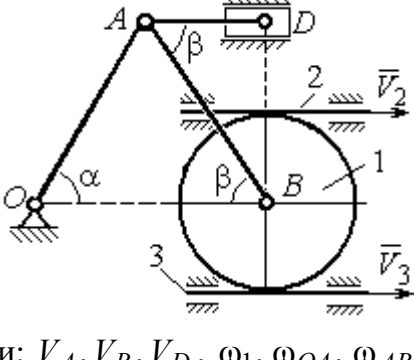
Варианты № 7, 17, 27							Варианты № 8, 18, 29						
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$							 Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$						
Номер варианта задания	R_1 , см	AB , см	α , град	β , град	ϕ , град	V_D , см/с	Номер варианта задания	R_1 , см	OA , см	α , град	β , град	V_2 , см/с	V_3 , см/с
7	10	20	30	60	60	12	8	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	18	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание K2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

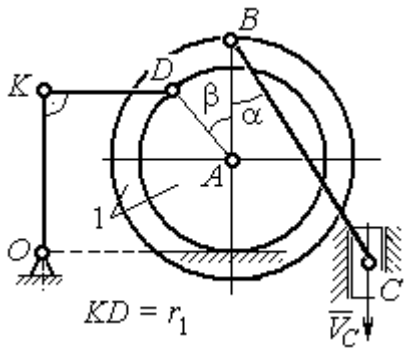
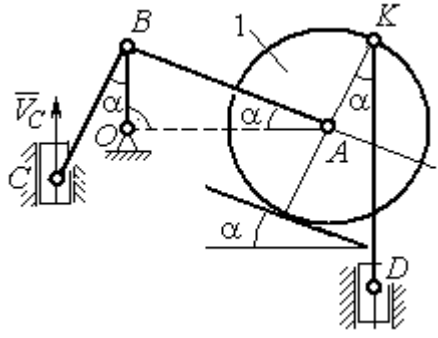
Варианты № 9, 19, 29							Варианты № 10, 20, 30						
 Найти: ω_{OK}, ω_{KD}, ω_{BC}, ω_1, V_A, V_B, V_K, V_D							 Найти: V_A, V_B, V_D, V_K, ω_{CB}, ω_1, ω_{OB}, ω_{AB}, ω_{KD}						
Номер вари- анта задания	R_1 , см	r_1 , см	α , град	β , град	BC , см	V_C , см/с	Номер вари- анта задания	R_1 , см	CB , см	OB , см	KD , см	α , град	V_C , см/с
9	20	12	45	60	60	8	10	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	20	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	30	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2 , r_3 , шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C . Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC} . Диск 2, увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1 . Диск 3, также увлекаемый стержнем OC , катится без проскальзыва-

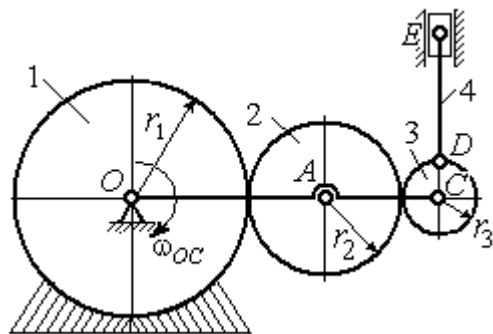


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке D , расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке E шарнирно прикреплен поршень E , способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень OC горизонтален, стержень DE направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек A , C , D , E , угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $r_3 = 2$ см, $DE = 10$ см, $\omega_{OC} = 1$ рад/с.

Решение

Определим скорость точки A , общей для стержня OC и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2) = 10$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню OC

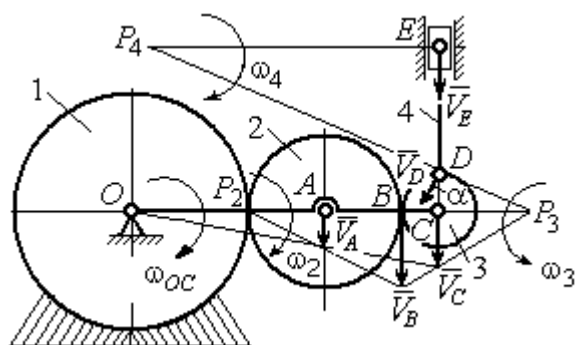


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2 . В этом случае скорость точки A может быть

определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом:

$V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как $V_A = 10$ см/с, получим $\omega_2 = 2,5$ рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек B и C . Скорость точки B может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2 .

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC : $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3) = 16$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3 , получим: $CP_3 = 8$ см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 2$ рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B , принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2} = 16,5$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3 .

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E . По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos \alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0,97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos \alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E : $V_E = 16$ см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \frac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 40$ см. В результате, $\omega_4 = 0,4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D .

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E . В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплен шатун DB , второй конец которого в точке B прикреплен к кривошипу OA . Шатун AC прикреплен в точке A к кривошипу AO , а другим своим концом – к ползуну C , способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонен на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO . Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма $AC = 6$ см, $AB = 2$ см, $BO = 8$ см, $DB = 10$ см и скорость ползуна в данный момент $V_C = 4$ см/с.

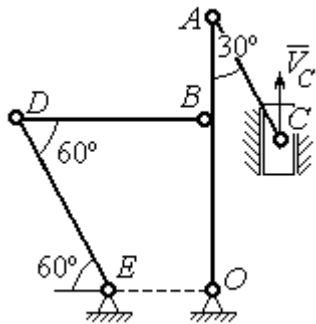


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA , а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошпиу ED . Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{P_1C} = \frac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4}{3} \text{ рад/с.}$$

Далее, по-

лагая, что точка A принадлежит шатуну AC , найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC , так и кривошпиу OA , найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0,4\sqrt{3} \text{ рад/с.}$ Скорость точки B кривошпиа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3,2\sqrt{3} \text{ см/с.}$

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D , построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB

$$\omega_{DB} = \frac{V_B}{P_2B} = \frac{3,2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0,32 \text{ рад/с.}$$

Скорость

$$\text{точки } D \quad V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0,32 \frac{DB}{\sin 30^\circ} = 6,4 \text{ см/с.}$$

Угловая скорость кривошпиа

$$DE \quad \omega_{DE} = \frac{V_D}{DE} = \frac{6,4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0,69 \text{ рад/с.}$$

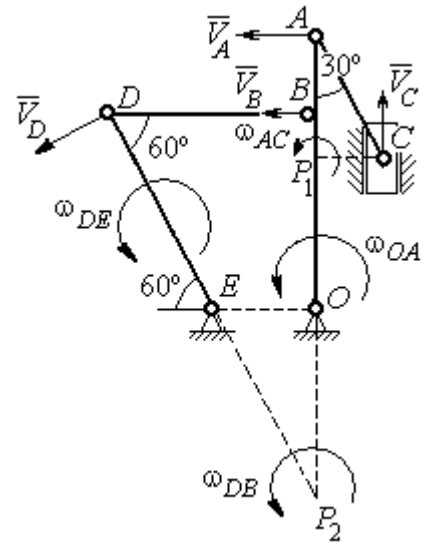
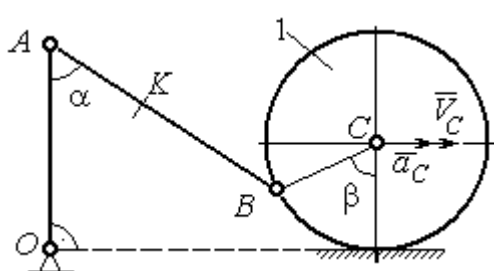
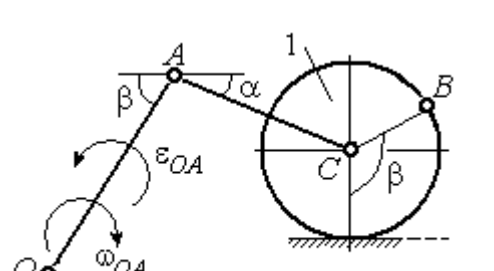


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

Варианты № 1, 11, 21								Варианты № 2, 12, 22							
 Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$								 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$							
Номер вари- анта задания	AB, см	AK, см	α , град	β , град	R_1 , см	V_C , см/с	a_C , см/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	AC, см	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
1	16	10	60	120	10	12	6	2	5	10	12	30	60	2	4
11	20	16	30	60	8	10	8	12	8	24	20	30	120	1	2
21	18	10	60	180	6	8	4	22	6	12	15	60	90	2	3

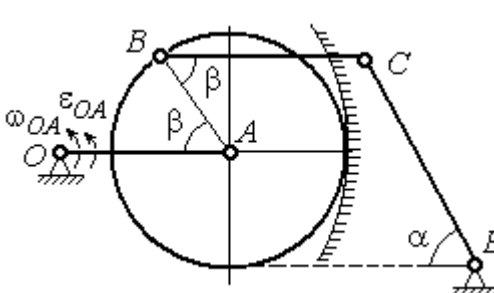
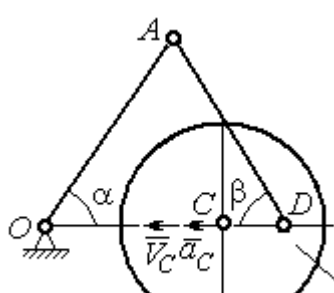
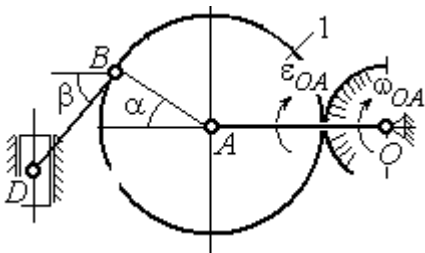
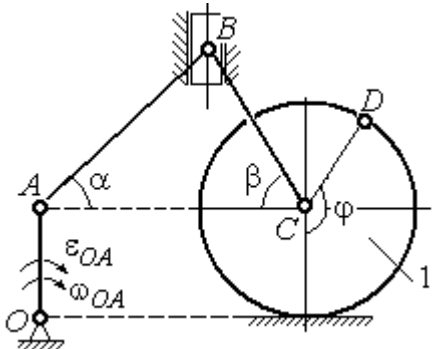
Варианты № 3, 13, 23								Варианты № 4, 14, 24							
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$								 Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$							
Номер вари- анта задания	BC, см	AO, см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	OA, см	DC, см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
3	16	15	60	90	10	2	3	4	10	28	5,78	60	30	10	2
13	18	12	90	60	8	3	2	14	8	24	4,62	30	90	8	3
23	14	12	30	120	10	2	4	24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25								Варианты № 6, 16, 26							
 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}								 Найти: a_B, a_D, ϵ_{BC}							
Номер вари- анта задания	OA , см	BD , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	AB , см	φ , град	α , град	β , град	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²
5	16	10	60	30	10	4	3	6	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	16	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	26	5	16	120	30	60	3	4

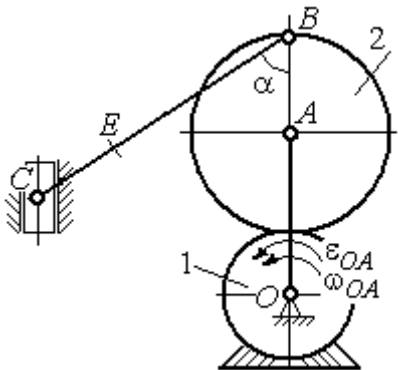
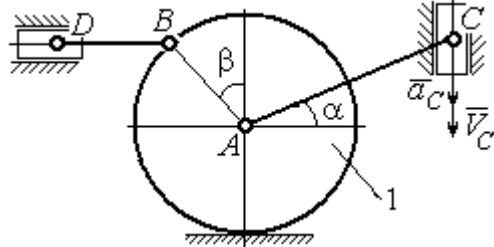
Варианты № 7, 17, 27								Варианты № 8, 18, 28							
 Найти: a_E, a_C, ϵ_{BC}								 Найти: a_D, a_B, ϵ_{BD}							
Номер вари- анта задания	BC , см	BE , см	α , град	R_1 , см	R_2 , см	ω_{OA} , рад/с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BD , см	AC , см	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
7	22	10	60	2	10	2	3	8	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	18	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание КЗ. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

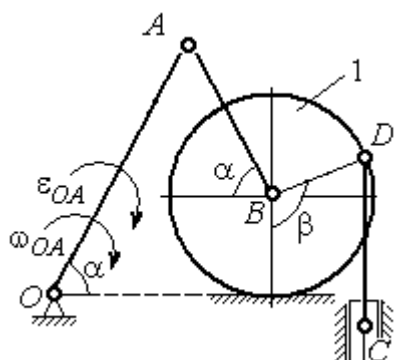
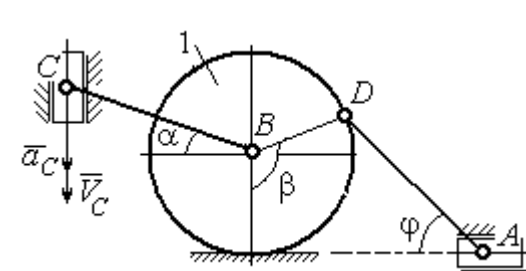
Варианты № 9, 19, 29								Варианты № 10, 20, 30							
 Найти: a_C, a_B, ϵ_{AB}								 Найти: a_A, a_B, ϵ_{CB}							
Номер вари- анта задания	OA , см	DC , см	α , град	β , град	R_1 , см	ω_{OA} , рад/ с	ϵ_{OA} , рад/с ²	Номер вари- анта задания	R_1 , см	BC , см	φ , град	α , град	β , град	V_C , см/с	a_C , см/с ²
9	18	10	30	120	4	2	3	10	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	20	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	30	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R = 0,5$ м и $r = 0,3$ м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC , один конец которого соединён с центром барабана в точке A , а другой – с ползуном C , перемещающимся вертикально.

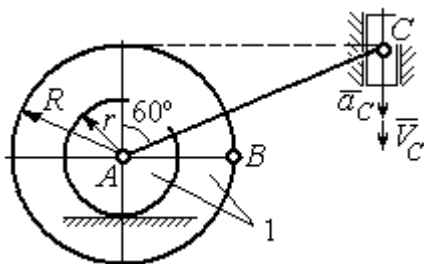


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60° , найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C : $V_C = 9$ м/с, $a_C = 4$ м/с².

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC} , ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC , так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

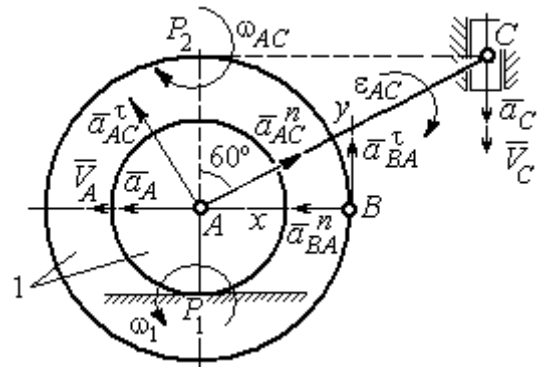


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{9}{R \operatorname{tg} 60^\circ} = 6\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

Скорость точки A шатуна

$$V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3} \text{ м/с. Угловая скорость барабана 1 } \omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^\tau + \vec{a}_{AC}^n$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{AC}^\tau$, $\vec{a}_{AC}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C . Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{AC}^n$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a_{AC}^n = \omega_{AC}^2 \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108 \text{ м/с}^2$. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC .

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

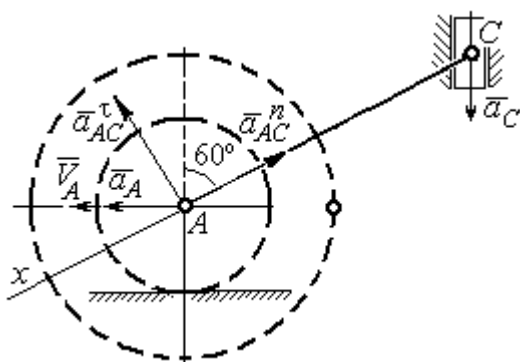


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^n$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n$. Отсюда найдём ускорение центра барабана

$$a_A = \frac{1}{\cos 30^\circ} (a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^n) = -122,4 \text{ м/с}^2.$$

Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B , выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки A , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^\tau$, $\vec{a}_{BA}^n$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A .

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^n$ равен по величине $a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150 \text{ м/с}^2$. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^\tau$ вычисляется по формуле $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r . Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r} = 40,8 \text{ рад/с}^2$, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA = 20,4 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B :

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20,4 \text{ м/с}^2$, $a_{Bx} = -122,4 + 150 = 27,6 \text{ м/с}^2$. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B : $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34,32 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA} . Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A , катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2 . На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC , соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2:

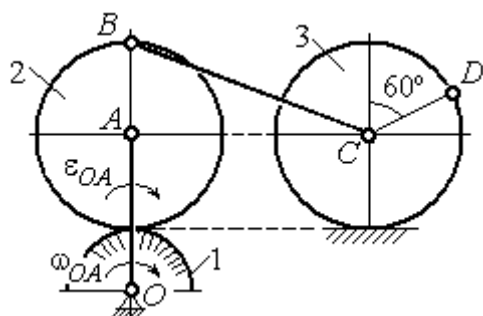


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC , если $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$, $R_1 = 4 \text{ см}$, $R_2 = 8 \text{ см}$. Длина стержня $BC = 20 \text{ см}$.

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA . Скорость точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{48}{8} = 6 \text{ рад/с}$.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ см/с}$.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96 \text{ см/с}$.

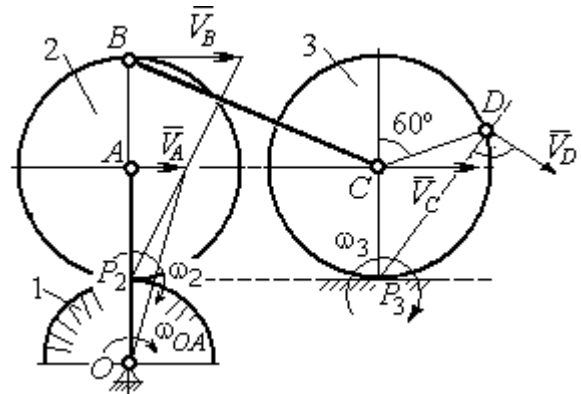


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей.

Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = 12 \text{ рад/с}$. Скорость точки D диска 3:

$V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC . В результате $DP_3 = 2R_3 \cos 30^\circ = 13,8 \text{ см}$ и $V_D = 165,6 \text{ см/с}$. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B , выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{CB}^n$, $\vec{a}_{CB}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B , $a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB$, $a_{CB}^\tau = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a_{CB}^n = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB} . Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB} .

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

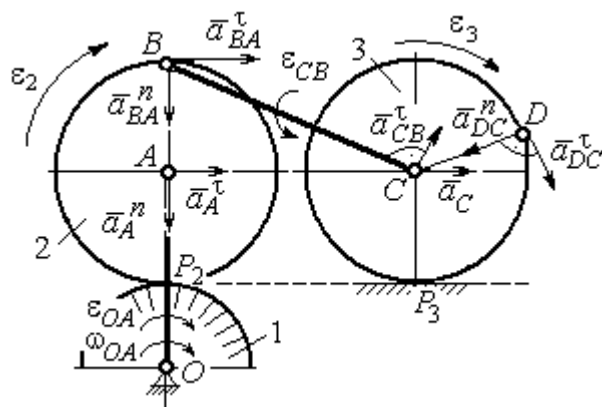


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Выразим ускорение точки B через полюс A : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}$, где

$\vec{a}_A$ – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A . Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 288 \text{ см/с}^2$. Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2 . Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2, \text{ или } a_A^{\tau} = \varepsilon_2 R_2, \text{ откуда } \varepsilon_2 = \frac{a_A^{\tau}}{R_2}.$$

Для того чтобы найти величину a_A^{τ} , рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O . Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^{\tau}$, где $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^{\tau}$ – известные

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA :
 $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192 \text{ см/с}^2$, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24 \text{ см/с}^2$. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A : $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{R_2} = 3 \text{ рад/с}^2$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24 \text{ см/с}^2$.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx , Cy , как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

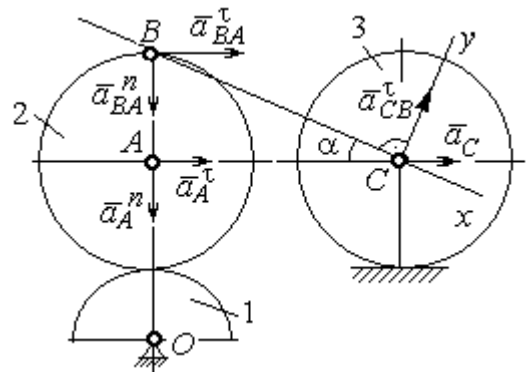


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки C

$$a_C \cos \alpha = a_A^n \sin \alpha + a_A^\tau \cos \alpha + a_{BA}^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \alpha;$$

$$a_C \sin \alpha = a_A^n \cos \alpha + a_A^\tau \sin \alpha + a_{BA}^n \cos \alpha + a_{BA}^\tau \sin \alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC ; $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,4$;

$\cos \alpha = 0,92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256,7 \text{ см/с}^2$, $a_{CB}^\tau = -358,12 \text{ см/с}^2$.

Модуль углового ускорения стержня BC : $\varepsilon_{CB} = \frac{|a_{CB}^\tau|}{BC} = 17,9 \text{ рад/с}^2$.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC , показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB} , также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C : $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C ; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C . Величина нормального ускорения точки D : $a_{DC}^n = \omega_3^2 \cdot DC = 1152 \text{ см/с}^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_{DC}^n$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

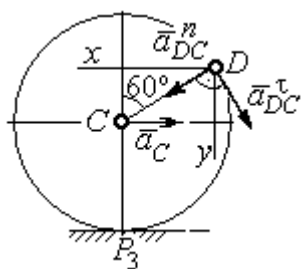


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a_{DC}^τ ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство

$$V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3. \quad \text{Получим:}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3, \text{ или } a_C = \varepsilon_3 R_3. \quad \text{Угловое ускорение}$$

$$\text{диска 3: } \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32,09 \text{ рад/с}^2. \quad \text{Тогда величина}$$

касательной составляющей ускорения точки D : $a_{DC}^\tau = \varepsilon_3 \cdot DC = 256,7 \text{ см/с}^2$.

Направление вектора $\vec{a}_{DC}^\tau$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy , как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a_{DC}^n \cos 30^\circ - a_{DC}^\tau \cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a_{DC}^n \cos 60^\circ + a_{DC}^\tau \cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612,5 \text{ см/с}^2$, $a_{Dy} = 798,3 \text{ см/с}^2$. Величина ускорения точки D :

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 1006,2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией**. Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением**.

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей**: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = |\dot{S}_r|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса**

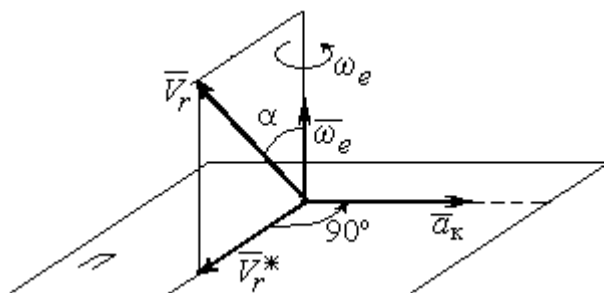


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

реносного и ускорения Кориолиса

$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_k$ – вектор ускорения Кориолиса.

(Иногда его называют поворотным ускорением.)

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_k| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin \alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^\tau$ и относительного нормального $\vec{a}_r^n$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^\tau$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^n$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки

равны: $a_r^\tau = |\dot{V}_r|$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траекто-

рии. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^n = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, $a_e^n = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = |\dot{\omega}_e|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_k = 0$, $a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1 .

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

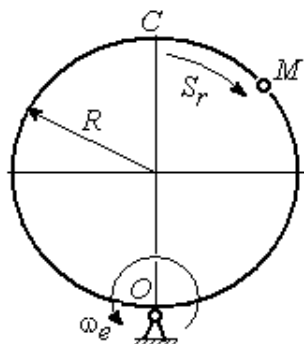
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2 , который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схеме описаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

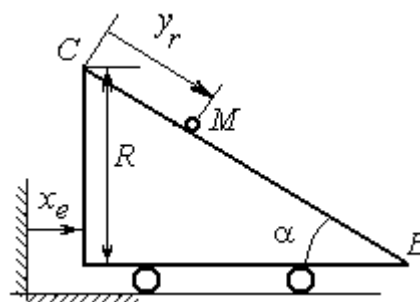
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



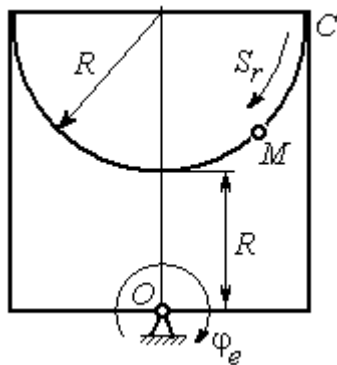
Задача 2



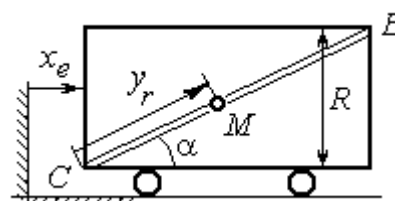
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



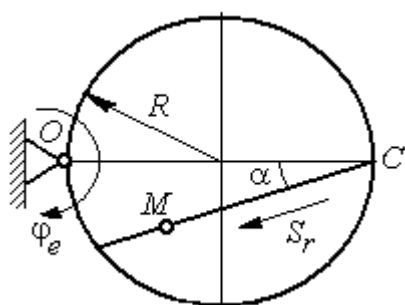
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла $2/3$ пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

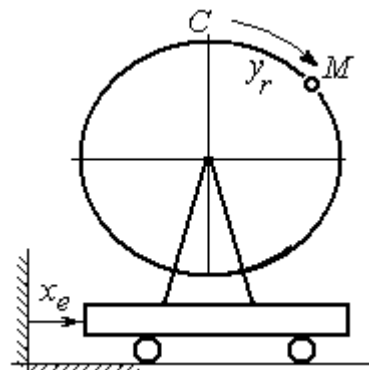


Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

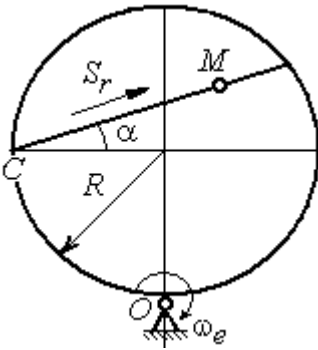
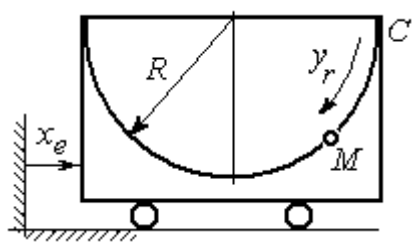
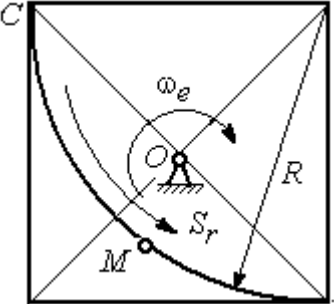
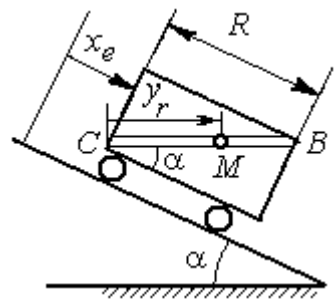
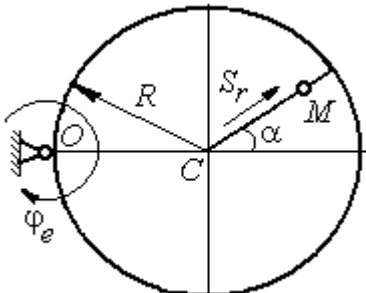
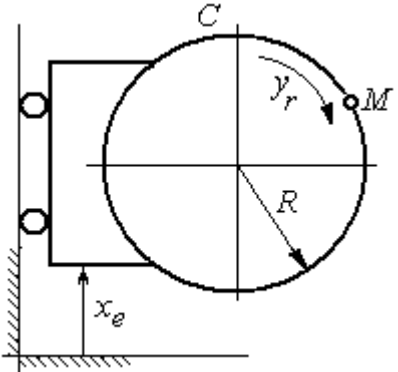
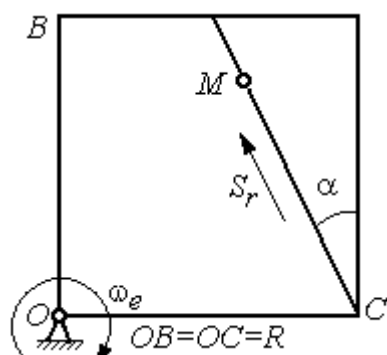
Варианты № 4, 14, 24	
Задача 1 	Задача 2 
Варианты № 5, 15, 25	
Задача 1 	Задача 2  В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB
Варианты № 6, 16, 26	
Задача 1 	Задача 2 

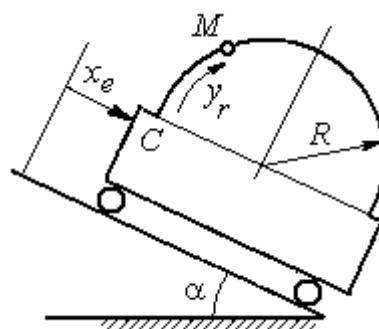
Рис. 3.3. Задание K4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

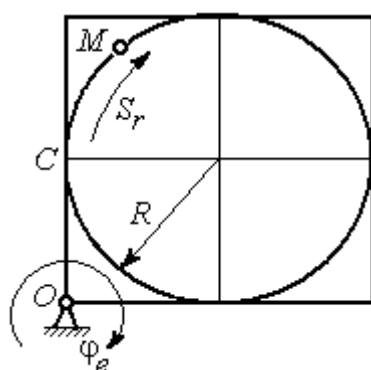


Задача 2

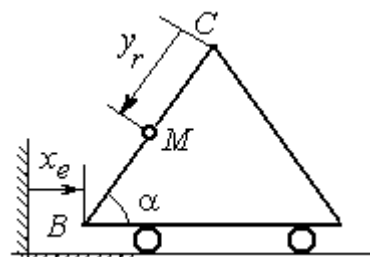


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



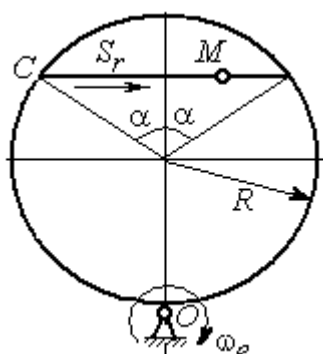
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

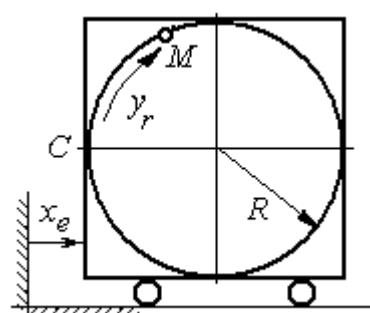


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

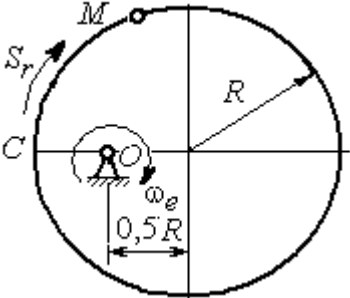
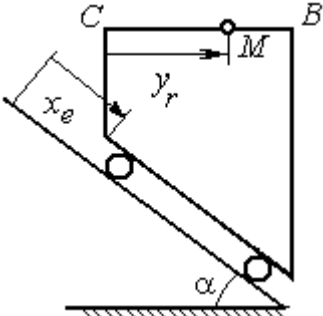
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1 	Задача 2  В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
1	1	3	—	$S_r = 2\pi \sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	—
2	1	2	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	—	$y_r = \pi[2t + \sin \pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	—	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	—	$S_r = 4\pi \sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	—
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	—	$y_r = 4\pi \sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\bar{CM} = S_r(t)$, см $\bar{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
8	1	8	—	$S_r = 2\pi[t^2 + \sin\pi t]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	—
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	—	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	—	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	—
11	1	6	—	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	—
12	1	18	—	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	—
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	—	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	—
16	1	12	90	$S_r = 3[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	—	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}[t^2 + 2\sin\pi t]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	—
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	—	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	—	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	—
21	1	3	—	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	—

Номер варианта задания	Номер задачи	R , см	α , град	$\vec{CM} = S_r(t)$, см $\vec{CM} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1 , с t_2 , с
22	1	4	—	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	—
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	—	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	—	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	—
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	—	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	—	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	—	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	—	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	—

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного тре-

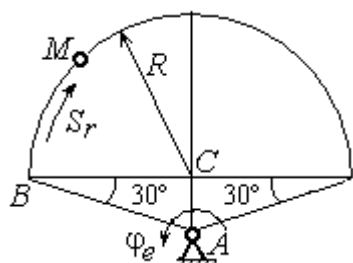


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

угольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e . По ободу диска от точки B движется точка M . Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки M на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r . Радиус диска $R = 9$ см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Вращение фигуры будет для точки M переносным движением. Относительное движение точки M – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки M** на ободу диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки M определяется **центральным углом**

$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1 .

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При $t_1 = 1$ с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает, что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка M находится в положении M_1 . Скорость V_e переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где

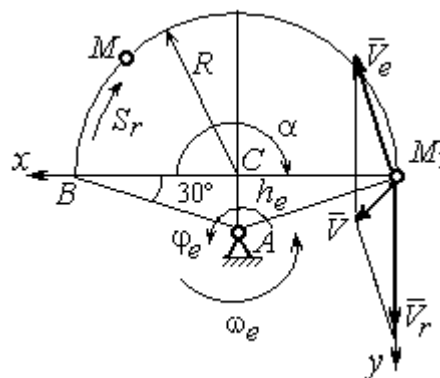


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \frac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги BM . В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r(1) = |\dot{S}_r(1)| = 18\pi = 56,5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r . Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат $M_1|x y$ (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56,5 = 29,5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5,2^2 + 29,5^2} = 29,95 \text{ см/с}.$

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = |\ddot{S}_r|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi = 56,5 \text{ см/с}^2$ – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r .

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} \quad \text{и в момент } t_1 = 1 \text{ с равно:}$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2(1)}{R} = \frac{(18\pi)^2}{9} = 355,3 \text{ см/с}^2. \text{ Вектор}$$

ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

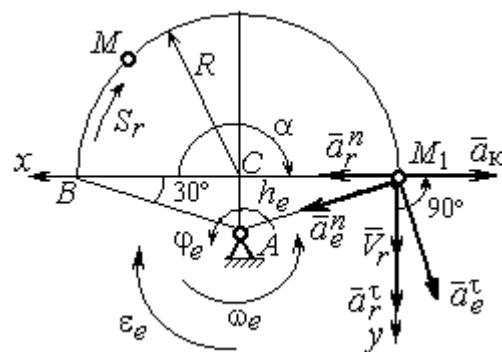


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e|$. Вычислим производную $\ddot{\phi}_e = -4 \text{ рад/с}^2$. Угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\phi}_e| = 4 \text{ рад/с}^2$ постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\phi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\phi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41,6 \text{ см/с}^2$.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле:

$a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1) h_e = 6\sqrt{3} = 10,4$ см/с². Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_k = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113,1$ см/с².

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$. Получим: $a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97,9$ см/с², $a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_k = 228,4$ см/с². Модуль абсолютного ускоре-

ния: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248,5$ см/с².

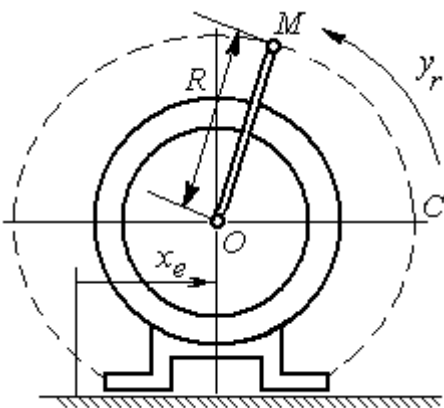


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укрепленного на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплен стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t / 3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R , переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α , отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC , в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \frac{y_r(t_1)}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1 .

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r = 6,28$ см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1 .

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3} \cos(\pi t / 3).$$

В момент времени $t_1 = 1$ с $V_e = \frac{5\pi}{3} \cos 60^\circ = 2,62$ см/с. Вектор $\vec{V}_e$ пе-

реносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

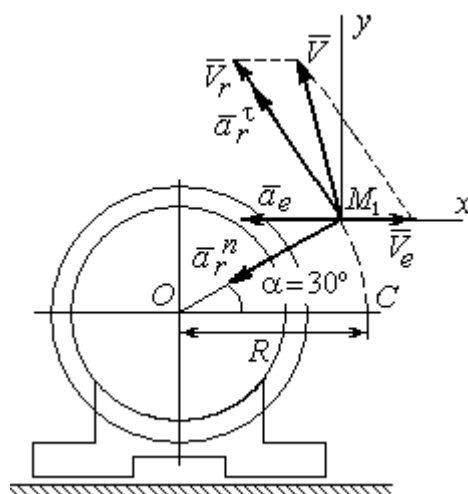


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y , как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r \cos 60^\circ = -0,52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r \cos 30^\circ = 5,44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5,46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_k = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^\tau = \dot{V}_r$, $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^\tau = \dot{V}_e = -\frac{5\pi^2}{9} \sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равны $a_r^\tau = 6,28$ см/с², $a_r^n = 6,57$ см/с², $a_e = -4,75$ см/с². Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y . Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^\tau \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ - a_e = -4,08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^\tau \cos 30^\circ - a_r^n \cos 60^\circ = 2,15 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Величина абсолютного ускорения } a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4,61 \text{ см/с}^2.$$

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ описывается **дифференциальными уравнениями**: $m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m \ddot{x} = \sum F_{kx}, m \ddot{y} = \sum F_{ky}, m \ddot{z} = \sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости xOy . Точка 1 массой m_1 , получив в начальном положении A скорость V_{01} , движется вдоль гладкой оси AS , наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси AS . Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения B на оси y . На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}, \vec{j}$ координатных осей x, y .

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C . Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

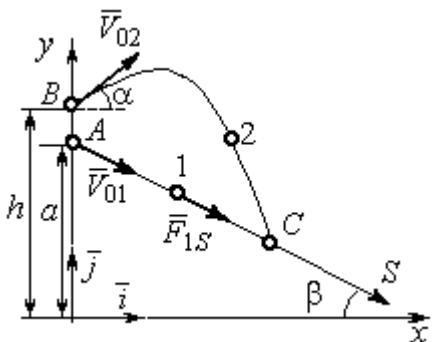
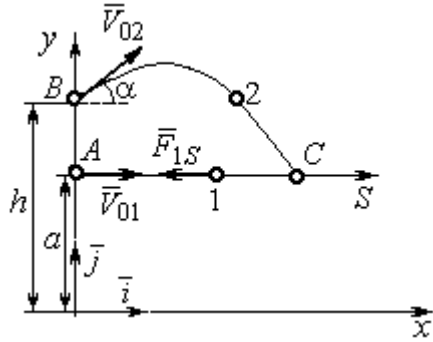
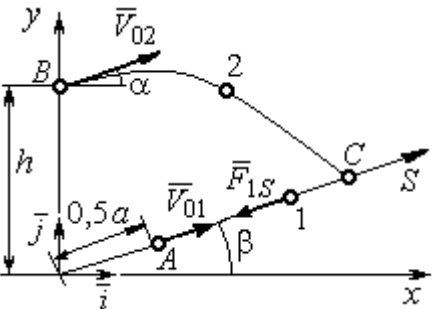
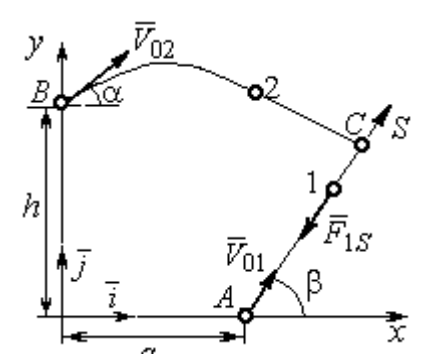
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,5 \text{ с}$

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

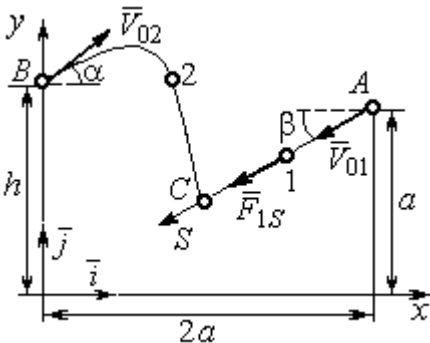
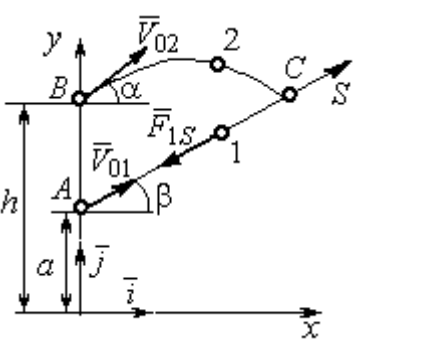
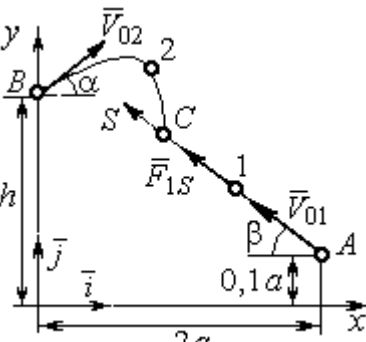
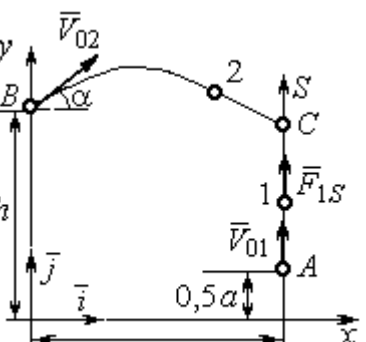
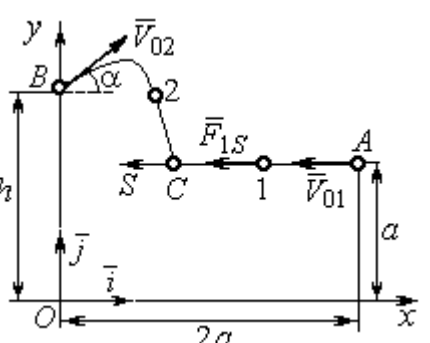
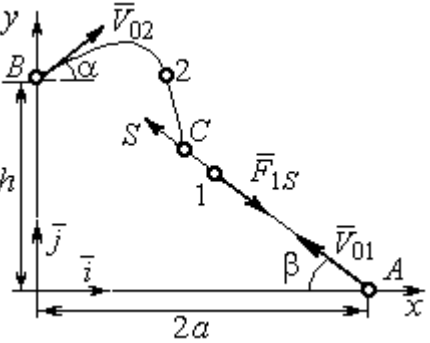
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C, когда точка 1 максимально удалилась от места старта
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,4$ с	 Встреча в точке C в момент максимального подъёма точки 1
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0,6$ с	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1 , кг	F_{1S} , Н	V_{01} , м/с	β , град	m_2 , кг	$\vec{F}_2$, Н	a , м	h , м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i} + 8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i} + 2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i} + 8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i} + 2\vec{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i} + 8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i} - 4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i} + 12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i} + 4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i} + 10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i} - 2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i} + 2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i} - 2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i} + 4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i} + 7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i} - 2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i} + 6\vec{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости xOy . Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении A скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси AS с углом наклона $\beta = 30^\circ$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось AS равна $F_{1S} = 4,5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось AS показано на рис. 4.3.

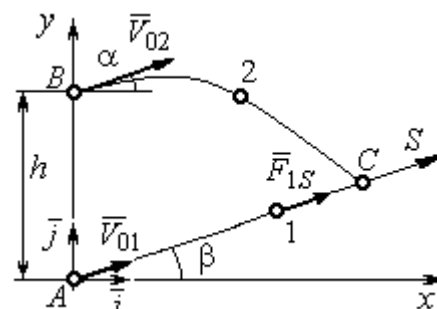


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения B на оси y высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1,2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей x , y декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2,4\vec{i} + 4,5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 , когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси AS в точке C .

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси AS и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось AS равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\frac{dV_{1S}}{dt} = 4,5 - m_1g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с², дифференциальное уравнение движения точки 1

приводится к виду: $\frac{dV_{1S}}{dt} = -2,66$. Разделим переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2,66dt$. Проинтегрировав его, получим

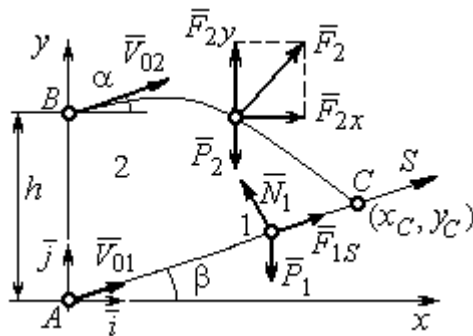


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

зависимость скорости точки 1 от времени:

$$V_{1S} = -2,66t + C_1.$$

Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты

$$V_{1S} = \frac{dS}{dt}.$$

$$\text{Получим дифференциальное уравнение } \frac{dS}{dt} = -2,66t + C_1, \text{ проинтегрировав}$$

которое, найдём уравнение движения точки 1:

$$S = -1,33t^2 + C_1t + C_2.$$

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0, S = 0, \dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2,66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1,33t^2 + 4t$.

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1 , когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной:

$$V_{1S}(t_1) = \frac{V_{01}}{2} = 2 \text{ м/с.}$$

Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2,66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0,75$ с. Расстояние AC , пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0,75$ с, $AC = S(t_1) = -1,33 \cdot 0,75^2 + 4 \cdot 0,75 = 2,25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1,95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1,12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2,4\vec{i} + 4,5\vec{j}$, проекции которой на оси координат $F_{2x} = 2,4$ Н, $F_{2y} = 4,5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат x, y имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2,4, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2g + 4,5,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2, \quad \ddot{y} = -6,06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось x как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \frac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось x на производную от координаты $V_{2x} = \frac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси x , $x = t^2 + C_3t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4 , воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0,75$ с $x(t_1) = x_C = 1,95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1,85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси x : $x = t^2 + 1,85t$.

Закон движения точки 2 вдоль оси y находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\frac{dV_{2y}}{dt} = -6,06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось y от времени: $V_{2y} = -6,06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось y производной от координаты $V_{2y} = \frac{dy}{dt}$, вто-

рично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси y описывается уравнением: $y = -3,03t^2 + C_5t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0,75$ с $y(t_1) = y_C = 1,12$ м. Получим $C_6 = 1$, $C_5 = 2,43$. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3,03t^2 + 2,43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1,85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6,06t + 2,43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1,85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2,43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{V_{02x}^2 + V_{02y}^2} = 3,05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{02y}}{V_{02x}} = \frac{2,43}{1,85} = 1,31$. Откуда $\alpha = 52,64^\circ$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Ox под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало

координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний**

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, об-

ратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид

$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$;

ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$;

$A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки аperiodическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными**.

При действии гармонической возмущающей силы $F = H \sin pt$, где H , p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$; h –

относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \frac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt, \text{ а в случае резонанса, когда } p = \omega, - \text{ вид:}$$

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{ht}{2p} \cos pt. \text{ Значения произвольных постоянных } C_1 \text{ и } C_2$$

определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \frac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a \sin pt$, где a , p – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \frac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, а) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалент-

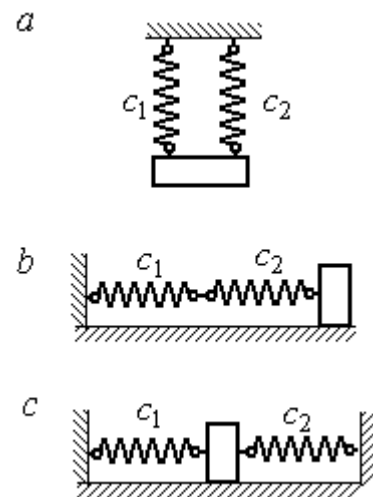


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:

а – две параллельные пружины;
 б – последовательно соединённые пружины; в – крепление груза между пружинами

ной жесткости $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

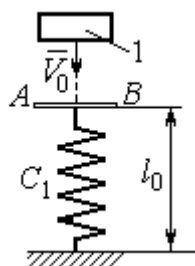
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2 . Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu \vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

Варианты № 1, 11, 21

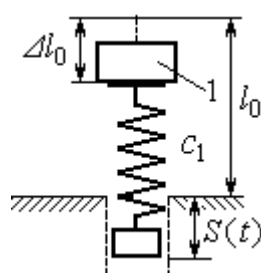
Задача 1



платины и продолжает движение вместе с ней

Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0 , падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

Задача 2

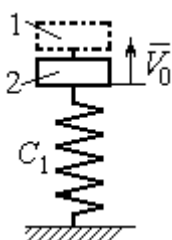


начинает двигаться по закону $S = S(t)$

К верхнему концу пружины, сжатой на величину Δl_0 , прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины

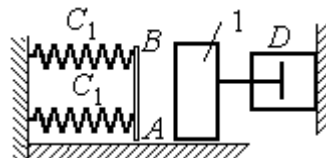
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0 , направленную вверх

Задача 2

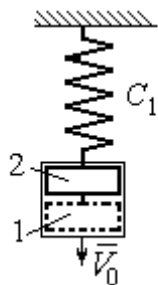


начальной скоростью V_0 . Через 1 с груз упирается в площадку AB , укрепленную на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с

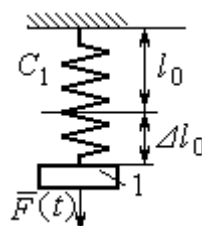
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укрепленного на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2



возмущающая сила $\bar{F}(t)$

Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние Δl_0 , подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

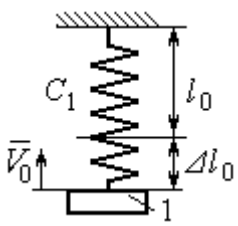
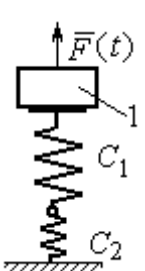
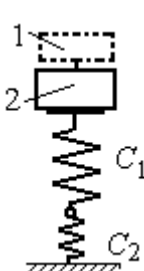
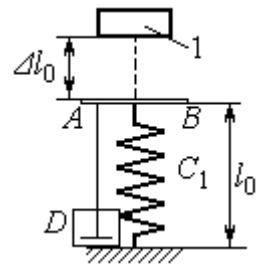
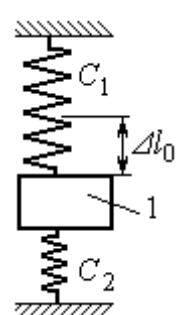
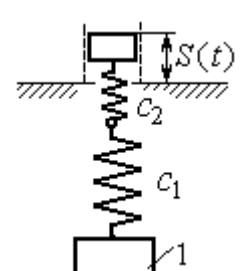
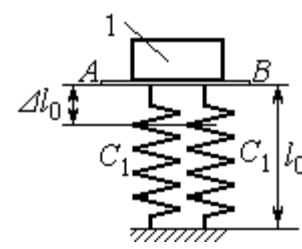
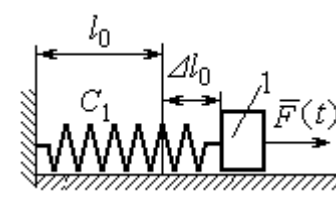
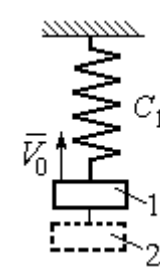
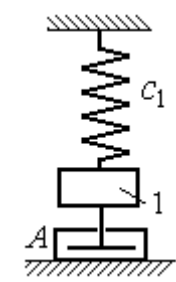
Варианты № 4, 14, 24	
Задача 1  К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вверх	Задача 2  Грузу 1, укрепленному на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$
Варианты № 5, 15, 25	
Задача 1  В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укрепленных на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости	Задача 2  Груз 1 падает с высоты Δl_0 на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине
Варианты № 6, 16, 26	
Задача 1  Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости	Задача 2  К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1	Задача 2
 К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вниз	 К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние Δl_0 и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\bar{F}(t)$

Варианты № 8, 18, 28

Задача 1	Задача 2
 Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх	 В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

Варианты № 9, 19, 29

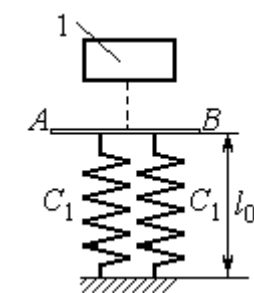
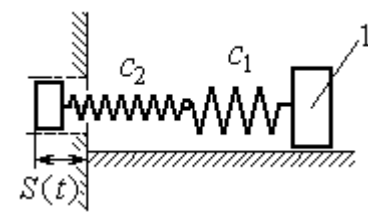
Задача 1	Задача 2
 Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укрепленной на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней	 К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

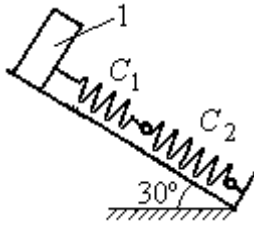
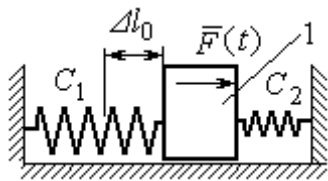
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1  В положении статического равновесия груза 1, укрепленного на двух последовательно соединенных пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости	Задача 2  Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	Δl_0 , м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	—	2,0	200	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	210	—	0,1	—	—	$0,02\sin 12t$
2	1	1,5	2,0	4	250	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	4	220	—	—	1,0	—	—
3	1	2,0	1,5	3	250	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	—	200	—	0,14	—	$12\sin 5t$	—
4	1	2,0	—	3	180	—	0,1	—	—	—
	2	1,5	—	2	150	120	—	—	$8\sin 12t$	—
5	1	1,0	2,0	—	120	100	—	—	—	—
	2	1,0	—	—	50	—	0,5	18	—	—
6	1	1,2	—	—	120	180	0,12	—	—	—
	2	1,4	—	2,4	120	180	—	—	—	$0,03\sin 14t$
7	1	1,6	—	3,2	140	—	0,15	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,12	—	$12\sin 6t$	—
8	1	1,0	2,0	3,0	150	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	3,5	120	—	—	15	—	—

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	—	—	100	—	—	—	—	—
	2	1,4	—	2,0	100	110	—	—	—	$0,015\sin 8t$
10	1	2,5	—	2,5	110	100	—	—	—	—
	2	2,0	—	—	110	52	0,08	—	$5\sin 9t$	—
11	1	2,0	—	4,0	300	—	—	—	—	—
	2	1,0	—	—	200	—	0,12	—	—	$0,01\sin 4t$
12	1	1,8	2,4	4	220	—	—	—	—	—
	2	1,0	—	5	240	—	—	0,6	—	—
13	1	1,5	1,5	2	200	—	—	—	—	—
	2	1,8	—	—	180	—	0,08	—	$10\sin 10t$	—
14	1	2,0	—	2	200	—	0,12	—	—	—
	2	2,0	—	2	150	120	—	—	$10\sin 8t$	—
15	1	1,5	2,0	—	120	250	—	—	—	—
	2	1,5	—	—	120	—	0,4	4	—	—
16	1	2,0	—	—	150	75	0,1	—	—	—
	2	2,0	—	2,5	150	75	—	—	—	$0,01\sin 5t$
17	1	1,5	—	2,1	160	—	0,11	—	—	—
	2	1,8	—	—	150	—	0,1	—	$8\sin 12t$	—
18	1	2,0	1,0	2,5	80	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	2,5	50	—	—	21	—	—
19	1	1,6	—	—	120	—	—	—	—	—
	2	1,2	—	2,0	85	120	—	—	—	$0,015\sin 7t$
20	1	2,0	—	2,0	90	100	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	100	90	0,12	—	$6\sin 10t$	—
21	1	2,0	—	1,6	220	—	—	—	—	—
	2	2,5	—	—	250	—	0,14	—	—	$0,01\sin 10t$
22	1	2,2	1,5	3	180	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	4	280	—	—	0,8	—	—
23	1	2,2	1,2	2	220	—	—	—	—	—
	2	1,6	—	—	200	—	0,12	—	$5\sin 7t$	—

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1 , кг	m_2 , кг	V_0 , м/с	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ , Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	—	2,4	160	—	0,13	—	—	—
	2	1,0	—	3	150	300	—	—	$6\sin 10t$	—
25	1	0,8	1,2	—	120	80	—	—	—	—
	2	0,8	—	—	180	—	0,4	12	—	—
26	1	1,4	—	—	100	120	0,15	—	—	—
	2	1,8	—	2,2	150	120	—	—	—	$0,015\sin 8t$
27	1	2	—	4,0	150	—	0,12	—	—	—
	2	2	—	—	162	—	0,13	—	$5\sin 9t$	—
28	1	1,5	2,0	2,0	140	—	—	—	—	—
	2	1,5	—	3,1	180	—	—	12	—	—
29	1	1,0	—	—	140	—	—	—	—	—
	2	2,0	—	2,4	75	150	—	—	—	$0,08\sin 5t$
30	1	1,6	—	3	75	150	—	—	—	—
	2	1,5	—	3	80	70	0,15	—	$8\sin 10t$	—

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом $P = 20$ Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплен к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30° , коэффициент жесткости пружины $c = 400$ Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0 = 0,1$ м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

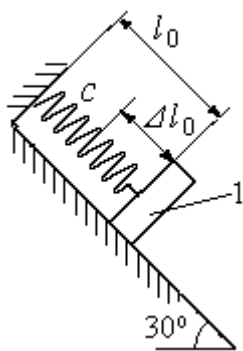


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось Ox , вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты x выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11). В произвольном положении груза, обозначенном координатой x , к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox : $F_{\text{упр},x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение x относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

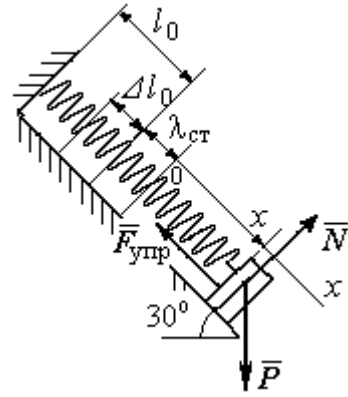


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox :

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравнивается силой, равной проекции силы тяжести на ось x : $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 14,01 \text{ рад/с}$.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox .

Растяжение пружины в положении статического равновесия

$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P \sin 30^\circ}{c} = 0,025 \text{ м}$. Координата начального положения груза определяется

величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты x выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!):
 $x_0 = -(\Delta \ell_0 + \lambda_{\text{ст}}) = -0,125 \text{ м}$ (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0,125 \text{ м}$. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0,125 \cos 14,01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0,125 \text{ м}$.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20 \text{ Н}$ подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800 \text{ Н/м}$. В начальный

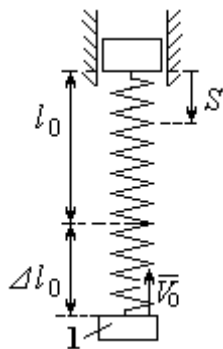


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta \ell_0 = 0,1 \text{ м}$, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2 \text{ м/с}$, направленная вверх.

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону

$$S = a \sin 10t, \text{ где } a = 0,02 \text{ м}.$$

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось Ox , вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты x выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, c, d). В произвольном положении груза, обозначенном координатой x , к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

Проекция силы упругости пружины на ось Ox

$$F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение x относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox :

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt,$$

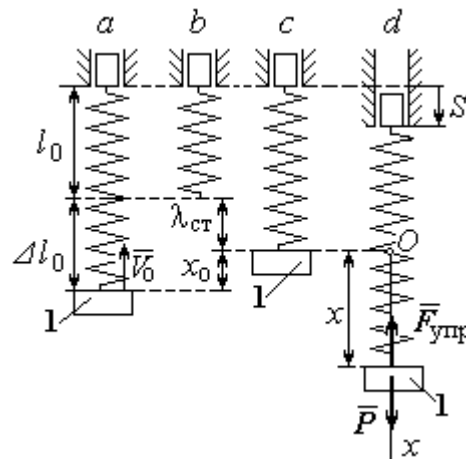


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза:
 a – положение груза на начало колебаний;
 b – недеформированная пружина; c – статическое растяжение пружины под действием веса груза; d – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $\omega = 19,81$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m} = 7,85$ м/с²;

p – угловая частота вынужденных колебаний, $p = 10$ рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox . Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, б) $x_0 = \Delta \ell_0 - \lambda_{\text{ст}}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c} = 0,02$ м, тогда $x_0 = 0,08$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0,08$ м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2} \cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим:

$C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)} = -0,11$ м. Окончательно уравнение движения груза относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0,08 \cos 19,82t - 0,11 \sin 19,82t - 0,03 \sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{\text{вын}} = \frac{h}{\omega^2 - p^2} = 0,03$ м. Амплиту-

да собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,14$ м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1 \cos \alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90^\circ$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

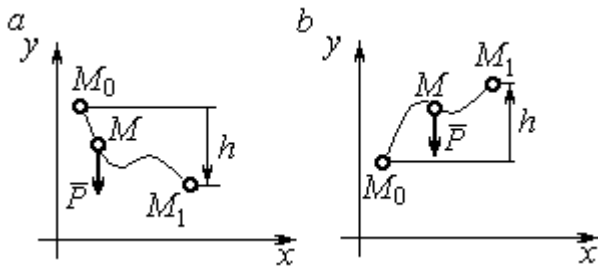


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки

$$A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph, \text{ где } P \text{ – величина си-}$$

лы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}$, где V_0 ,

V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1 ;
 $\sum A_{(M_0 M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1 .

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m \frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень с надетым на него шариком массой m расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами r и $R = 2r$, соединённых прямолинейным отрезком EK , сопряжённым с дугами окружностей в точках E и K . В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка $EK = a$.

В точке A , положение которой на дуге окружности определяется углом α , шарiku сообщают начальную скорость V_0 . По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f . На участках с вертикальным отрезком EK считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки D , шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью s и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки D определяется углом φ .

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положение траектории – точку B со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге определяется углом β .

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Рис. 4.16. Задание ДЗ. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания ДЗ. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m , кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α , град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ , град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r , м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a , м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c , Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m , кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α , град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ , град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r , м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a , м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c , Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках E и K с прямолинейным отрезком EK длиной $a = 0,6$ м (рис. 4.17). Радиусы окружностей $R = 1$ м и $r = 0,5$ м.

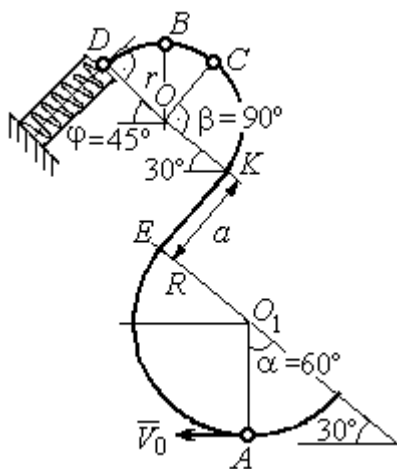


Рис. 4.17. Схема движения шарика

Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках E и K , составляют с горизонтом угол 30° . На стержень надет шарик массой $m = 0,5$ кг. В точке A , положение которой на дуге радиуса R определяется углом $\alpha = 60^\circ$ (см. рис. 4.17), шарiku сообщают начальную скорость V_0 , после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения $f = 0,2$. До-

стигнув точки D на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью $c = 100$ Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку B) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при $k = 0,3$. При

найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C , положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90^\circ$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения A в наивысшее положение – точку B .

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движения шарика по прямой EK на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 4.18, b). Ра-

боту совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

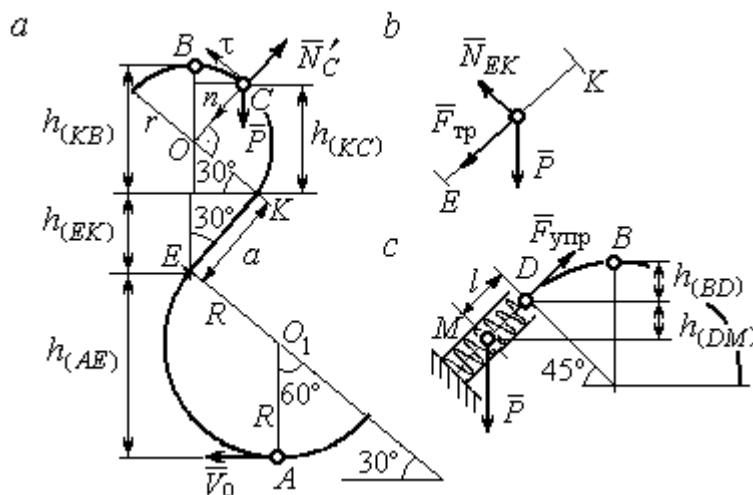


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке A , $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке B , $V_B = 0,3 V_0$.

Для вычисления перепада высот точек A и B имеем выражение (рис. 4.18, a):

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} = R(1 + \sin 30^\circ) + a \cos 30^\circ + r(1 + \sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения A в

положение B , получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{тр})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$,

$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения AB и силы трения на отрезке EK . Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg \cos 60^\circ$ (рис. 4.18, a, b).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в конечное положение B принимает вид: $\frac{m(0,3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mg[(R+r)(1 + \sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f \cdot \cos 60^\circ)]$.

После подстановки данных задачи, получим: $0,91V_0^2 = 55,517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: $V_0 = 7,81$ м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке C .

Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, a). Уравнение движения шарика в точке C в проекции на нормальную ось имеет вид: $m \frac{V_C^2}{r} = P \cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке C , N'_C – реакция стержня, приложенная к шарiku. Направление реакции на рис. 4.18, a соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке C воспользуемся тем, что скорость шарика в точке B уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения C в конечное положение B . На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках C и B ; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек C и B ;

$h_{(CB)} = r(1 - \sin 30^\circ) = 0,5r$ (см. рис. 4.18, a). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0,3V_0 = 2,34$ м/с, найдём $V_C = 3,22$ м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P \cos 30^\circ - m \frac{V_C^2}{r} = -6,12 \text{ Н.}$

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке C (см. рис. 4.18, a) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке C равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки B до положения максимально сжатой пружины – точки M . Движение на этом участке происходит по дуге окружности BD и по прямой DM . При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения B в M получим: $\frac{mV_M^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M , V_B – скорость шарика в точках M и B . Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} = P[h_{(BD)} + h_{(DM)}] = mg[r(1 - \cos 45^\circ) + l \cos 45^\circ]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке DM длиной l : $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке M скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_B^2}{2} = mg[r(1 - \cos 45^\circ) + l \cos 45^\circ] - \frac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке B найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2,34 \text{ м/с}$, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3,468l - 2,085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0,24 \text{ м}$.

5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e) \quad \text{или} \quad J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_k^e),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси z ; J_z – момент инерции тела относительно оси z .

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e, \quad ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e, \quad J_{zC} \varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F_{kx}^e ,

F_{ky}^e – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z , проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединённых нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α . Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3 .

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3} .

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{z2} , м	i_{z3} , м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	—	$2r$	—
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	—	$2r$	—
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—

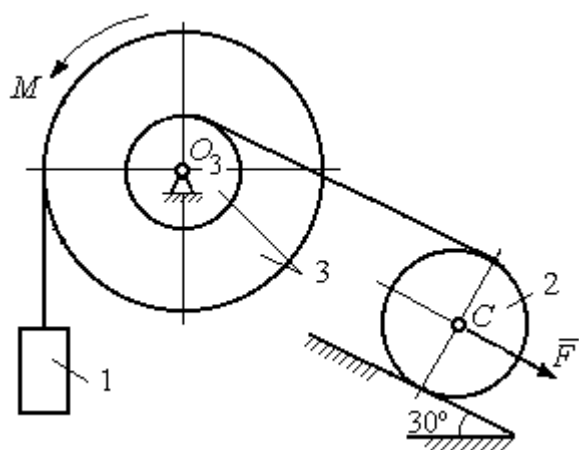
Номер варианта задания	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$F, \text{ Н}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$\alpha, \text{ град}$	$R_2, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$R_3, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$i_{z2}, \text{ м}$	$i_{z3}, \text{ м}$
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{2}$	—
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	—	$r\sqrt{3}$	—
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	—	$2r$	—
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	—	$2r$	r	—	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	—	$2r$	—
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	—	$3r$	r	—	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	—	$r\sqrt{3}$	—
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	—	$r\sqrt{3}$	—
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	—	$3r$	$2r$	—	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	—	$2r$	—
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	—	$3r$	$2r$	—	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P, P_2 = 2P, P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$,

приложенных к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической си-



стемой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

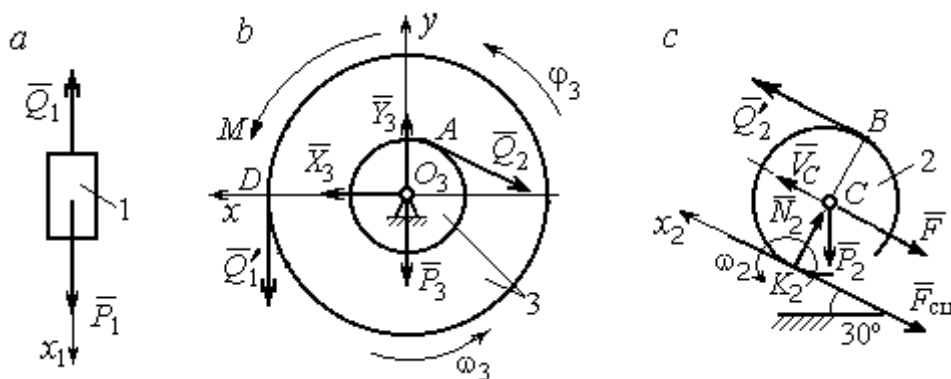


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
 а – поступательное движение груза 1; б – вращательное движение блока 3;
 с – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, а). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1 , a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через его центр масс O_3 , перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3 .

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент M и реакции нитей $\vec{Q}'_1$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q'_1 R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси z ; ε_3 – угловое ускорение

диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g} (r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}'_2$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}'_2$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2 . Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через

центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q'_2 - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q'_2 R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C , ε_2 – ускорение центра масс и угловое

ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска,

$$J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P R_2^2}{g} = \frac{4 P r^2}{g}. \text{ В уравнении вращательного движения диска мо-}$$

мент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C , то угловая скорость катка определится по формуле:

$$\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}, \text{ где } CK_2 \text{ – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновен-}$$

ного центра скоростей (см. рис. 5.4, с). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс

$$\text{катка 2 и его угловым ускорением: } \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}.$$

$$\text{Скорость точки } B \text{ катка 2 (см. рис. 5.4, с) } V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C.$$

Точка B катка 2 и точка A блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек A и B , получим равенство:

$$2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r, \text{ откуда } \omega_3 = \frac{2V_C}{r}. \text{ После дифференцирования по-}$$

$$\text{следнего выражения найдём соотношение между ускорениями: } \varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}.$$

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\begin{aligned} \frac{2P}{g} a_1 &= 2P - Q_1, & \frac{9Pr^2}{g} \varepsilon_3 &= Q_1 3r + Pr - Q_2 r; \\ \frac{2P}{g} a_C &= Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, & \frac{4Pr^2}{g} \varepsilon_2 &= Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r \end{aligned}$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \frac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{12P}{g} a_C &= 2P - Q_1, & \frac{18P}{g} a_C &= 3Q_1 + P - Q_2, \\ \frac{2P}{g} a_C &= Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, & \frac{P}{g} a_C &= Q_2 + F_{\text{сц}}, \end{aligned}$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1 , а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g} a_C = 7P - Q_2, \quad \frac{3P}{g} a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \frac{10}{111} g$, $Q_2 = \frac{79}{37} P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого

уравнения исходной системы: $Q_1 = \frac{34}{37} P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси x, y имеют вид :

$$m_3 a_{O_3x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad m_3 a_{O_3y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3 , – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси x, y (см. рис. 5.4, b). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0,919P$ и $Q_2 = 2,135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1,85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4,98P$. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5,31P$.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении:

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2, \text{ где } m \text{ – масса тела; } V_C \text{ – скорость центра масс тела.}$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси z :

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \text{ где } J_z \text{ – момент инерции тела относительно оси } z; \quad \omega \text{ – угловая}$$

скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инер-

ции относительно оси z , проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – ра-

диус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z –

радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном**

движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра

масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z ,

проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = F S \cos \alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа

положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90^\circ$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ : $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V \cos \alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O \cos \alpha \pm F h_O \omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса O .

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T , T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сум-

ма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

Вес дисков P_1 и P_2 . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и пары сил с моментом M . Направления действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β , показанными на схемах механизмов.

Радиус однородного диска r . Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r . Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

1. Найти ускорение центра масс диска 2.
2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

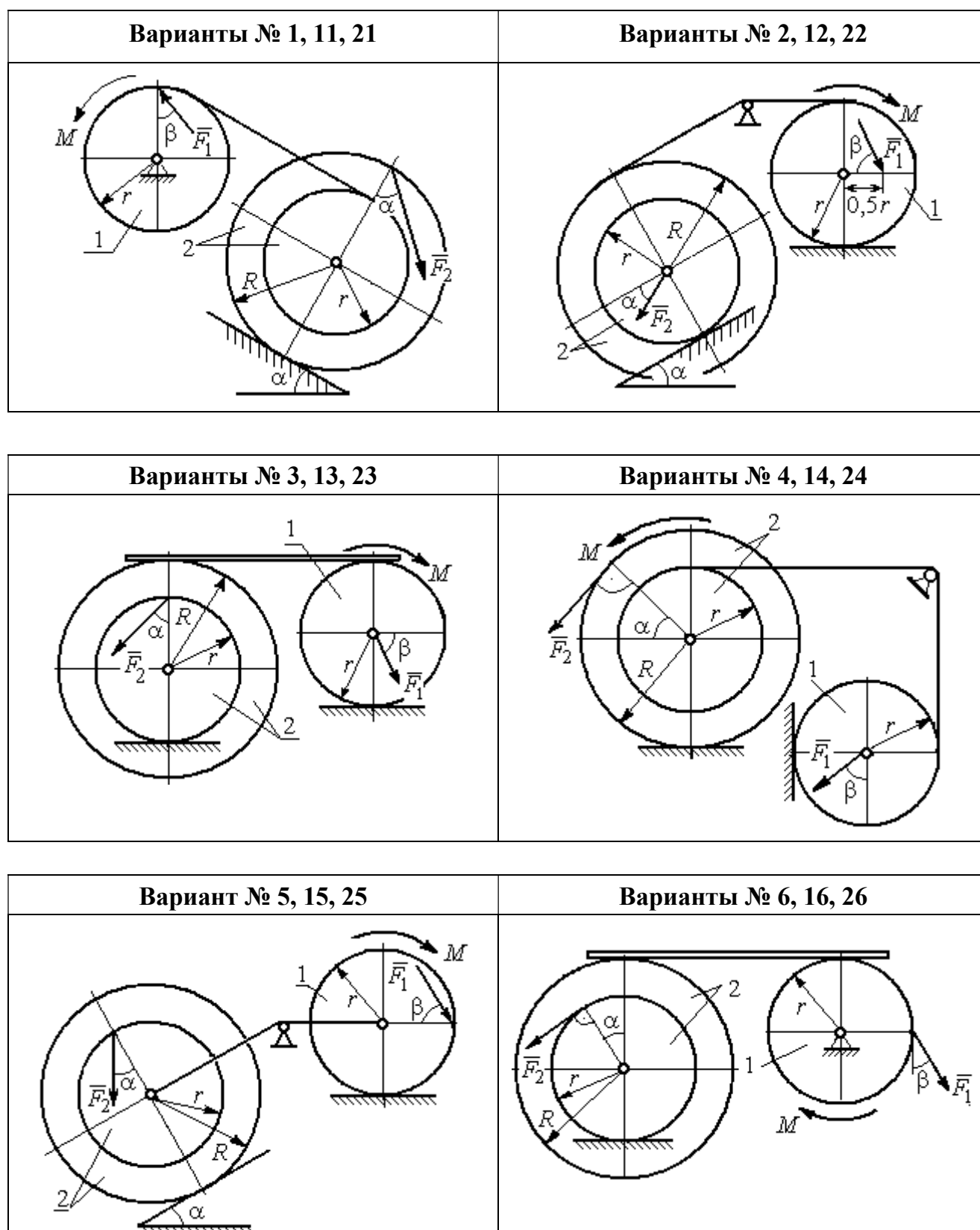


Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

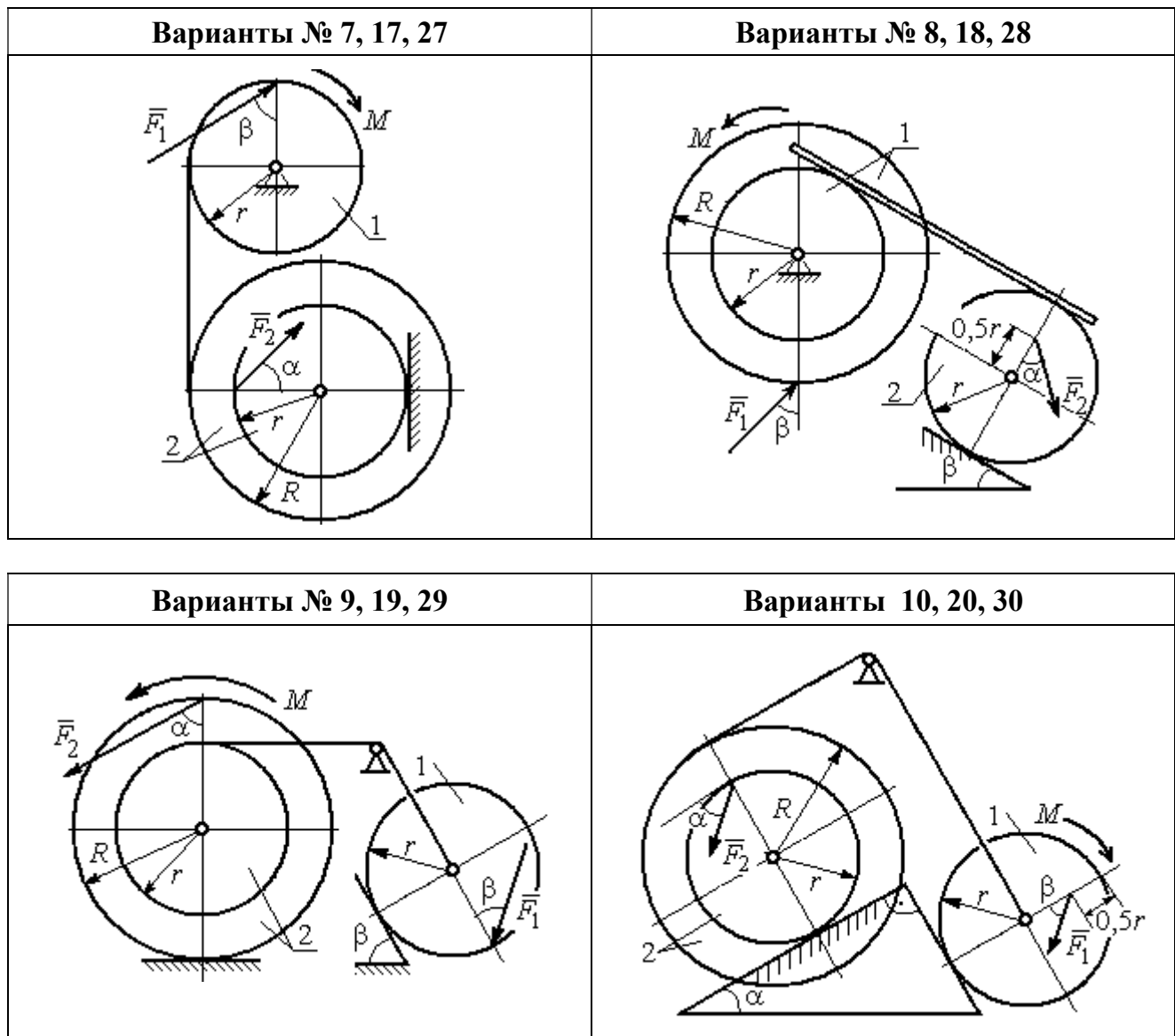


Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	F_1 , Н	F_2 , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	F_1 , Н	F_2 , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M . Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β .

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 . Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания.

Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

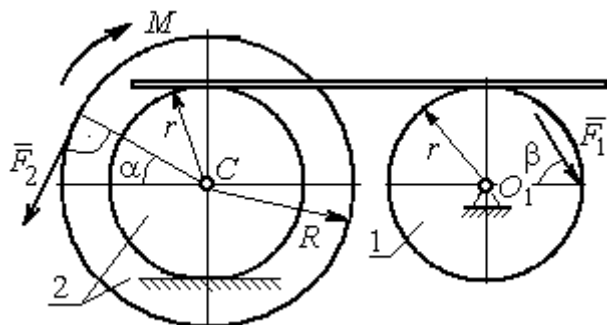


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1 , реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н,

$P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, радиусы дисков $R = 0,8$ м, $r = 0,6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0,4$ м.

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира O_1 , разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом M , нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

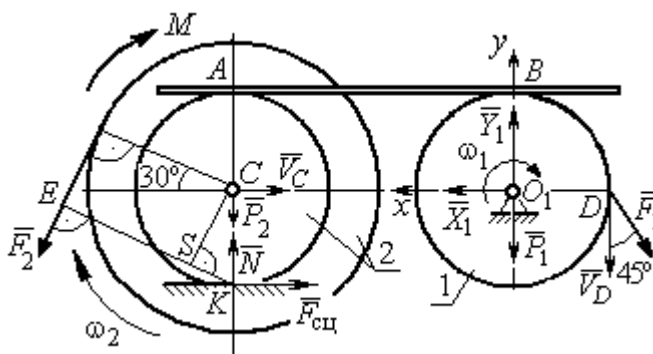


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C , ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.8). Тогда скорость точки C определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки A на диске 2 равна скорости точки B на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравняв скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2.$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1, \vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K ; $\vec{\omega}_2, \omega_2$ – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K . Мощ-

ность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2 (R + r \cos 60^\circ) \omega_2 = -F_2 V_C \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r \cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C . Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R \omega_2 = -F_2 V_C \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M \omega_2 = M \frac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке D , $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \right) + M \frac{V_C}{r} + F_1 V_C \sqrt{2}.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right] = -F_2 V_C \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \right) + M \frac{V_C}{r} + F_1 V_C \sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r} \right) + \frac{M}{r} + F_1 \sqrt{2} \right] g}{\left[2P_1 + P_2 \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6,85 \text{ м/с}^2$.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки K – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{r} = \frac{a_C}{r} = 11,42 \text{ рад/с}^2$. Угловое ускорение диска 1

находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22,84 \text{ рад/с}^2$.

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

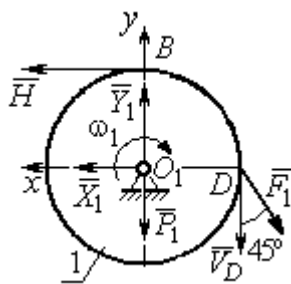


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме:

$J_{zO_1} \varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси z , проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z .

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси z : $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r \cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного

движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g} \varepsilon_1 = F_1 r \cos 45^\circ - Hr$.

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 $\varepsilon_1 = 22,84 \text{ рад/с}^2$, найдем реакцию стержня $H = 28,63 \text{ Н}$.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y , как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1 \sin 45^\circ = 0, \quad Y_1 - P_1 - F_1 \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28,63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27,94$ Н, $Y_1 = 96,57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100,53$ Н.

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат xCy показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2 \cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2 \cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28,63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6,85$ м/с², находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28,27$ Н, $N = 85,98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90,51$ Н.

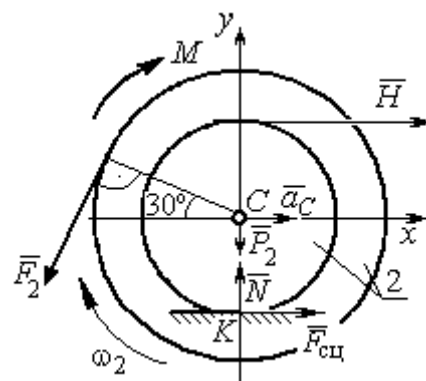


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению

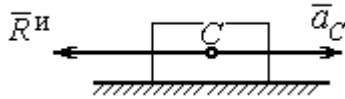


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^и = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^и$, равному по величине $R^и = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^и$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^и = J_z \varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z ; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

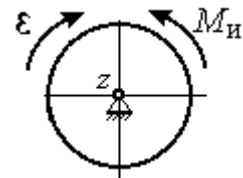


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^и$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^и$, равным главному моменту сил инерции относительно оси,

проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^и = ma_c$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_c$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела:

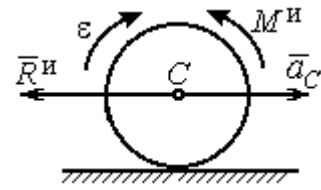


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

$M^и = J_c \varepsilon$, где J_c – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^и = 0, \quad \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^и = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^и$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра O ; $\vec{M}_O^и$ – главный момент сил инерции относительно центра O .

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма

элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r . Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M . Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β . Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

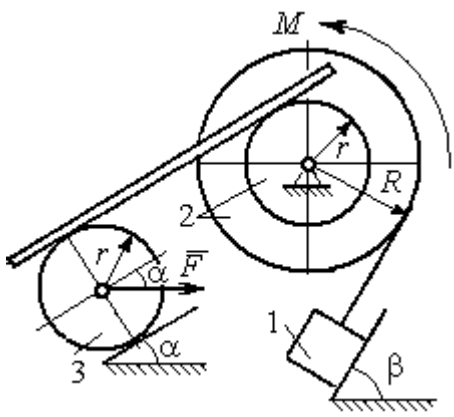
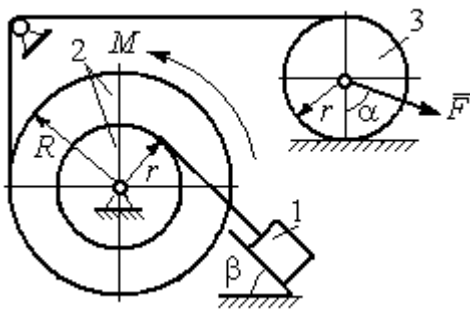
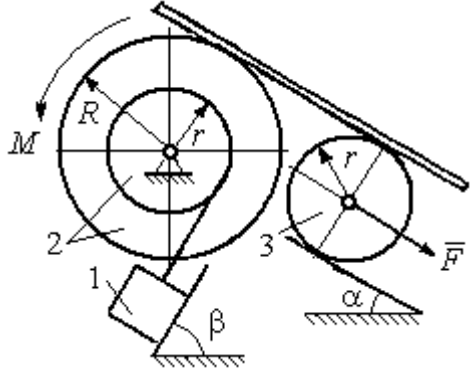
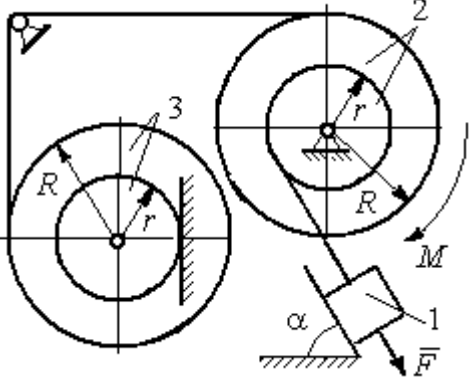
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

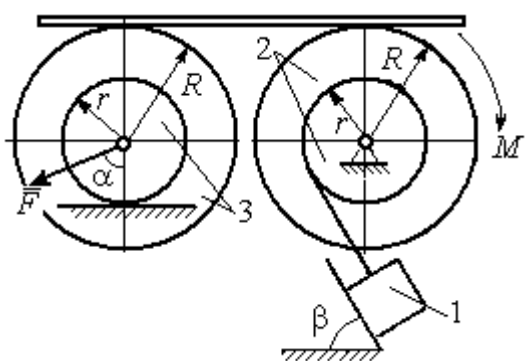
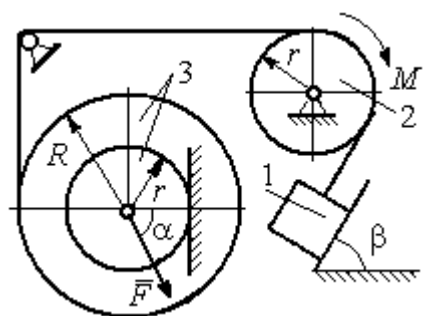
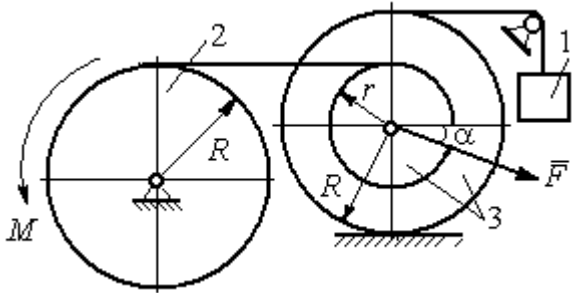
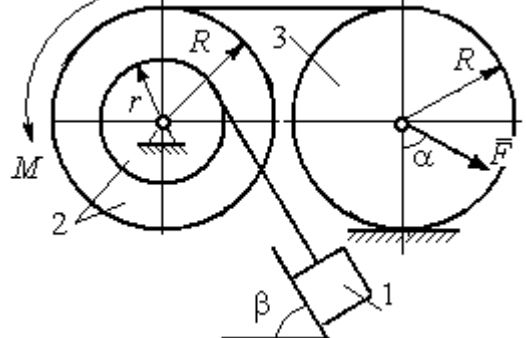
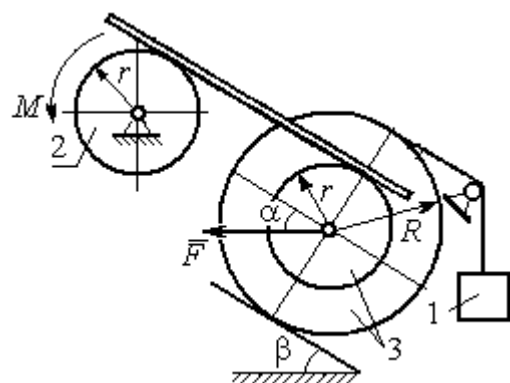
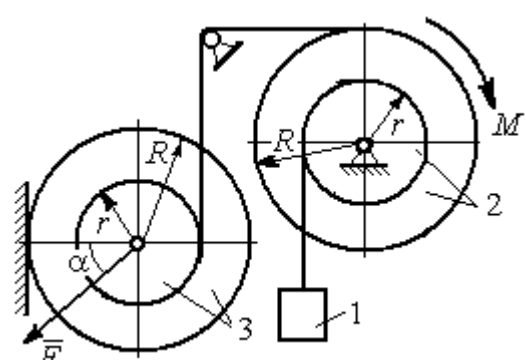
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

**Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы
с применением общего уравнения динамики**

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	α , град	β , град	R , м	r , м	i_z , м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	—	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	—	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	—	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	—	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	—	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	—	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	—	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	—	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	—	1,0	0,8	0,9

**Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической
системы с применением общего уравнения динамики**

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилиндра.

дрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил

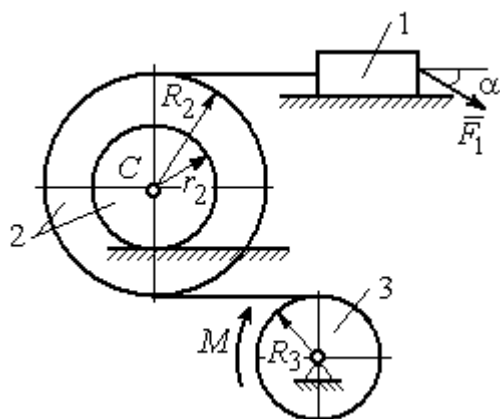


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом M , приложенной к диску 3.

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя.

Определить реакцию шарнира диска 3 в момент $t = 1$ с, если: $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 = 15$ Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; $R_2 = 0,8$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,4$ м; $i_{2C} = 0,6$ м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом M , приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3 , ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C , a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1 , a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^и$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^и = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^и$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^и$ относительно оси, прохо-

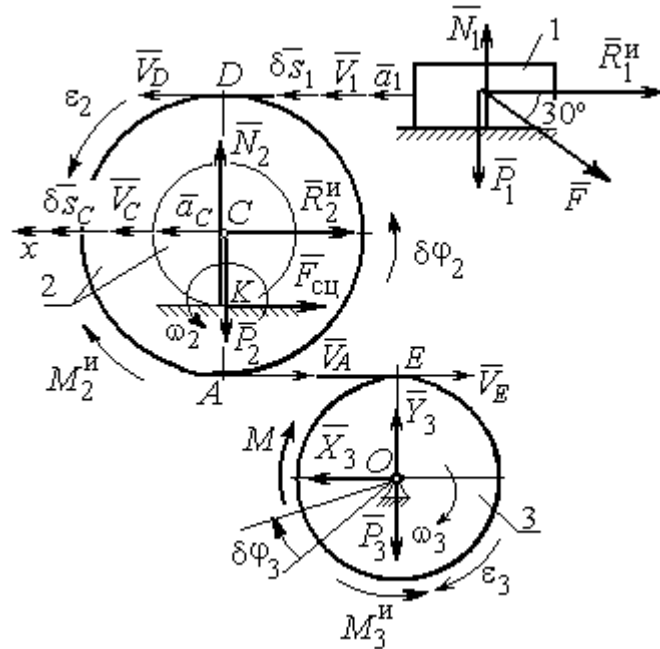


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

дящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^и = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^и = J_{2C} \epsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ϵ_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^и$ в сторону, противоположную угловому ускорению ϵ_2 .

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой ра-

вен главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3 . Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке K касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2

$\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r_2}$. Скорость точки A катка 2:

$V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta \varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0, \quad \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M , приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M \delta \varphi_3 = M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F \delta s_1 \cos 150^\circ = -F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) &= \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ = \\ &= \left[6(1 + 2t) \left(\frac{0,8 - 0,2}{0,4 \cdot 0,2} \right) - 5(t + 1) \left(\frac{0,8 + 0,2}{0,2} \right) 0,866 \right] \delta s_C = (23,35 + 68,35t) \delta s_C. \end{aligned}$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$\begin{aligned} R_1^{\text{н}} = m_1 a_1 &= \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{н}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g}, \\ M_2^{\text{н}} &= J_{2C} \varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2}, \end{aligned}$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O} \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g} \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2g r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}} \delta s_1 \cos 180^\circ = - \frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}} \delta s_C \cos 180^\circ = - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C, \quad \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = - \frac{P_2 i_{2C}^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2g r_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) &= - \frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_{2C}^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2g r_2^2} \delta s_C = \\ &= - \frac{a_C \delta s_C}{g} \left[\frac{10(0,8 + 0,2)^2}{0,2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0,6^2}{0,2^2} + \frac{15(0,8 - 0,2)^2}{2 \cdot 0,2^2} \right] = - 52,75 a_C \delta s_C, \end{aligned}$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23,35 + 68,35t) \delta s_C - 52,75 a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0,44 + 1,29t.$$

Выберем ось x по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось x , получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0,44 + 1,29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0,44\frac{t^2}{2} + 1,29\frac{t^3}{6} + C_1t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0, V_C = 0, x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0,22t^2 + 0,21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3, \vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

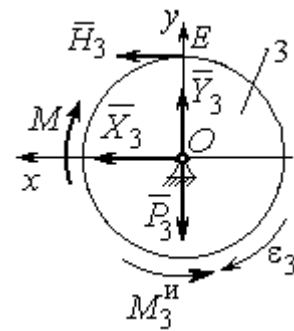


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, где $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\epsilon_3 = \frac{P_3R_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2}$. Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2} = \frac{6(1 + 2t)}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)}{2gr_2}(0,44 + 1,29t) = 13,99 + 27,04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41,04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -H_3 = -41,04$ Н, $Y_3 = P_3 = 15$ Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

$$\text{Полная реакция шарнира } R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 43,69 \text{ Н.}$$

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых S независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_S \cdot \delta q_S$. Величина Q_k , равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \dots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c . Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z .

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M .

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20} , направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

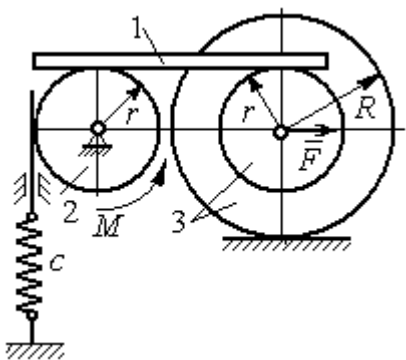
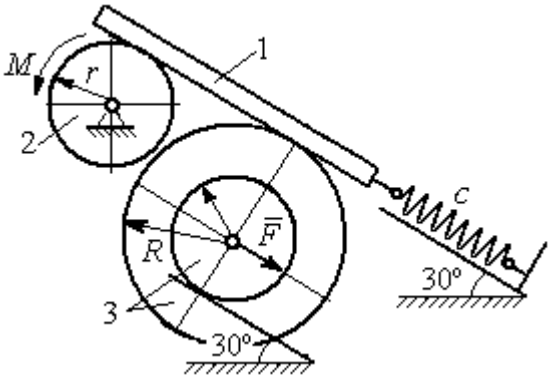
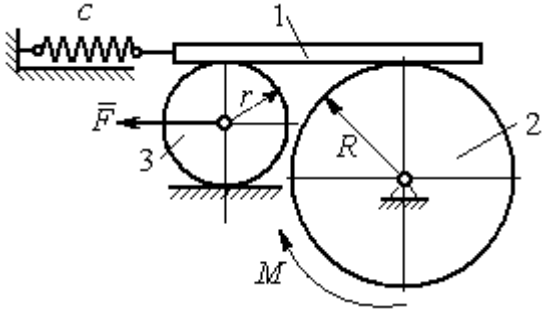
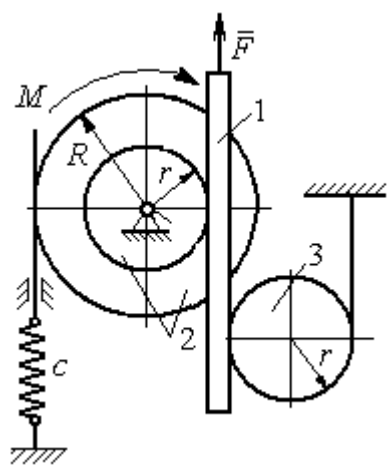
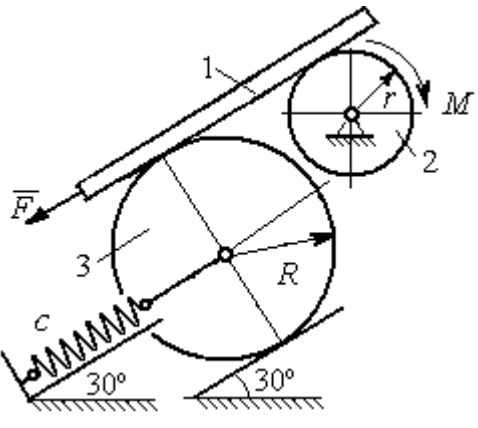
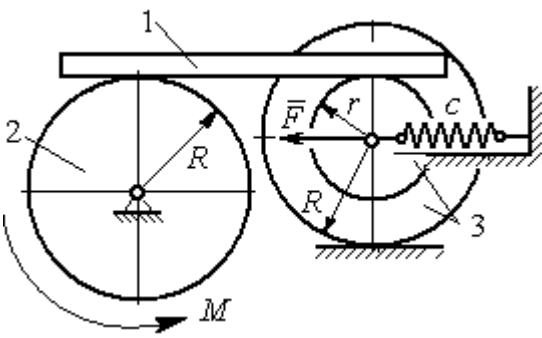
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

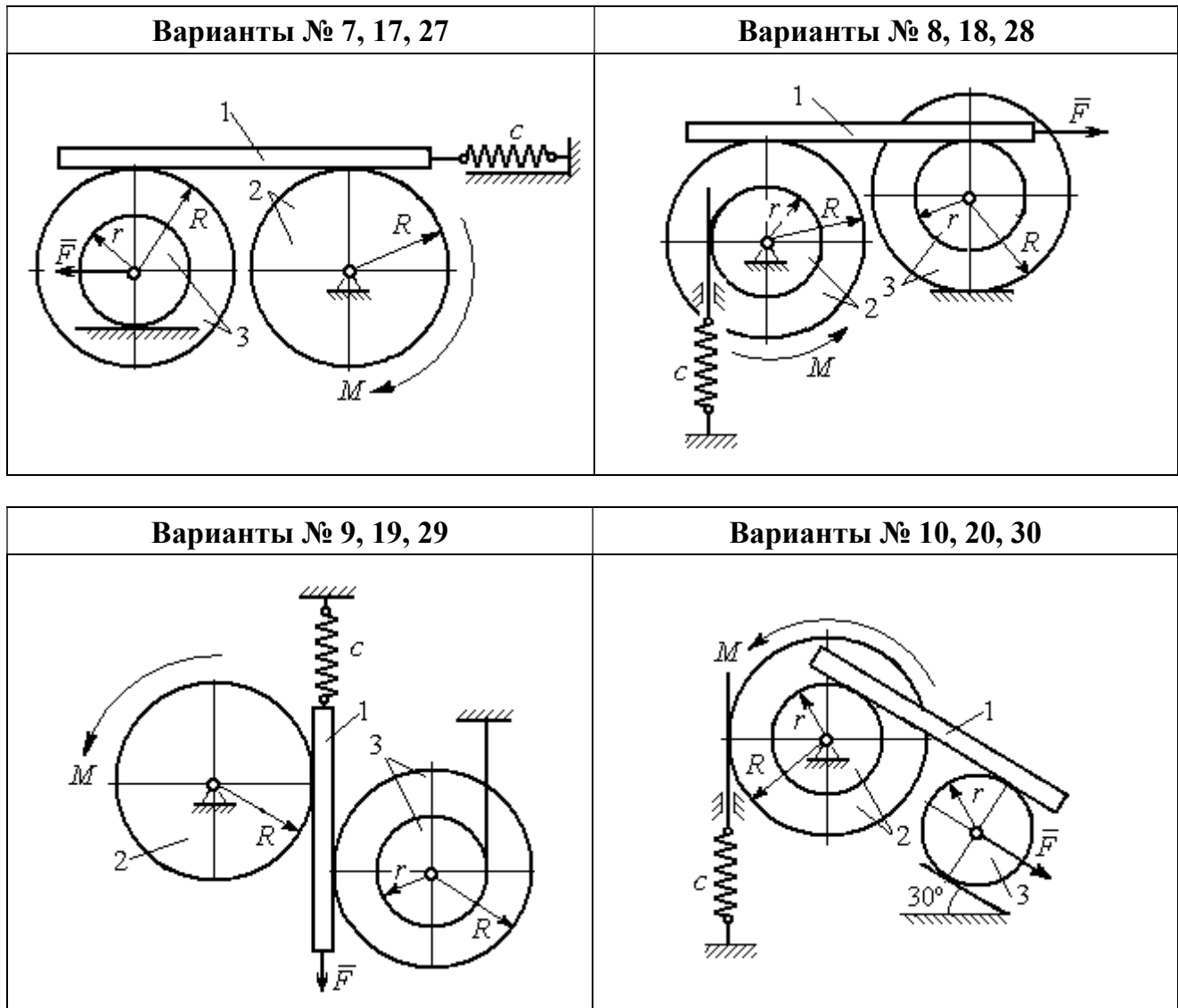


Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	—
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	—

Номер варианта задания	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	M , Н·м	c , Н/м	ω_{20} , рад/с	R , м	r , м	i_z , м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	-10	-2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	-8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	-12	-4	65	0,4	0,6	0,5	—
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	-10	2	70	0,2	1,2	0,6	—
16	10	12	12	-5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	-6	-2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	-10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	-3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	-3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	-2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	-8	2	45	0,2	0,8	0,6	—
24	12	20	18	-4	-8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	-6	-2	60	0,1	1,4	0,7	—
26	8	12	10	10	-3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	-3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	-6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	-10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c . Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r , радиус однородного диска r . Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует.

Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z .

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1,5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0,2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастяннутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0,5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

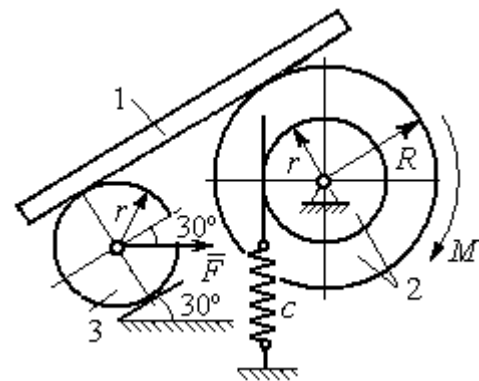


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастяннутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

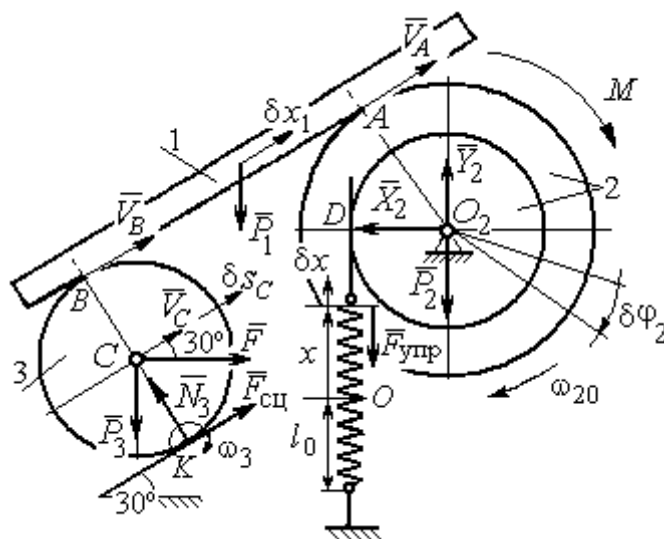


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T –

кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x .

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2$, где m_1 , V_1 – масса и скорость бруса.

Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z , $J_{2z} = m_2i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2}m_3V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2}m_3r^2$; r – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2 , ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщенную скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1

равна скорости точки A блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость

катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x}R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3

учтено, что точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является

мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{P}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{r} \right)^2 = 1,125 \frac{P}{g} \dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} (r\sqrt{2})^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = 2 \frac{P}{g} \dot{x}^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2} \right)^2 = 0,422 \frac{P}{g} \dot{x}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 3,547 \frac{P}{g} \dot{x}^2.$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x , показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся

на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1 : $\delta x_1 = \frac{\delta x R}{r}$,

центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C : $\delta S_C = \frac{\delta x R}{2r}$. Все перемещения

получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом M , сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента M , приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M) = M \delta\varphi_2 = M \frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести

бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1) = P_1 \delta x_1 \cos 120^\circ = -P_1 \delta x_1 \cos 60^\circ = -\frac{P_1 \delta x R}{2r}$.

Работы силы тяжести катка 3 и силы F : $\delta A(P_3) = P_3 \delta S_C \cos 120^\circ = -P_3 \frac{\delta x R}{4r}$,

$\delta A(F) = F \frac{\delta x R}{2r} \cos 30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из неде-

формированного положения на расстояние x : $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}} \delta x \cos 180^\circ = -cx \delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) = \\ &= M \frac{\delta x}{r} - \frac{P_1 \delta x R}{2r} - P_3 \frac{\delta x R}{4r} + F \frac{\delta x R}{2r} \cos 30^\circ - cx \delta x = P(1,174 - 5x) \delta x, \end{aligned}$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1,174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x : $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7,094 \frac{P}{g} \dot{x}$,

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 7,094 \frac{P}{g} \ddot{x}$. Ре-

зультаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7,094 \frac{P}{g} \ddot{x} = P(1,174 - 5x), \text{ или при } g = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad \ddot{x} + 6,91x = 1,62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6,91} = 2,63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0,23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 2,63t + C_2 \cos 2,63t + 0,23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастяннутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20} , то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20}r = 0,1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0,23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2,63C_1 \cos 2,63t - 2,63C_2 \sin 2,63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0,038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0,038 \sin 2,63t - 0,23 \cos 2,63t + 0,23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1,5 x(t) = 0,057 \sin 2,63t - 0,34 \cos 2,63t + 0,34 \text{ м};$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5 x(t) = 0,19 \sin 2,63t - 1,15 \cos 2,63t + 1,15 \text{ рад.}$$

$$\text{Амплитуда колебаний бруса } A = \sqrt{0,057^2 + 0,34^2} = 0,35 \text{ м.}$$

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M . Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны R . Найти уравнения движения системы в обоб-

щённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

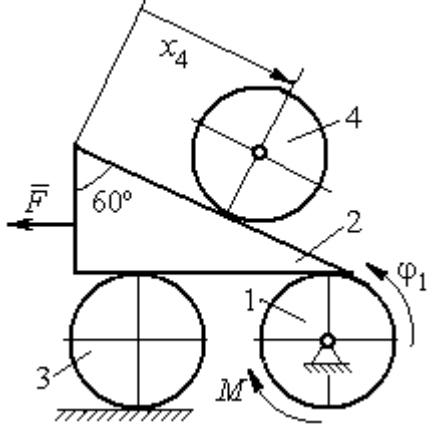
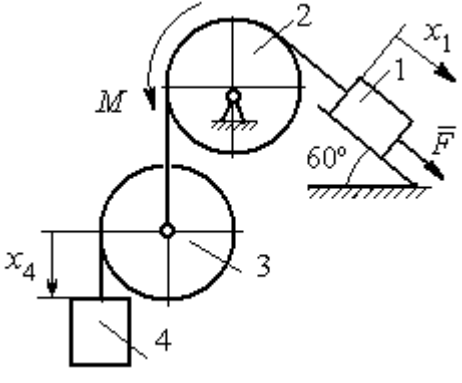
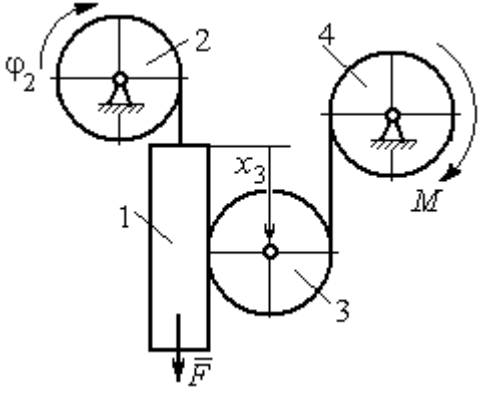
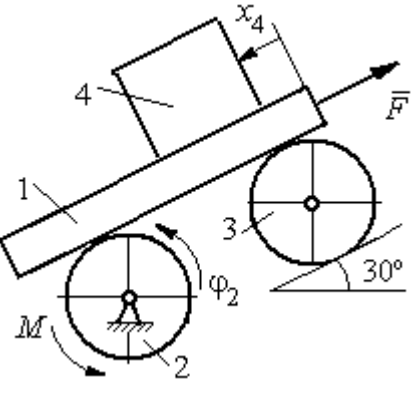
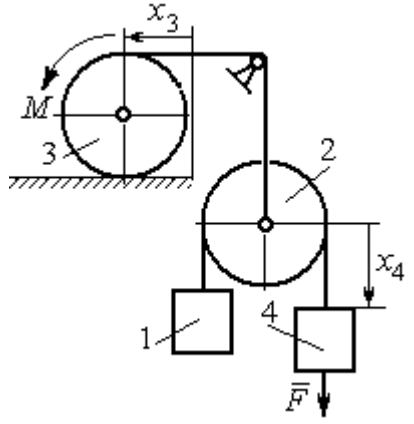
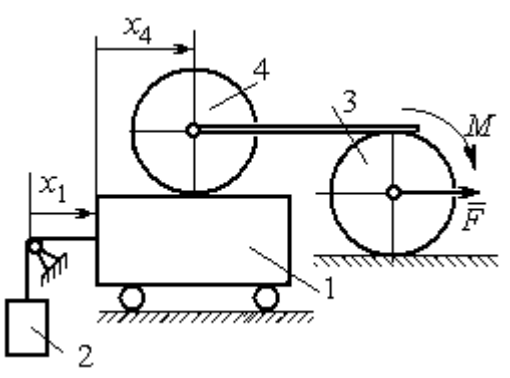
Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	
Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

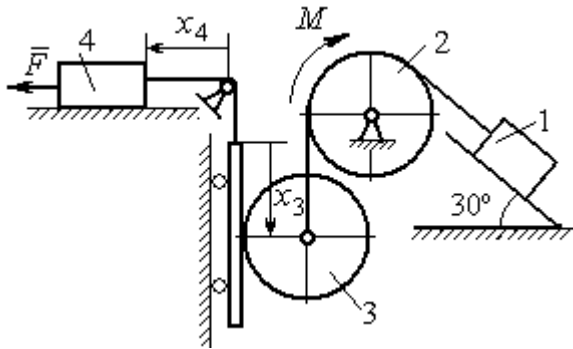
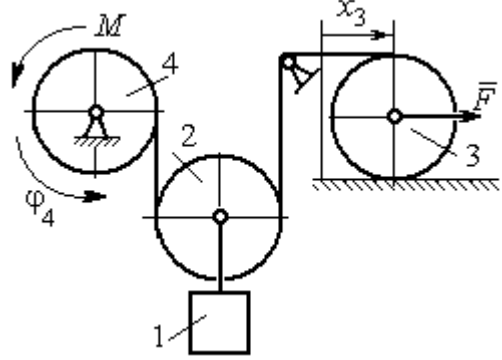
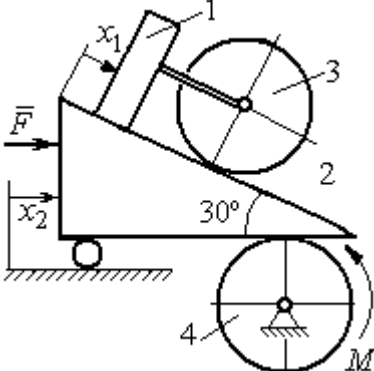
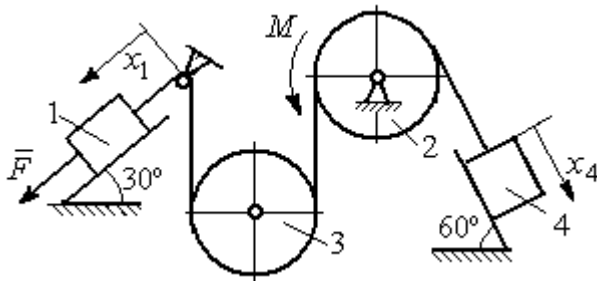
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P_1, \text{Н}$	P	$2P$	P	$1,5P$	P	$3P$	P	$1,2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
$P_2, \text{Н}$	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
$P_3, \text{Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
$P_4, \text{Н}$	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
$R, \text{м}$	$2r$	$1,5r$	$2,5r$	$1,2r$	$2r$	r	$1,5r$	r	$2r$	r	$1,5r$	$1,2r$	$2r$	$2r$	$2r$
$F, \text{Н}$	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1,5P$	$4P$	$2P$
$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_1, \text{Н}$	$4P$	$1,5P$	P	$2P$	P	P	$1,5P$	$1,5P$	$2P$	P	P	$2P$	$1,2P$	$3P$	$1,2P$
$P_2, \text{Н}$	$2P$	$2P$	$2P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	$2P$	$1,2P$	$2P$	$3P$	$2P$
$P_3, \text{Н}$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	P	P	$3P$
$P_4, \text{Н}$	$1,5P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	P	$2P$	P	$2P$
$R, \text{м}$	$1,5r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$	$1,5r$	$2r$	r	$1,5r$	$2r$	r	$1,2r$	$2r$
$F, \text{Н}$	$2P$	$2P$	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	P	$3P$	$1,5P$	$4P$	$2P$	$3P$
$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$3Pr$	$2Pr$	$4Pr$	Pr	$4Pr$	$4Pr$	$2Pr$	Pr	$4Pr$	$2Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4,

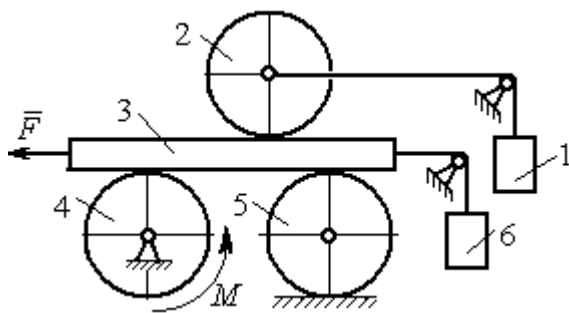


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M . Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, переброшенному через невесомый блок, при-

креплен груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R . К центру катка 2 прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщенных координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение

катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_{x_2}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2} , Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия плат-

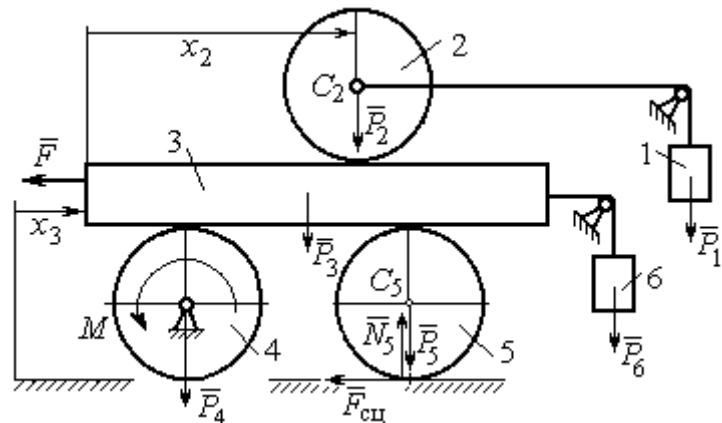


Рис. 6.16. Действующие силы и обобщённые координаты механической системы

формы $T_3 = \frac{P_3}{2g} V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3 = \dot{x}_3$.

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2$, где J_4 , ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4 = \frac{V_3}{R_4} = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5 = \frac{1}{2} \frac{P_5}{g} V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5 , V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка K касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2} V_3 = \frac{1}{2} \dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, а).

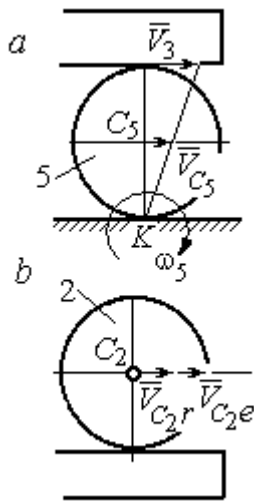


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, б), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, б).

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном

движении: $\omega_2 = \frac{V_{C_2 r}}{R_2} = \frac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по

формуле: $T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \frac{P_1}{2g} V_1^2$, $T_6 = \frac{P_6}{2g} V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = \\ = \frac{P_1}{2g} V_1^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{P_3}{2g} V_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} \frac{P_5}{g} V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2 + \frac{P_6}{2g} V_6^2,$$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$,

$V_{C_5} = \frac{1}{2} \dot{x}_3$, $\omega_5 = \frac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков:

$J_2 = \frac{P_2 R_2^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \frac{P_4 R_4^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \frac{P_5 R_5^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения

скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g} (\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} (\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pr^2}{g} \left(\frac{\dot{x}_2}{2r} \right)^2 + \frac{3P}{2g} \dot{x}_3^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pr^2}{g} \left(\frac{\dot{x}_3}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(\frac{\dot{x}_3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pr^2}{g} \left(\frac{\dot{x}_3}{4r} \right)^2 + \frac{P}{2g} \dot{x}_3^2 = \\ = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g} (\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g} \dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g} \dot{x}_2 \dot{x}_3 + \frac{35P}{8g} \dot{x}_3^2.$$

работа сил на перемещении $\delta x_3: \delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2 , оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0, \delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2 : $Q_{x_2} = P$.

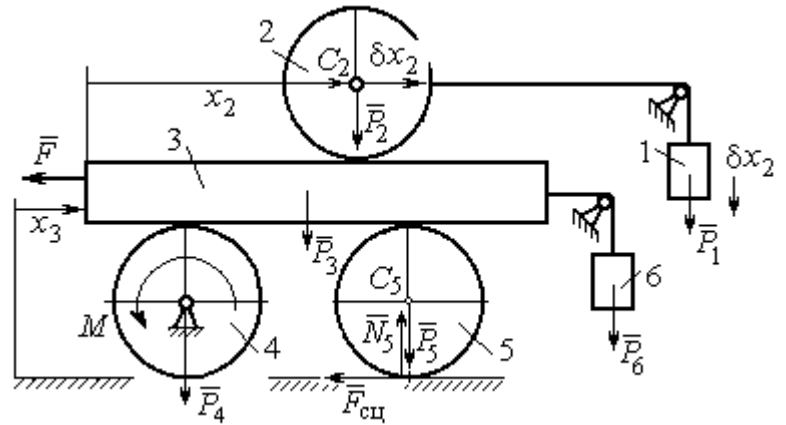


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g} \dot{x}_2 + \frac{35P}{4g} \dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g} \dot{x}_2 + \frac{3P}{g} \dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{3P}{g} \ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g} \ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{4P}{g} \ddot{x}_2 + \frac{3P}{g} \ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0,19g \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0,39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0,095gt^2, \quad x_2 = 0,195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0,1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}x_2 = \frac{1}{2r}x_2 = 0,097\frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4}x_3 = \frac{1}{2r}x_3 = -0,047\frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2}x_3 = -0,047gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0,024\frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2. – СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: в 2-х томах. – М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Ляцев С. А. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Подписано в печать

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 9,75 Уч. изд. л. 6,5 Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет.

Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ.....	73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки.....	73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки....	73
4.3. Колебания материальной точки	80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки	84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки.....	95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии	96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы.	103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы	104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы.	112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии	114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики.....	124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики	126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода.....	136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа	137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы	145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	155



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный
горный университет»

А. И. Афанасьев, Ю. М. Казаков, С. А. Ляпцев

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебно-методическое пособие
и контрольные задания на курсовой проект
«Кинематический, силовой анализ и синтез
плоского механизма»

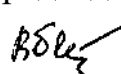
Екатеринбург
2014

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией
горно-механического факультета
«20» октября 2014 г.

Председатель комиссии

 проф. В. П. Барановский

А. И. Афанасьев, Ю. М. Казаков, С. А. Ляпцев

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Учебно-методическое пособие
и контрольные задания на курсовой проект
«Кинематический, силовой анализ и синтез
плоского механизма»*

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому
университетскому и техническому образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
«Машиностроение»

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики 4 сентября 2014 г. протокол № 1 и рекомендовано для издания в УГГУ.

Афанасьев А. И., Казаков Ю. М., Ляпцев С. А.

- А94 ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН: учебно-методическое пособие и контрольные задания на курсовой проект «Кинематический, силовой анализ и синтез плоского механизма» для студентов направления бакалавриата 151000 – «Машиностроение» очного и заочного обучения / А. И. Афанасьев, Ю. М. Казаков, С. А. Ляпцев. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 80 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и пример выполнения курсового проекта по теме: «Кинематический и динамический анализ плоского рычажного механизма, синтез профиля кулачка с плоским или роликовым толкателем».

© Афанасьев А. И.,
Казаков Ю. М., Ляпцев С. А., 2014
©Уральский государственный горный
университет, 2014

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА	7
1.1. Структурный анализ механизма	7
1.2. Графическое определение положений звеньев механизма	9
1.3. Кинематический анализ плоского механизма	10
1.4. Силовой анализ механизма	17
1.5. Синтез кулачкового механизма.....	20
2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ	28
3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА	51
3.1. Структурный анализ механизма	52
3.2. Построение плана механизма.....	55
3.3. Построение плана скоростей механизма	57
3.4. Построение плана ускорений механизма.....	61
3.5. Кинетостатический расчёт механизма	66
3.6. Определение движущего момента на валу кривошипа по методу Н. Е. Жуковского	75
3.7. Построение профиля кулачка.....	77
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	82

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

Задание на курсовой проект по анализу плоского рычажного механизма и синтезу профиля кулачка с плоским или роликовым толкателем включает в себя кинематическую схему механизма и его параметры, вид кулачкового механизма и характер движения толкателя.

Варианты заданий содержат схемы плоских рычажных механизмов, таблицы исходных данных и параметры движения толкателя. Способ выбора варианта задания приведены в разделе 2.

Учебно-методическое пособие содержит сводку основных понятий, необходимых для кинематического и динамического анализа плоского механизма, а также пример выполнения курсового проекта.

Все схемы и чертежи к курсовому проекту выполняются на одном листе формата A1. Пояснительная записка выполняется на листах формата A4. При оформлении записки на титульном листе указать тему курсового проекта, фамилию, инициалы студента, специальность и группу.

При выполнении задания все преобразования и числовые расчёты должны быть последовательно проделаны с необходимыми пояснениями.

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение курсового проекта по прикладной механике связано с решением ряда задач по определению рациональных параметров механизмов на основе их кинематического и динамического анализа и последующий синтез механизма. Студент, самостоятельно выполняющий задание, часто сталкивается с трудностями выбора методов решения и вынужден обращаться к соответствующей литературе. К сожалению, в последнее время такой литературы становится все меньше, а справочные материалы, содержащие весь комплекс вопросов, связанных с проектированием механизмов и машин, достаточно редки.

В учебно-методическом пособии приведено решение одной из основных задач курса прикладной механики – **анализ механизма**, который заключается в исследовании кинематических и динамических свойств плоского рычажного механизма по заданной его схеме. Задача **синтеза механизма** в настоящем пособии ограничена конструированием профиля кулачка, обеспечивающего заданное движение толкателя.

В основе методик решения задач курсового проекта лежат фундаментальные положения механики, математики, сопротивления материалов, что позволяет считать курс прикладной механики связующим звеном между общенаучными и специальными дисциплинами. Все излагаемые материалы служат основой выполнения заданий по расчету и проектированию механизмов горных машин и могут быть использованы для самостоятельной работы.

1. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

1.1. Структурный анализ механизма

Механизм есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел. Твердое тело, входящее в состав механизма, называется **звеном**. В каждом механизме имеется неподвижное звено, называемое **стойкой**, а также **входное звено**, которому сообщается движение, и **выходное звено**, совершающее заданное движение. Остальные подвижные звенья называются соединительными, или промежуточными.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется **кинематической парой**. По характеру соприкосновения звеньев в паре сами пары подразделяются на низшие и высшие. Кинематическую пару называют **низшей**, если соприкосновение происходит по поверхности, и **высшей**, если соприкосновение происходит по линии или в точке. Низшие кинематические пары могут выдерживать большую нагрузку, а высшие имеют меньшие потери на трение.

Число связей, налагаемых кинематической парой, определяет **класс пары**. В курсовом проекте рассматриваются плоские механизмы, в которых все звенья соединены поступательными или вращательными кинематическими парами, относящиеся к пятому классу.

Одним из методов нахождения структурной схемы механизма является метод присоединения к ведущему звену структурных групп Ассура. **Группой Ассура** называется кинематическая цепь, которая в случае ее присоединения элементами внешних пар к стойке получает нулевую степень подвижности, то есть образует ферму. Связь между числом подвижных звеньев группы Ассура и количеством входящих в неё кинематических пар определяется по структур-

ной формуле плоской кинематической цепи: $3n = 2p_5$, где n , p_5 – число подвижных звеньев и число кинематических пар 5-го класса в группе Ассура.

Группы Ассура II класса соответствуют значениям $n = 2$, $p_5 = 3$; группы Ассура III класса – значениям $n = 4$, $p_5 = 6$. На рис. 1.1 приведены возможные виды групп Ассура II класса.

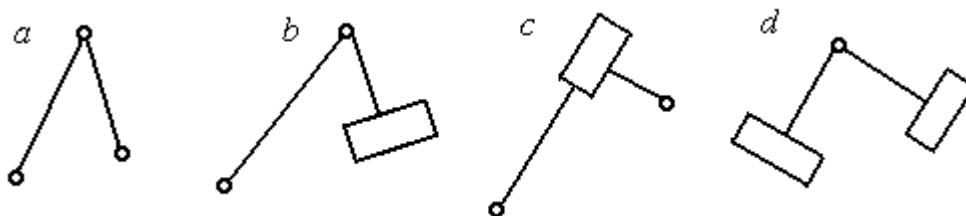


Рис. 1.1. Группы Ассура II класса:
a – первого вида; *b* – второго вида; *c* – третьего вида; *d* – четвёртого вида

Разложение механизма на группы Ассура следует начинать с последней, наиболее отдалённой от ведущего звена и наиболее простой группы.

Структурная классификация механизмов заключается в следующем. Начальное звено и стойка, образующие кинематическую пару 5-го класса, принимаются за **механизм I класса**. Далее исходный механизм разбивается на группы Ассура, присоединяемые к механизму I класса. Для каждой из присоединённых групп Ассура определяется её класс. **Класс механизма** равен максимальному классу входящих в его состав групп Ассура.

Структурным анализом механизма является определение количества звеньев и кинематических пар, определение степени подвижности механизма, а также установление класса механизма. Проводя структурный анализ механизма, необходимо придерживаться следующей схемы решения:

1. Определить количество ведущих звеньев механизма как степень его подвижности, которая может быть вычислена по формуле П. Л. Чебышева для плоских механизмов: $W = 3n - 2p_5$, где n , p_5 – число подвижных звеньев в механизме и число кинематических пар 5-го класса.

2. Изобразить звенья механизма, образующие кинематические пары, определить вид относительного движения звеньев в паре, дать наименование пары и определить её класс.

3. Изобразить группы Ассура механизма, дать им наименование и определить класс.

4. Описать схему образования механизма группами Ассура, определить класс механизма.

Результаты структурного анализа механизма приводятся в табл. 1.1 – 1.2.

Таблица 1.1

Анализ кинематических пар

Обозначение кинематической пары						
Звенья, образующие пару						
Наименование пары						
Класс пары						

Таблица 1.2

Анализ групп Ассура

Группы Ассура			
Наименование группы Ассура			
Класс групп Ассура			
Класс механизма			

1.2. Графическое определение положений звеньев механизма

Построение плана механизма следует начинать с определения масштабного коэффициента длины k_ℓ . Масштабный коэффициент длины выбирается таким образом, чтобы длина самого большого звена $\ell_{\max}$, заданная в метрах, не превышала на чертеже 100 ÷ 150 мм. Тогда масштабный коэффициент длины равен: $k_\ell = \frac{\ell_{\max}}{(100-150)} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$. Например, максимальная длина звена механизма

$\ell_{\max} = 0,4$ м. Предположим, что на чертеже длина 0,4 м должна быть равной 100 мм. Масштабный коэффициент длины в этом случае равен: $k_\ell = \frac{0,4}{100} = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$. В соответствии с выбранным масштабным коэффициентом определяем длины остальных звеньев на чертеже по формуле: $\ell'_i = \frac{\ell_i}{k_\ell}$ мм, где ℓ_i – заданная длина i -го звена, м; ℓ'_i – длина i -го звена на чертеже, мм.

В начале построения плана механизма на чертеже фиксируются неподвижные точки – оси вращения кривошипа, коромысла и расстояния, определяющие положения прямых, вдоль которых движется ползун. По заданным значениям длины кривошипа и угла, задающего его начальное положение, определяется первая точка плана механизма. Далее построение проводится методом зацепов. Для этого из фиксированных центров проводятся дуги радиусами, равными длинам звеньев механизма, рассчитанным в соответствии с масштабным коэффициентом. Точки пересечения дуг являются точками соединения звеньев механизма.

Построение плана механизма проводится на листе формата А1. Масштаб выбирается самостоятельно.

1.3. Кинематический анализ плоского механизма

1.3.1. Построение плана скоростей плоского механизма

Основу построения плана скоростей составляет векторная формула определения скорости точки M плоской фигуры: $\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}$, где $\vec{V}_P$ – вектор скорости точки P , выбранной за полюс; $\vec{V}_{MP}$ – вектор скорости точки M во вращательном движении плоской фигуры относительно полюса P . Величина скорости V_{MP} определяется из выражения: $V_{MP} = \omega \cdot MP$, где ω – угловая скорость плоской фигуры.

Чтобы воспользоваться векторной формулой построения скорости точки на чертеже, необходимо выбрать масштабный коэффициент скорости k_v , который равен отношению скорости полюса к длине отрезка, изображающего эту скорость. Для обеспечения требуемой точности длину отрезка принимают равной $40 \div 80$ мм, тогда $k_v = \frac{V_P}{(40 \div 80)} \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. Построение плана скоростей для заданного положения механизма начинается с определения модуля и направления вектора скорости точки конца кривошипа, которая в дальнейшем принимается за полюс. Результаты вычислений абсолютных и относительных скоростей точек, скоростей центров масс звеньев механизма и их угловых скоростей приводятся в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Абсолютные скорости центров масс и угловые скорости звеньев

Звено				
Обозначение скорости центра масс звена				
Величина скорости, м/с				
Обозначение угловой скорости звена				
Величина угловой скорости, рад/с				

Построение плана скоростей точек механизма с учётом масштабирования проводится на том же листе формата А1, где изображена схема механизма.

1.3.2. Построение плана ускорений плоского механизма

Построение плана ускорений состоит в многократном применении векторной формулы определения ускорения точки M плоской фигуры, совершающей плоское движение: $\vec{a}_M = \vec{a}_P + \vec{a}_{MP}^n + \vec{a}_{MP}^\tau$, где $\vec{a}_P$ – ускорение точки P , выбранной за полюс; $\vec{a}_{MP}^n$, $\vec{a}_{MP}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки M во вращательном движении плоской фигуры относительно полюса P .

Величины ускорений $\vec{a}_{MP}^n$, $\vec{a}_{MP}^\tau$ определяются из выражений: $a_{MP}^n = \omega^2 \cdot MP$, $a_{MP}^\tau = \varepsilon \cdot MP$, где ω , ε – угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры. Сложение векторов производится по обычному правилу, когда к концу первого вектора присоединяется второй, к концу второго – третий. Тогда вектор, направленный из начала первого в конец последнего, называется суммой этих векторов.

Чтобы воспользоваться векторной формулой построения ускорения точки на чертеже необходимо выбрать масштабный коэффициент ускорения k_a , который равен отношению ускорения полюса к длине отрезка, изображающего это ускорение. Для обеспечения требуемой точности длину отрезка принимают равной $40 \div 80$ мм, тогда $k_a = \frac{a_P}{(40 \div 80)} \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$.

Построение плана ускорений для заданного положения механизма начинается с определения модуля и направления вектора ускорения точки конца кривошипа. Это связано с тем, что ведущее звено – кривошип вращается с постоянной скоростью и потому вектор ускорения точки конца кривошипа совпадает по величине и направлению со своей нормальной составляющей. В дальнейшем точка конца кривошипа принимается за полюс.

Результаты вычислений ускорений центров масс звеньев, а также угловых ускорений звеньев механизма приводятся в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Ускорения центров масс звеньев механизма и угловые ускорения звеньев

Звено				
Обозначение ускорения центра масс звена				
Величина ускорения, м/с ²				
Обозначение углового ускорения звена				
Величина углового ускорения, рад/с ²				

Построение плана ускорений точек механизма с учётом масштабирования проводится на том же листе формата А1, где изображены схема механизма в заданном положении и план скоростей.

1.3.3. Особенности построений планов скоростей и ускорений кулисного механизма

В кулисных механизмах одно из звеньев, называемое *кулисным камнем*, может перемещаться поступательно относительно другого подвижного звена – *кулисы* (на рис. 1.2 звено 2 является кулисой). В результате кулисный камень совершает **сложное движение**.

Напомним, что сложное движение твердого тела раскладывается на два составляющих движения: относительное (относительно подвижной системы отсчета) и переносное (движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной).

Скорость точки в сложном движении определяется как векторная сумма: $\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_M$ – абсолютная скорость точки; $\vec{V}_r$ – скорость точки в относительном движении; $\vec{V}_e$ – скорость той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает подвижная точка (переносная скорость точки).

При определении ускорения точки в сложном движении следует, наряду с относительным и переносным ускорением, учитывать ускорение Кориолиса: $\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_K$. Для плоского переносного движения модуль ускорения Кориолиса равен: $a_K = 2\omega V_r$.

Рассмотрим пример построения планов скоростей и ускорений для кулисного механизма (рис. 1.2, *a, b*). Проведем графические построения для положения механизма, в котором кривошип OA (звено 1) перпендикулярен линии O_1O . Предположим следующие исходные данные: $OA = 0,2$ м; $O_1O = 0,34$ м; угловая скорость кривошипа $\omega_1 = 10$ рад/с.

Начальное звено 1 совершает вращательное движение, и потому скорость точки A звена 1 $\vec{V}_{A1}$ находится как $V_{A1} = \omega_1 \cdot OA = 10 \cdot 0,2 = 2$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_{A1}$ направлен перпендикулярно звену 1 в сторону его движения.

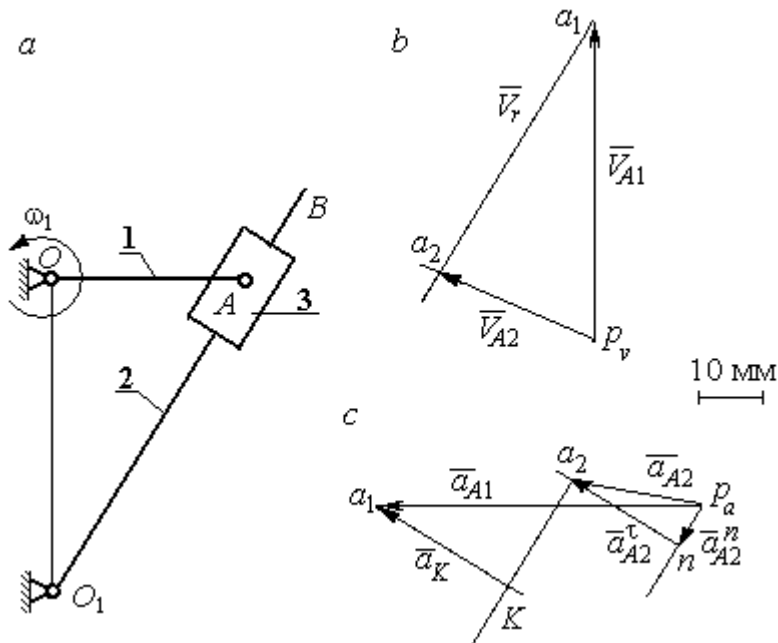


Рис. 1.2 Кинематика кулисного механизма:
 a – схема механизма; b – план скоростей; c – план ускорений

Выбрав произвольную точку p_v за полюс плана скоростей (см. рис. 1.2, b), изобразим вектор скорости $\vec{V}_{A1}$, задавшись его длиной $l_{V_A} = 50$ мм на плане скоростей. В этом случае масштабный коэффициент скорости $k_v = \frac{V_A}{l_{V_A}} = \frac{2}{50} = 0,04$ (м/с)/мм. В конце вектора $\vec{V}_{A1}$ на плане скоростей отметим точку a_1 .

Точка A кулисного камня 3 совершает сложное движение. Относительным движением точки будет движение камня вдоль прямой O_1B , переносным – вращение звена 2 вокруг оси O_1 . В результате абсолютная скорость точки (скорость $\vec{V}_{A1}$) может быть представлена в виде суммы векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V}_{A1} = \vec{V}_r + \vec{V}_{A2}$. Вектор переносной скорости точки A звена 2 $\vec{V}_{A2}$ направлен перпендикулярно к O_1A (так как переносное движение

вращательное), а вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ – вдоль прямой O_1A (так как относительное движение прямолинейное).

Из полюса плана скоростей проведём прямую, перпендикулярную O_1A – направление переносной скорости $\vec{V}_{A2}$, а из точки a_1 – прямую, параллельную O_1A – направление относительной скорости $\vec{V}_r$. Обозначим точку пересечения этих прямых a_2 . Тогда отрезок p_1a_2 в выбранном масштабе отображает переносную скорость.

Измерив на плане скоростей (рис. 1.2, б) отрезок p_1a_2 ($p_1a_2 = 25$ мм), найдем величину переносной скорости $V_{A2} = p_1a_2 \cdot k_v = 25 \cdot 0,04 = 1$ м/с. Аналогично, измерив отрезок a_1a_2 (43 мм), получим величину относительной скорости $V_r = a_1a_2 \cdot k_v = 43 \cdot 0,04 = 1,72$ м/с. При заданном направлении движения вектор относительной скорости направлен от a_2 к a_1 .

Вычислив длину O_1A в данном положении механизма $O_1A = \sqrt{(OA)^2 + (O_1O)^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,34^2} = 0,39$ м, найдём величину угловой скорости звена 2 как отношение $\omega_2 = \frac{V_{A2}}{O_1A} = \frac{1}{0,39} = 2,56$ рад/с.

Переходим к построению **плана ускорений**. При равномерном вращении звена 1 ускорение точки A звена 1 равно: $a_{A1} = a_{A1}^n = \omega_1^2 \cdot OA = 100 \cdot 0,2 = 20$ м/с². Вектор ускорения $\vec{a}_{A1}$ направлен вдоль звена 1 от точки A к оси вращения O .

Выбрав произвольную точку p_a за полюс плана ускорений (рис. 1.2, с), изобразим вектор ускорения $\vec{a}_{A1}$, положив его длину на плане $l_{a_A} = 50$ мм. Тогда масштабный коэффициент ускорения $k_a = \frac{a_{A1}}{l_{a_A}} = \frac{20}{50} = 0,4$ (м/с²)/мм.

В конце вектора $\vec{a}_{A1}$ на плане ускорений отметим точку a_1 .

Абсолютное ускорение $\vec{a}_{A1}$ может быть представлено в виде векторной суммы: $\vec{a}_{A1} = \vec{a}_r + \vec{a}_{A2} + \vec{a}_K$, где ускорение точки A звена 2 (переносное ускоре-

ние $\vec{a}_{A2}$) имеет две составляющие: $\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A2}^n + \vec{a}_{A2}^\tau$. В результате абсолютное ускорение $\vec{a}_{A1}$ представляется в виде: $\vec{a}_{A1} = \vec{a}_r + \vec{a}_{A2}^n + \vec{a}_{A2}^\tau + \vec{a}_K$.

Величина нормального ускорения в переносном движении $a_{A2}^n = \omega_2^2 \cdot O_1A = 2,56^2 \cdot 0,39 = 2,56 \text{ м/с}^2$. Вектор ускорения направлен вдоль звена 2 от точки A в сторону оси вращения O_1 .

Ускорение Кориолиса $a_K = 2\omega_2 V_r = 2 \cdot 2,56 \cdot 1,72 = 8,81 \text{ м/с}^2$, вектор ускорения перпендикулярен звену 2 и направлен в сторону переносного вращения.

На плане ускорений из полюса ускорений p_a параллельно линии AO_1 изображаем вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_{A2}^n$ длиной

$$l_{a_{A2}^n} = \frac{a_{A2}^n}{k_a} = \frac{2,56}{0,4} = 6,4 \text{ мм. В конце вектора ставим точку } n.$$

Касательная составляющая переносного ускорения точки A звена 2 $\vec{a}_{A2}^\tau$ перпендикулярна линии AO_1 . На плане ускорений из точки n перпендикулярно вектору $\vec{a}_{A2}^n$ (линии $p_a n$) проводим прямую, показывающую направление вектора $\vec{a}_{A2}^\tau$ – касательной составляющей ускорения точки A .

Сумма ускорений должна быть равна абсолютному ускорению $\vec{a}_{A1}$. Тогда векторный многоугольник должен замкнуться в точке a_1 . Для этого построим вектор ускорения Кориолиса перпендикулярно линии AO_1 так, чтобы он был направлен в точку a_1 . Длина вектора на плане $l_{a_K} = \frac{a_K}{k_a} = \frac{8,81}{0,4} = 22,03 \text{ мм}$. Нача-

ло вектора обозначим точкой K .

Относительное ускорение точки A направлено вдоль звена 2 (линии AO_1), поэтому на плане ускорений из точки K проводим перпендикуляр к $a_1 K$ до пересечения с прямой, перпендикулярной $p_a n$, показывающей направление вектора $\vec{a}_{A2}^\tau$ – касательной составляющей ускорения точки A . Полученную точку обозначим a_2 .

Таким образом, на плане ускорений (рис. 1.2, с) вектор pa_2 отображает касательную составляющую ускорения точки A в переносном движении, a_2K – относительное ускорение, Ka_1 – ускорение Кориолиса.

Соединив точку p_a с точкой a_2 , найдем ускорение точки A звена 2. Измерив на плане расстояние $p_a a_2$ (23 мм), найдём величину ускорения $a_{A2} = p_a a_2 \cdot k_a = 23 \cdot 0,4 = 9,2 \text{ м/с}^2$.

Результаты вычислений ускорений центров масс звеньев, а также угловых ускорений звеньев механизма приводятся в таблице, аналогичной табл. 1.4.

Построение плана ускорений точек механизма с учётом масштабирования проводится на том же листе формата А1, где изображены схема механизма в заданном положении и план скоростей.

1.4. Силовой анализ механизма

1.4.1. Определение движущего момента, приведённого к оси вала кривошипа, на основе кинетостатического расчёта механизма

Кинетостатическим расчётом механизма называется его силовой расчёт с учётом сил инерции. В первом приближении расчёт производится без учёта сил трения в кинематических парах. Реакции определяются в кинематических парах по группам Ассура. Расчёт реакций производится на основании принципа Д’Аламбера, согласно которому все силы, приложенные к механизму (или части его), уравновешиваются силами инерции.

Модули главных векторов сил инерции звеньев механизма и главных моментов сил инерции определяют по формулам: $F^{\text{ин}} = ma_S$, $M^{\text{ин}} = J_S \varepsilon$, где $F^{\text{ин}}$, $M^{\text{ин}}$ – модули главных векторов сил инерции звеньев механизма и главных моментов сил инерции; a_S , ε – ускорение центра масс звена и его угловое ускорение; J_S – момент инерции звена относительно его центра масс.

Силовой расчёт производится в следующей последовательности:

1. На чертеже в выбранном масштабе изображается группа Ассура. Расчёт начинается с последней – рабочего органа.

2. В соответствующих точках звеньев прикладываются силы. Силы тяжести из центров тяжести звеньев направляют вертикально вниз. Главные векторы сил инерции звеньев изображаются согласно плану ускорений в сторону, противоположную ускорению центра масс данного звена. Направление главного момента сил инерции противоположно направлению углового ускорения звена, задаваемого касательной составляющей ускорения.

3. Реакции во вращательных кинематических парах раскладывают на две составляющие – вдоль одного из звеньев и перпендикулярно ему. Реакцию стойки на ползун изображают перпендикулярно направляющим ползуна.

4. Неизвестные силы реакции определяются из уравнений равновесия в форме равенства нулю суммы моментов всех сил и из силового многоугольника, выражающего равенство нулю векторной суммы всех сил.

При построении силового многоугольника (плана сил) необходимо выбрать масштабный коэффициент так, чтобы длина максимального вектора была не более $150 \div 200$ мм.

5. На ведущее звено механизма – стойку и кривошип – действуют сила тяжести кривошипа, приложенная на его оси вращения, и реакция шарнира A в конце кривошипа.

Движущий момент, приведённый к оси вала кривошипа и обеспечивающий вращение кривошипа с постоянной угловой скоростью, прикладывается к кривошипу и находится из уравнения моментов сил, действующих на ведущее звено.

1.4.2. Определение движущего момента, приведённого к валу кривошипа, по методу Н. Е. Жуковского

Для вычисления движущего момента, приведённого к валу кривошипа, необходимо знать уравновешивающую силу.

Величина уравнивающей силы определяется по методу «жёсткого рычага» Н. Е. Жуковского следующим образом:

1. Вычисляем силы тяжести, для чего заданные массы звеньев умножаем на ускорение свободного падения (принимаем $g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

2. Вычисляем силы инерции, действующие на механизм. Для этого заданные массы звеньев умножаем на ускорения центров тяжести этих звеньев, которые определили при построении плана ускорения.

3. Вычисляем моменты сил инерции, действующие на механизм. Для этого заданные моменты инерции звеньев относительно их центров тяжести умножаем на угловые ускорения звеньев, которые определили при построении плана ускорения.

Определение приведенной силы «методом жесткого рычага» сводится к следующему:

- строится повернутый на 90° план скоростей механизма;
- в соответствующих точках плана скоростей изображаются заданные силы и силы инерции;
- момент каждой пары сил представляется как две антипараллельные силы, приложенные в двух произвольных точках звена (обычно, крайних точках), направленных перпендикулярно отрезку, соединяющему эти точки;
- уравнивающую силу $F_{\text{ур}}$ прикладывают в крайней точке кривошипа, перпендикулярно ему. Величина уравнивающей силы находится по теореме Н. Е. Жуковского, что сумма моментов всех действующих на механизм сил, приложенных к соответствующим точкам повернутого на 90° плана скоростей механизма, относительно полюса равна нулю.

Величина приведенного к валу кривошипа движущего момента равна:

$$M_{\text{пр}} = F_{\text{ур}} \ell_{\text{кр}}, \text{ где } F_{\text{ур}} - \text{уравнивающая сила, приведённая к кривошипу;}$$

$\ell_{\text{кр}}$ – длина кривошипа.

В конце расчётов проводится сравнение результатов и определяется относительная величина погрешности расчёта движущего момента методом кинетостатического анализа по сравнению с методом Н. Е. Жуковского.

1.5. Синтез кулачкового механизма

Рассматривается процесс синтеза кулачкового механизма с центральным плоским и нецентральным роликовым толкателем, состоящий в определении профиля кулачка по заданному закону движения толкателя.

1.5.1. Построение кинематических диаграмм движения толкателя

Целью построения кинематических диаграмм перемещения толкателя и аналога его скорости в зависимости от угла поворота кулачка является необходимость определения в дальнейшем зависимости аналога скорости толкателя от его перемещения. Такой график, обычно, строится по точкам.

Движение толкателя может быть задано как законом изменения пути, пройденного толкателем, в зависимости от угла поворота кулачка, так и законами изменения аналогов скорости и ускорения в той же зависимости.

Если движение толкателя задано законом перемещения толкателя $S(\varphi)$, то для получения аналога скорости следует произвести дифференцирование:

$S' = \frac{dS}{d\varphi}$. Если движение толкателя задано законом изменения аналога ускоре-

ния $S''(\varphi)$, то для получения аналога скорости и перемещения толкателя необходимо произвести двукратное интегрирование: $S' = \int S'' d\varphi$, $S = \int S' d\varphi$.

Рассмотрим пример построения графиков. Предположим, закон движения толкателя при его подъёме в зависимости от угла поворота кулачка задан графически (рис. 1.4). В задании уточняется аналитический вид законов (линейный или параболический) по фазам движения кулачка.

График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

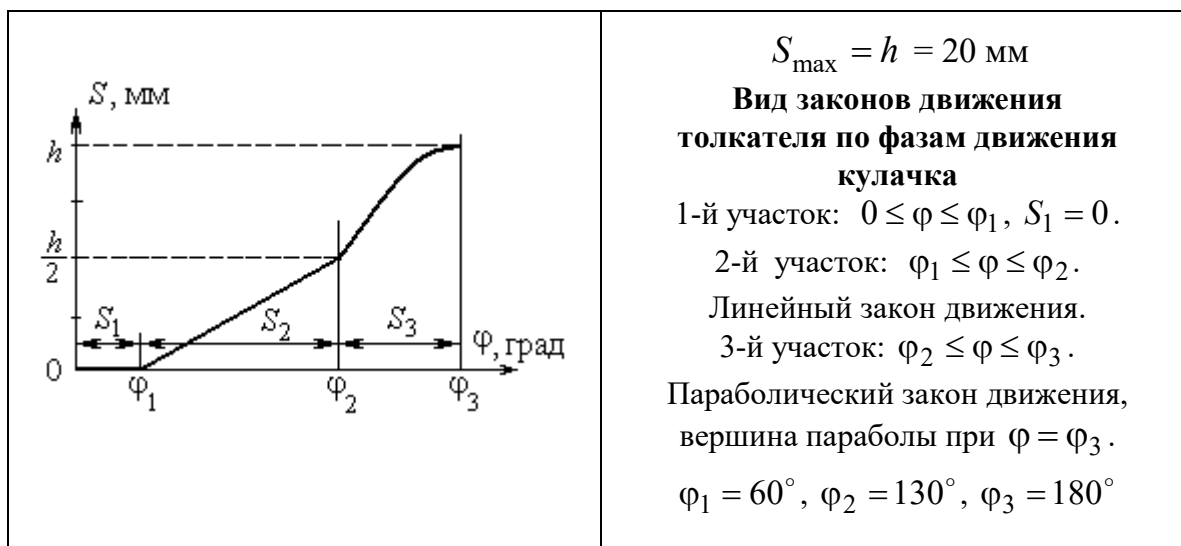


Рис. 1.4. Примерный закон движения толкателя

При заданном законе движения толкателя на первом участке движения при $0 < \varphi < \varphi_1$ перемещения толкателя нет (см. рис. 1.4).

На втором участке движение толкателя происходит по линейному закону в виде: $S_2 = a_2\varphi + b_2$. Из графика найдём величину перемещения толкателя в граничных точках участка φ_1 и φ_2 : $S_2(\varphi_1) = 0$ и $S_2(\varphi_2) = \frac{h}{2} = 10 \text{ мм}$. Подставляя их в уравнение движения (при этом значения граничных точек $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 130^\circ$ следует перевести в радианы), получим два алгебраических уравнения относительно неизвестных a_2 и b_2 : $0 = a_2 \cdot 1,05 + b_2$, $10 = a_2 \cdot 2,27 + b_2$.

Решая систему, находим $a_2 = 8,20$; $b_2 = -8,61$. Таким образом, закон движения толкателя на втором участке $S_2 = 8,20\varphi - 8,61$ при $1,05 < \varphi < 2,27$.

Аналог скорости толкателя на этом участке не зависит от угла поворота кулачка и равен: $S'_2 = \frac{dS_2}{d\varphi} = 8,20 \text{ мм/рад}$.

На третьем участке, на отрезке $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$, толкатель движется по параболическому закону. Представим закон движения в виде: $S_3 = a_3\varphi^2 + b_3\varphi + d_3$, где коэффициенты a_3 , b_3 , d_3 подлежат определению. Первые два уравнения

для определения коэффициентов получим, подставив в уравнение параболы её значения в граничных точках: при $\varphi_2 = 2,27$ рад $S_3(\varphi_2) = \frac{h}{2} = 10$ мм и при $\varphi_3 = 3,14$ рад $S_3(\varphi_3) = h = 20$ мм. Получим уравнения:

$$10 = a_3 \cdot 2,27^2 + b_3 \cdot 2,27 + d_3, \quad 20 = a_3 \cdot 3,14^2 + b_3 \cdot 3,14 + d_3.$$

По условию вершина параболы находится в точке $\varphi = \varphi_3$, следовательно, выполняется равенство: $S'_3(\varphi_3) = 0$. Третье уравнение найдём, подставив координату точки вершины параболы ($\varphi_3 = 3,14$) в уравнение $S'_3 = 2a_3\varphi + b_3 = 0$. Получим: $2a_3 \cdot 3,14 + b_3 = 0$. Решая совместно систему уравнений

$$10 = a_3 \cdot 5,15 + b_3 \cdot 2,27 + d_3, \quad 20 = a_3 \cdot 9,86 + b_3 \cdot 3,14 + d_3, \quad a_3 \cdot 6,28 + b_3 = 0$$

Найдём коэффициенты: $a_3 = -13,33$; $b_3 = 83,71$; $d_3 = -111,37$.

Окончательно, закон движения толкателя на третьем участке

$$S_3 = -13,33\varphi^2 + 83,71\varphi - 111,37 \quad \text{при } 2,27 \leq \varphi \leq 3,14.$$

Соответственно, аналог скорости $S'_3 = -26,66\varphi + 83,71$ мм/рад.

Графики движения толкателя и аналога его скорости приведены на рис. 1.5, а, б. Масштабы выбраны произвольно.

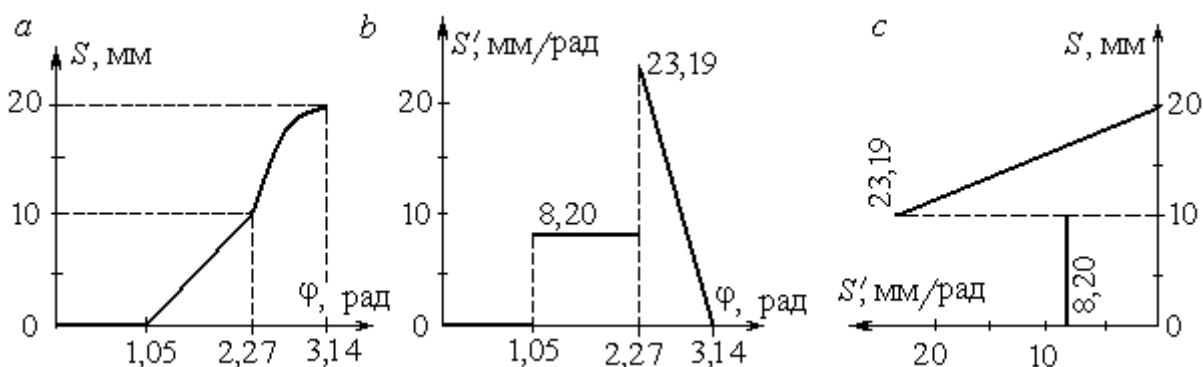


Рис. 1.5. Кинематические диаграммы движения толкателя:
а – график перемещения; б – график аналога скорости; с – зависимость аналога скорости от перемещения толкателя

График зависимости аналога скорости S' от перемещения толкателя S , построенный по точкам, взятым с диаграмм перемещения на фазе подъёма кулачка, приведён на рис. 1.5, с. Ось S , обычно, располагают вертикально вверх,

а ось S' – горизонтально влево. Масштабные коэффициенты по обеим осям должны быть одинаковы и равны масштабному коэффициенту длины.

1.5.2. Синтез кулачкового механизма с центральным плоским толкателем

На рис. 1.6 изображена расчётная схема кулачкового механизма с центральным плоским толкателем. Обозначения, принятые на схеме: φ – угол поворота кулачка; R_0 – минимальный начальный радиус кулачка; β – угол давления кулачка в точке контакта с толкателем; S – перемещение толкателя; R – радиус-вектор точки контакта кулачка с толкателем; θ – полярный угол радиус-вектора R в точке контакта.

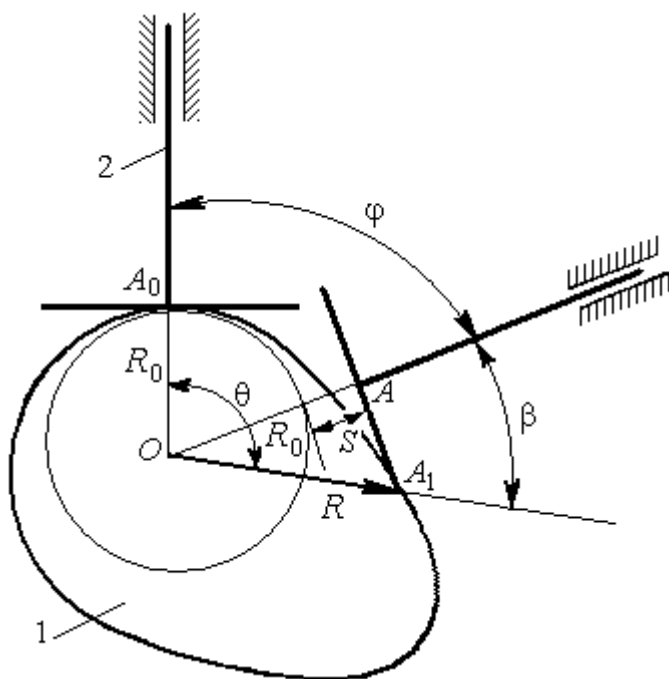


Рис. 1.6. Расчётная схема кулачкового механизма с центральным плоским толкателем:

1 – профиль кулачка с осью вращения в точке O ; 2 – плоский толкатель, движущийся поступательно

2. Задаться максимально допустимым значением угла давления $\theta_{\text{доп}}$, ко-

торое для кулачка с плоским толкателем находится в пределах $20^\circ \leq \theta_{\text{доп}} \leq 30^\circ$.

Для построения профиля кулачка используется метод инверсии (обращения движения), при котором вращение подвижного кулачка заменяется поворотом толкателя вокруг неподвижного кулачка.

Построение профиля кулачка начинается с определения начального (минимально допустимого) радиуса кулачка R_0 .

Для этого необходимо:

1. Построить график зависимости аналога скорости S' от перемещения толкателя S .

3. Под углом $\theta_{\text{доп}}$ к оси S построить прямую, касательную к графику $S'(S)$, и путём измерения на графике соответствующих расстояний, определить координаты S_B и S'_B точки касания.

4. Вычислить начальный радиус кулачка R_0 , который связан с максимальным значением угла давления соотношением: $\text{tg}\theta_{\text{доп}} = \frac{S'_B}{R_0 + S_B}$.

Вычисление начального радиуса R_0 кулачка с центральным плоским толкателем рассмотрим на примере движения толкателя, разобранный в предыдущем п. 1.5.1, и где построен график зависимости аналога скорости толкателя от перемещения.

Положим, что максимально допустимое значение угла давления равно $\theta_{\text{доп}} = 27^\circ$.

На графике зависимости аналога скорости толкателя от перемещения (рис. 1.7) проведём прямую aa под углом $\theta_{\text{доп}}$ к оси перемещений S и касающуюся графика. Точку пересечения касательной с осью S обозначим O , а точку касания с графиком – B . Расстояние AO на графике с учётом масштабного коэффициента длины выражает величину начального радиуса R_0 .

Обозначим координаты точки B на графике S'_B и S_B . В рассматриваемом примере в соответствии с масштабом длин координаты точки B : $S'_B = 23,19$ мм/рад, $S_B = 10$ мм. Соотношение между выбранным допустимым углом давления и

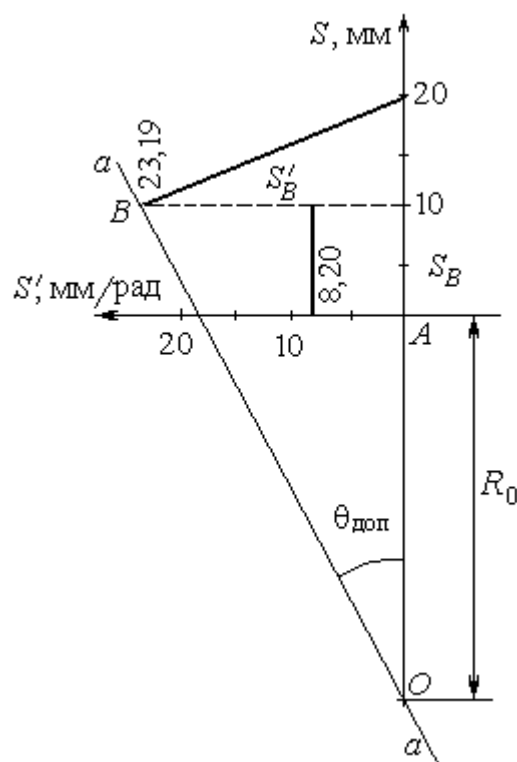


Рис. 1.7. Схема вычисления начального радиуса кулачка с центральным толкателем

начальным радиусом имеет вид: $\operatorname{tg} 27^\circ = 0,51 = \frac{S'_B}{R_0 + S_B} = \frac{23,19}{R_0 + 10}$, откуда величина начального радиуса $R_0 = 35,47$ мм.

Построение профиля кулачка производится в полярной системе координат. Для этого, задавшись углом φ поворота толкателя, необходимо найти полярный угол θ радиус-вектора R в точке контакта A_1 (см. рис. 1.6):

$$\theta = \varphi + \beta = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{S'}{R_0 + S},$$

где S' и S – аналог скорости толкателя и его перемещение при одном и том же значении угла φ поворота толкателя. Длина радиус-вектора R в точке контакта находится по формуле: $R = \sqrt{(R_0 + S)^2 + (S')^2}$.

Отмечая точками на графике длины радиус-векторов, вычисленных при соответствующих полярных углах θ , и обводя их гладкой кривой линией, получим профиль кулачка. Масштаб длин выбирается произвольно.

Для более точного построения профиля желательно внутри каждой фазы движения толкателя выбирать по два – три значения угла поворота кулачка.

1.5.3. Синтез кулачкового механизма с роликовым толкателем

Построение профиля кулачка со смещённым роликовым толкателем начинается с определения начального (минимально допустимого) радиуса кулачка R_0 . Величина начального радиуса кулачка со смещённым толкателем находится следующим образом:

1. Построить график аналога скорости S' толкателя в зависимости от его перемещения S .
2. Выбрать максимально допустимое значение угла давления $\theta_{\text{доп}}$ (для кулачка с роликовым толкателем находится в пределах $20^\circ \leq \theta_{\text{доп}} \leq 45^\circ$).

3. Под углом $\theta_{\text{доп}}$ к оси S построить прямую aa , касательную к графику $S'(S)$.

4. Параллельно оси S на расстоянии e (смещение оси толкателя относительно оси вращения кулачка) провести прямую до пересечения её с касательной aa в точке O' (см. рис. 1.8).

Расстояние $O'A$ выражает величину начального радиуса R_0 , которая находится путём измерения её на графике.

Выбор начального минимально допустимого радиуса кулачка R_0 показан на рис. 1.8 на примере с исходными данными движения толкателя, взятыми из п. 1.5.1 при $\theta_{\text{доп}} = 30^\circ$, $e = 5$ мм.

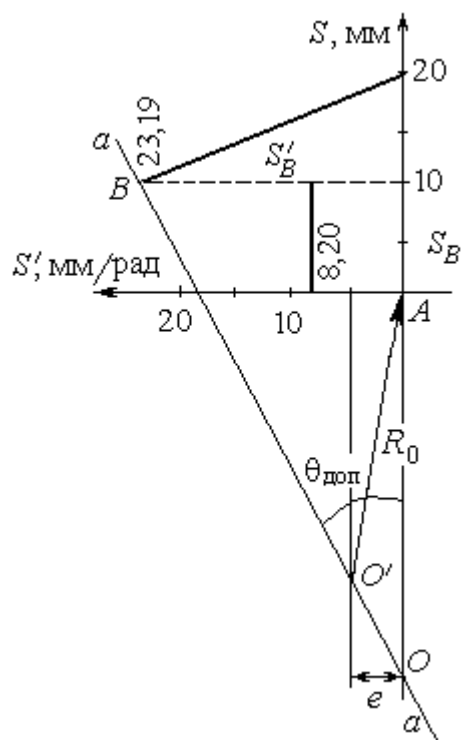


Рис. 1.8. Схема вычисления начального радиуса кулачка с нецентральной толкателем

Расчетная схема для определения профиля кулачка с роликовым толкателем со смещением изображена на рис. 1.9.

Обозначения, принятые на схеме: φ – угол поворота кулачка; R_0 – минимальный начальный радиус кулачка; S – перемещение толкателя; R – радиус-вектор центра ролика толкателя; θ – полярный угол радиус-вектора R в точке контакта относительно начального положения центра роликового толкателя; β – угол для промежуточных вычислений; S_0 – начальная высота центра ролика толкателя относительно оси вращения кулачка; e – смещение оси толкателя относительно оси вращения кулачка (дезаксиал).

Построение профиля кулачка производится в полярной системе координат. Для этого сначала строим окружность радиусом e (см. рис. 1.9), равным величине дезаксиала, и с центром в точке O . Затем из того же центра проводим окружность радиусом R_0 . Проводим вертикальную касательную CB_0 к окруж-

ности радиуса e до пересечения её с окружностью радиусом R_0 . Точка пересечения B_0 является центром ролика в начальном положении толкателя.

В обращенном движении ось толкателя всегда расположена вдоль касательной к окружности радиуса e .

Задавшись углом φ поворота толкателя, необходимо найти полярный угол θ радиус-вектора R при перемещении центра ролика из положения B_0 в положение B_1 . С учётом, что $B_2C_1 = S_0$, $S_0 = \sqrt{R_0^2 - e^2}$ и $B_1B_2 = S$ (см. рис. 1.9),

угол θ находится по формуле

$$\theta = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{S_0 + S}{e} - \operatorname{arctg} \frac{S_0}{e}.$$

Величина радиуса-вектора R для
данного угла θ :

$$R = \sqrt{(S_0 + S)^2 + e^2} \, .$$

Отмечая точками на графике длины радиус-векторов, вычисленных при соответствующих полярных углах θ , и обводя их гладкой кривой линией, получим профиль кулачка.

Масштаб длин выбирается произ-
ВОЛЬНО.

Для более точного построения профиля желательно внутри каждой фазы движения толкателя выбирать по два – три значения угла поворота кулачка.

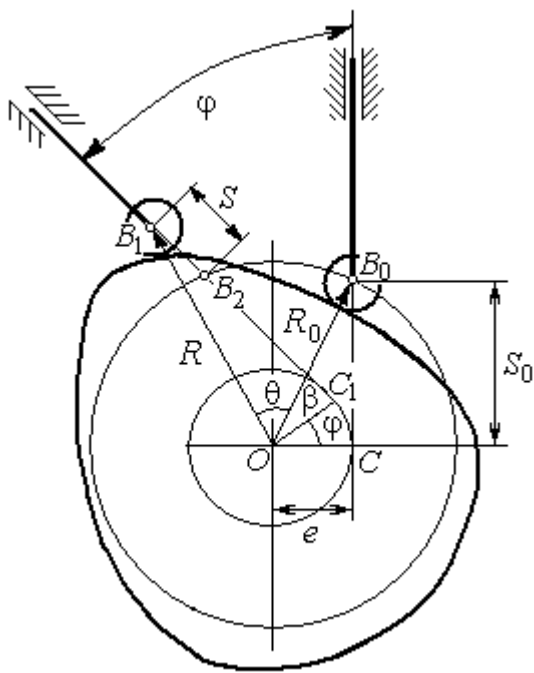


Рис.1.9. Расчётная схема построения профиля кулачка с роликовым толкателем

2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

При курсовом проектировании механизма необходимо выполнить следующие виды работ:

- провести структурный анализ механизма;
- выполнить кинематический анализ механизма, для чего при заданном положении кривошипа построить планы механизма, скоростей и ускорений (масштабы выбираются самостоятельно); определить ускорения центров масс звеньев механизма и их угловые ускорения;
- провести кинетостатический расчёт механизма и определить усилия в кинематических парах; определить движущий момент, приведённый к оси вала кривошипа;
- определить величину движущего момента, приведённого к оси вала кривошипа, с помощью «жесткого рычага» Н. Е. Жуковского и провести оценку расхождения результата по сравнению с кинетостатическим расчётом;
- определить профиль кулачка механизма, обеспечивающий заданное движение толкателя.

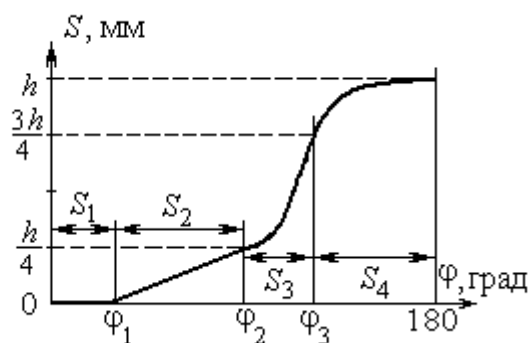
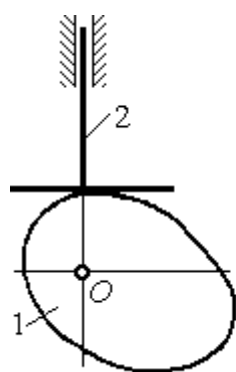
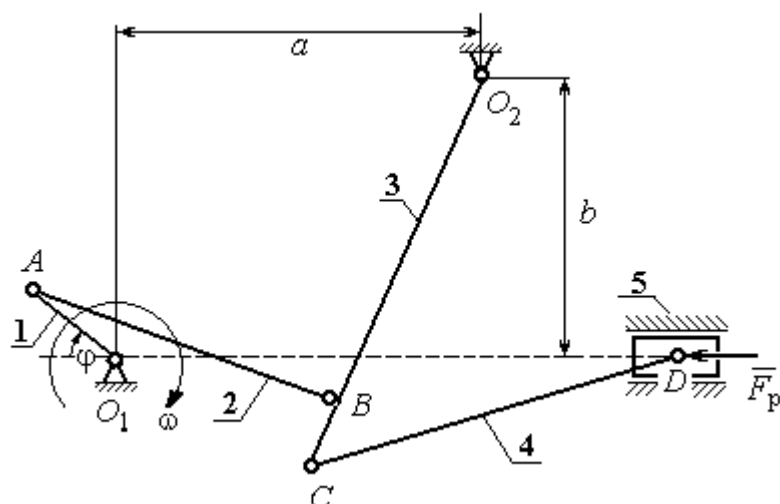
По результатам расчетов на листе формата А1 сделать чертежи плана механизма, плана скоростей, плана ускорений, схему «жесткого рычага» Н. Е. Жуковского и эскизный чертёж профиля кулачка.

Пояснительная записка выполняется на листах формата А4.

Варианты заданий № 1 – 9, 0 приведены на рис. 2.1 – 2.10. Исходные данные для всех вариантов заданий приведены в табл. 2.1 – 2.10.

При выборе задания на курсовой проект номер варианта задания (номер схемы) соответствует последней цифре в зачётке студента. Номер варианта исходных данных выбирается из таблицы с исходными данными по предпоследней цифре номера зачетной книжки.

Задание № 1. Инерционный конвейер



$$S_{\max} = h$$

Вид законов движения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Движения нет, $S_1 = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Линейный закон движения.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_2$.

4-й участок $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$. Парабола с вершиной при $\varphi = 180^\circ$.

Рис. 2.1. Схема механизма инерционного конвейера и закон движения плоского центрального толкателя кулачкового механизма

Инерционный конвейер состоит из кривошипа 1 шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4 и рештака (ползуна) 5. Центр масс кривошипа расположен на оси вращения в точке O_1 , а центры масс остальных звеньев – посередине их длин. Сила сопротивления движению рештака постоянна и равна F_p . Рабочий ход слева – направо. На холостом ходу сила сопротивления составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и плоский толкатель 2. Линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка O . Закон пере-

мещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

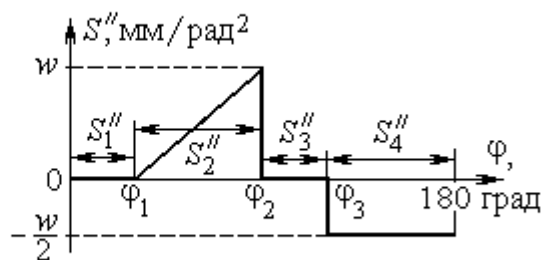
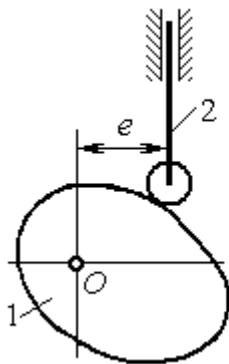
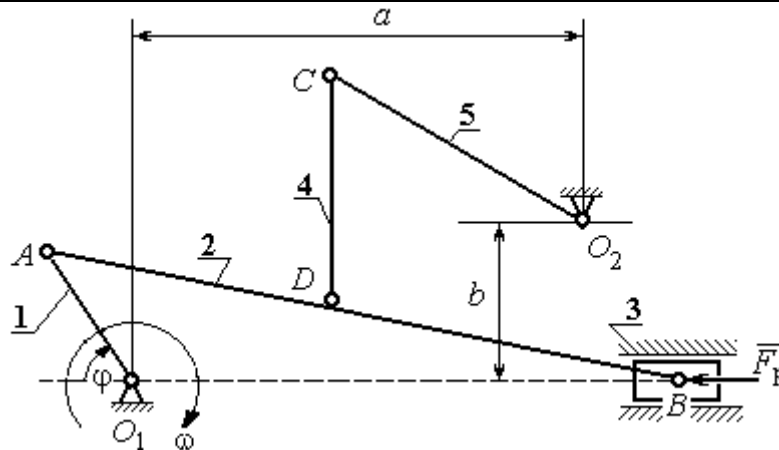
Варианты исходных данных задания № 1 приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Варианты исходных данных механизма инерционного конвейера
для варианта задания № 1**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,24	0,25
	AB	0,8	0,8	0,11	0,11	0,29	0,23	0,11	0,11	0,92	1,06
	O_2B	1,0	1,0	0,12	0,12	0,25	0,25	0,12	0,12	0,84	0,87
	O_2C	1,2	1,2	0,1	0,12	0,15	0,25	0,15	0,12	0,9	0,5
	CD	1,2	1,2	0,25	0,25	0,3	0,4	0,4	0,3	1,45	0,65
	a	0,9	0,9	0,06	0,04	0,15	0,35	0,04	0,07	0,8	0,8
	b	0,7	0,7	0,04	0,06	0,05	0,11	0,06	0,02	0,6	0,6
Угол поворота кривошипа, град	φ	45	30	290	235	120	115	140	50	300	150
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	190	95	200	180	150	170	250	190	100	120
Массы звеньев механизма, кг	m_2	80	8	15	18	38	24	16	20	37	32
	m_3	100	10	18	25	23	30	28	25	22	17
	m_4	60	6	25	25	30	40	40	30	36	31
	m_5	100	10	100	70	80	90	90	60	73	62
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	0,5	0,5	0,2	0,1	0,1	0,09	0,18	0,09	0,3	0,21
	J_2	1,0	1,0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,08	0,2	4,1	3,1
	J_3	0,8	0,8	0,4	0,8	0,18	0,2	0,6	0,5	2,7	2,9
	J_4	0,6	0,6	1,2	1,0	1,03	1,4	1,4	1,05	1,6	1,1
Сила сопротивления, кН	F_p	10,0	2,25	3,0	2,5	1,5	1,6	3,0	1,8	4,6	3,6
Максимальный ход толкателя, мм	h	20	22	18	25	16	14	18	20	22	16
Границы фаз движения толкателя, град	φ_1	30	40	25	30	45	20	30	35	25	30
	φ_2	90	60	80	60	100	80	60	85	65	70
	φ_3	120	130	140	100	140	120	110	120	125	140

Задание № 2. Плунжерный питатель с грохотом



$$S''_{\max} = w$$

Вид законов аналога ускорения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Ускорения нет, $S''_1 = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Линейный закон аналога ускорения.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Ускорения нет, $S''_3 = 0$.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Ускорение постоянно

Рис. 2.2. Схема механизма плунжерного питателя с грохотом и закон изменения аналога ускорения смещённого роликового толкателя

Плунжерный питатель с грохотом состоит из кривошипа 1, шатунов 2 и 4, сита грохота 5, плунжера 3. Центр тяжести кривошипа расположен на оси вращения O_1 , центры тяжести остальных звеньев находятся в их середине. Сила сопротивления движению плунжера 3 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода (рабочий ход слева – направо). На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2. Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e (дезаксиал). Закон изменения аналога ускорения толкателя в зависимости от

угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График изменения аналога ускорения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

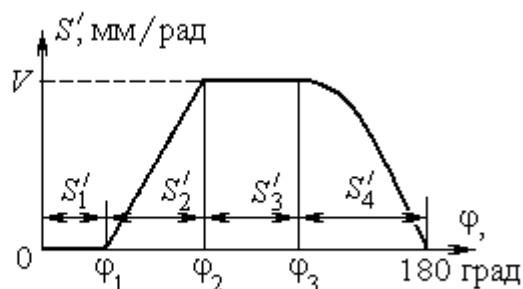
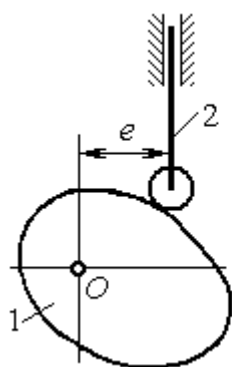
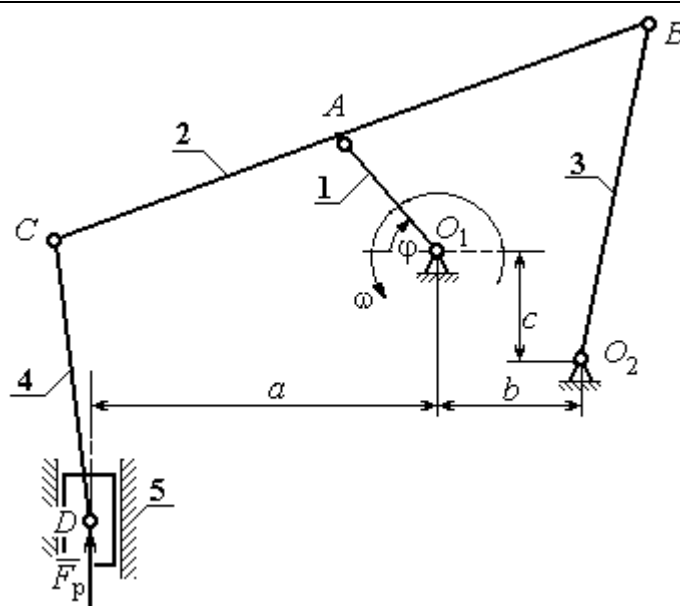
Варианты исходных данных задания № 2 приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

**Варианты исходных данных механизма плунжерного питателя с грохотом
для варианта задания № 2**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,08	0,05	0,06	0,08	0,06	0,08	0,08	0,06	0,1	0,1
	AB	0,5	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,4	0,6	0,5
	DB	0,4	0,3	0,3	0,35	0,3	0,25	0,25	0,3	0,43	0,33
	O_2C	0,4	0,27	0,19	0,3	0,24	0,25	0,22	0,24	0,31	0,21
	CD	0,12	0,09	0,2	0,2	0,2	0,13	0,14	0,2	0,16	0,16
	a	0,57	0,45	0,4	0,57	0,45	0,5	0,45	0,45	0,5	0,4
	b	0,12	0,02	0,12	0,12	0,12	0,05	0,05	0,13	0,13	0,13
Угол поворота кривошипа, град	φ	60	56	58	55	55	58	57	65	60	70
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	150	30	210	150	160	140	130	160	130	120
Массы звеньев механизма, кг	m_2	42	38	35	36	31	35	36	31	40	40
	m_3	8	12	8	10	12	8	10	12	10	12
	m_4	16	9	16	18	20	13	14	20	16	16
	m_5	40	27	35	30	24	25	22	24	31	21
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	0,08	0,09	0,08	0,1	0,07	0,07	0,08	0,07	0,1	0,1
	J_2	1,3	1,2	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,0	1,2	1,2
	J_4	0,5	0,3	0,5	0,6	0,6	0,4	0,5	0,6	0,4	0,5
	J_5	1,2	0,9	1,1	0,9	0,8	0,8	0,7	0,8	1,0	0,6
Сила сопротивления, кН	F_P	100	90	980	80	80	80	700	80	100	60
Дезаксиал, мм	e	5	4	5	6	4	5	6	3	4	5
Максимальное значение аналога ускорения толкателя, мм/рад ²	w	12	16	15	10	8	12	14	10	8	6
Границы фаз движения толкателя, град	φ_1	20	22	15	10	20	18	15	25	20	18
	φ_2	80	92	90	70	90	65	85	90	85	72
	φ_3	120	110	105	120	110	133	110	115	125	126

Задание № 3. Поршневой насос



$$S'_{\max} = V$$

Вид законов аналога скорости толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Скорости нет, $S'_1 = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Линейный закон изменения аналога скорости.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Скорость постоянна, $S'_3 = V$.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$. Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_3$

Рис. 2.3. Схема механизма поршневого насоса
и закон изменения аналога скорости смещённого роликового толкателя

Механизм **поршневого насоса** состоит из кривошипа 1, шатунов 2 – 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня сверху – вниз. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, звена 1 – в точке O_1 , звена 5 – в точке D . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2.

Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e (дезаксиал). Закон изменения аналога скорости толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График аналога скорости толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

Варианты исходных данных задания № 3 приведены в табл. 2.3.

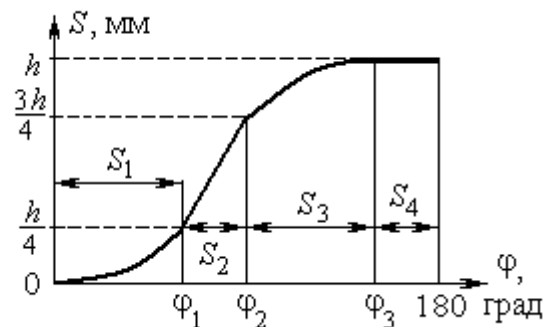
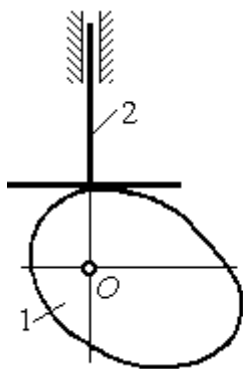
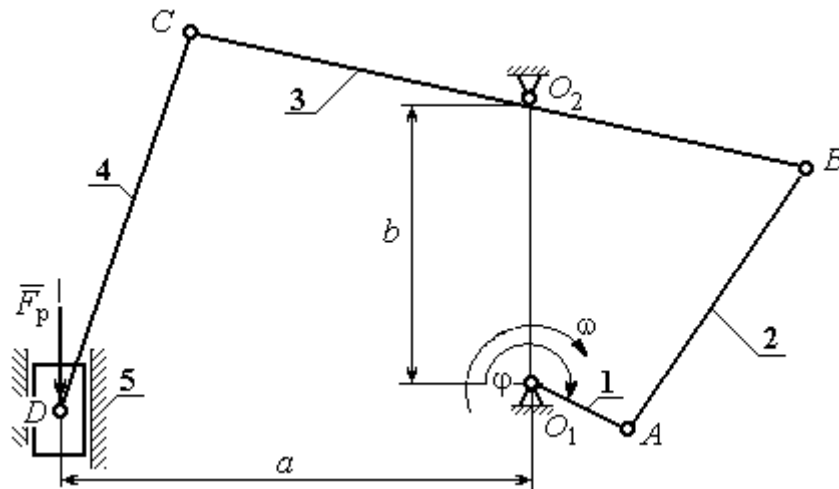
Таблица 2.3

**Варианты исходных данных механизма поршневого насоса
для варианта задания № 3**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,16	0,13	0,16	0,18	0,11	0,18	0,13	0,12	0,18	0,1
	AB	0,56	0,5	0,52	0,6	0,6	0,56	0,47	0,45	0,56	0,42
	AC	0,38	0,35	0,4	0,4	0,3	0,42	0,35	0,3	0,42	0,3
	O_2B	0,55	0,5	0,55	0,55	0,45	0,55	0,5	0,48	0,55	0,45
	CD	0,6	0,55	0,6	0,55	0,45	0,6	0,55	0,5	0,6	0,45
	c	0,5	0,3	0,32	0,35	0,25	0,5	0,4	0,3	0,5	0,2
	a	0,5	0,45	0,45	0,3	0,3	0,5	0,28	0,4	0,5	0,35
	b	0,3	0,35	0,32	0,3	0,25	0,38	0,28	0,3	0,38	0,2
Угол поворота кривошипа, град	φ	60	56	45	60	65	65	23	65	60	63
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	140	70	130	160	80	110	90	55	110	50
Массы звеньев механизма, кг	m_2	28	28	30	30	26	30	25	25	30	26
	m_3	25	20	25	25	18	25	28	20	25	18
	m_4	28	25	28	30	20	28	36	22	25	20
	m_5	38	32	25	40	34	28	45	26	28	22
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	0,15	0,11	0,18	0,2	0,1	0,2	0,13	0,1	0,15	0,1
	J_2	0,92	0,7	0,83	1,08	0,72	0,8	0,95	0,6	0,85	0,72
	J_3	0,75	0,63	1,05	0,8	0,62	1,15	0,72	0,65	1,1	0,86
	J_4	1,15	0,93	1,2	1,05	0,95	1,15	1,1	0,9	1,15	1,0
Сила сопротивления, кН	F_p	1,2	1,4	1,5	20,4	0,8	2,2	1,4	1,7	2,2	0,8
Дезаксиал, мм	e	4	5	8	6	4	5	3	6	4	5
Максимальное значение аналога скорости толкателя, мм/рад	V	20	15	18	12	16	14	18	20	22	16
Границы фаз движения тол-	φ_1	20	18	16	22	15	12	18	16	20	18
	φ_2	85	90	75	100	95	102	98	85	95	92

кателя, рад	φ_3	110	120	90	125	105	120	118	110	115	102
-------------	-------------	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Задание № 4. Глубинный насос



$$S_{\max} = h$$

Вид законов движения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Парабола с вершиной при $\varphi = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Линейный закон движения.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_3$.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Движения нет, $S_4 = h$

Рис. 2.4. Схема механизма глубинного насоса
и закон движения плоского центрального толкателя

Механизм **глубинного насоса** состоит из кривошипа 1, шатунов 2, 4, коромысла 3 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня снизу – вверх. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, звена 1 – в точке O_1 , звена 5 – в точке D . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и плоский толкатель 2. Линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка O . Закон изме-

нения перемещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180$. График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

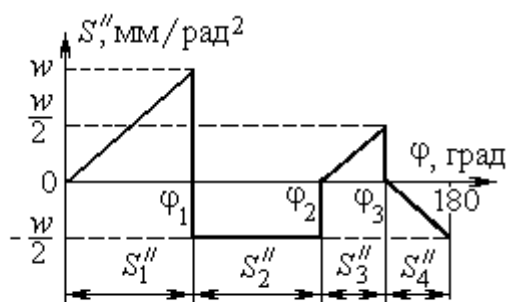
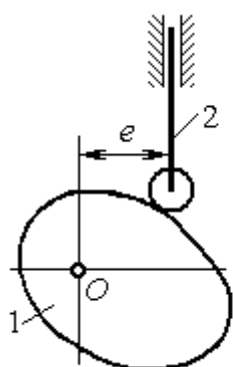
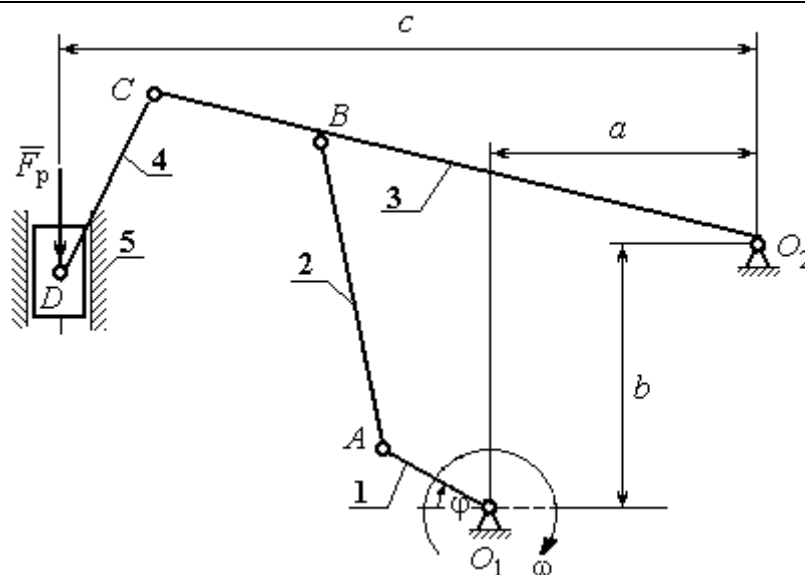
Варианты исходных данных задания № 4 приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

**Варианты исходных данных механизма глубинного насоса
для варианта задания № 4**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,09	0,11	0,15	0,1	0,12	0,17	0,13	0,14	0,16	0,095
	AB	0,6	0,72	0,7	0,7	0,7	0,55	0,8	0,70	0,65	0,9
	O_2B	0,38	0,47	0,5	0,4	0,5	0,5	0,6	0,8	0,7	0,8
	O_2C	0,2	0,7	0,5	0,45	0,35	0,5	0,5	0,55	0,75	0,6
	CD	0,6	0,8	0,85	0,6	0,65	0,8	1,5	1,55	1,75	1,6
	a	0,45	0,43	0,5	0,36	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,65
	b	0,46	0,63	0,6	0,45	0,66	0,6	0,5	0,55	0,7	0,8
Угол поворота кривошипа, град	φ	180	210	0	165	150	253	30	45	60	120
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	140	130	180	70	150	200	100	110	160	190
Массы звеньев механизма, кг	m_2	38	24	14	22	27	20	23	26	29	30
	m_3	35	52	34	40	47	40	33	37	41	44
	m_4	33	30	36	28	34	40	43	47	49	51
	m_5	35	36	20	32	30	20	44	49	51	60
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	0,22	0,1	0,14	0,2	0,1	0,15	0,1	0,2	0,3	0,4
	J_2	1,1	0,83	0,5	1,2	0,9	0,75	0,8	0,9	0,6	0,4
	J_3	3,5	4,9	2,5	4	4,1	4,3	2,1	2,5	2,7	3,0
	J_4	2,1	2,0	2,3	1,6	2,2	2,4	3,0	3,5	3,9	4,4
Сила сопротивления, кН	F_p	3,0	1,26	1,44	1,68	2,17	2,16	3,0	4,8	5,1	6,1
Максимальный ход толкателя, мм	h	12	18	16	22	18	16	15	18	20	12
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	85	75	80	65	90	85	68	82	92
	φ_2	100	125	100	115	100	125	135	102	125	130
	φ_3	160	165	145	160	150	160	170	162	162	170

Задание № 5. Вытяжной пресс



$$S''_{\max} = w$$

Вид законов аналога ускорения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Линейный закон аналога ускорения.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Ускорение постоянно.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Линейный закон аналога ускорения.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Линейный закон аналога ускорения

Рис. 2.5. Схема механизма вытяжного пресса
и закон изменения аналога ускорения смещённого роликового толкателя

Механизм **вытяжного пресса** состоит из кривошипа 1, шатунов 2 – 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня снизу – вверх. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, звена 1 – в точке O_1 , звена 5 – в точке D . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2.

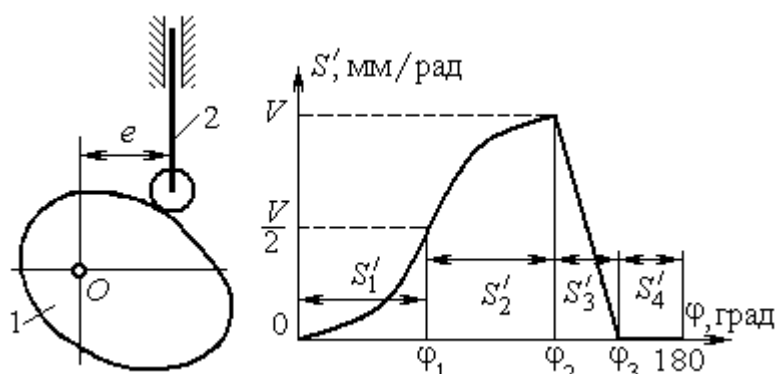
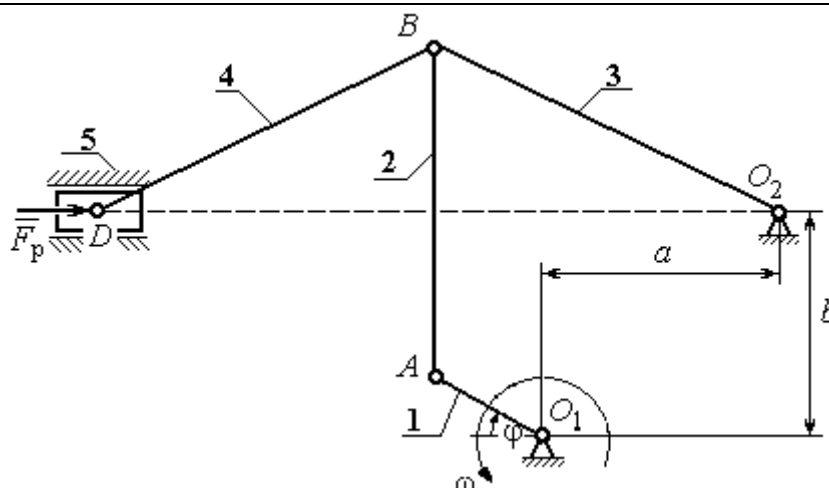
Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e (дезаксиал). Закон изменения аналога ускорения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График аналога ускорения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен. Варианты исходных данных задания № 5 приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

**Варианты исходных данных механизма вытяжного пресса
для варианта задания № 5**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,1	0,09	0,09	0,09	0,08	0,1	0,07	0,1	0,11	0,08
	AB	0,32	0,45	0,36	0,38	0,4	0,42	0,46	0,48	0,5	0,52
	O_2B	0,3	0,6	0,5	0,42	0,51	0,6	0,62	0,46	0,45	0,5
	O_2C	0,42	0,9	0,7	0,6	0,7	0,85	0,8	0,66	0,65	0,7
	CD	0,11	0,3	0,4	0,6	0,5	0,8	0,9	0,35	0,49	0,5
	a	0,16	0,35	0,45	0,44	0,56	0,62	0,6	0,64	0,68	0,66
	b	0,29	0,3	0,4	0,41	0,46	0,5	0,51	0,55	0,6	0,6
	c	0,41	0,7	0,6	0,56	0,65	0,75	0,8	0,62	0,6	0,65
Угол поворота кривошипа, град	φ	30	60	120	150	210	240	300	330	25	45
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	40	65	50	55	60	165	70	75	285	150
Массы звеньев механизма, кг	m_2	30	7	8	9	10	12	11	14	12	11
	m_3	40	12	10	10	8	10	8	7	14	10
	m_4	15	5	6	4	7	8	9	6	4	5
	m_5	20	30	33	35	37	30	37	35	40	42
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м ²	J_1	0,5	2,0	2,4	2,4	2,6	2,5	2,2	2,0	2,2	2,2
	J_2	0,2	0,10	0,20	0,21	0,24	0,28	0,29	0,31	0,33	0,35
	J_3	0,3	0,20	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
	J_4	0,1	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22	0,24	0,26
Сила сопротивления, кН	F_p	36	36	40	41	39	37	34	32	36	42
Дезаксиал, мм	e	5	6	8	4	6	8	5	6	8	6
Максимальное значение аналога ускорения толкателя, мм/рад ²	w	8	12	14	10	15	8	6	10	12	16
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	50	60	70	72	30	80	56	64	78	48
	φ_2	100	120	140	144	60	160	112	128	156	96
	φ_3	140	150	160	162	120	170	146	154	168	138

Задание № 6. Гайковырубной автомат



$$S'_{\max} = V$$

Вид законов аналога скорости толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Парабола с вершиной при $\varphi = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_2$.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.
Линейный закон изменения аналога скорости.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Скорости нет, $S'_4 = 0$

Рис. 2.6. Схема механизма гайковырубного автомата
и закон изменения аналога скорости смещённого роликового толкателя

Механизм **гайковырубного автомата** состоит из кривошипа 1, шатунов 2, 4, коромысла 3 и поршня (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, кривошипа 1 – в точке O_1 , звена 5 – в точке D . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2.

Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e (дезаксиал). Закон изменения аналога скорости толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График аналога скорости толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

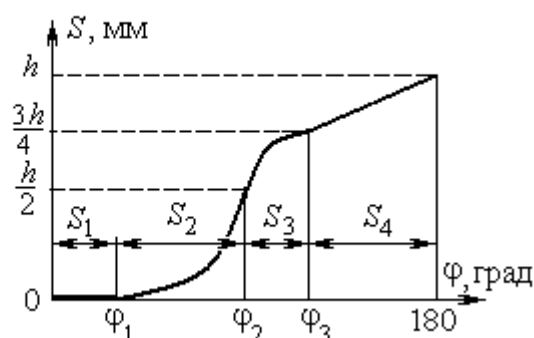
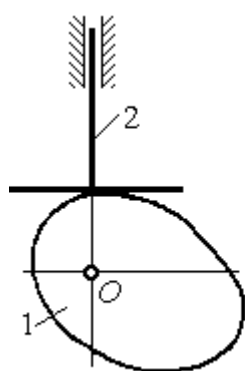
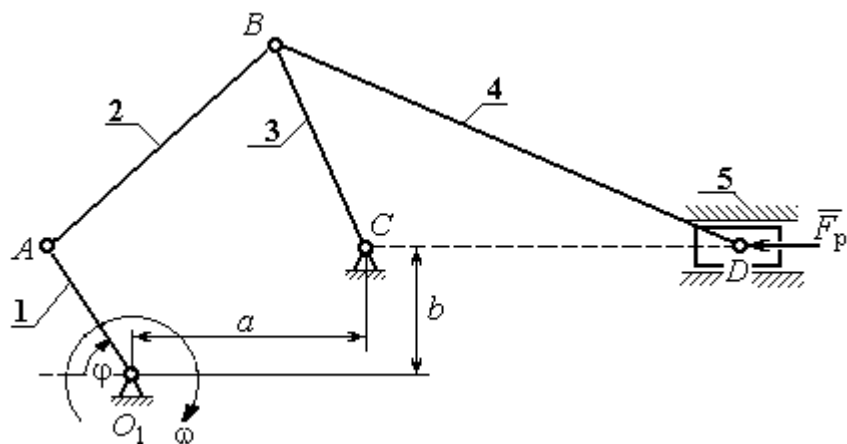
Варианты исходных данных задания № 6 приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

**Варианты исходных данных механизма гайковырубного автомата
для варианта задания № 6**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,09	0,11	0,1	0,12	0,08	0,11	0,12	0,1	0,1	0,12
	AB	0,43	0,41	0,48	0,43	0,38	0,48	0,44	0,44	0,37	0,52
	O_2B	0,25	0,29	0,28	0,3	0,22	0,28	0,31	0,26	0,26	0,31
	BD	0,25	0,29	0,28	0,3	0,22	0,28	0,31	0,26	0,26	0,31
	a	0,24	0,27	0,27	0,29	0,21	0,27	0,3	0,25	0,25	0,29
	b	0,45	0,43	0,5	0,45	0,4	0,5	0,47	0,39	0,39	0,55
Угол поворота кривошипа, град	φ	30	45	60	120	150	210	240	300	305	25
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	100	45	50	55	60	65	70	75	80	90
Массы звеньев механизма, кг	m_2	11	10	12	10	9	12	11	11	9	13
	m_3	15	17	16	20	13	18	19	16	16	18
	m_4	15	17	16	20	13	18	19	16	16	18
	m_5	60	62	56	70	46	65	67	57	58	63
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	1,2	1,4	1,6	1,0	0,9	1,5	1,3	1,1	1,0	1,3
	J_2	0,2	0,17	0,28	0,18	0,13	0,28	0,21	0,21	0,12	0,35
	J_3	0,09	0,14	0,12	0,18	0,08	0,14	0,18	0,11	0,11	0,17
	J_4	0,09	0,14	0,12	0,18	0,08	0,14	0,18	0,11	0,11	0,17
Сила сопротивления, кН	F_p	60	65	70	58	55	52	53	54	60	70
Дезаксиал, мм	e	6	5	8	6	4	8	5	6	8	4
Максимальное значение аналога скорости толкателя, мм/рад	V	15	10	12	18	16	20	18	15	16	20
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	50	55	90	80	70	65	80	75	65
	φ_2	130	100	105	140	145	120	140	150	140	130
	φ_3	170	160	165	170	165	155	170	175	145	160

Задание № 7. Качающийся конвейер



$$S_{\max} = h$$

Вид законов движения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Движения нет, $S_1 = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_1$.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_3$.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Линейный закон движения

Рис. 2.7. Схема механизма качающегося конвейера и закон движения плоского центрального толкателя

Механизм **качающегося конвейера** состоит из кривошипа 1, шатунов 2, 4, коромысла 3 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, кривошипа 1 – в точке O_1 , звена 5 – в точке D . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и плоский толкатель 2. Линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка O . Закон изме-

нения перемещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

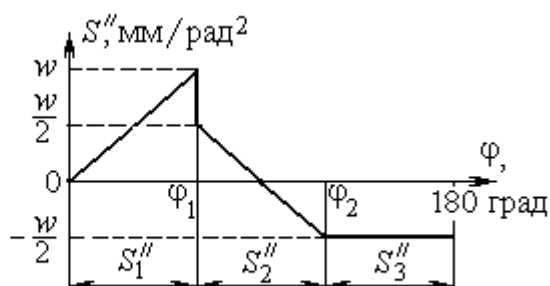
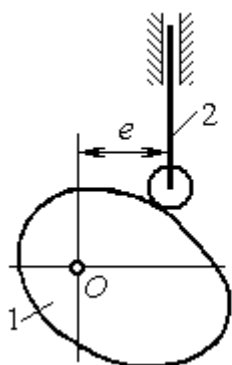
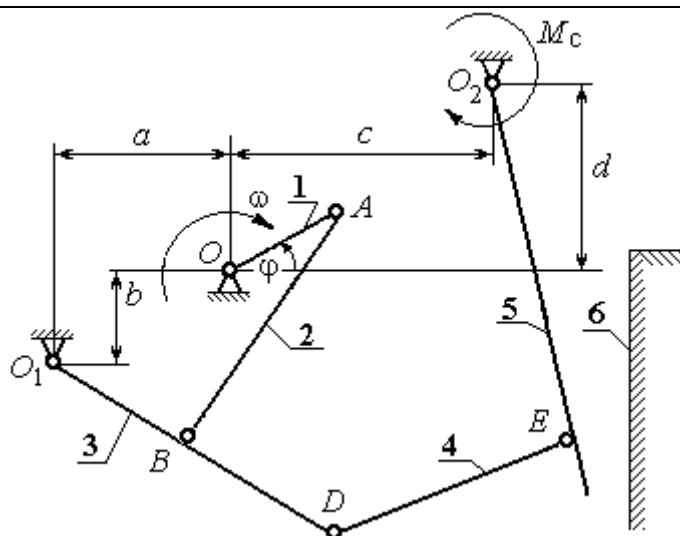
Варианты исходных данных задания № 7 приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

**Варианты исходных данных механизма качающегося конвейера
для варианта задания № 7**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,1	0,09	0,1	0,11	0,12	0,14	0,1	0,12	0,14	0,12
	AB	0,38	0,38	0,46	0,42	0,46	0,28	0,45	0,55	0,53	0,45
	BC	0,32	0,3	0,33	0,35	0,39	0,35	0,4	0,4	0,45	0,38
	BD	1,3	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6	1,5	1,5	1,6	1,5
	a	0,29	0,3	0,34	0,32	0,33	0,32	0,35	0,41	0,4	0,35
	b	0,05	0,06	0,06	0,05	0,06	0,04	0,05	0,07	0,07	0,06
Угол поворота кривошипа, град	φ	25	45	60	115	135	150	210	245	290	300
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	80	60	68	73	70	63	63	79	74	50
Массы звеньев механизма, кг	m_2	20	20	21	20	20	25	20	22	25	20
	m_3	90	80	90	100	85	100	90	95	100	90
	m_4	400	400	450	500	500	500	400	450	500	450
	m_5	900	800	900	900	950	900	950	800	900	950
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	1,0	1,0	1,1	1,0	1,2	1,4	1,0	1,2	1,4	1,2
	J_2	1,0	1,0	1,1	1,0	1,2	1,4	1,0	1,2	1,4	1,2
	J_3	0,4	0,4	0,6	0,5	0,5	0,6	0,4	0,5	0,6	0,5
	J_4	40	40	42	35	40	38	42	45	35	45
Сила сопротивления, кН	F_p	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0
Максимальный ход толкателя, мм	h	15	18	12	20	22	18	16	21	18	15
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	20	25	30	22	18	25	15	25	16	18
	φ_2	65	80	90	75	95	80	65	92	85	95
	φ_3	130	120	140	110	155	140	130	142	150	130

Задание № 8. Щековая дробилка



$$S''_{\max} = w$$

Вид законов аналога ускорения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Линейный закон аналога ускорения.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Линейный закон аналога ускорения.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Ускорение постоянно

Рис. 2.8. Схема механизма щековой дробилки
и закон изменения аналога ускорения смещённого роликового толкателя

Механизм **щековой дробилки** состоит из кривошипа 1, шатуна 2, коромысла 3, тяги 4, подвижной щеки 5 и неподвижной щеки 6. Рабочий ход подвижной щеки слева – направо. Центр масс кривошипа 1 – в точке O_1 . У звеньев 2 – 5 центры масс находятся посередине их длин. Момент сил сопротивления движению подвижной щеки 5 сохраняет постоянное значение M_c на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу щеки момент сил сопротивления постоянный и составляет 10 % от номинального.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2. Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e (дезаксиал). Закон изменения аналога ускорения толкателя в зависимости от

угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График аналога ускорения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

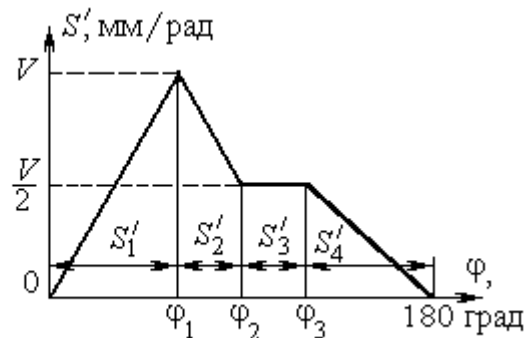
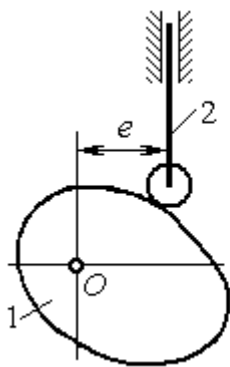
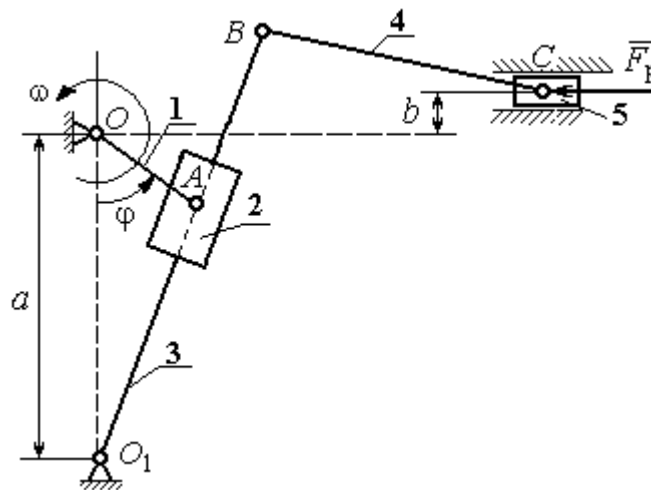
Варианты исходных данных задания № 8 приведены в табл. 2.8.

Таблица 2.8

**Варианты исходных данных механизма щековой дробилки
для варианта задания № 8**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,11	0,1	0,15	0,07	0,15	0,08	0,1	0,15	0,12	0,07
	AB	0,8	0,9	0,75	0,6	0,9	0,7	0,45	0,9	0,8	0,65
	O_1B	0,45	0,5	0,6	0,3	0,6	0,6	0,5	0,6	0,6	0,3
	BD	0,2	0,15	0,2	0,3	0,1	0,15	0,25	0,15	0,2	0,2
	O_2E	0,8	0,85	1,2	0,9	1,15	1,0	0,8	1,2	1,0	0,75
	DE	0,6	0,55	0,6	0,4	0,7	0,35	0,3	0,65	0,3	0,45
	a	0,45	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4	0,5	0,4	0,4	0,3
	b	0,55	0,6	0,5	0,4	0,5	1,0	0,5	0,5	1,0	0,4
	c	0,4	0,35	0,6	0,3	0,6	0,4	0,25	0,6	0,5	0,3
	d	0,12	0,15	0,3	0,4	0	0,2	0,2	0	0,1	0,2
Угол поворота кривошипа, град	φ	20	30	45	60	115	145	215	240	295	330
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	160	190	150	250	170	200	200	140	240	240
Массы звеньев механизма, кг	m_2	55	50	45	40	48	40	35	55	50	40
	m_3	30	25	30	15	30	30	25	30	35	30
	m_4	30	27	30	20	35	18	15	33	15	22
	m_5	90	85	120	110	100	80	120	100	75	100
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	J_1	0,23	0,25	0,35	0,2	0,3	0,2	0,25	0,35	0,2	0,24
	J_2	0,8	4,0	3,4	1,6	3,9	1,9	0,7	4,5	3,2	1,7
	J_3	0,9	0,6	1,1	0,14	1,1	1,1	0,5	1,1	0,26	0,14
	J_4	0,9	0,82	1,0	0,32	1,7	0,22	0,14	1,4	0,15	0,45
	J_5	6,3	6,1	17,3	7,3	14,5	10,0	5,1	17,3	10,0	4,2
Момент сил сопротивления, $\text{кН} \cdot \text{м}$	M_c	4	8	30	9	20	10	7	35	2	15
Дезаксиал, мм	e	6	5	8	6	7	8	6	5	8	7
Максимальное значение аналога ускорения толкателя, $\text{мм}/\text{рад}^2$	w	8	6	10	12	8	15	6	8	12	10
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	40	54	65	75	50	42	74	58	78
	φ_2	120	140	126	115	105	130	138	106	122	102

Задание № 9. Кулисный конвейер



$$S'_{\max} = V$$

Вид законов аналога скорости толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Линейный закон изменения аналога скорости.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Линейный закон изменения аналога скорости.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Скорость постоянная.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Линейный закон изменения аналога скорости

Рис.2.9. Схема механизма кулисного конвейера
и закон изменения аналога скорости смещённого роликового толкателя

Механизм **кулисного конвейера** состоит из кривошипа 1, кулисного камня 2, кулисы 3, шатуна 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, кривошипа 1 – в точке O , звена 5 – в точке C . Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и роликовый толкатель 2. Линия движения толкателя отстоит от оси вращения кулачка O на расстояние e

(дезаксиал). Закон изменения аналога скорости толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График аналога скорости толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

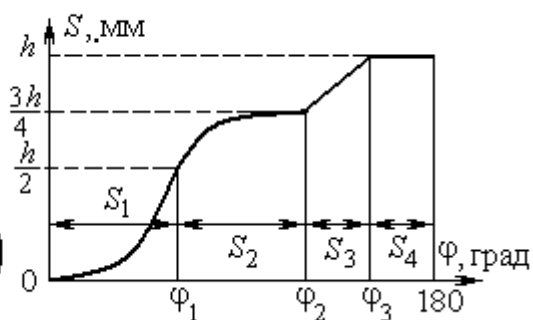
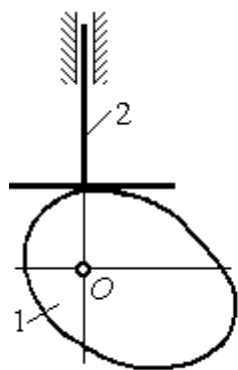
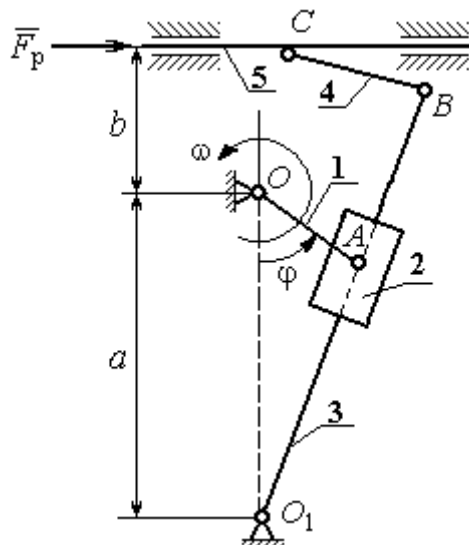
Варианты исходных данных задания № 9 приведены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

**Варианты исходных данных механизма кулисного конвейера
для варианта задания № 9**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,17	0,08	0,1	0,12	0,09	0,11	0,13	0,14	0,15	0,16
	O_1B	1,5	0,8	1,0	1,2	0,9	1,1	1,3	1,4	1,25	1,45
	BC	2,1	1,8	1,9	2,0	1,75	1,65	1,45	1,5	1,85	1,95
	a	0,9	0,6	0,8	0,9	0,6	0,6	0,7	1,0	0,95	1,1
	b	0,28	0,05	0,07	0,08	0,09	0,1	0,055	0,065	0,06	0,065
Угол поворота кривошипа, град	φ	300	20	30	45	60	110	120	150	210	240
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	190	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Массы звеньев механизма, кг	m_2	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	m_3	28	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	m_4	32	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	m_5	280	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, кг·м ²	J_1	3,0	1	2	3	4	4,5	3,6	4,7	2,8	2,9
	J_2	0,65	0,6	0,4	0,3	0,5	0,7	0,8	0,35	0,45	0,55
	J_3	6,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
	J_4	1,5	2,0	2,5	3,5	4,5	5,0	3,0	4,0	6,0	6,5
Сила сопротивления, кН	F_p	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Дезаксиал, мм	e	8	10	6	12	9	7	10	8	12	6
Максимальное значение аналога скорости толкателя, мм/рад	V	15	18	12	18	20	16	15	12	18	20
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	55	65	75	80	85	90	75	80	95
	φ_2	100	95	110	120	125	140	130	135	145	150
	φ_3	120	105	120	130	140	145	145	150	155	160

Задание № 0. Стругальный станок



$S_{\max} = h$
Вид законов движения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Парабола с вершиной при $\varphi = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_2$.

3-й участок: $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Линейный закон движения.

4-й участок: $\varphi_3 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Движения нет, $S_4 = h$

Рис. 2.10. Схема механизма строгального станка
и закон движения центрального плоского толкателя

Механизм **строгального станка** состоит из кривошипа 1, кулисного камня 2, кулисы 3, шатуна 4 и резца (вместе с суппортом) 5. Рабочий ход резца справа – налево. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посередине их длин, кривошипа 1 – в точке O, резца 5 – в точке C. Сила сопротивления движению резцу 5 сохраняет постоянное значение F_p на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и плоский толкатель 2. Линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка O . Закон изменения перемещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

Варианты исходных данных задания № 0 приведены в табл. 2.10.

Таблица 2.10

**Варианты исходных данных механизма кулисного конвейера
для варианта задания № 0**

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
	O_1B	1,35	1,45	1,6	1,6	1,8	1,55	1,45	1,75	1,45	1,4
	BC	0,5	0,6	0,7	0,8	0,45	0,35	0,55	0,65	0,75	0,8
	a	0,8	0,85	0,9	0,95	1,05	0,75	0,65	0,85	1,1	1,2
	b	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,95	0,95	1,05	0,6	0,5
Угол поворота кривошипа, град	φ	20	35	60	75	120	150	210	240	295	330
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	120	130	140	150	160	170	180	190	110	100
Массы звеньев механизма, кг	m_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	m_3	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	m_4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
	m_5	25	28	30	32	35	37	40	43	45	49
Моменты инерции звеньев относительно центров масс, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	J_1	1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3
	J_2	0,2	0,25	0,3	0,35	0,1	0,15	0,18	0,22	0,26	0,32
	J_3	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	J_4	1,1	1,3	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3
Сила сопротивления, кН	F_p	6	5	4	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10
Максимальный ход толкателя, мм	h	20	22	18	25	20	24	18	22	18	16
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	65	75	70	85	80	65	90	85	65
	φ_2	130	123	140	150	135	125	130	130	135	145
	φ_3	150	150	160	165	160	140	165	170	165	170

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Рассмотрим последовательность выполнения курсового проекта на примере условной схемы пятизвенного плоского механизма и кулачкового механизма с центральным плоским толкателем (рис. 3.1).

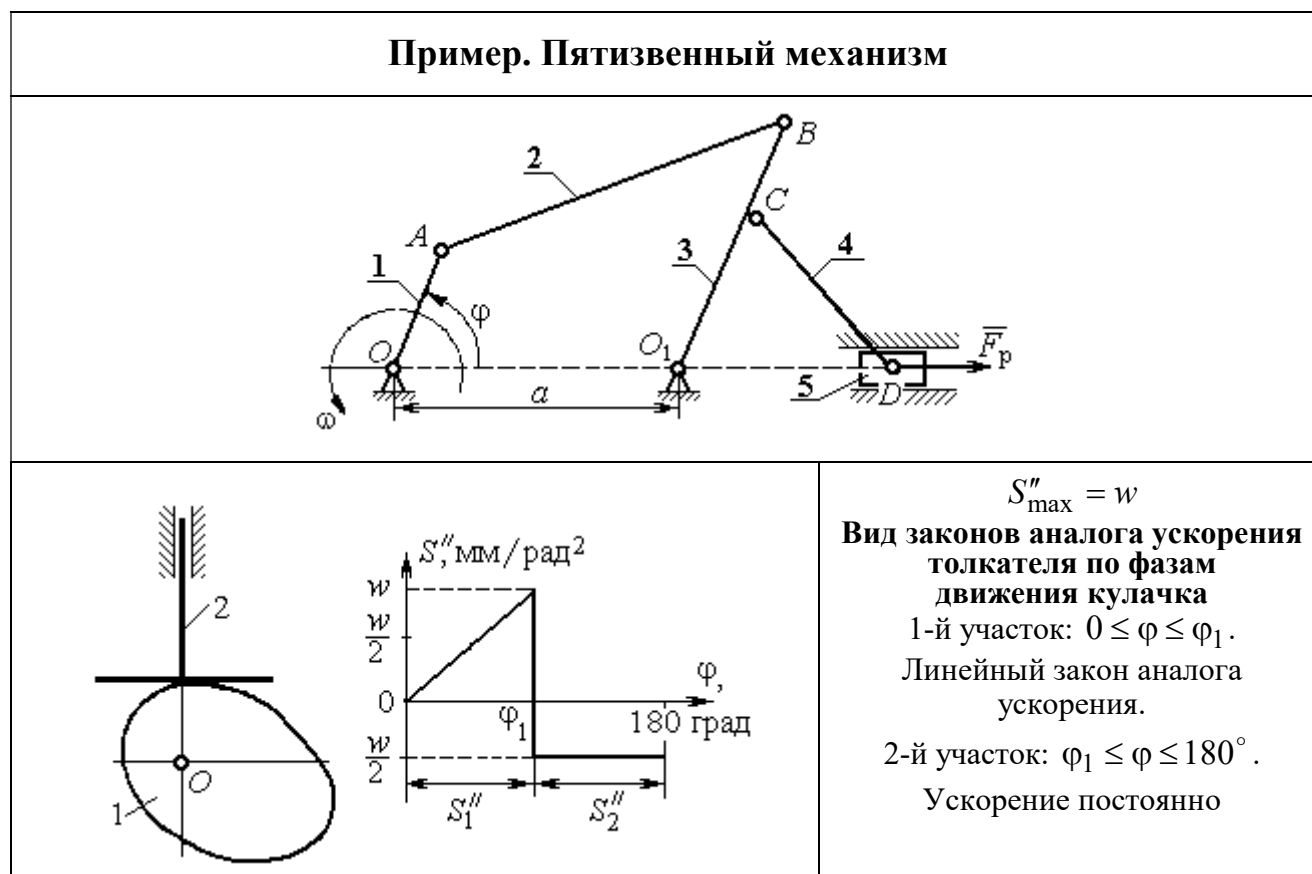


Рис. 3.1. Схема пятизвенного механизма
и закон изменения аналога ускорения центрального плоского толкателя

Механизм состоит из кривошипа 1, шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4 и ползуна 5. Центр масс кривошипа расположен на оси вращения, в точке O , центры масс линейных звеньев – посередине их длин. Рабочий ход ползуна справа – налево. Сила сопротивления движению ползуна на протяжении рабочего хода равна F_p . На холостом ходу сила сопротивления составляет 10 % от номинального значения.

Кулачковый механизм включает кулачок 1 и плоский толкатель 2. Линия движения толкателя проходит через ось вращения кулачка O . Закон изме-

нения перемещения толкателя в зависимости от угла поворота кулачка приведён на фазе подъёма кулачка, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. График движения толкателя на фазе опускания кулачка симметричен.

Данные для кинематического и динамического расчета механизма и синтеза кулачкового механизма приведены в табл. 3.1 – 3.3.

Таблица 3.1

Кинематические характеристики механизма

Размеры звеньев механизма						Угол поворота кривошипа, φ , град	Частота вращения кривошипа, n , об/мин
a , м	OA , м	AB , м	O_1C , м	BC , м	CD , м		
0,4	0,1	0,4	0,15	0,15	0,5	90	95,5

Таблица 3.2

Параметры динамического расчёта

Массы звеньев, кг					Моменты инерции звеньев, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$				Сила полезного сопротивления, кН
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	J_{O1}	J_{S2}	J_{O13}	J_{S4}	F_p
5	40	30	50	10	1	2	1	3	16,045

Таблица 3.3

Параметры движения толкателя

Максимальное значение аналога ускорения толкателя, мм/рад^2	Границы фаз движения толкателя, град
w	φ_1
40	90

3.1. Структурный анализ механизма

В рассматриваемом механизме 5 подвижных звеньев и 7 кинематических пар (рис. 3.2, *a*):

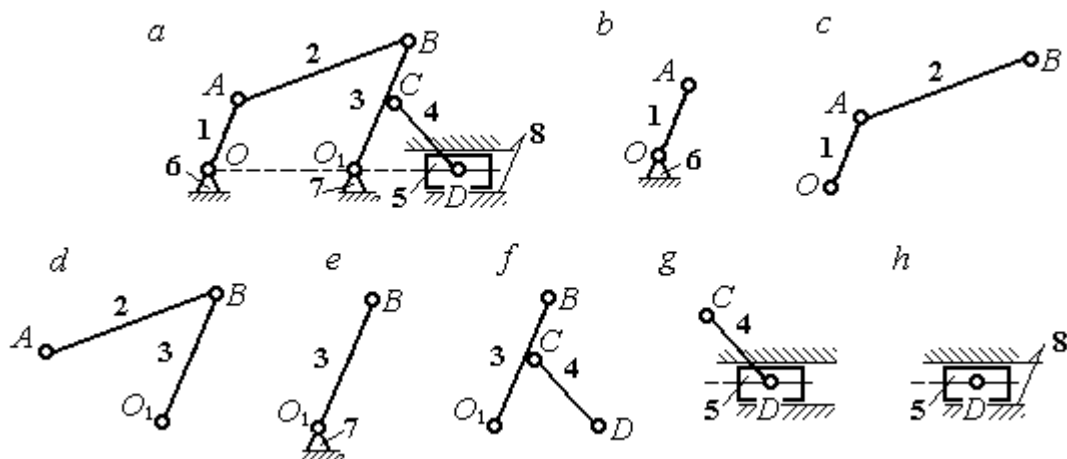


Рис. 3.2. Кинематические пары механизма:

a – схема механизма; *b* – *h* – звенья, составляющие кинематические пары

- вращательная кинематическая пара *O* (рис. 3.2, *b*) низшего типа 5-го класса образуется неподвижной стойкой 6 и кривошипом 1;
- вращательная кинематическая пара *A* (рис. 3.2, *c*) низшего типа 5-го класса образуется кривошипом 1 и шатуном 2;
- вращательная кинематическая пара *B* (рис. 3.2, *d*) низшего типа 5-го класса образуется шатуном 2 и коромыслом 3;
- вращательная кинематическая пара *O*₁ (рис. 3.2, *e*) низшего типа 5-го класса образуется коромыслом 3 и стойкой 7;
- вращательная кинематическая пара *C* (рис. 3.2, *f*) низшего типа 5-го класса образуется коромыслом 3 и шатуном 4;
- вращательная кинематическая пара *D* (рис. 3.2, *g*) низшего типа 5-го класса образуется шатуном 4 и ползуном 5;
- поступательная кинематическая пара *D*₁ (рис. 3.2, *h*) низшего типа 5-го класса образуется ползуном 5 и направляющими 8.

Высших кинематических пар в данном механизме нет, так как соединение всех звеньев осуществляется по поверхности.

Степень подвижности плоского механизма определяется по формуле П. Л. Чебышева: $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$, где $n = 5$ – число подвижных звеньев механизма; $p_5 = 7$ – число кинематических пар 5-го класса. Следовательно, механизм имеет одно ведущее звено.

В рассматриваемом механизме можно выделить две группы Ассур и начальное звено (рис. 3.3):

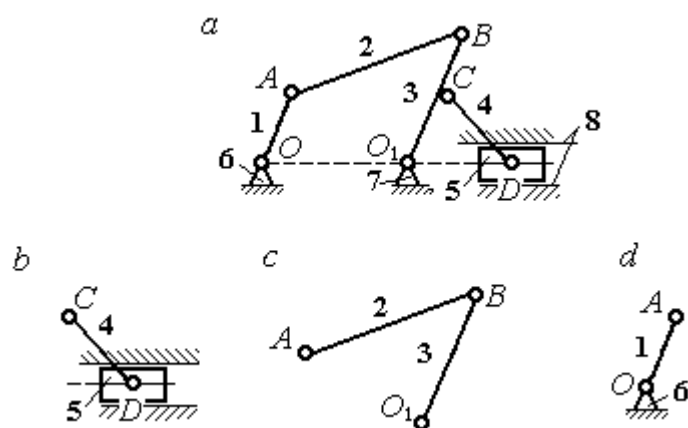


Рис. 3.3. Группы Ассур механизма:
a – схема механизма; *b*, *c* – группы Асура; *d* – начальное звено

– группа звеньев, состоящая из шатуна 4 и ползуна 5, является группой Ассур II класса, второго вида (ползун – поводок) (рис. 3.3, *b*);

– группа звеньев, состоящая из коромысла 3 и шатуна 2, является группой Ассур II класса, первого вида (двухповодковая группа) (рис. 3.3, *c*);

– кривошип 1 вместе со стойкой 6 образуют начальное звено или начальный механизм I класса (рис. 3.3, *d*).

Схема образования механизма группами Ассур:

$$(1) \rightarrow (2,3) \rightarrow (4,5).$$

К первому (ведущему) звену присоединяется группа Ассур, состоящая

из звеньев 2 и 3, образуя раму, имеющую ту же степень подвижности, что и исходный механизм. К группе Ассура, состоящей из звеньев 2 и 3, присоединяется группа Ассура, состоящая из звеньев 4 и 5. При этом степень подвижности образованного механизма не увеличивается.

Представленный механизм включает начальный механизм I класса и две группы Ассура II класса, в результате чего является механизмом II класса.

Результаты структурного анализа механизма приводятся в табл. 3.4 – 3.5.

Таблица 3.4

Анализ кинематических пар

Обозначение кинематической пары	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>O</i> ₁	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i> ₁
Звенья, образующие пару	1 – 6	1 – 2	2 – 3	3 – 7	3 – 4	4 – 5	5 – 8
Наименование пары	Вращательная, низшая						Поступательная, низшая
Класс пары	5-й класс						

Таблица 3.5

Анализ групп Ассура

Группы Ассура	4 – 5	2 – 3	1
Наименование группы Ассура	Ползун–поводок	Двухповодковая	Начальное звено
Класс групп Ассура	II класс	II класс	I класс
Класс механизма	Механизм II класса		

3.2. Построение плана механизма

Построение плана механизма начинается с определения масштабного коэффициента длины. Выберем для плана механизма стандартный масштаб, например 1:4. Масштаб выбирается таким образом, чтобы длина самого большого звена механизма на чертеже не превышала 100 – 150 мм. Так, при масштабе 1:4 длина отрезка l_{CD} , изображающего на чертеже звено CD (с максимальной среди всех звеньев длиной 0,5 м), составит: $l_{CD} = \frac{0,5}{4} = 0,125 \text{ м} = 125$

мм и находится в пределах допустимых границ длин. Масштабный коэффициент длины рассчитывается как отношение заданной длины звена к длине его изображения на чертеже: $k_l = \frac{0,5}{125} = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$.

Определяем длины звеньев на чертеже с учётом масштабного коэффициента:

$$\begin{aligned} l_{OA} &= \frac{OA}{k_l} = \frac{0,1}{0,004} = 25 \text{ мм}, & l_{CD} &= \frac{CD}{k_l} = \frac{0,5}{0,004} = 125 \text{ мм}, \\ l_{AB} &= \frac{AB}{k_l} = \frac{0,4}{0,004} = 100 \text{ мм}, & l_a &= \frac{a}{k_l} = \frac{0,4}{0,004} = 100 \text{ мм}, \\ l_{O_1C} &= \frac{O_1C}{k_l} = \frac{0,15}{0,004} = 37,5 \text{ мм}, & l_{BC} &= \frac{BC}{k_l} = \frac{0,15}{0,004} = 37,5 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Порядок построения положения механизма таков:

1. Первоначально на чертеже фиксируем неподвижные точки O и O_1 . Поставим на свободном поле чертежа точку O_1 , затем, отложив расстояние a , поставим точку O_2 .

2. Радиусом l_{OA} проведём окружность, по которой будет перемещаться точка A , лежащая на кривошипе. Установим заданное положение кривошипа под углом $\varphi = 90^\circ$ и получим положение точки A (начальное положение и направление отсчёта угла показано на схеме механизма).

3. Из точки A проводим дугу радиусом l_{AB} , затем из точки O_1 дугу радиусом $l_{O_1B} = l_{O_1C} + l_{CB}$. В точке пересечения ставим точку B . Прямая линия, соединяющая точки A и B , определяет положение шатуна 2.

4. Из точки C , находящейся на середине коромысла 3, проводим дугу окружности радиусом l_{DC} до пересечения её с продолжением линии OO_1 . Точка пересечения D определяет положение ползуна 5.

План механизма насоса в масштабе 1: 4 показан на рис. 3.4.

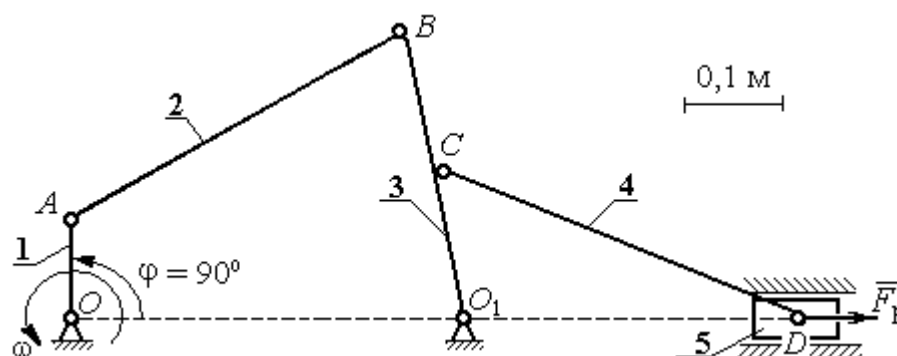


Рис. 3.4. План механизма насоса в масштабе 1:4

3.3. Построение плана скоростей механизма

Построение начинаем с определения модуля скорости точки A ведущего звена 1 – кривошипа.

Вычисляем угловую скорость кривошипа ω , рад/с, по заданной его частоте вращения n , об/мин: $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 95,5}{30} = 10$ рад/с. Вычисляем модуль скорости точки A кривошипа: $V_A = \omega \cdot O_1A = 10 \cdot 0,1 = 1$ м/с. Длину вектора скорости $\vec{V}_A$ точки A на плане скоростей принимаем равной 100 мм. Вычисляем масштаб плана скоростей: $k_v = \frac{V_A}{100} = \frac{1}{100} = 0,01$ (мм/с)/м.

Точка B принадлежит как звену AB (шатун 2), совершающему плоскопараллельное движение, так и звену O_1B (коромысло 3), вращающемуся вокруг неподвижного центра O_1 (рис. 3.4).

Скорость точки B звена AB равна векторной сумме скорости полюса, например точки A , и скорости точки B во вращательном движении звена AB по отношению к полюсу. Тогда для определения скорости точки B имеем первое векторное равенство $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, где $\vec{V}_B$ – вектор скорости точки B ; $\vec{V}_A$ – вектор скорости точки A , известный по величине и направлению; $\vec{V}_{BA}$ – вектор

скорости точки B во вращательном движении звена AB по отношению к полюсу A . Известно, что вектор скорости $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярен линии AB (рис. 3.5, a).

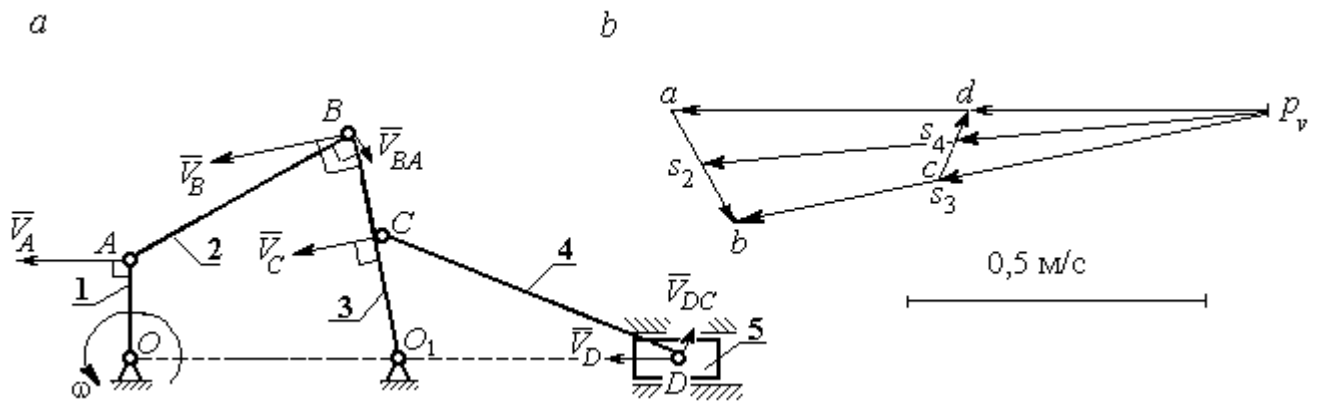


Рис. 3.5. План скоростей механизма:
 a – направления векторов скоростей точек механизма; b – план скоростей

Проведём построение векторов на плане скоростей (рис. 3.5, b). Выберем в качестве полюса плана скоростей точку p_v , которую изображаем на поле чертежа в удобном для построения месте. Изобразим вектор скорости $\vec{V}_A$. На плане механизма (см. рис. 3.5, a) вектор $\vec{V}_A$ перпендикулярен кривошипу O_1A и направлен в сторону его вращения. На плане скоростей вектор, изображающий скорость точки A , направляется из точки p_v параллельно $\vec{V}_A$. Длина вектора на чертеже в соответствии с масштабным коэффициентом равна 100 мм. В конце построенного вектора поставим точку a . Таким образом, вектор $\vec{V}_A$ на плане скоростей изображается горизонтальным отрезком $p_v a$ (см. рис. 3.5, b). Далее, из точки a направляем вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярно линии звена AB . Поскольку величина вектора $\vec{V}_{BA}$ неизвестна, найти вектор $\vec{V}_B$ из первого векторного уравнения не представляется возможным.

С другой стороны, в силу того, что точка B принадлежит звену O_1B , вращающемуся вокруг неподвижного центра O_1 , скорость точки B может быть найдена из второго векторного равенства: $\vec{V}_B = \vec{V}_{BO_1}$, где $\vec{V}_{BO_1}$ – вектор скорости

точки B при вращении звена BO_1 вокруг центра O_1 . Вектор $\vec{V}_{BO_1}$ (и, следовательно, вектор $\vec{V}_B$) перпендикулярен линии BO_1 (см. рис. 3.5, а).

Построим вектор $\vec{V}_B$ в соответствии со вторым векторным уравнением. Из него следует, что направление вектора $\vec{V}_B$ совпадает направлением вектора $\vec{V}_{BO_1}$, который перпендикулярен линии звена BO_1 . Проведём из полюса p_v линию, параллельную вектору $\vec{V}_B$ (перпендикулярную BO_1), до пересечения её с линией, вдоль которой направлен вектор $\vec{V}_{BA}$. Обозначим пересечение этих линий точкой b . Вектор, проведённый из полюса p_v в точку b , равен вектору скорости $\vec{V}_B$. Для определения модуля скорости точки B измерим длину отрезка $p_v b$ на плане скоростей (в мм) и умножим её на масштабный коэффициент плана скоростей. Получим: $V_B = p_v b \cdot k_v = 92 \cdot 0,01 = 0,92$ м/с.

Скорость V_{BA} точки B во вращательном движении звена AB вокруг полюса A найдём измерив длину отрезка ab на плане скоростей и умножив её на величину масштабного коэффициента: $V_{BA} = ab \cdot k_v$. Угловая скорость ω_2 звена AB определяется как отношение: $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{BA} = \frac{ab \cdot k_v}{BA} = \frac{18 \cdot 0,01}{0,4} = 0,45$ рад/с. Уг-

ловая скорость ω_3 вращения коромысла BO_1 вокруг оси O_1 равна:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{0,92}{0,3} = 3,06 \text{ рад/с.}$$

Точка C является серединой коромысла BO_1 . Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен линии BO_1 и по модулю равен: $V_C = \omega_3 \cdot CO_1 = 3,06 \cdot 0,15 = 0,46$ см/с.

Скорость точки C механизма направлена так же как скорость точки B , но по величине в два раза её меньше. На плане скоростей точке C механизма соответствует точка c , лежащая на середине отрезка $p_v b$, изображающего скорость точки B .

Величина и направление скорости $\vec{V}_D$ точки D (ползуна 5) находится с учётом плоскопараллельного движения звена CD на основании векторной формулы: $\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}$, где величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C определены на плане скоростей. Вектор $\vec{V}_{DC}$ скорости точки D при вращении звена CD вокруг полюса C направлен перпендикулярно звену CD . В соответствии с этим на плане скоростей (см. рис. 3.5, b) из точки c (конец вектора $\vec{V}_C$) проводим прямую, параллельную скорости $\vec{V}_{DC}$, (перпендикулярно линии CD) и, так как точка D (ползун 5) движется горизонтально, из полюса p_v проводим горизонтальную прямую, параллельную скорости $\vec{V}_D$. Точка d пересечения этих прямых на плане скоростей определяет конец вектора $\vec{V}_D$ (см. рис. 3.5, b). Измерим на чертеже расстояние $p_v d$ (44 мм) и, умножив его на масштабный коэффициент скоростей, получим модуль скорости точки D : $V_D = p_v d \cdot k_v = 44 \cdot 0,01 = 0,44$ м/с.

Угловая скорость звена 4 равна: $\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC}$, где скорость V_{DC} точки D . Измерим на чертеже расстояние dc ($dc = 8$ мм) и, умножив его на масштабный коэффициент скоростей получим скорость $V_{DC} = dc \cdot k_v = 8 \cdot 0,01 = 0,08$ м/с. Угловая скорость звена 4: $\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC} = \frac{dc \cdot k_v}{DC} = \frac{8 \cdot 0,01}{0,5} = 0,16$ рад/с.

Найдём скорости центров масс звеньев механизма. Полагая, что центры масс звеньев механизма расположены в середине соответствующих отрезков, отметим эти точки на плане скоростей. Так, для того, чтобы на плане скоростей найти скорость центра масс звена AB механизма, разделим пополам отрезок ab . Получим точку s_2 . Скорость центра масс звена AB равна расстоянию $p_v s_2$, умноженному на масштабный коэффициент, $V_{S_2} = p_v s_2 \cdot k_v = 96 \cdot 0,01 = 0,96$ м/с.

Аналогично, разделив пополам отрезки $p_v b$, cd на плане скоростей, получим точки s_3 , s_4 , которые определяют скорости центров масс, соответствен-

но, звена 3 (коромысла) и звена 4 (шатуна). Измерив нужные расстояния, получим: $V_{S_3} = p_v s_3 \cdot k_v = 46 \cdot 0,01 = 0,46$ м/с, $V_{S_4} = p_v s_4 \cdot k_v = 44 \cdot 0,01 = 0,44$ м/с.

Результаты расчётов скоростей центров масс звеньев механизма и угловых скоростей звеньев приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Абсолютные скорости центров масс и угловые скорости звеньев

Звено	AB	BO_1	CD	Ползун
Обозначение скорости центра масс звена	V_{S_2}	V_{S_3}	V_{S_4}	V_D
Величина скорости, м/с	0,96	0,46	0,44	0,44
Обозначение угловой скорости звена	ω_2	ω_3	ω_4	–
Величина угловой скорости, рад/с	0,45	3,06	0,16	–

3.4. Построение плана ускорений механизма

Для определения значений ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев построим план ускорений.

Ведущее звено 1 – кривошип OA – движется с постоянной угловой скоростью. В этом случае касательное ускорение точки A равно нулю: $a_A^{\tau} = 0$. Полное ускорение $\vec{a}_A$ точки A совпадает с нормальным и направлено к оси вращения звена – точке O_1 (рис. 3.6, a). По величине ускорение точки A равно: $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = 10^2 \cdot 0,1 = 10$ м/с².

Перед началом построения плана ускорений выберем масштабный коэффициент. Примем длину вектора ускорения точки A на плане ускорений равной 100 мм. В этом случае масштабный коэффициент ускорений:

$$k_a = \frac{a_A}{100} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ (м/с}^2\text{)/мм.}$$

Чертёж плана ускорений начинаем с построения ускорения точки A .

Из некоторой точки p_a , называемой полюсом плана ускорений и взятой на чертеже в произвольном месте (рис. 3.6, b), направим линию вертикально вниз параллельно направлению вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A кривоши-

па (рис. 3.6, *a*). С учётом масштабного коэффициента ускорений длина вектора ускорения точки *A* на чертеже 100 мм. В конце вектора поставим стрелку и точку *a* (см. рис. 3.6, *b*).

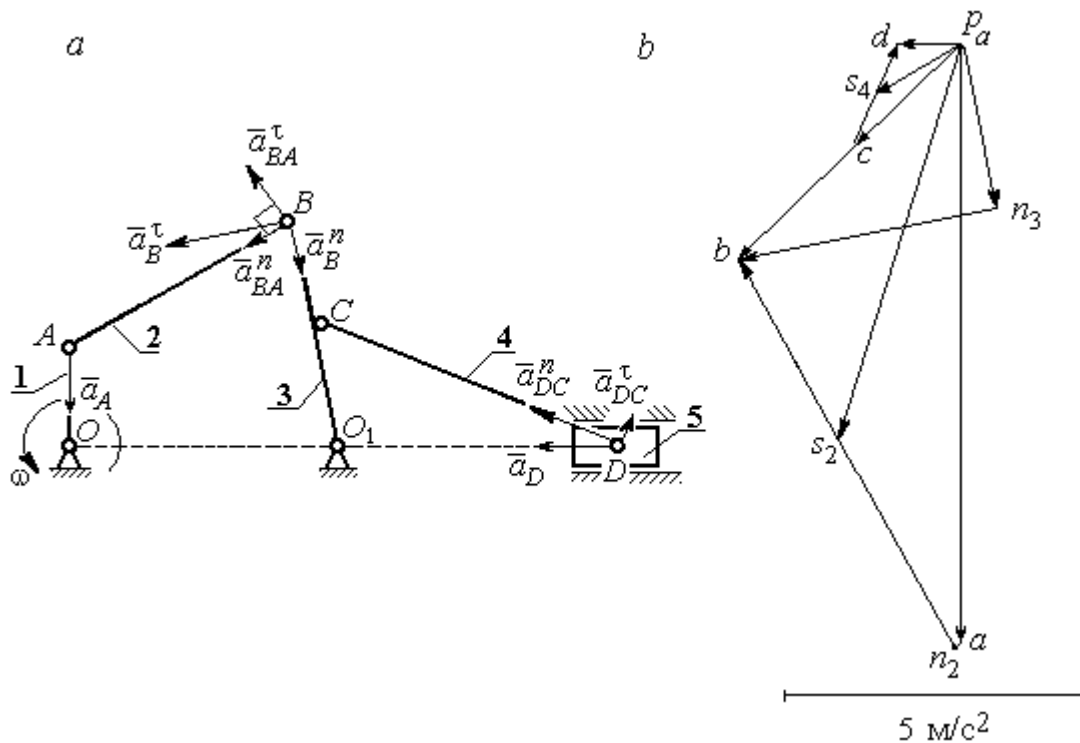


Рис. 3.6. План ускорений механизма:
a – направления векторов ускорений точек механизма; *b* – план ускорений

Ускорение точки *B* находим в соответствии с векторной формулой:
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки *A*, выбранной за полюс; $\vec{a}_{BA}^n$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки *B* во вращательном движении шатуна *AB* относительно полюса *A*.

Правило сложения векторов в векторной формуле следующее: к концу вектора, изображающего на чертеже ускорение $\vec{a}_A$, присоединяем вектор, изображающий ускорение $\vec{a}_{BA}^n$, а к его концу – вектор, изображающий ускорение $\vec{a}_{BA}^\tau$. Тогда вектор, проведённый из начала первого вектора в конец последнего, представляет собой сумму складываемых векторов.

Проведём необходимые построения для определения ускорения точки B . Модуль вектора $\vec{a}_{BA}^n$ – нормальной составляющей ускорения точки B при вращении шатуна AB вокруг полюса A равен: $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 0,45^2 \cdot 0,4 = 0,08 \text{ м/с}^2$. На плане ускорений это будет отрезок длиной $\frac{a_{BA}^n}{k_a} = \frac{0,08}{0,1} = 0,8 \text{ мм}$. Отложим на чертеже из точки a (конец вектора $\vec{a}_A$) отрезок длиной 0,8 мм вдоль линии, параллельной вектору $\vec{a}_{BA}^n$ (см. рис. 3.6, a, b), в сторону, куда на плане механизма направлен этот вектор. В конце отрезка поставим точку n_2 . Отрезок an_2 на плане ускорений изображает нормальную составляющую $\vec{a}_{BA}^n$ ускорения точки B во вращательном движении шатуна AB относительно полюса A . Здесь следует заметить, что расчётная величина отрезка an_2 мала и точно показать его на чертеже невозможно. В расчётах можно считать, что вектор $\vec{a}_{BA}^n$ нормальной составляющей ускорения точки B и отрезок an_2 на плане ускорений равны нулю: $a_{BA}^n = 0$, $an_2 = 0$ и точка n_2 совпадает с точкой a . На рис. 3.6, b отрезок an_2 показан ненулевым только для того, чтобы сохранить правило последовательного построения суммы векторов.

Далее, из конца отрезка an_2 проведём линию, параллельную вектору $\vec{a}_{BA}^\tau$ (рис. 3.6, a), то есть перпендикулярно отрезку an_2 . Однако вычислить сумму этих векторов и получить ускорение точки B невозможно, так как величина касательного ускорения a_{BA}^τ неизвестна.

Воспользуемся тем, что точка B принадлежит звену 3 – коромыслу BO_1 , совершающему вращательное движение вокруг неподвижного центра O_1 . В этом случае полное ускорение точки B может быть представлено как сумма его нормальной и касательной составляющих: $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$. Направления векторов $\vec{a}_B^n$ и $\vec{a}_B^\tau$ показаны на рис. 3.6, a . Величина нормальной составляющей ускоре-

ния: $a_B^n = \omega_3^2 \cdot O_1B = 3,06^2 \cdot 0,3 = 2,84 \text{ см/с}^2$. Относительно касательной составляющей $\vec{a}_B^\tau$ ускорения точки B известно только, что она направлена перпендикулярно BO_1 . Вычислим длину отрезка, изображающего на чертеже нормальную составляющую ускорения точки B , как отношение $\frac{a_B^n}{k_a} = \frac{2,84}{0,1} = 28,4 \text{ мм}$ и на чертеже отложим его из полюса p_a параллельно вектору $\vec{a}_B^n$. В конце отрезка поставим точку n_3 (см. рис. 3.6, b). По правилу сложения векторов из точки n_3 (конца отрезка $p_a n_3$, изображающего ускорение $\vec{a}_B^n$) проводим линию, параллельную вектору $\vec{a}_B^\tau$ (касательная составляющая ускорения точки B). Линия, параллельную вектору $\vec{a}_B^\tau$ перпендикулярна отрезку $p_a n_3$. Пересечение двух перпендикуляров (к отрезку $p_a n_3$ в точке n_3 и к отрезку $p_a n_2$ в точке n_2) обозначим точкой b . Отрезок, проведённый из полюса p_a в точку b , изображает на плане ускорений полное ускорение $\vec{a}_B$ точки B механизма. Величину ускорения точки B найдём, измерив на чертеже длину отрезка $p_a b$ и умножив его на масштабный коэффициент: $a_B = p_a b \cdot k_a = 52 \cdot 0,1 = 5,2 \text{ м/с}^2$.

Отрезок $n_3 b$ изображает на чертеже касательную составляющую ускорения $\vec{a}_B^\tau$ точки B . Измеряем длину отрезка $n_3 b$ ($n_3 b = 43 \text{ мм}$), тогда угловое ускорение звена 3 равно: $\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{BO_1} = \frac{n_3 b \cdot k_a}{BO_1} = \frac{43 \cdot 0,1}{0,3} = 14,3 \text{ рад/с}^2$. Угловое ускорение звена 2 находится аналогично. На чертеже измеряем отрезок $n_2 b$, который изображает ускорение $\vec{a}_{BA}^\tau$ ($n_2 b = 74 \text{ мм}$). Тогда угловое ускорение звена 2: $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{BA} = \frac{n_2 b \cdot k_a}{BA} = \frac{74 \cdot 0,1}{0,4} = 18,5 \text{ рад/с}^2$.

Точка C принадлежит звену 3, совершающему вращательное движение вокруг неподвижного центра O_1 . Так как точка C на плане механизма находится в середине звена BO_1 , величина ускорения точки C равна половине ускорения

точки B : $a_C = 2,6 \text{ м/с}^2$. Соответствующая ей точка c на плане ускорений находится на середине отрезка $p_a b$. Отрезок $p_a c$ изображает ускорение точки C

Ускорение точки D находим на основании векторной формулы: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C , выбранной за полюс; $\vec{a}_{DC}^n$, $\vec{a}_{DC}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки D во вращательном движении шатуна DC относительно полюса C .

Заметим сразу, что величина вектора $\vec{a}_{DC}^n$ (нормальной составляющей ускорения точки D) очень мала: $a_{DC}^n = \omega_4^2 \cdot DC = 0,16^2 \cdot 0,5 = 0,01 \text{ м/с}^2$. На плане ускорений это будет отрезок, длиной $\frac{a_{DC}^n}{k_a} = \frac{0,01}{0,1} = 0,1 \text{ мм}$, который при выбранном масштабе построить точно невозможно. Можно считать, что вектор $\vec{a}_{DC}^n$ и соответствующий ему отрезок на плане ускорений равны нулю. В результате ускорение точки D находим из векторной формулы: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^\tau$.

Ускорение $\vec{a}_D$ точки D ползуна на плане механизма направлено вдоль линии OO_1 . Это означает, что на плане ускорений ускорение точки D должно изображаться горизонтальным отрезком, исходящим из центра p_a .

Проведём необходимые построения. На плане ускорений (см. рис. 3.6, b) из точки c (конец вектора $\vec{a}_C$) проведём линию, параллельную вектору $\vec{a}_{DC}^\tau$, до пересечения её с горизонтальной прямой, идущей из полюса ускорений, вдоль которой направлен вектор ускорения точки D . Обозначим точку пересечения d . Отрезок прямой $p_a d$ изображает на плане ускорений ускорение точки D . Замеряем на чертеже длину отрезка $p_a d$ ($p_a d = 13 \text{ мм}$) и находим ускорение точки D : $a_D = p_a d \cdot k_a = 13 \cdot 0,1 = 1,3 \text{ м/с}^2$. Замеряем на плане ускорений длину отрезка cd , изображающего ускорение $\vec{a}_{DC}^\tau$ ($cd = 18 \text{ мм}$), и находим угловое

ускорение звена 4: $\varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{DC} = \frac{cd \cdot k_a}{DC} = \frac{18 \cdot 0,1}{0,5} = 3,6 \text{ рад/с}^2$.

Определим ускорения центров масс звеньев механизма.

Разделим пополам отрезок ab на плане ускорений, обозначим середину отрезка точкой s_2 и соединим с полюсом p_a . Отрезок $p_a s_2$ изображает ускорение центра масс звена 2 – шатуна AB . Длина отрезка $p_a s_2 = 70$ мм. Ускорение центра масс звена 2: $a_{s2} = p_a s_2 \cdot k_a = 70 \cdot 0,1 = 7$ м/с². Аналогично, точка s_4 , лежащая на середине отрезка cd , изображает центр масс звена 4 шатуна CD . Ускорение центра масс звена 4: $a_{s4} = p_a s_4 \cdot k_a = 18 \cdot 0,1 = 1,8$ м/с². Ускорение центра масс звена 3 равно ускорению точки C : $a_{s3} = a_C = 2,6$ м/с².

Все построения плана ускорений приведены на рис. 3.6.

Результаты вычислений ускорений центров масс звеньев, а также угловых ускорений звеньев механизма приводятся в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Ускорения центров масс звеньев механизма и угловые ускорения звеньев

Звено	AB	BO_1	DC	Ползун
Обозначение ускорения центра масс звена	a_{s2}	a_{s3}	a_{s4}	a_D
Величина ускорения, м/с ²	7	2,6	1,8	1,3
Обозначение углового ускорения звена	ε_2	ε_3	ε_4	–
Величина углового ускорения, рад/с ²	18,5	14,3	3,6	–

3.5. Кинетостатический расчёт механизма

Разделение механизма на группы Ассура приведено на рис. 3.3. Изобразим группу Ассура, состоящую из звеньев 5 – 4, в масштабе 1:4 и приложим в соответствующих точках действующие силы (рис. 3.7).

Силу тяжести $\vec{G}_4$ и силу инерции $\vec{F}_4^{\text{ин}}$ прикладываем в точке s_4 – центре масс стержня CD . При этом сила тяжести $\vec{G}_4$ направлена вертикально вниз, а сила инерции $\vec{F}_4^{\text{ин}}$ направлена параллельно линии $p_a s_4$, обозначающей на плане ускорений (см. 3.6, b) направление ускорения центра масс стержня, в сторону, противоположную направлению вектора ускорения $\vec{a}_{s4}$.

В точке D – центре масс ползуна 5 – прикладываем силу тяжести $\vec{G}_5$, силу полезного сопротивления $\vec{F}_p$, направленную в сторону, противоположную

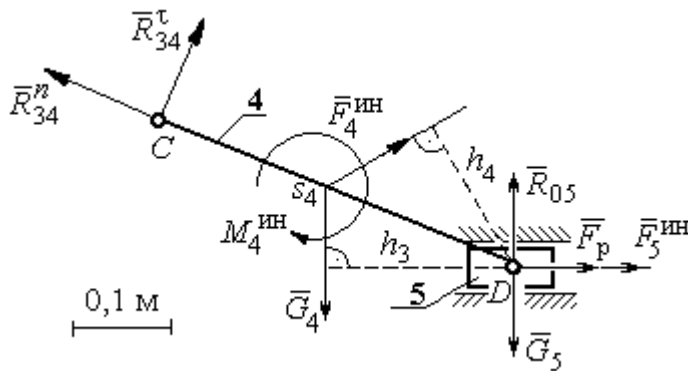


Рис. 3.7. Силы, действующие на группу Асура 5–4

направлению вектора скорости ползуна, и силу инерции $\vec{F}_5^{\text{ин}}$, направленную в сторону, противоположную направлению вектора ускорения ползуна $\vec{a}_D$. Направления векторов скоростей и ускорений показаны на рис. 3.5 – 3.6. Реакцию $\vec{R}_{05}$ стойки на ползун (0 – индекс стойки, 5 – индекс ползуна) изображаем перпендикулярно неподвижным направляющим.

Полную реакцию шарнирного соединения в точке C раскладываем на две составляющие: вдоль стержня CD – $\vec{R}_{34}^n$ и перпендикулярно ему – $\vec{R}_{34}^{\tau}$. Здесь первый нижний индекс в обозначении реакции означает, со стороны какого звена действует реакция, второй нижний – на какое звено.

Главный момент сил инерции, приложенный к 4 звену, обозначаем дуговой стрелкой $M_4^{\text{ин}}$, направленной в сторону, противоположную угловому ускорению стержня 4 (см. рис. 3.6).

В соответствии с принципом Д’Аламбера полученная система сил находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки D .

$$-R_{34}^{\tau} \cdot CD + G_4 h_3 - F_4^{\text{ин}} h_4 - M_4^{\text{ин}} = 0.$$

Способ построения плеч h_3 , h_4 сил $\vec{G}_4$ и $\vec{F}_4^{\text{ин}}$ показан на рис. 3.7.

Вычисляем модули сил и моментов сил инерции.

$$F_4^{\text{ин}} = m_4 a_{S4} = 50 \cdot 1,8 = 90 \text{ Н}, \quad F_5^{\text{ин}} = m_5 a_D = 10 \cdot 1,3 = 13 \text{ Н}.$$

$$M_4^{\text{ин}} = J_{S4} \varepsilon_4 = 3 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем плечи сил. Длина звена CD равна 0,5 м. При масштабе 1:4 масштабный коэффициент длины выбран равным: $k_l = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ (см. рис. 3.4).

На рис. 3.7 измеряем длины отрезков плеч сил (в мм) и умножаем их на масштабный коэффициент длины. Получим

$$h_3 = l_{h3} k_l = 61 \cdot 0,004 = 0,244 \text{ м}, \quad h_4 = l_{h4} k_l = 48 \cdot 0,004 = 0,192 \text{ м}.$$

Из уравнения равновесия находим силу R_{34}^τ :

$$R_{34}^\tau = \frac{G_4 h_3 - F_4^{\text{ин}} h_4 - M_4^{\text{ин}}}{CD} = \frac{490 \cdot 0,244 - 90 \cdot 0,192 - 10,8}{0,5} = 183 \text{ Н}.$$

Неизвестные силы R_{34}^n и R_5 находим из многоугольника сил, который строится согласно векторному уравнению:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_5^{\text{ин}} + \vec{G}_5 + \vec{G}_4 + \vec{F}_4^{\text{ин}} + \vec{R}_{34}^\tau + \vec{R}_{34}^n + \vec{R}_{05} = 0.$$

Для построения силового многоугольника выбираем масштабный коэффициент сил k_F таким образом, чтобы на чертеже длина максимального вектора составляла, например, 300 мм. Таким вектором здесь является сила сопротивления. Тогда $k_F = \frac{F_p}{300} = \frac{16045}{300} = 53,48 \text{ Н/мм}$.

Определяем длины векторов силового многоугольника:

$$l_{F_p} = \frac{F_p}{k_F} = \frac{16045}{53,48} = 300 \text{ мм}, \quad l_{F_5^{\text{ин}}} = \frac{F_5^{\text{ин}}}{k_F} = \frac{13}{53,48} = 1,3 \text{ мм},$$

$$l_{G_5} = \frac{G_5}{k_F} = \frac{98}{53,48} = 1,8 \text{ мм}, \quad l_{G_4} = \frac{G_4}{k_F} = \frac{490}{53,48} = 9,2 \text{ мм},$$

$$l_{F_4^{\text{ин}}} = \frac{F_4^{\text{ин}}}{k_F} = \frac{90}{53,48} = 1,7 \text{ мм}, \quad l_{R_{34}^\tau} = \frac{R_{34}^\tau}{k_F} = \frac{183}{53,48} = 3,4 \text{ мм}.$$

Построение многоугольника сил (рис. 3.8) проводим последовательно в том же порядке, в каком они расположены в векторном равенстве многоугольника сил. Направления действия сил показаны на рис. 3.8, а.

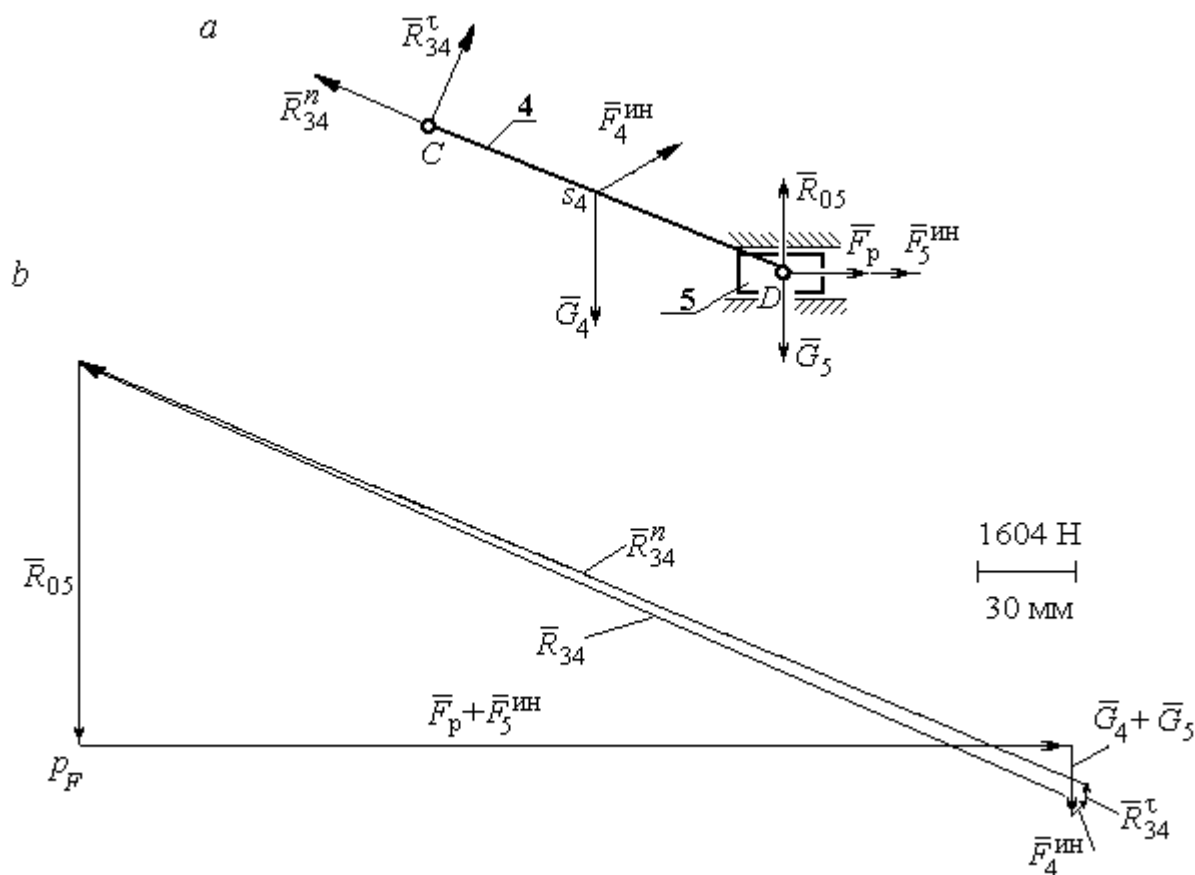


Рис. 3.8. Силовой многоугольник группы Ассура 5 – 4:
а – направления действия сил; б – силовой многоугольник

Из произвольной точки p_F – полюса сил – (см. рис. 3.8, б) строим горизонтальный вектор $\vec{F}_p + \vec{F}_5^{in}$ с учётом выбранного масштаба и в сторону действия этих сил. Из конца этого вектора вертикально вниз строим вектор $\vec{G}_4 + \vec{G}_5$ и так далее последовательно строятся все вектора из векторного уравнения многоугольника сил.

Для того, чтобы завершить построение и определить неизвестные силы $\vec{R}_{34}^n$ и $\vec{R}_{05}$, поступаем следующим образом.

Из конца вектора $\vec{R}_{34}^t$ (см. рис. 3.8, б) проводим линию, параллельную линии действия силы $\vec{R}_{34}^n$ (по направлению стержня CD). Так как равенство нулю векторного уравнения означает, что силовой многоугольник замкнут, из полюса p_F проводим линию, параллельную линии действия реакции $\vec{R}_{05}$. Точка

пересечения этой линии с линией действия силы $\vec{R}_{34}^n$ является концом вектора $\vec{R}_{34}^n$ и началом вектора $\vec{R}_{05}$. Соединив начало вектора $\vec{R}_{34}^n$ с концом вектора $\vec{R}_{34}^n$, получим полную реакцию $\vec{R}_{34}$ звена 3 на звено 4 (см. рис. 3.8, b). Модуль силы $\vec{R}_{34}$ равен произведению длины отрезка, изображающего силу, на масштабный коэффициент силы: $R_{34} = l_{R_{34}} \cdot k_F = 327 \cdot 53,48 = 17487 \text{ Н}$.

Изобразим вторую группу Ассура, состоящую из звеньев 3 – 2, в масштабе 1:4 (рис. 3.9). Прикладываем в точках, изображающих центры масс, силы тяжести $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$, силы инерции $\vec{F}_2^{\text{ин}}$, $\vec{F}_3^{\text{ин}}$ и изображаем моменты сил инерции $M_2^{\text{ин}}$, $M_3^{\text{ин}}$. Направления сил и моментов сил инерции противоположны направлениям, соответственно, векторов ускорений центров масс и угловых ускорений стержней на плане ускорений (см. рис. 3.6, b). Силы реакции со стороны звена 1 на звено 2 в точке A раскладываем на составляющие – вдоль звена 2 – $\vec{R}_{12}^n$ и перпендикулярно ему – $\vec{R}_{12}^t$. Аналогично раскладываем на составляющие $\vec{R}_{03}^n$ и $\vec{R}_{03}^t$ реакцию стойки (индекс 0) на звено 3 (индекс 3) в точке O_1 .

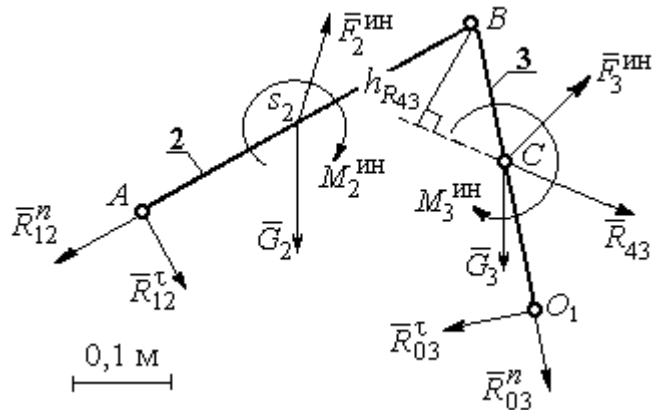


Рис. 3.9. Силы, действующие на группу Асура 3–2

Реакцию $\vec{R}_{43}$ со стороны звена 4 на звено 3 прикладываем в точке C и направляем в сторону, противоположную направлению реакции $\vec{R}_{34}$ (см. рис. 3.8).

Вычисляем модули сил и моментов сил инерции:

$$G_2 = m_2 g = 40 \cdot 9,8 = 392 \text{ Н}, \quad G_3 = m_3 g = 30 \cdot 9,8 = 294 \text{ Н},$$

$$F_2^{\text{ин}} = m_2 a_{S2} = 40 \cdot 7 = 280 \text{ Н}, \quad F_3^{\text{ин}} = m_3 a_{S3} = 30 \cdot 2,6 = 78 \text{ Н},$$

$$M_2^{\text{ин}} = J_{S2} \varepsilon_2 = 2 \cdot 18,5 = 37 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_3^{\text{ин}} = J_{S3} \varepsilon_3 = 1 \cdot 14,3 = 14,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Касательную составляющую реакции шарнира O_1 находим на основании принципа Д'Аламбера из условия равновесия звена 3. Составим условие равновесия звена 3 в виде равенства нулю суммы моментов сил и сил инерции относительно точки B .

$$-R_{03}^{\tau} \cdot O_1B + F_3^{\text{ин}} h_{F_3} + R_{43} h_{R_{43}} - G_3 h_{G_3} - M_3^{\text{ин}} = 0.$$

Вычисляем плечи сил h_{F_3} , $h_{R_{43}}$, h_{G_3} относительно центра B (на рис. 3.9 показано построение плеча $h_{R_{43}}$ силы $\vec{R}_{43}$). Для этого необходимо измерить на чертеже (в мм) длины отрезков плеч сил и умножить их на масштабный коэффициент длины $k_l = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$. Получим:

$$h_{F_3} = l_{F_3} \cdot k_l = 32 \cdot 0,004 = 0,13 \text{ м}, \quad h_{R_{43}} = l_{R_{43}} \cdot k_l = 30 \cdot 0,004 = 0,12 \text{ м}.$$

$$h_{G_3} = l_{G_3} \cdot k_l = 9,7 \cdot 0,004 = 0,04 \text{ м}$$

Из уравнения моментов следует:

$$\begin{aligned} R_{03}^{\tau} &= \frac{1}{O_1B} (F_3^{\text{ин}} h_{F_3} + R_{43} h_{R_{43}} - G_3 h_{G_3} - M_3^{\text{ин}}) = \\ &= \frac{1}{0,3} (78 \cdot 0,13 + 17487 \cdot 0,12 - 294 \cdot 0,04 - 14,3) = 6940 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Аналогично, касательную составляющую реакции шарнира A находим из условия равновесия звена 2, записанного в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки B :

$$R_{12}^{\tau} \cdot AB - F_2^{\text{ин}} h_{F_2} + G_2 h_{G_2} - M_2^{\text{ин}} = 0.$$

Отсюда

$$R_{12}^{\tau} = \frac{1}{AB} (F_2^{\text{ин}} h_{F_2} - G_2 h_{G_2} + M_2^{\text{ин}}) = \frac{1}{0,4} (280 \cdot 0,15 - 392 \cdot 0,18 + 37) = 21,1 \text{ Н}.$$

Неизвестные силы $\vec{R}_{12}^n$ и $\vec{R}_{03}^n$ находим из силового многоугольника, представляющего векторное уравнение равновесия системы сил, действующих на группу Ассура 3–2

$$\vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{R}_{43} + \vec{F}_2^{\text{ин}} + \vec{F}_3^{\text{ин}} + \vec{R}_{03}^{\tau} + \vec{R}_{03}^n + \vec{R}_{12}^n + \vec{R}_{12}^{\tau} = 0.$$

Выбираем масштабный коэффициент сил k_F . Предположим, что на чертеже длина максимального вектора, каковым здесь является сила реакции $\vec{R}_{43}$, модуль которой $R_{43} = 17487$ Н, должна быть равна 300 мм. Тогда масштабный коэффициент сил: $k_F = \frac{R_{43}}{300} = \frac{17487}{300} = 58,29$ Н/мм.

Определяем длины векторов сил:

$$\begin{aligned} l_{G_2} &= \frac{G_2}{k_F} = \frac{392}{58,29} = 6,7 \text{ мм}, & l_{G_3} &= \frac{G_3}{k_F} = \frac{294}{58,29} = 5,1 \text{ мм}, \\ l_{R_{43}} &= \frac{R_{43}}{k_F} = \frac{17487}{58,29} = 300 \text{ мм}, & l_{F_2^{\text{ин}}} &= \frac{F_2^{\text{ин}}}{k_F} = \frac{280}{58,29} = 4,8 \text{ мм}, \\ l_{F_3^{\text{ин}}} &= \frac{F_3^{\text{ин}}}{k_F} = \frac{78}{58,29} = 1,3 \text{ мм}, & l_{R_{03}^{\tau}} &= \frac{R_{03}^{\tau}}{k_F} = \frac{6940}{58,29} = 119,1 \text{ мм}, \\ l_{R_{12}^{\tau}} &= \frac{R_{12}^{\tau}}{k_F} = \frac{21,1}{58,29} = 0,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Построение многоугольника сил проводим последовательно в том же порядке, в каком они расположены в векторном равенстве многоугольника сил.

Из произвольной точки p_F – полюса сил – вертикально вниз проводим вектор $\vec{G}_2 + \vec{G}_3$ с учётом выбранного масштаба его длины (рис. 3.10, *b*). Затем из конца вектора $\vec{G}_2 + \vec{G}_3$ строим вектор $\vec{R}_{43}$, величина и направление которого получены из силового анализа группы Ассур 4–5 и показаны на рис. 3.10, *a*. Таким образом, последовательно строятся все вектора из векторного уравнения многоугольника сил.

Для того, чтобы завершить построение и определить неизвестные силы $\vec{R}_{03}^n$ и $\vec{R}_{12}^n$, поступаем следующим образом. Из конца вектора $\vec{R}_{03}^{\tau}$ проводим линию, перпендикулярную этому вектору. Это направление вектора $\vec{R}_{03}^n$. Вектор $\vec{R}_{12}^n$ следует строить перпендикулярно вектору $\vec{R}_{12}^{\tau}$ так, чтобы конец

вектора суммы $\vec{R}_{12}^n + \vec{R}_{12}^\tau$ пришёл в точку p_F (условие замкнутости силового многоугольника).

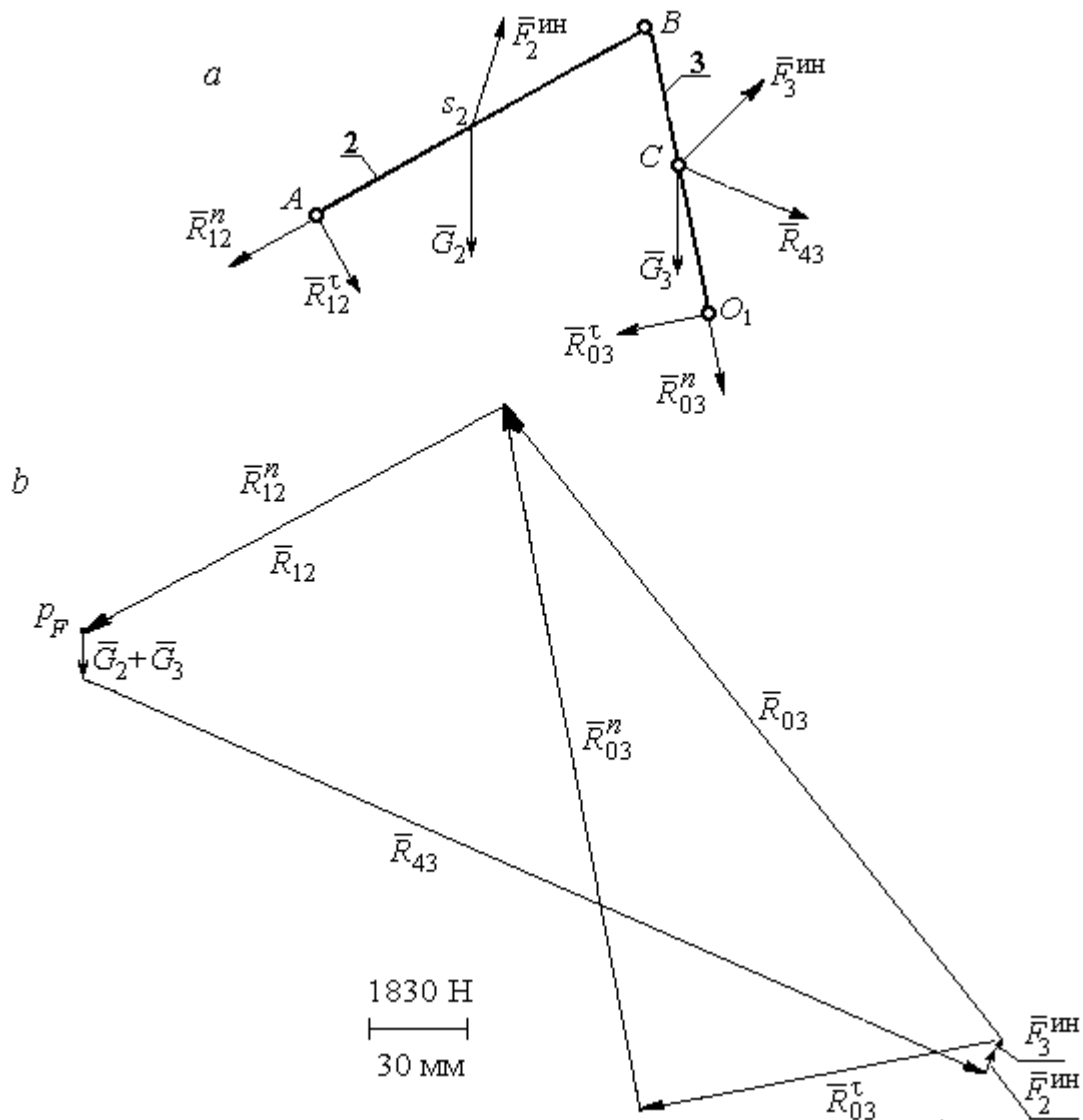


Рис. 3.10. Силовой многоугольник группы Ассур 3 – 2:
а – направления действия сил; б – силовой многоугольник

Заметим, что длина векора $\vec{R}_{12}^\tau$ настолько мала ($l_{R_{12}^\tau} = 0,4$ мм), что изобразить его на чертеже силового многоугольника группы Ассур 3 – 2 не представляется возможным. Полагаем этот вектор равным нулю. Тогда из точки p_F (формально из начала вектора $\vec{R}_{12}^\tau$) проводится линия, параллельная

звену 2 (см. рис. 3.10, *b*). Это направление нормальной составляющей реакции $\vec{R}_{12}^n$. Точка пересечения двух построенных линий определяет конец вектора $\vec{R}_{03}^n$ и начало $\vec{R}_{12}^n$.

Полная реакция $\vec{R}_{03}$ стойки на звено 3 в точке O_1 на чертеже силового многоугольника представляется вектором, проведённым из начала вектора $\vec{R}_{03}^\tau$ в конец вектора $\vec{R}_{03}^n$.

Полная реакция шарнира A совпадает по величине и направлению с нормальной составляющей $\vec{R}_{12} = \vec{R}_{12}^n$.

Для того, чтобы найти величины полных реакций, измерим (в мм) на плане сил длины векторов $\vec{R}_{03}$ и $\vec{R}_{12}^n$ и умножим их на масштабный коэффициент сил. Получим:

$$R_{12} = R_{12}^n = l_{R_{12}^n} k_F = 132,5 \cdot 58,29 = 7723 \text{ Н}, \quad R_{03} = l_{R_{03}} k_F = 211 \cdot 58,29 = 12299 \text{ Н}.$$

Ведущее звено механизма в масштабе 1:4 и силы, действующие на него, показаны на рис. 3.11. Масштабный коэффициент длины такой же, как и при построении плана механизма $k_l = 0,004 \frac{\text{М}}{\text{мм}}$ (см. рис. 3.4). Сила $\vec{R}_{21}$ направлена

навстречу силе $\vec{R}_{12}$ (см. рис. 3.10, *b*) и приложена в точке A . Предполагается, что центр масс кривошипа находится на валу, тогда сила тяжести кривошипа $\vec{G}_1$ приложена на оси вала.

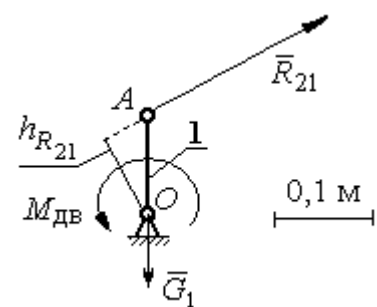


Рис. 3.11. Ведущее звено

Движущий момент $M_{\text{дв}}$ находим из уравнения равновесия ведущего звена в форме моментов относительно оси вала кривошипа: $M_{\text{дв}} - R_{21} h_{R_{21}} = 0$, где $h_{R_{21}}$ — плечо силы $\vec{R}_{21}$. Измерив (в мм) на чертеже длину отрезка, изображающего плечо силы $\vec{R}_{21}$, и умножив его на масштабный коэффициент длины, получим

плечо $h_{R_{21}} = l_{R_{21}} \cdot k_l = 23 \cdot 0,004 = 0,093$ м. Из уравнения равновесия ведущего звена находим величину движущего момента:

$$M_{\text{дв}} = R_{21} h_{R_{21}} = 7723 \cdot 0,093 = 718,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3.6. Определение движущего момента на валу кривошипа по методу Н. Е. Жуковского

Проверку найденного значения движущего момента проведём, рассчитав его по методу Н. Е. Жуковского.

Определим уравнивающую силу, приведённую к точке A кривошипа. Вычисляем силы тяжести звеньев.

$$G_2 = m_2 g = 40 \cdot 9,8 = 392 \text{ Н}, \quad G_3 = m_3 g = 30 \cdot 9,8 = 294 \text{ Н},$$

$$G_4 = m_4 g = 50 \cdot 9,8 = 490 \text{ Н}, \quad G_5 = m_5 g = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ Н}.$$

Вычисляем модули сил инерции, действующих на механизм.

$$F_2^{\text{ин}} = m_2 a_{S2} = 40 \cdot 7 = 280 \text{ Н}, \quad F_3^{\text{ин}} = m_3 a_{S3} = 30 \cdot 2,6 = 78 \text{ Н},$$

$$F_4^{\text{ин}} = m_4 a_{S4} = 50 \cdot 1,8 = 90 \text{ Н}, \quad F_5^{\text{ин}} = m_5 a_D = 10 \cdot 1,3 = 13 \text{ Н}.$$

Вычисляем модули моментов сил инерции.

$$M_2^{\text{ин}} = J_{S2} \varepsilon_2 = 2 \cdot 18,5 = 37 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_3^{\text{ин}} = J_{S3} \varepsilon_3 = 1 \cdot 14,3 = 14,3 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_4^{\text{ин}} = J_{S4} \varepsilon_4 = 3 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Построим «жёсткий рычаг» Жуковского. Изобразим план скоростей механизма (см. рис. 3.5, b), повернув его на 90° . Приложим силы тяжести и силы инерции в точках, изображающих на повернутом плане скоростей, центры масс звеньев механизма. Направление сил инерции противоположно направлению ускорений центров масс, показанных на плане ускорений. Моменты сил инерции, действующие на звенья механизма, раскладываем на две антипараллельные силы, приложенные к крайним точкам звена, перпендикулярно ему:

$$F'_2 = F''_2 = \frac{M_2^{\text{ин}}}{AB} = \frac{37}{0,4} = 92,5 \text{ Н}, \quad F'_3 = F''_3 = \frac{M_3^{\text{ин}}}{O_1 B} = \frac{14,3}{0,3} = 48 \text{ Н},$$

$$F'_4 = F''_4 = \frac{M_4^{\text{ин}}}{CD} = \frac{10,8}{0,5} = 21,6 \text{ Н.}$$

Заданное положение кривошипа осуществляется на рабочем ходу поршня. Сила полезного сопротивления F_p направлена в сторону, противоположную движению поршня. Рычаг Н. Е. Жуковского приведён на рис. 3.12. На рисунке отмечены силы тяжести и силы инерции звеньев, приложенные в точках плана скоростей $s_2 - s_4$, соответствующих положению центров масс этих звеньев. Показаны пары сил инерции $(\vec{F}'_2, \vec{F}''_2)$, $(\vec{F}'_3, \vec{F}''_3)$, $(\vec{F}'_4, \vec{F}''_4)$, образующие главные моменты сил инерции $M_2^{\text{ин}}$, $M_3^{\text{ин}}$, $M_4^{\text{ин}}$, приложенные, соответственно, к звеньям 2 – 4. Применение «рычага Жуковского» для определения приведённой силы заключается в составлении уравнения равновесия в форме равенства нулю суммы моментов заданных сил относительно полюса p_v :

$$\begin{aligned} & -F_{\text{пр}} \cdot h_{\text{пр}} - F'_2 \cdot h'_2 + F''_2 \cdot h''_2 - G_2 \cdot h_{G2} + F_2^{\text{ин}} \cdot h_2 + F_3'' \cdot h_3 - F'_4 \cdot h'_4 + F''_4 \cdot h''_4 - \\ & - G_4 \cdot h_{G4} - G_3 \cdot h_{G3} + (F_p + F_5^{\text{ин}})h_5 + F_4^{\text{ин}} \cdot h_4 + F_3^{\text{ин}} \cdot h_3 = 0. \end{aligned}$$

При вычислении моментов сил плечи сил определяются графически с учётом масштабного коэффициента плана скоростей. Так плечом $h_{\text{пр}}$ силы $\vec{F}_{\text{пр}}$ относительно полюса p_v на плане рычага Жуковского является отрезок $p_v a$, равный, согласно масштабному коэффициенту, 100 мм. На рис. 3.12, в качестве примера, показан способ вычисления плеча h'_2 силы $\vec{F}'_2$ – как кратчайшее рас-

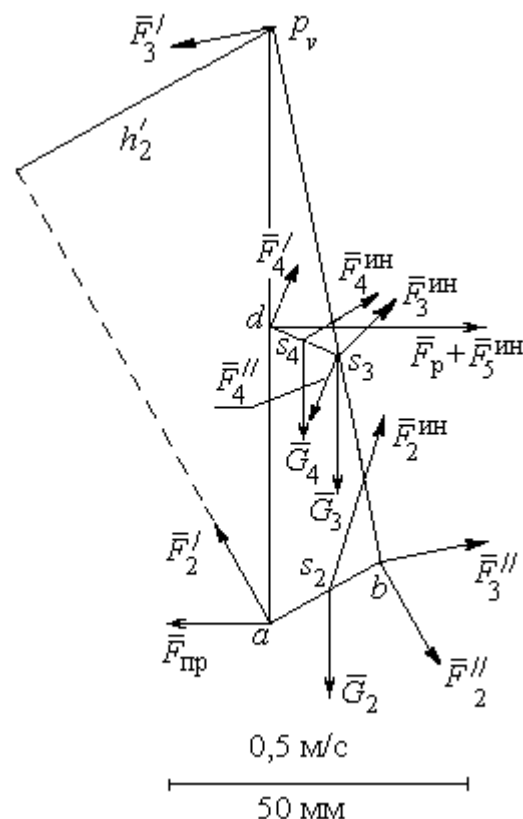


Рис. 3.12. «Жёсткий рычаг» Н. Е. Жуковского

стояние от полюса p_v до линии действия силы $\vec{F}'_2$. Измерив это расстояние, найдём $h'_2 = 52$ мм. Аналогичным образом в уравнении равновесия вычисляются плечи остальных сил. В результате получим:

$$F_{\text{пр}} \cdot 100 = -92,5 \cdot 52 + 92,5 \cdot 21 - 392 \cdot 6 + 280 \cdot 31 + 48 \cdot 92 - 21,6 \cdot 23 + 21,6 \cdot 33 - \\ - 490 \cdot 3 - 294 \cdot 7 + (16045 + 13)44 + 90 \cdot 42 + 78 \cdot 36,$$

откуда находим: $F_{\text{пр}} = 7177$ Н·м. Величина движущего момента на валу кривошипа, находится из формулы: $M_{\text{пр}} = F_{\text{пр}} \cdot O_1A = 7177 \cdot 0,1 = 717,7$ Н·м.

Погрешность расчёта движущего момента по методу «рычага Н. Е. Жуковского» по сравнению с кинетостатическим расчётом ($M_{\text{дв}} = 718,2$ Н·м) составляет:

$$\delta_M = \frac{718,2 - 717,7}{718,2} 100 \% = 0,07 \%.$$

3.7. Построение профиля кулачка

Построение кинематических диаграмм движения толкателя

Закон изменения аналога ускорения центрального плоского толкателя по фазам движения кулачка приведён в задании на курсовой проект (см. рис. 3.1). Построенный в масштабе, с учётом исходных данных, указанных в задании, график изменения аналога ускорения центрального плоского толкателя по фазам движения кулачка показан на рис. 3.13, а.

На первом участке изменение аналога ускорения происходит по линейному закону: $S''_1 = a_1\varphi + b_1$. Из графика найдём величины аналога ускорения в граничных точках первого участка (численные значения граничных точек должны быть переведены в радианы): $S''_1(0) = 0$, $S''_1(1,57) = 40$ мм/рад². Подставляя их в закон изменения аналога ускорения на первом участке, получим два алгебраических уравнения относительно неизвестных a_1 , b_1 :

$$0 = a_1 \cdot 0 + b_1, \quad 40 = a_1 \cdot 1,57 + b_1,$$

откуда находим $a_1 = 25,48$; $b_1 = 0$. Таким образом, закон изменения аналога ускорения толкателя на первом участке $S_1'' = 25,48\varphi$. На втором участке величина аналога ускорения $S_2'' = -20$ мм/рад².

Для того, чтобы построить диаграмму изменения аналога скорости, проинтегрируем полученный аналог ускорения. На первом участке получим:

$$S_1' = \int S_1'' d\varphi = \int 25,48\varphi d\varphi = 12,74\varphi^2 + C_1.$$

Константа интегрирования C_1 находится из начального условия: при $\varphi = 0$ $S_1' = 0$. Отсюда следует $C_1 = 0$. Окончательно закон изменения аналога скорости на первом участке движения толкателя представляет собой параболу $S_1' = 12,74\varphi^2$ с вершиной при $\varphi = 0$.

В конце первого участка (при $\varphi = 1,57$) величина аналога скорости толкателя равна: $S_1'(1,57) = 12,74 \cdot 1,57^2 = 31,4$ мм/рад.

Аналогично проводим интегрирование аналога ускорения толкателя на втором участке: $S_2' = \int S_2'' d\varphi = -\int 20 d\varphi = -20\varphi + C_2$.

Константу интегрирования C_2 найдём из краевого условия, согласно которому аналог скорости толкателя в начале второго участка равен аналогу скорости в конце первого: $S_2'(1,57) = S_1'(1,57) = 31,4$ мм/рад. Подставляя это условие в уравнение для аналога скорости на втором участке, получим $C_2 = 31,4 + 20 \cdot 1,57 = 62,8$. В результате, закон изменения аналога скорости на втором участке представляется линейной функцией: $S_2' = -20\varphi + 62,8$. График изменения аналога скорости толкателя показан на рис. 3.13, *b*.

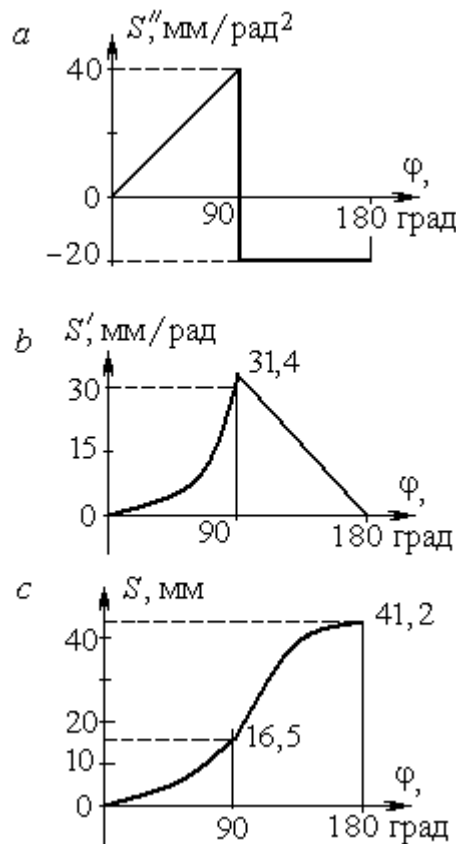


Рис. 3.13. Диаграммы движения толкателя:
a – диаграмма изменения аналога ускорения; *b* – диаграмма изменения аналога скорости; *c* – диаграмма изменения пути

Для того, чтобы получить график изменения пути толкателя, необходимо проинтегрировать его скорость по участкам. Получим на первом участке: $S_1 = \int S'_1 d\varphi = \int 12,74\varphi^2 d\varphi = 4,25\varphi^3 + C_3$. Используя краевое условие на начало движения толкателя: при $\varphi = 0$ $S_1 = 0$, получим $C_3 = 0$. Таким образом, на первом участке движение толкателя определяется кубической параболой: $S_1 = 4,25\varphi^3$. В конце первого участка при $\varphi = 1,57$ $S_1 = 4,25 \cdot 1,57^3 = 16,45$ мм,

На втором участке $S_2 = \int S'_2 d\varphi = \int (-20\varphi + 62,8)d\varphi = -10\varphi^2 + 62,8\varphi + C_4$. Константу C_4 найдём из условия, что положение толкателя в конце первого участка равно его положению на начало второго: $S_2(1,57) = S_1(1,57) = 16,45$ мм. Подставляя это условие в уравнение движения толкателя, получим $C_4 = -57,4$. Окончательно на втором участке движение толкателя описывается параболой: $S_2 = -10\varphi^2 + 62,8\varphi - 57,4$. Вершина параболы, которая определяется из условия равенства нулю производной: $S'_2 = -20\varphi + 62,8 = 0$, находится в конце второго участка при $\varphi = 3,14$. Значение функции в вершине (максимальный ход толкателя): $S_2 = -10 \cdot 3,14^2 + 62,8 \cdot 3,14 - 57,4 = 41,2$ мм. Диаграмма движения толкателя приведена на рис. 3.13, с. Результаты расчётов параметров движения толкателя на фазе подъёма кулачка поместим в таблицу

Таблица 3.8

Значения параметров движения толкателя на фазе подъёма

	Первый участок				Второй участок			
φ , град	0	30	60	90	90	120	150	180
φ , рад	0	0,52	1,05	1,57	1,57	2,09	2,62	3,14
S , мм	0	0,6	4,92	16,5	16,5	30,17	38,5	41,2
S' , мм/рад	0	3,44	14,05	31,4	31,4	21	10,4	0
S'' , мм/рад ²	0	13,25	26,75	40	-20	-20	-20	-20

Вычисление начального радиуса кулачка и построение профиля

График зависимости аналога скорости S' от перемещения толкателя S , построенный по точкам, приведён на рис. 3.14. Масштабные коэффициенты по обеим осям одинаковы.

Выбираем максимально допустимое значение угла давления $\theta_{\text{доп}}$ для кулачка с плоским толкателем $\theta_{\text{доп}} = 30^\circ$. Прямая aa (см. рис. 3.14), проведённая под углом $\theta_{\text{доп}} = 30^\circ$ к оси S , касается графика в точке B с координатами $S_B = 12$ мм и $S'_B = 32$ мм (измерены на графике). Начальный радиус кулачка R_0 определяется из соотношения: $\text{tg}\theta_{\text{доп}} = 0,58 = \frac{S'_B}{R_0 + S_B} = \frac{32}{R_0 + 12}$, откуда получим $R_0 = 43,2$ мм.

Построение профиля кулачка производится в полярной системе координат с центром на оси вращения кулачка. Задавшись углом φ поворота толкателя, найдём полярный угол θ радиус-вектора R в точке контакта по формуле: $\theta = \varphi + \text{arctg} \frac{S'}{R_0 + S}$, где S' и S – аналог скорости толкателя и его перемещение при одном и том же значении угла φ поворота толкателя. Длина радиус-вектора R в точке контакта находится по формуле:

$$R = \sqrt{(R_0 + S)^2 + (S')^2}.$$

Результаты расчётов полярных координат θ , R точек профиля кулачка на фазе подъёма толкателя при $R_0 = 43,2$ мм приведены в табл. 3.9. Эскиз профиля кулачка показан на рис. 3.15. На фазе опускания толкателя профиль кулачка является симметричным.

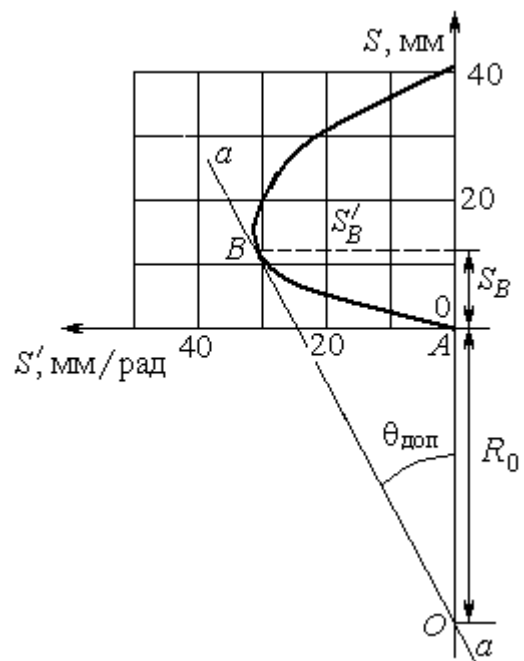


Рис. 3.14. Схема построения начального радиуса кулачка

Таблица 3.9

Расчёт полярных координат точек профиля кулачка на фазе подъёма толкателя

Параметры	Расчётные точки профиля и значения параметров в расчётных точках						
φ , град	0	30	60	90	120	150	180
φ , рад	0	0,52	1,05	1,57	2,09	2,62	3,14
S , мм	0	0,6	4,92	16,5	30,17	38,5	41,2
S' , мм/рад	0	3,4	14,05	31,4	21	10,4	0
β , град	0	4,44	16,28	27,74	15,97	7,25	0
θ , град	0	34,44	76,28	117,74	135,97	157,25	180
R , мм	43,2	43,9	50,13	67,45	76,32	82,36	84,4

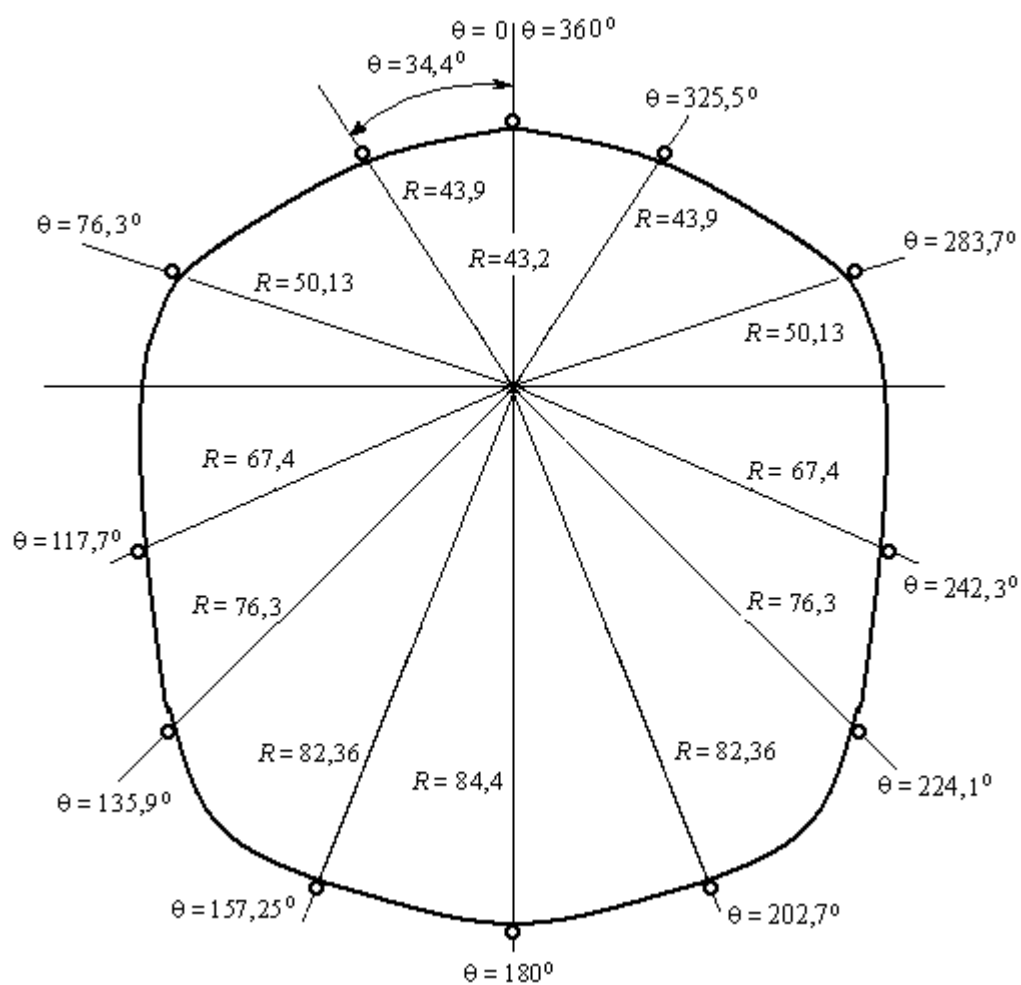


Рис. 3.15. Профиль кулачка

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Афанасьев А. И., Ляцев С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2005.

Дунаев П. Ф., Леликов О. П. Конструирование узлов и деталей машин: уч. пособие для студ. техн. спец. вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2003, 496 с.

Иванов М. Н. Детали машин. М.: Высшая школа, 2010.

Краснов М. М., Вереина Л. И. Техническая механика. М.: Academia, 2010. 288 с.

Левитский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Высшая школа, 2007.

Мокрушин Н. В., Ляцев С. А. Лекции по сопротивлению материалов. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012.

Олофинская В. П. Техническая механика. М.: Форум, 2009.

Смелятин А. И. Теория механизмов и машин. М.: Инфра, 2009.

Учебное издание

Анатолий Ильич Афанасьев
Юрий Михайлович Казаков
Сергей Андреевич Ляпцев

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Учебно-методическое пособие
и контрольные задания на курсовой проект
«Кинематический, силовой анализ и синтез
плоского механизма» для студентов
направления бакалавриата
151000 – «Технологические машины и оборудование»*

Редактор *В. В. Баклаева*

Подписано в печать

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.

Печ. л. Уч. изд. л. Тираж 200 экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ

УДК 621.01

ФГБОУ ВО «УГГУ»

В. М. Таугер, А. А. Леонтьев

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебное пособие

2020

УДК 621.01

Рецензент: А. П. Котельников, канд. техн. наук (доцент кафедры
«Проектирование и эксплуатация автомобилей» УрГУПС)

Печатается по решению Учебно-методического совета
Уральского государственного горного университета

Таугер В. М., Леонтьев А. А.

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН: учебное пособие / В. М. Таугер,
А. А. Леонтьев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. –
128 с.: ил.

Изложены методы структурного анализа и синтеза, кинематического и динамического расчёта наиболее распространённых в промышленности механизмов и машин.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений, программа которых включает дисциплину «Теория механизмов и машин».

УДК 621. 01

© Таугер В. М., Леонтьев А. А.

© Урал. гос. горный ун-т. 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Основные понятия и определения ТММ.....	5
2. Основные стадии проектирования и создания новой техники.....	8
3. Структурная классификация и виды механизмов.....	10
4. Кинематический анализ рычажных механизмов.....	19
5. Динамический анализ рычажных механизмов.....	28
6. Синтез рычажных механизмов.....	48
7. Кулачковые механизмы.....	57
8. Фрикционные и зубчатые механизмы.....	72
9. Трение в кинематических парах.....	110
10. Уравновешивание масс в механизмах и машинах.....	120
Библиографический список.....	128

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов и машин (ТММ) является одним из разделов механики, в котором изучается строение, кинематика и динамика механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

Прикладная механика, которая в настоящее время объединяет такие дисциплины, как ТММ, сопротивление материалов, и детали машин, является одной из старейших областей знаний. Известно, например, что еще при строительстве египетских пирамид использовались простейшие механизмы (рычаги, блоки и т. д.). ТММ как наука выделилась около 200 лет тому назад. Существенный вклад в её развитие внесли такие ученые и изобретатели, как М.В. Ломоносов, И.И. Ползунов – создатель паровой машины, И.П. Кулибин – создатель часов-автоматов, механизма протеза и т. п., отец и сын Черепановы, построившие первый в России паровоз, Л. Эйлер, разработавший теорию плоского зацепления и предложивший эвольвентный профиль зубьев колес, который используется в настоящее время.

Внесли свой вклад в развитие науки академики П.Л. Чебышев, И.А. Вышнеградский, Н.П. Петров, В.П. Горячкин, М.В. Остроградский; профессора Н.Е. Жуковский – отец русской авиации, В.Л. Кирпичев, Н.И. Мерцалов, Л.А. Ассур, И.В. Мещерский, физик Д. Максвелл, а также современные ученые, такие как И.И. Артоболевский, Н.Г. Бруевич, Д.Н. Решетов и другие.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ведущей отраслью современной техники является машиностроение, развитие которого неразрывно связано с созданием новых машин и механизмов, повышающих производительность труда и заменяющих ручной труд машинным.

В технике широко используются подвижные механические системы, подразделяемые на машины, машинные агрегаты и механизмы.

В обобщенном виде *машина* – это устройство, создаваемое человеком для использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда.

По функциональному назначению машины условно можно разделить на энергетические, транспортные, технологические, контрольно-управляющие, логические (ЭВМ).

Устройства, включающие ряд машин и механизмов, называются машинными агрегатами (МА). Обычно МА состоит (рис. 1) из двигателя (*D*), передаточного механизма (ПМ), рабочей машины (РМ) и, в ряде случаев, контрольно-управляющего устройства, или системы автоматического регулирования (САР).

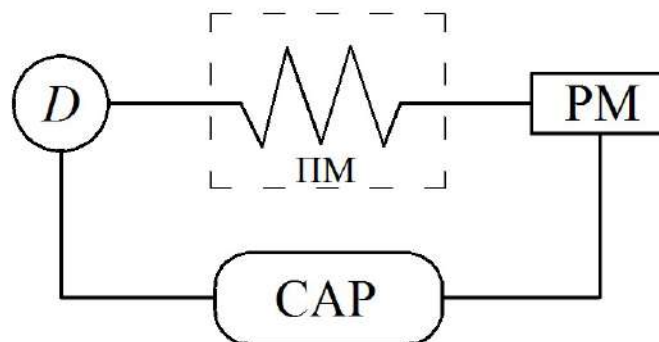


Рис. 1. Схема машинного агрегата

В состав каждой отдельной машины входит один или несколько механизмов.

Механизмом называется система материальных тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения остальных.

Состав механизмов разнообразен и включает механические, гидравлические, электрические и другие устройства.

Несмотря на разницу в назначении механизмов их строение, кинематика и динамика имеет много общего, поэтому исследование механизмов проводится на базе основных принципов современной механики.

Всякий механизм состоит из отдельных тел (деталей), соединенных между собой.

Деталь – это изделие, изготовленное из однородного материала без сборочных операций.

Детали, соединенные между собой неподвижно или с помощью упругих связей, образуют отдельное *звено*.

Выполнение звеньев из нескольких деталей обеспечивается их *соединением*. Различают соединения неразъемные (сварные, заклепочные, клеевые) и разъемные (шпоночные, шлицевые, резьбовые).

Звенья в зависимости от вида их материала могут быть твердые и гибкие (упругие).

Два звена, соединенных друг с другом подвижно, образуют *кинематическую пару*.

Неподвижное звено, состоящее из одной или нескольких деталей, называется *стойкой*.

Таким образом, каждый механизм имеет стойку и подвижные звенья, среди которых выделяют входные, выходные и промежуточные звенья.

Входным (ведущим) звеньям сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения *выходных (ведомых)* звеньев с помощью *промежуточных* звеньев. В простых механизмах имеется одно входное и одно выходное звено.

Но в некоторых случаях имеют место механизмы с несколькими входными или выходными звеньями, например, дифференциал автомобиля.

Развитие техники осуществляется в направлении совершенствования ранее известных механизмов и путем создания принципиально новых их видов.

2. ОСНОВНЫЕ СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И СОЗДАНИЕ НОВОЙ ТЕХНИКИ

При проектировании новой техники возникает необходимость проведения работ, связанных с анализом и синтезом новой конструкции.

Анализ осуществляется при заданных размерах и массе звеньев, когда необходимо определить: скорости, ускорения, действующие силы, напряжения в звеньях и их деформации. В результате может быть произведен проверочный расчет на прочность, выносливость и т. д.

Синтез осуществляется при заданных скоростях, ускорениях, действующих силах, напряжениях или деформациях. При этом требуется определить необходимые размеры звеньев, их форму и массу.

При синтезе часто решается задача оптимального проектирования конструкции, когда находятся необходимые показатели работы машины при наименьших затратах труда.

Обычно основными этапами создания новой конструкции являются:

- 1) разработка принципиальной схемы;
- 2) проектирование и расчет машины и отдельных ее узлов;
- 3) экспериментальные исследования и доводка опытного образца.

Проектирование новой техники включает следующие основные этапы:

- а) разработка технического задания, включающего основные исходные данные;
- б) разработка эскизного проекта, включающего выбор схемы и компоновку основных узлов конструкции;
- в) разработка технического проекта, где осуществлены основные расчеты и представлены сборочный чертеж и др. документация.

При проектировании сложных механизмов обычно стремятся выделить из общей схемы отдельные, более простые типовые механизмы, проектирование которых имеет свои закономерности. К таким широко используемым в технике механизмам относятся рычажные (стержневые),

кулачковые, фрикционные, зубчатые и т. д., причем с точки зрения строения, кинематики и динамики любой механизм можно заменить условным рычажным механизмом с последующим его анализом, поэтому структура, кинематика и динамика рычажных механизмов рассматривается наиболее подробно.

3. СТРУКТУРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ВИДЫ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Классификация кинематических пар

Подвижные соединения двух звеньев, называемые кинематической парой (КП), классифицируются по разным признакам. Например, по характеру соприкосновения звеньев различают низшие КП, когда контакт происходит по поверхности (рис. 2, *а*), и высшие, когда контакт звеньев осуществляется по линии или в точке (рис. 2, *б*).

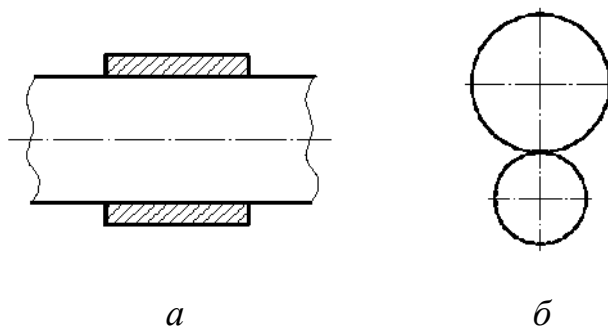


Рис. 2. Кинематические пары:
а – низшая; *б* – высшая

Преимуществом низших КП является возможность передачи значительных усилий при малом износе, а достоинством высших КП возможность воспроизводить достаточно сложные относительные движения.

Низшие КП могут быть поступательными, вращательными, плоскими и пространственными, а также классифицироваться по числу условий связи, накладываемых на звенья при формировании КП.

Любое тело в декартовой системе координат (рис. 3) имеет 6 степеней свободы, или подвижности ($W = 6$), часть из которых уничтожается в КП. При этом класс КП определяется числом S накладываемых связей, а число её степеней подвижности равно

$$W = 6 - S. \quad (3.1)$$

На рис. 4 приведены КП различных классов.

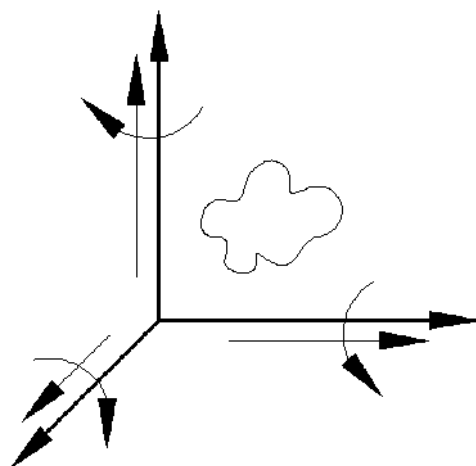


Рис. 3. Степени свободы в декартовой системе координат

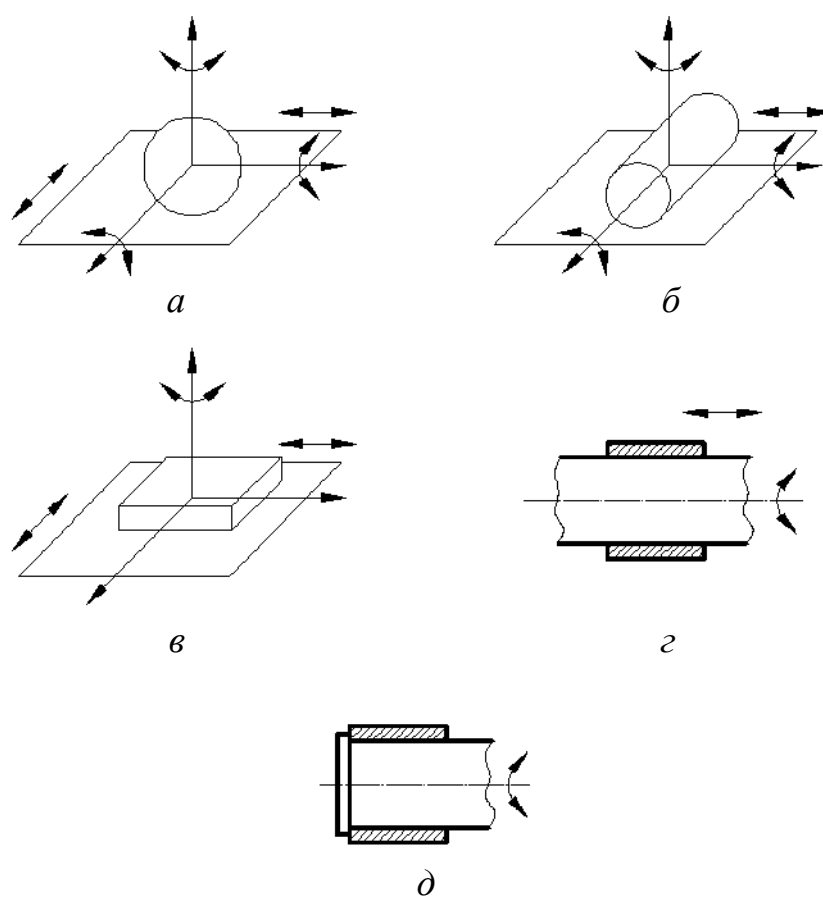


Рис. 4. Классификация КП по числу условий связи:
a – КП 1 класса, $S = 5$; *б* – КП 2 класса, $S = 4$; *в* – КП 3 класса, $S = 3$;
г – КП 4 класса, $S = 2$; *д* – КП 5 класса, $S = 1$

Кинематические пары и звенья механизмов изображаются упрощенно (рис. 5) при соблюдении стандарта на обозначения звеньев и КП.

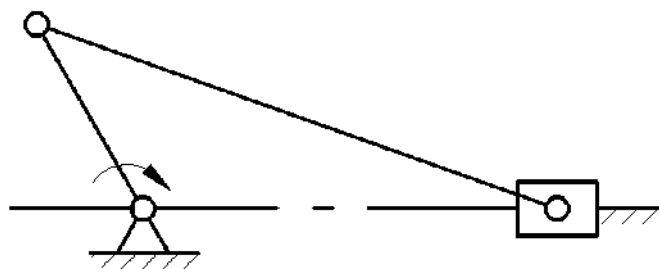


Рис. 5. Упрощенное изображение КП

3.2. Кинематические цепи и их классификация

Любой механизм представляет собой *кинематическую цепь* (КЦ) звеньев, соединенных в КП. КЦ могут быть простыми и сложными, открытыми и замкнутыми, плоскими и пространственными.

В *простой* КЦ каждое из ее звеньев входит в состав одной или двух КП, а в *сложной* КЦ имеются звенья, входящие в состав трех и более КП.

В *открытой* КЦ имеются звенья, входящие в состав одной КП, а в замкнутой цепи каждое звено входит в состав двух и более КП (рис. 6).

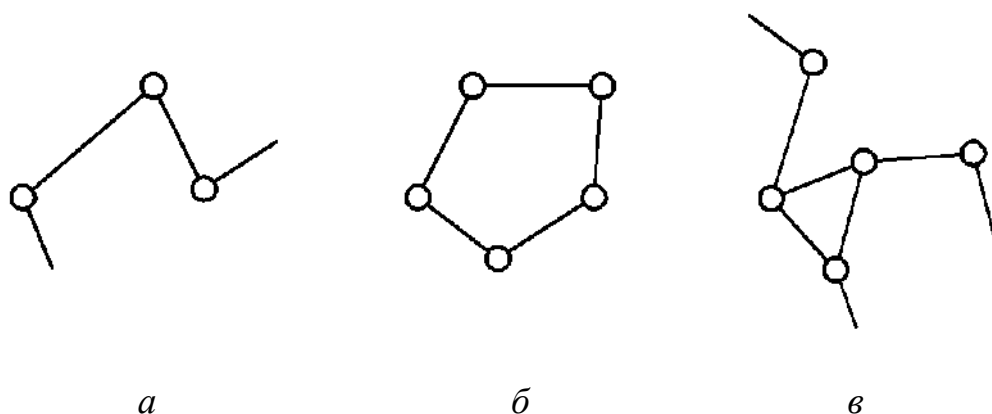


Рис. 6. Классификация КЦ:
a – простая открытая; *б* – простая замкнутая; *в* – сложная открытая

Если точки всех звеньев двигаются в одной или параллельных плоскостях, то КЦ называется *плоской*, в противном случае КЦ –

пространственная (точки звеньев описывают плоские кривые в непараллельных плоскостях или пространственные кривые).

3.3. Понятие о степени подвижности механизма

Если в пространственной КЦ, состоящей из n подвижных звеньев, имеются КП 1, 2, ..., 5 класса, число которых, соответственно, $p_1, p_2, \dots, p_5$, то КЦ имеет число степеней свободы, определяемое формулой А.П. Малышева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3.2)$$

Так как любой механизм имеет одно неподвижное звено (стойку) и n подвижных звеньев, то формула (3.2) может использоваться для определения W пространственного механизма, где n – число подвижных звеньев, а W – степень подвижности механизма, показывающая, сколько нужно иметь ведущих звеньев (двигателей) для получения определенного движения остальных его звеньев.

Для плоского механизма степень подвижности определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (3.3)$$

причём КП 5 класса существуют в виде поступательных, вращательных и винтовых пар.

Например, кривошипно-ползунный плоский механизм (рис. 7), в котором $n = 3$; $p_5 = 4$; $p_4 = 0$, имеет степень подвижности

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

При определении W необходимо учитывать возможность наличия так называемых *пассивных* звеньев, т.е. звеньев, которые могут быть исключены без формального ущерба для кинематики анализируемого механизма (рис. 8).

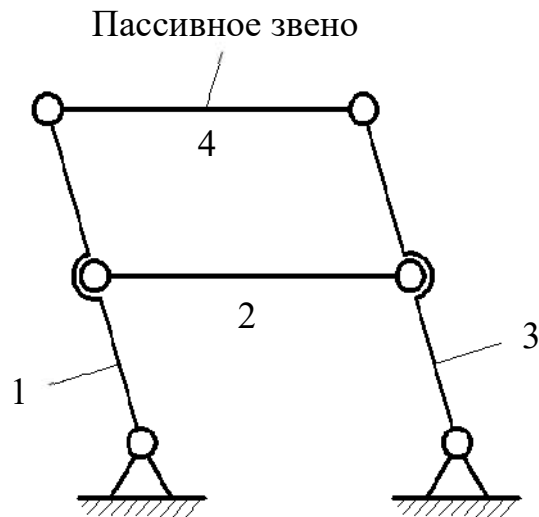


Рис. 8. Механизм с пассивным звеном

Кроме того, необходимо учитывать возможность наличия избыточных связей, которые не реализуются в реальном механизме, а их число q определяется разностью между числом связей в КП действительного и формально возможного механизмов.

На рис. 9, *а* показан действительный механизм, а на рис. 9, *б* – формально возможный механизм, имеющий функциональное назначение, аналогичное действительному механизму, но все связи в котором, в отличие от действительного механизма, реализованы.

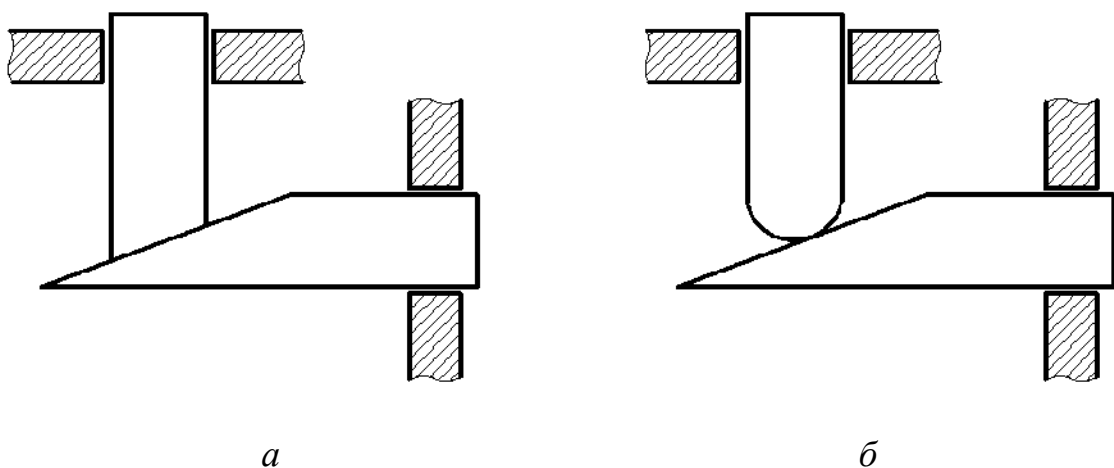


Рис. 9. Примеры механизмов:
а – действительный механизм; *б* – формально возможный механизм

Степень подвижности действительного механизма с учётом избыточных связей равна

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 + q. \quad (3.4)$$

В общем случае пространственного механизма

$$W = 6n - ip_i + q, \quad (3.5)$$

где i от 1 до 5.

3.4. Структурный анализ механизмов

Основной принцип образования рычажных механизмов был сформулирован в 1914 г. профессором Л. В. Ассуром и заключается в следующем.

Схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к входным (начальным) звеньям и стойке КЦ с нулевой степенью подвижности. Такие КЦ называются структурными группами Ассура. Примеры различных групп Ассура показаны на рис. 10.

Начальное звено со стойкой образует простейший механизм 1-ого класса (рис. 11).

Путем присоединения к таким механизмам различных групп Ассура можно получить механизм любой сложности.

Группы Ассура классифицируются по числу КП, которыми они присоединяются к основному механизму. Это число определяет *порядок* группы. Кроме того, группа Ассура имеет *класс*, определяемый числом КП, образующих наиболее сложный замкнутый контур.

Состав и последовательность присоединения групп Ассура в механизме можно выразить его формулой строения. Механизм в целом классифицируется по группе наивысшего класса. Для показанного на рис. 12 механизма формула строения выглядит следующим образом:

$$1(1, 6) \rightarrow 2(2, 3) \rightarrow 2(4, 5), \quad (3.6)$$

и означает, что механизм 1 класса, состоящий из звена 1 и стойки 6, взаимодействует с группой 2 класса из звеньев 2 и 3, которая, в свою очередь, взаимодействует с группой 2 класса из звеньев 4 и 5.

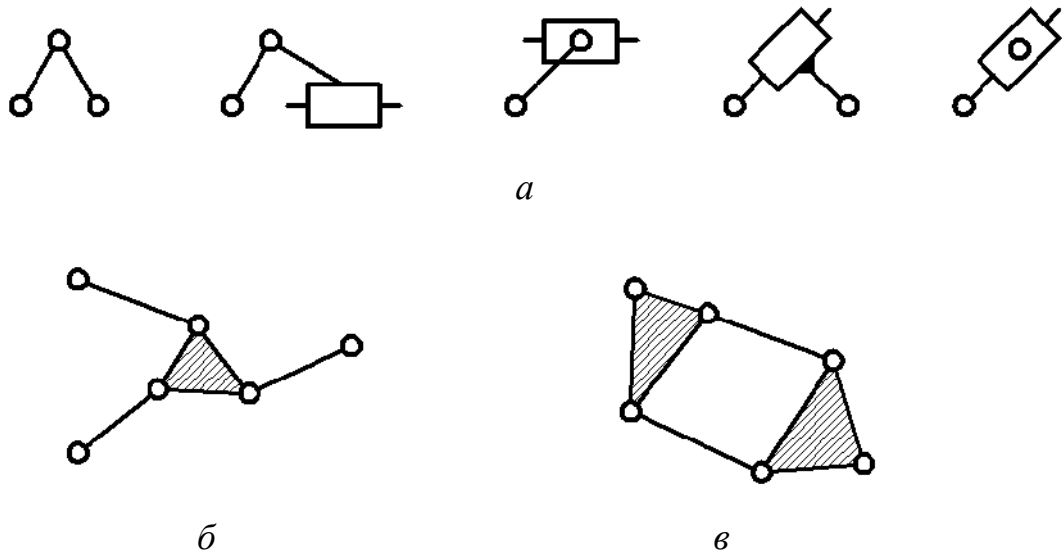


Рис. 10. Примеры групп Ассура:

a – двухповодковая группа 2 класса, 2 порядка, $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$;
б – трёхповодковая группа 3 класса, 3 порядка, $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$;
в – группа 4 класса, 2 порядка, $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$

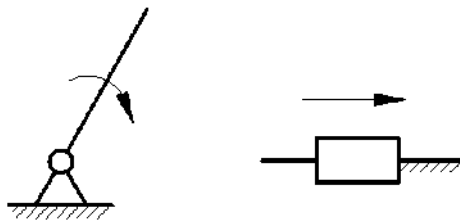


Рис. 11. Простейшие механизмы 1 класса

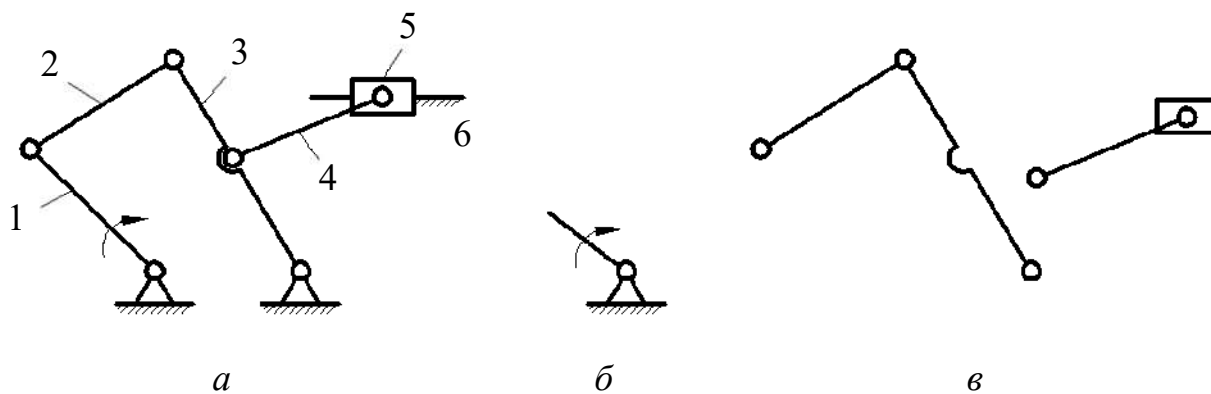


Рис. 12. Классификация механизма по группам Ассура:
 а – схема полного механизма; б – механизм 1 класса;
 в – группы Ассура 2 класса, 2 порядка

3.5. Виды механизмов и их структурные схемы

Среди всего многообразия конструкций механизмов различают: стержневые (рычажные), кулачковые, фрикционные, зубчатые механизмы, механизмы с гибкими звеньями (например, ременные передачи) и другие виды.

Менее распространенные классификации подразумевают наличие механизмов с низшими или высшими парами в плоском или пространственном исполнении и т. д.

Учитывая возможность условного превращения практически любого механизма с высшими парами в рычажный, в дальнейшем наиболее подробно рассматривается именно эти механизмы, а структурные схемы других механизмов изложены в соответствующих разделах.

Среди рычажных механизмов наиболее распространены так называемые четырехзвенные, примеры которых представлены на рис.13.

В этих механизмах встречаются однотипные звенья: *кривошип* 1 – звено, совершающее полноповоротное вращательное движение вокруг неподвижной оси; *коромысло* 3 (рис. 13, б) – звено, совершающее неполноповоротное вращательное движение вокруг неподвижной оси; *ползун* 3 (рис. 13, а) – звено, совершающее поступательное движение относительно стойки; *камень* 2 –

звено, совершающее поступательное движение относительно подвижной направляющей, называемой *кулисой* 3 (рис. 13, в, г); *шатун* 2 (рис. 13, а, б) – звено, совершающее плоскопараллельное движение.

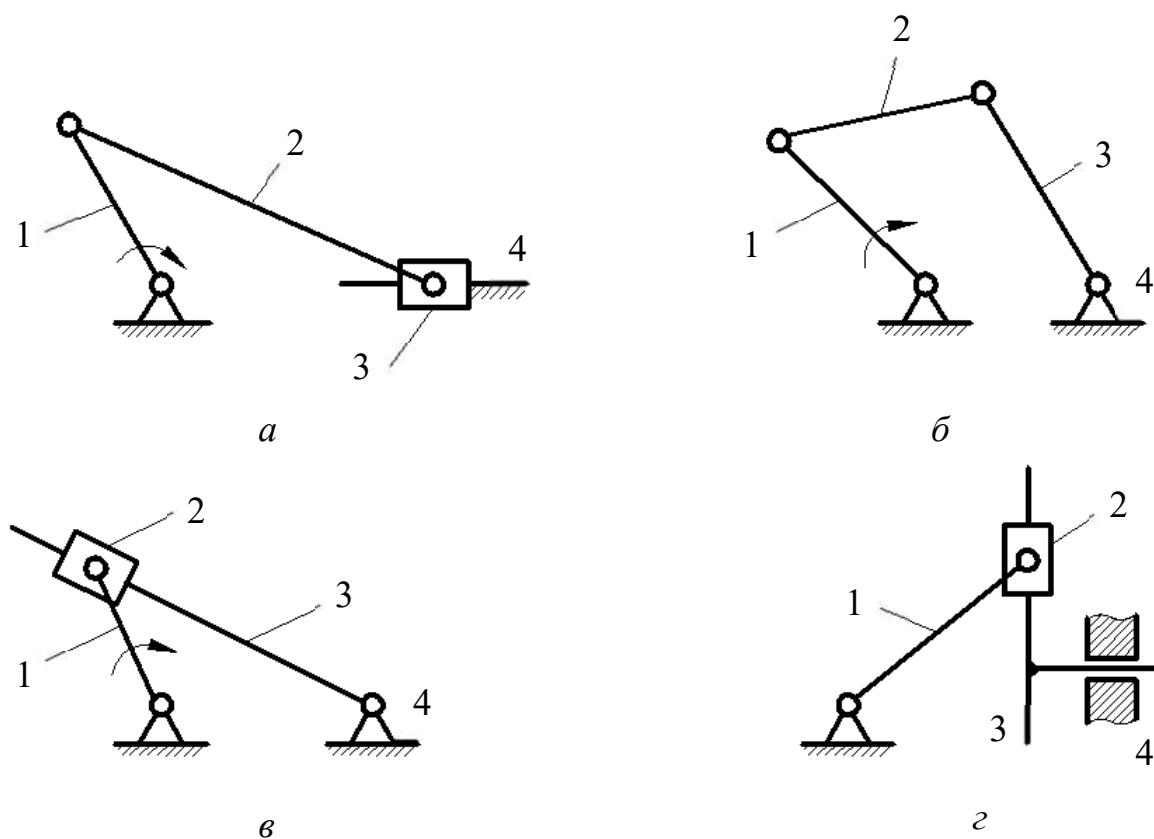


Рис. 13. Виды четырехзвенных рычажных механизмов:
а – кривошипно-ползунный механизм; б – четырехшарнирный механизм;
в – кулисный механизм; г – синусный механизм

4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

4.1. Построение планов положения механизма

Кинематический анализ механизмов включает вопросы изучения звеньев с геометрической точки зрения, т. е. без учета действующих сил. Для этого используются графические, аналитические и экспериментальные методы исследования.

Одним из наглядных методов является графоаналитический, который включает:

а) построение планов положения механизма; б) определение скоростей и ускорений характерных точек или звеньев механизма.

При графических построениях на чертеже изображаются длины звеньев, скорости, ускорения и другие величины в определенном масштабе, характеризуемом масштабным коэффициентом μ :

$$\mu = \frac{\text{значение параметра}}{\text{длина отрезка}}. \quad (4.1)$$

Например, вектор ***pa*** длиной 10 мм изображает скорость $v = 20$ м/с. Тогда

$$\mu = \frac{20}{10} = 2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}.$$

Графическое изображение взаимного расположения звеньев механизма, соответствующее заданному моменту времени, называется *планом положений* или *планом механизма*.

Планы положения строятся в определенном масштабе методом засечек в соответствии с формулой строения механизма. Линейные размеры всех звеньев должны быть заданы (рис. 14).

После построения нескольких совмещенных планов механизма при необходимости можно определить графически траектории характерных точек звеньев, имеющих сложное движение, например, центра тяжести S шатуна AB .

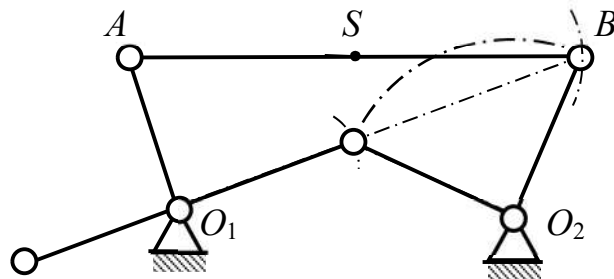


Рис. 14. План положений (план механизма)

4.2. Определение скоростей и ускорений механизма методом планов

Метод планов является одним из самых наглядных. Определению подлежат линейные скорости и ускорения точек и угловые скорости и угловые ускорения звеньев. При этом предварительно составляются векторные уравнения для скоростей и ускорений точек звеньев, совершающих сложное движение.

Пусть звено совершает плоскопараллельное движение, состоящее из переносного, т. е. поступательного со скоростью полюса и относительного вращательного вокруг полюса (рис. 15).

Принимая за полюс т. A , получим векторное уравнение скоростей точек:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (4.2)$$

где $\bar{v}_B$ – скорость точки B ; $\bar{v}_A$ – скорость точки A ; $\bar{v}_{BA}$ – скорость точки B относительно точки A .

Относительная скорость по модулю равна

$$v_{BA} = \omega l_{AB}, \quad (4.3)$$

где ω – угловая скорость звена; l_{AB} – длина звена (длина отрезка AB).

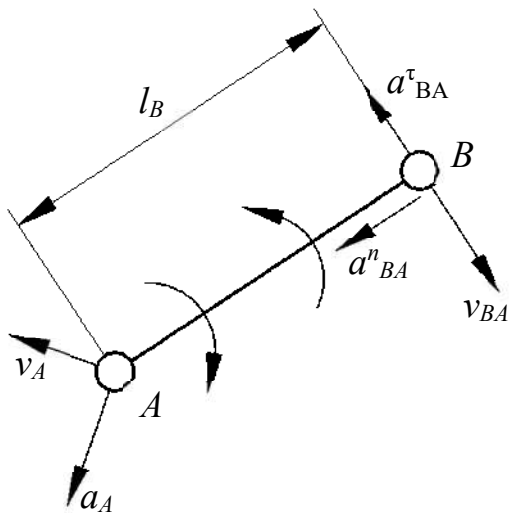


Рис. 15. Векторы скоростей и ускорений для механизма (пример 1)

Векторное уравнение ускорений точек выглядит следующим образом:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad (4.4)$$

где $\bar{a}_B$ – ускорение точки B; $\bar{a}_A$ – ускорение точки A; $\bar{a}_{BA}$ – ускорение точки B относительно точки A.

Относительное ускорение равно

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (4.5)$$

где $\bar{a}_{BA}^n, \bar{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие ускорения $\bar{a}_{BA}$ соответственно.

Нормальное и касательное составляющие по модулю равны

$$a_{BA}^n = \omega^2 l_{AB}; \quad (4.6)$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon l_{AB}, \quad (4.7)$$

где ε – угловое ускорение звена.

Пусть звено 1 совершает сложное движение, состоящее из переносного вращательного вместе со звеном 2 и относительного поступательного вдоль звена 2 (рис. 16). Точку на звене 1 обозначим B_1 , а точку на звене 2, лежащую под точкой B_1 , обозначим B_2 . Тогда для скорости $\bar{v}_{B_1}$ справедливо векторное уравнение

$$\bar{v}_{B_1} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{B_1 B_2}, \quad (4.8)$$

где $\bar{v}_{B_2}$ – окружная скорость точки B_2 (т. е. переносная скорость); $\bar{v}_{B_1 B_2}$ – скорость точки B_1 относительно точки B_2 .

Величина переносной скорости

$$v_{B_2} = \omega l_{AB}. \quad (4.9)$$

Векторное уравнение для ускорения точки B_1 :

$$\bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_1B_2}^t + \bar{a}_{B_1B_2}^k, \quad (4.10)$$

где $\bar{a}_{B_2}$ – ускорение точки B_2 ; $\bar{a}_{B_1B_2}^t$ – ускорение точки B_1 относительно точки B_2 ; $\bar{a}_{B_1B_2}^k$ – ускорение Кориолиса, которое равно

$$a_{B_1B_2}^k = 2v_{B_1B_2}\omega \quad (4.11)$$

и совпадает с направлением вектора

$\bar{v}_{B_1B_2}$, повернутого на 90° в сторону переносного вращения.

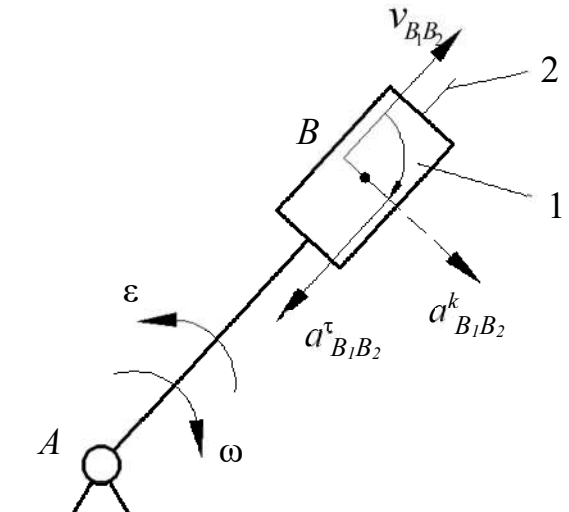


Рис. 16. Векторы скоростей и ускорений для механизма (пример 2)

Решение векторных уравнений осуществляется графически путем построения так называемых *планов скоростей и ускорений*, на которых абсолютные скорости и ускорения откладываются от одной точки, называемой полюсом, в определенном масштабе.

Пример расчета кривошипно-ползунного механизма рассмотрен на рис. 17, где план положений показан на рис. 17, а, план скоростей – на рис. 17, б и план ускорений – на рис. 17, в.

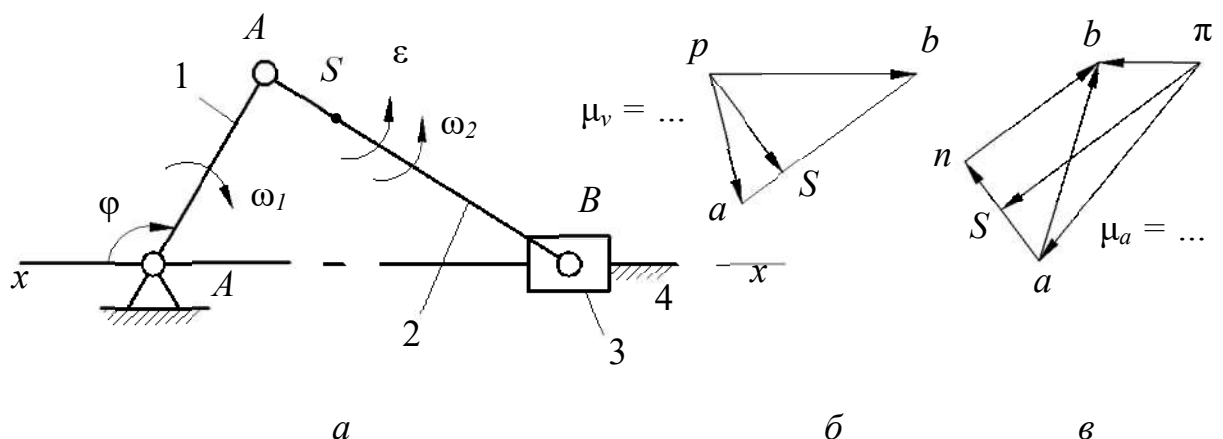


Рис. 17. Пример расчета кривошипно-ползунного механизма:

а – план положений; б – план скоростей; в – план ускорений

Векторное уравнение для скорости точки B записывается в виде:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (4.12)$$

где $v_A = \omega_1 l_{OA}$; $v_{BA} \perp AB$; $v_B \parallel x - x$.

План скоростей строится в масштабе

$$\mu_v = \frac{v_A}{pa}, \frac{M}{c \cdot \text{мм}}, \quad (4.13)$$

где pa – отрезок произвольной длины.

На плане скоростей вектор $\bar{v}_B$ отображается отрезком pb , а вектор $\bar{v}_{BA}$ – отрезком ab , поэтому $pb \parallel x - x$; $ab \perp AB$.

Величины скоростей определяются по формулам:

$$\begin{aligned} v_{BA} &= \mu_v \cdot ab; \\ v_B &= \mu_v \cdot pb; \\ \omega_2 &= \frac{v_{BA}}{l_{AB}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Векторное уравнение для ускорения точки B при $\omega_1 = \text{const}$ записываются в виде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (4.15)$$

где $a_A = \omega_1^2 l_{OA}$; $a_{BA}^n = \omega_2^2 AB$; $a_A \parallel AB$; $a_{BA}^\tau \perp AB$; $a_B \parallel x - x$.

Все ускорения представлены на рис. 17 в выбранном масштабе μ_a , равном

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}, \frac{M}{c^2 \cdot \text{мм}}, \quad (4.16)$$

где πa – отрезок произвольной длины.

При определении скоростей и ускорений промежуточных точек звеньев, например, точки S , можно использовать так называемую теорему подобия, согласно которой точки на плане положений звеньев и соответственные точки на планах скоростей и ускорений образуют подобные фигуры или пропорциональные отрезки. Рассмотрим доказательство данной теоремы.

На рис. 18 показано звено ABC и планы скоростей и ускорений для точек этого звена:

- отрезок ca на плане скоростей соответствует $v_{CA} \perp CA$;
- отрезок ab на плане скоростей соответствует $v_{AB} \perp AB$;
- отрезок bc на плане скоростей соответствует $v_{BC} \perp BC$;

т. е. треугольник abc подобен треугольнику ABC .

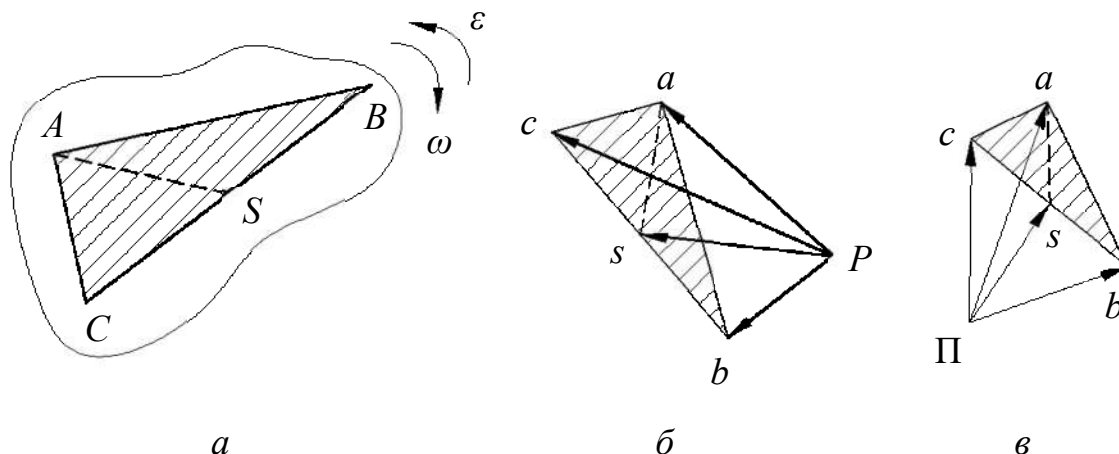


Рис. 18. Теорема подобия

Ускорения относительного (вращательного) движения равны:

$$\begin{aligned} a_{CA} &= l_{CA} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ a_{AB} &= l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ a_{BC} &= l_{BC} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

т. е. $a_{CA}/l_{CA} = a_{AB}/l_{AB} = a_{BC}/l_{BC}$, или $ca/CA = ab/AB = bc/BC$.

Следовательно, $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Аналогично выполняется построение фигур для любой промежуточной точки, например, точки S (рис. 18, а, б).

4.3. Исследование рычажных механизмов методом кинематических диаграмм

Кинематической диаграммой называется графическая зависимость какого-либо параметра движения звена от времени или от перемещения входного звена, представленные в определенной системе координат.

Если известна одна кинематическая диаграмма, то можно получить остальные зависимости путем графического дифференцирования или интегрирования.

На рис. 19, а, б показана последовательность построения кинематической диаграммы перемещения ползуна кривошипно-ползунного механизма от угла поворота кривошипа $S(\varphi)$ и от времени $S(t)$, а также элементы графического дифференцирования с получением диаграммы скоростей $v(t)$ методом хорд.

Если диаграмма $v(t)$ первична, то процесс, обратный интегрированию, обеспечит получение диаграммы $S(t)$ и называется *графическим интегрированием*.

Следует отметить, что графические методы часто приводят к искажениям результатов из-за неточности графических построений, поэтому необходимо контролировать расположение характерных точек, соответствующих экстремумам на диаграммах.

4.4. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом

Аналитические методы исследования позволяют проводить анализ с заданной степенью точности. Кроме того, создание математических моделей механизмов позволяет решать задачи их оптимального синтеза при использовании ЭВМ.

Рассмотрим пример кинематического исследования синусного механизма (механизм двойного ползуна), где кривошип 1 вращается с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (рис. 20).

Тогда скорость и ускорение точки А равны:

$$\begin{aligned} v_A &= \omega l_{OA}; \\ a_A &= l_{OA} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

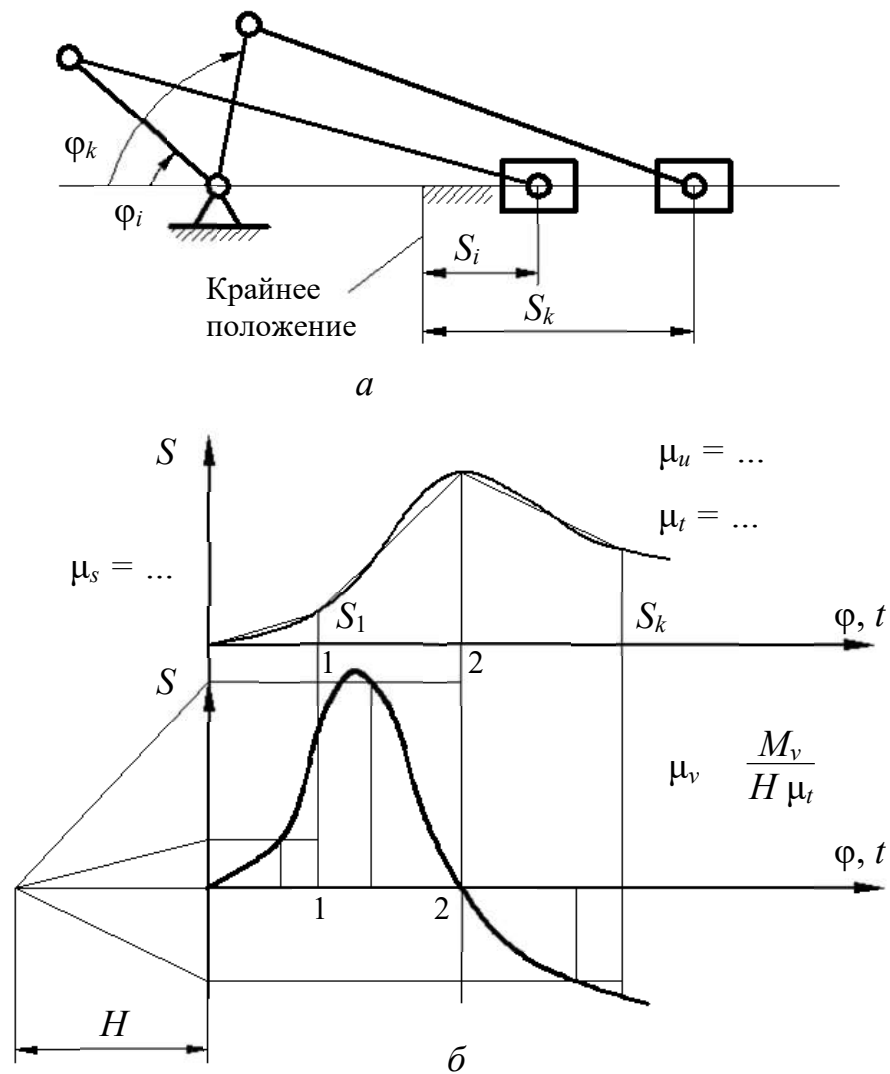


Рис. 19. Последовательность построения кинематической диаграммы перемещения ползуна кривошипно-ползунного механизма:
a – план механизма; *б* – кинематическая диаграмма перемещения ползуна

Рассмотрим пример кинематического исследования синусного механизма (механизм двойного ползуна), где кривошип 1 вращается с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (рис. 20).

Тогда скорость и ускорение точки *A* равны:

$$\begin{aligned} v_A &= \omega l_{OA}; \\ a_A &= l_{OA} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

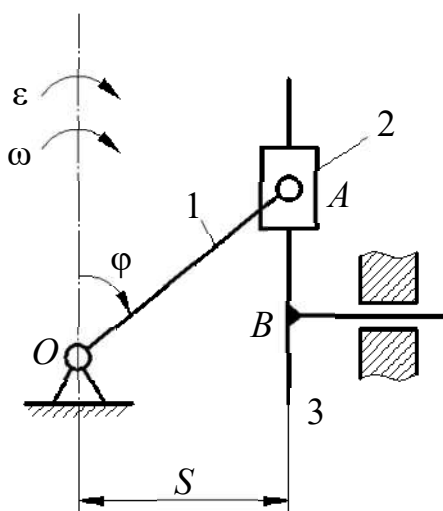


Рис. 20. Синусный механизм

Все точки звеньев 1 и 2 описывают окружности, а точки звена 3 движутся поступательно, причём их перемещения, скорости и ускорения равны:

$$S_B = l_{OA} \sin \varphi = l_{OA} \sin \omega t; \quad (4.19)$$

$$v_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = l_{OA} \omega \cos \varphi; \quad (4.20)$$

$$a_B = \frac{d^2 S_B}{dt^2} = l_{OA} (\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi). \quad (4.21)$$

В случае равномерного вращения кривошипа при $\varepsilon = 0$

$$a_B = -l_{OA} \omega^2 \sin \varphi. \quad (4.22)$$

При исследовании многих механизмов получаются достаточно громоздкие формулы, что не является препятствием при использовании ЭВМ.

В исследовании пространственных механизмов используются элементы векторной алгебры и векторного анализа. Положения, скорости и ускорения точек механизма выражаются в векторной форме, при необходимости вычисляются проекции на оси и плоскости. Примеры таких исследований изложены в учебной литературе.

5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

5.1. Классификация действующих сил

Среди сил, действующих на механизм, различают:

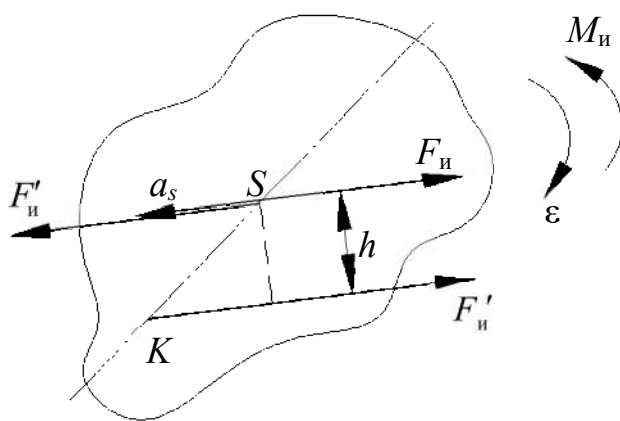
а) движущие силы F_d или моменты M_d , ускоряющие движение входных (начальных) звеньев и совершающие положительную работу (например, силы давления газа на поршень в двигателе внутреннего сгорания, силы веса при опускании груза и т. д.);

б) силы сопротивления F_c или моменты M_c , замедляющие движение входных звеньев и совершающие отрицательную работу. Они могут быть силами полезного сопротивления, дающими производственный эффект, и силами вредного сопротивления, не дающими такого эффекта (к первому типу относятся, например, силы тяжести при подъеме груза, а ко второму типу – силы трения);

в) силы реакции в кинематических парах F_{ij} , возникающие в опорах звеньев и являющиеся внутренними силами для механизма в целом и внешними для каждого отдельного звена;

г) силы инерции F_i или моменты сил инерции M_i , возникающие при неравномерном движении звеньев механизма и могут быть как движущими, так и силами сопротивления (в зависимости от их направления относительно направления движения звеньев).

Фактически силы инерции действуют на тело, вызывающее ускорение другого тела. Однако условное приложениe сил инерции к ускоряемому телу позволяет рассматривать его в равновесии. Этот способ называется **принципом Даламбера** и позволяет задачу динамики свести к статическому расчету.



Силы инерции относятся к категории распределенных по объёму или так называемых массовых сил, которые, как и другие аналогичные силы, могут быть приведены к главному вектору и главному моменту (рис. 21).

Рис. 21. Пояснение принципа Даламбера

На рис. 21 сила и момент сил инерции равны:

$$\begin{aligned} F_{\text{и}} &= -m a_s; \\ M_{\text{и}} &= -J_s \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где m , J_s – масса и момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс; a_s – ускорение центра масс; ε – угловое ускорение звена; знаки минус показывают, что направления $F_{\text{и}}$ и $M_{\text{и}}$ противоположны соответствующим ускорениям.

Сила $F_{\text{и}}$ и момент $M_{\text{и}}$, могут быть заменены одной силой $F'_{\text{и}} = F_{\text{и}}$, линия действия которой проходит через так называемый центр качаний (точка K на рис. 21) на оси звена и отстоит от линии действия $F_{\text{и}}$ на расстоянии

$$h = \frac{M_{\text{и}}}{F_{\text{и}}} \text{ при замене } M_{\text{и}} \text{ парой сил: } M_{\text{и}} = F'_{\text{и}} h.$$

5.2. Приведение сил и масс в механизме

Для исследования закона движения механизма его удобно заменить одним условным звеном – звеном приведения, имеющим закон движения аналогичного звена реального механизма.

Для этого все внешние силы, действующие на звенья, заменяются одной

приведенной силой $F_{\text{пр}}$, мощность $P_{\text{пр}}$ которой равна сумме мощностей заменяемых сил F_i :

$$P_{\text{пр}} = \sum P_i = \sum F_i v_i \cos(F_i \wedge v_i) = F_{\text{пр}} v \cos(F_{\text{пр}} \wedge v), \quad (5.2)$$

или приведённым моментом $M_{\Sigma}^{\text{пр}}$, мощность $P_{\Sigma}^{\text{пр}}$ которого равна сумме мощностей заменяемых моментов сил M_i :

$$P_{\text{пр}} = \sum P_i = \sum M_i \omega_i = M_{\text{пр}} \omega. \quad (5.3)$$

В формулах (5.2), (5.3) v_i – скорость точки приложения i -ой силы; v – скорость точки приложения приведённой силы на звене приведения; ω_i – угловая скорость i -го звена; ω – угловая скорость звена приведения.

Приведённую силу или приведённый момент удобно записывать в виде суммы составляющих, например:

$$M_{\text{пр}} = \sum M_{Fi \text{ пр}} + \sum M_{Mi \text{ пр}}, \quad (5.4)$$

где $\sum M_{Fi \text{ пр}}$, $\sum M_{Mi \text{ пр}}$ – составляющие приведённого момента, обусловленные действием сил и моментов соответственно.

В кривошипно-ползунном механизме (рис. 22):

$$M_{\text{пр}} = M_{F_{\text{пр}}} + M_{G_{\text{пр}}}, \quad (5.5)$$

где

$$M_{F_{\text{пр}}} = \frac{F v_B}{\omega_1} = F l_{OA} \frac{pb}{pa};$$

$$M_{M_{\text{пр}}} = \frac{G v_S}{\omega_1} \cos(G \wedge v_S) = G l_{OA} \frac{ps}{pa} \cos(G \wedge v_S), \quad (5.6)$$

где pa , pb , ps – вектора, взятые с плана скоростей (рис.22).

Как видно из формул, величина $F_{\text{пр}}$ ($M_{\text{пр}}$) зависит лишь от соотношения скоростей, а не от их абсолютной величины, что позволяет для приведения сил использовать планы скоростей без учета их масштабов.

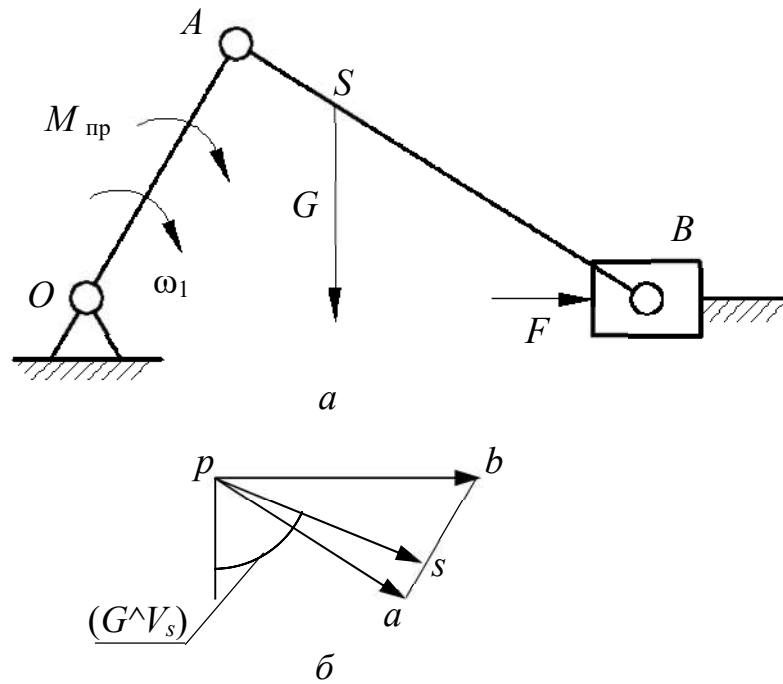


Рис. 22. Пример кривошипно-ползунного механизма:
a – схема; *б* – план скоростей

Каждое i -ое звено механизма обладает массой m_i и моментом инерции J_i относительно оси, проходящей через центр масс звена, при этом кинетическая энергия i -го звена плоского механизма равна:

$$E_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2}. \quad (5.7)$$

Массы и моменты инерции всех звеньев механизма можно условно заменить некоторой массой $m_{пр}$, сосредоточенной в произвольно выбранной точке A звена привода (рис. 23, *a*), или некоторым моментом инерции $J_{пр}$, приписанным звену привода (рис. 23, *б*).

Замена должна производиться из условия равенства кинетических энергий:

$$E_{пр} = \frac{m_{пр} v_A^2}{2} + \frac{J_{пр} \omega^2}{2}, \quad (5.8)$$

где $E_{пр}$ – приведённая кинетическая энергия.

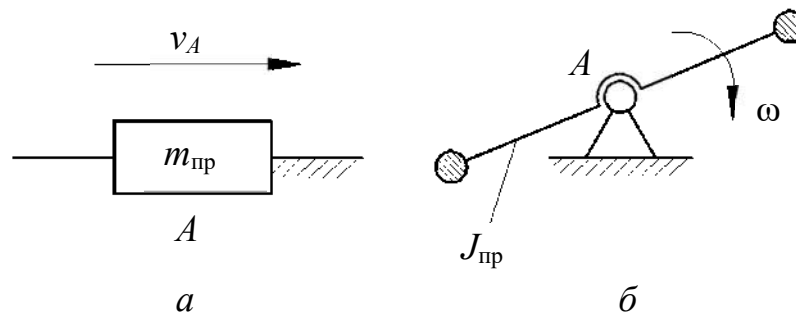


Рис. 23. Массы и моменты инерции звеньев приведения:
 а – звено приведения – ползун; б – звено приведения – кривошип

Приведённые масса при поступательном движении звена приведения определяется по формуле

$$m_{\text{пр}} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_A} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right], \quad (5.9)$$

а при вращательном движении звена приведения – по формуле

$$J_{\text{пр}} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (5.10)$$

Приведённые масса и момент инерции являются функциями положения звена приведения, т.е. их величина может меняться при изменении положения звена в процессе его движения.

5.3. Уравнение движения машины

Работу машины можно разбить на три периода (рис. 24):

- 1) период пуска (разгона) $t_{\text{п}}$;
- 2) период установившегося движения $t_{\text{у}}$;
- 3) период остановки (выбега) $t_{\text{о}}$.

Аналитическая зависимость между действующими на звенья силами и кинематическими параметрами движения называется уравнением движения.

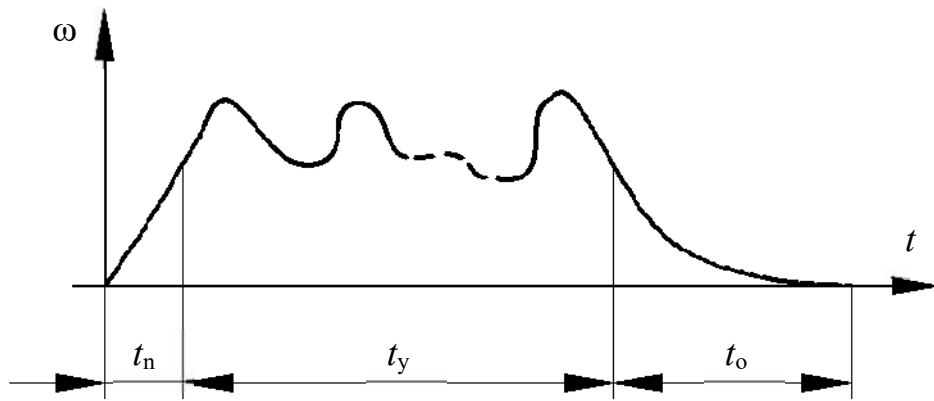


Рис. 24. Периоды работы машины

Это уравнение в общем случае имеет вид

$$\Delta E = E - E_0 = A_d - A_c, \quad (5.11)$$

где ΔE – изменение кинетической энергии за рассматриваемый промежуток времени; E и E_0 – величина кинетической энергии в конце и начале промежутка; A_d, A_c – работа движущих сил и сил сопротивления.

В период пуска (разгона) $A_d > A_c$, т. е. происходит ускорение движения звеньев, движение является неустановившимся.

В период установившегося движения $A_d = A_c$, т. е. скорости звеньев в конечный и начальный моменты периода равны, и вся работа движущихся сил расходуется на преодоление сопротивлений.

В период остановки (выбега) $A_d < A_c$, движение продолжается некоторое время за счет накопленной кинетической энергии, поглощаемой силами сопротивления движению.

Уравнение движения может быть выражено в интегральной и дифференциальной форме, а для упрощения его решения исследование машины заменяют исследованием звена приведения, в котором изменение кинетической энергии равно

$$\Delta E_{\text{пр}} = A_d^{\text{пр}} - A_c^{\text{пр}}, \quad (5.12)$$

где суммарная работа действующих на звено приведения сил может быть выражена:

а) в интегральной форме:

$$A_{\text{д}}^{\text{пр}} - A_{\text{с}}^{\text{пр}} = \int F_{\text{пр}} ds \quad (5.13)$$

или

$$A_{\text{д}}^{\text{пр}} - A_{\text{с}}^{\text{пр}} = \int M_{\text{пр}} d\varphi, \quad (5.14)$$

где ds – элементарное перемещение точки приведения; $d\varphi$ – элементарный угол поворота звена приведения;

б) в дифференциальной форме:

$$d\Delta E_{\text{пр}} = d(A_{\text{д}}^{\text{пр}} - A_{\text{с}}^{\text{пр}}) = F_{\text{пр}} ds \quad (5.15)$$

или

$$d\Delta E_{\text{пр}} = d(A_{\text{д}}^{\text{пр}} - A_{\text{с}}^{\text{пр}}) = M_{\text{пр}} d\varphi. \quad (5.16)$$

Таким образом, уравнение движения машины приводится к тому или иному конкретному виду и решается графическим и графоаналитическим методами, а учитываемые силы и моменты сил, приведенные массы и моменты инерции могут быть как постоянными, так и переменными величинами, зависящими от того или иного фактора.

5.4. Понятие об уравнивающей силе. Теорема Жуковского о жестком рычаге

Одним из способов определения приведенной силы $F_{\text{пр}}$ является способ, предложенный Н. Е. Жуковским. Уравнение, из которого может быть найдена $F_{\text{пр}}$, основано на равенстве мощностей (формула (5.2)).

Рассмотрим какое-либо звено механизма, в точке B которого приложена сила F_i под углом α_i к вектору скорости v_i этой точки (рис.25, а).

Мощность силы F_i равна

$$P_i = F_i v_i \cos \alpha_i. \quad (5.17)$$

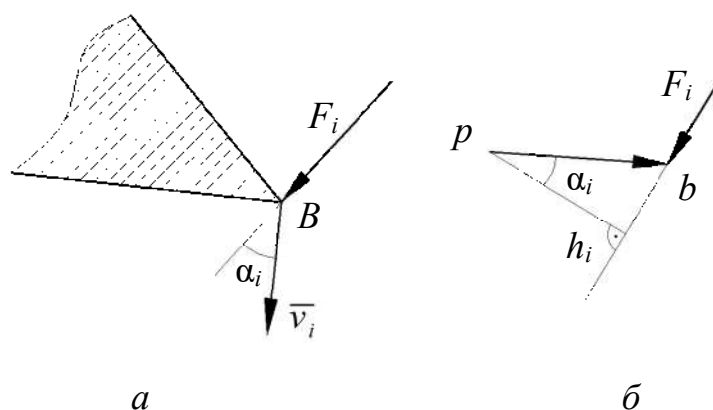


Рис. 25. Теорема Жуковского о жестком рычаге:
a – звено механизма; *б* – план скоростей

Если вектор скорости точки *B* (план скоростей) повернуть на 90° и силу F_i приложить к концу вектора (к точке *b*), сохранив ее направление, то момент этой силы относительно полюса *p* будет равен (рис. 25, *б*)

$$M_i = F_i h_i = F_i v_i \cos \alpha_i = P_i, \quad (5.18)$$

т.е. равен мощности силы F_i . Таким образом, F_i можно найти, повернув на 90° план скоростей и приложив к нему все внешние силы, включая силы инерции, в соответствующих точках и сохраняя их направления. Тогда из уравнения моментов такого рычага

$$F_{\text{пр}} h_{\text{пр}} = \sum F_i h_i \quad (5.19)$$

получим:

$$F_{\text{пр}} = \sum \frac{F_i h_i}{h_{\text{пр}}}, \quad (5.20)$$

где h_i и $h_{\text{пр}}$ – кратчайшие расстояния от полюса плана скоростей до линий действия *i*-ой и приведенной сил.

Повернутый на 90° план скоростей с приложенными к нему силами называется жестким рычагом Жуковского.

Величина $F_{\text{пр}}$ или $M_{\text{пр}}$ зависит от положения механизма, поэтому можно построить диаграмму, например, $F_{\text{пр}}(\varphi)$, являющуюся функцией положения звена приведения. Для этого необходимо последовательно определить

значения $F_{\text{пр}}$ методом рычага Жуковского для целого ряда положений механизма в пределах цикла ($F_{1\text{пр}}, F_{2\text{пр}}, \dots$) и отложить их на диаграмме (рис. 26).

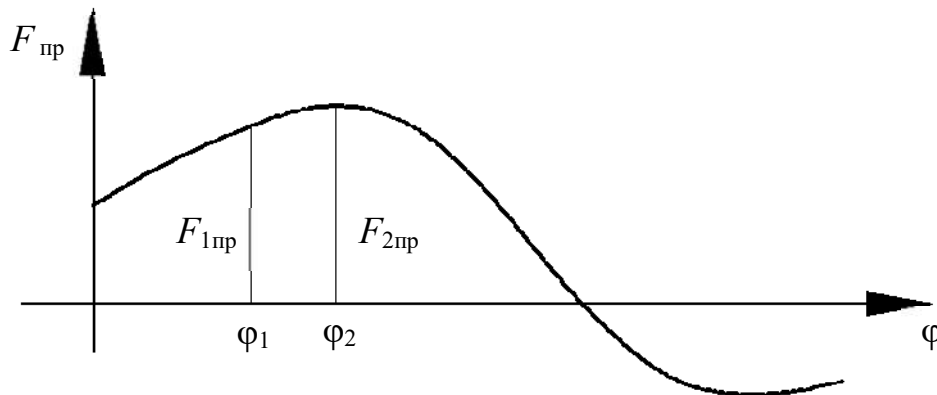


Рис. 26. Диаграмма приведенной силы

Приведенная сила $F_{\text{пр}}$ или момент $M_{\text{пр}}$ характеризуют реакцию механизма на движение его входного звена по определенному закону, задаваемому двигателем. Сила или момент, равные по величине приведенной силе или моменту, но противоположные им по направлению, называется уравновешивающей силой F_y или уравновешивающим моментом M_y . Эти сила или момент развиваются двигателем и обеспечивают заданное движение входного звена.

Если к рычагу Жуковского приложить все внешние силы, включая силы инерции, а также F_y , то его можно рассматривать в равновесии, из условия которого

$$F_y h_y + \sum F_i h_i = 0 \quad (5.21)$$

можно определить неизвестную F_y , а также найти мощность двигателя $P_{\text{дв}}$, требуемую для получения заданного движения входного звена в заданном положении:

$$P_{\text{дв}} = F_y v_A \cos(F_y \wedge v_A) = M_y \omega. \quad (5.22)$$

5.5. Графоаналитический метод решения уравнения движения машины

Данный метод позволяет не только наглядно иллюстрировать связь между динамическими и кинематическими параметрами движения, но и решать практические задачи синтеза, например, задачу уменьшения неравномерности вращения звеньев.

В качестве примера рассмотрим построение так называемой диаграммы энергомасс. Эта диаграмма строится на основе графиков $J_{пр}(\varphi)$ и

$$\Delta E_{пр}(\varphi) = E_{пр}(\varphi) - E_{0пр}, \quad (5.23)$$

где $E_{пр0}$ – энергия звена приведения в начале цикла.

График $\Delta E_{пр}(\varphi)$ может быть получен путем графического интегрирования графика $M_{пр}(\varphi)$.

На рис. 27 показана последовательность построения диаграммы энергомасс в координатах $\Delta E_{пр}(J_{пр})$, которая при установившемся движении является замкнутой кривой и строится на базе диаграмм $\Delta E_{пр}(\varphi)$ и $J_{пр}(\varphi)$ путем исключения параметра φ (угла поворота звена приведения).

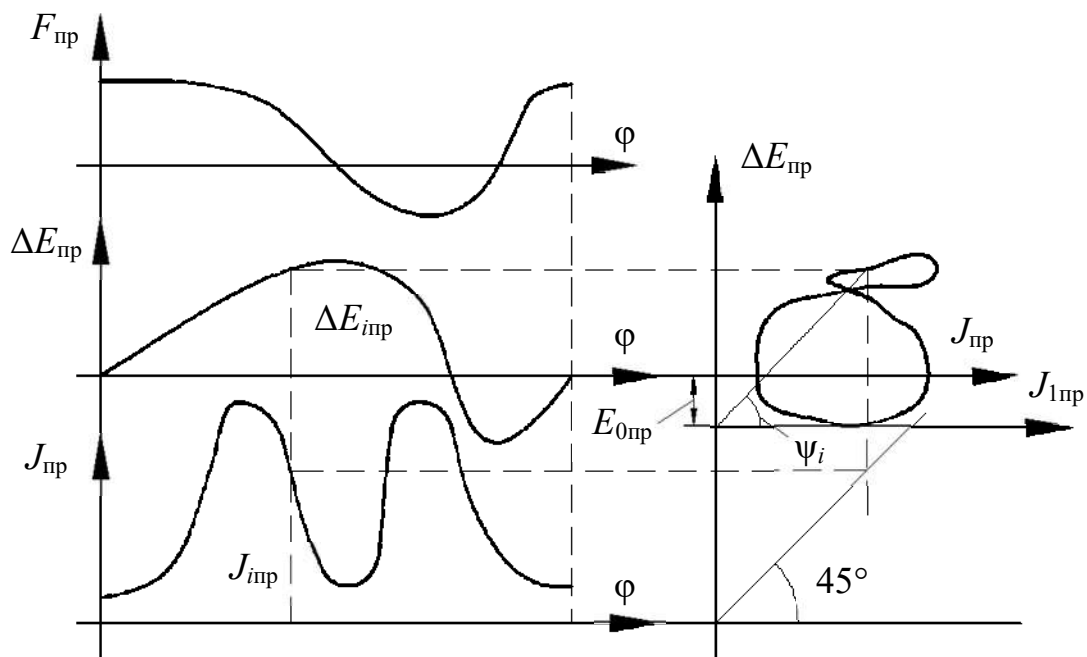


Рис. 27. Диаграмма энергомасс

Если известна угловая скорость вращения ω_0 звена приведения в начале цикла, то можно определить начальную кинетическую энергию:

$$E_{0\text{пр}} = \frac{J_{0\text{пр}} \omega_0^2}{2}. \quad (5.24)$$

Тогда диаграмму энергомасс можно рассматривать в координатах $\Delta E_{\text{пр}}(J_{1\text{пр}})$, где ось $J_{1\text{пр}}$ отстоит от первоначальной оси $J_{\text{пр}}$ на величину $E_{0\text{пр}}$ (рис. 27).

Так как

$$E_{\text{пр}} = \frac{J_{\text{пр}} \omega^2}{2}, \quad (5.25)$$

то

$$\omega^2 = \frac{2E_{\text{пр}}}{J_{\text{пр}}} = 2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \text{tg } \psi, \quad (5.26)$$

где μ_E и μ_J – масштабные коэффициенты, используемые для построения диаграмм.

Таким образом, диаграмма энергомасс позволяет при установившемся движении определить угловую скорость ω звена приведения в любой момент времени, т. е.

$$\omega = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \text{tg } \psi}, \quad (5.27)$$

$$\text{tg } \psi = \frac{\mu_J \omega^2}{2\mu_E}.$$

5.6. Неравномерное движение машин. Маховики

Одним из режимов движения машины при совершении полезной работы является режим равномерного или установившегося движения.

При равномерном движении угловая скорость ω вала двигателя постоянна, а при установившемся движении она периодически изменяется

(рис. 28), причём степень неравномерности можно оценить коэффициентом неравномерности δ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_c}, \quad (5.28)$$

где ω_c – средняя угловая скорость за цикл:

$$\omega_c = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (5.29)$$

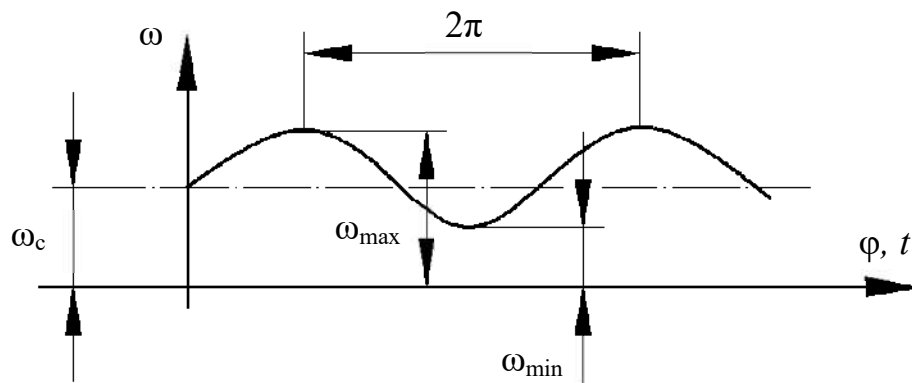


Рис. 28. Изменение угловой скорости ведущего звена

Неравномерность вредно сказывается на работе машин, т. к. вызывает дополнительные инерционные нагрузки, которые могут привести к поломке.

Практикой установлены значения δ , которые допустимы в различных условиях эксплуатации. Регулировать величину δ можно путем изменения величины момента инерции звена привода, т. е. на быстро вращающийся вал закрепляется дополнительная масса, называемая маховиком.

При конструировании маховика стремятся к получению необходимого момента инерции маховика J_m с наименьшим весом G и заданным диаметром D . Для этой цели маховик изготавливается в виде тяжелого обода, соединенного со втулкой тонким диском с отверстием или спицами (рис. 29). Приближенно J_m можно определить по формуле:

$$J_m = G \frac{D^2 + d^2}{8g}, \quad (5.30)$$

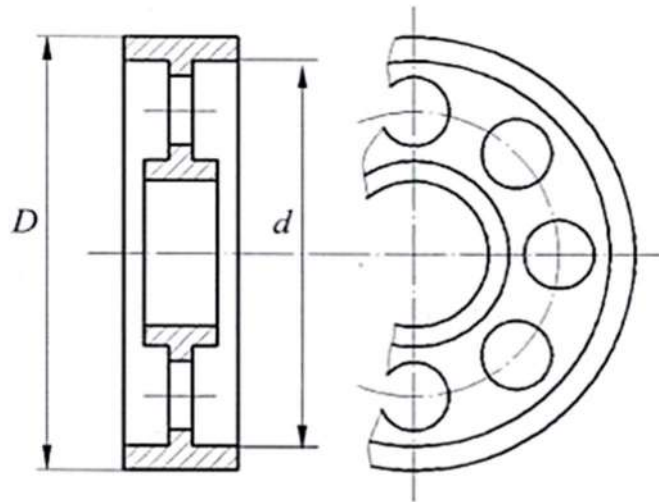


Рис. 29. Конструкция маховика

где D, d – диаметры обода маховика; g – ускорение свободного падения.

5.7. Подбор момента инерции J_m маховика по заданному коэффициенту неравномерности δ

Обычно требуется определить параметры маховика при заданных значениях ω_c и δ . Существуют различные методы определения J_m , наиболее точным из которых является метод Ф. Виттенбауэра, в соответствии с которым предварительно строится диаграмма энергомасс $\Delta E_{пр}(J_{пр})$.

Согласно этой диаграмме (рис. 30):

$$\begin{aligned}\omega_{\max(\min)}^2 &= 2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\max(\min)}; \\ \operatorname{tg} \psi_{\max(\min)} &= \frac{\omega_{\max(\min)}^2 \mu_J}{2\mu_E}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

С другой стороны, из уравнений (5.28), (5.29):

$$\omega_{\max(\min)} = \omega_c \left(1 \pm \frac{\delta}{2} \right).\tag{5.32}$$

Таким образом, найдя $\psi_{\max}$, $\psi_{\min}$ и проведя касательные к диаграмме энергомасс под этими углами к горизонтали (рис. 30), получим в точке их

пересечения начало новой системы координат с осями $E_{пр}$ и $J_{1пр}$, отстоящими от принятых ранее осей на искомую величину J_M и $E_{0пр}$.

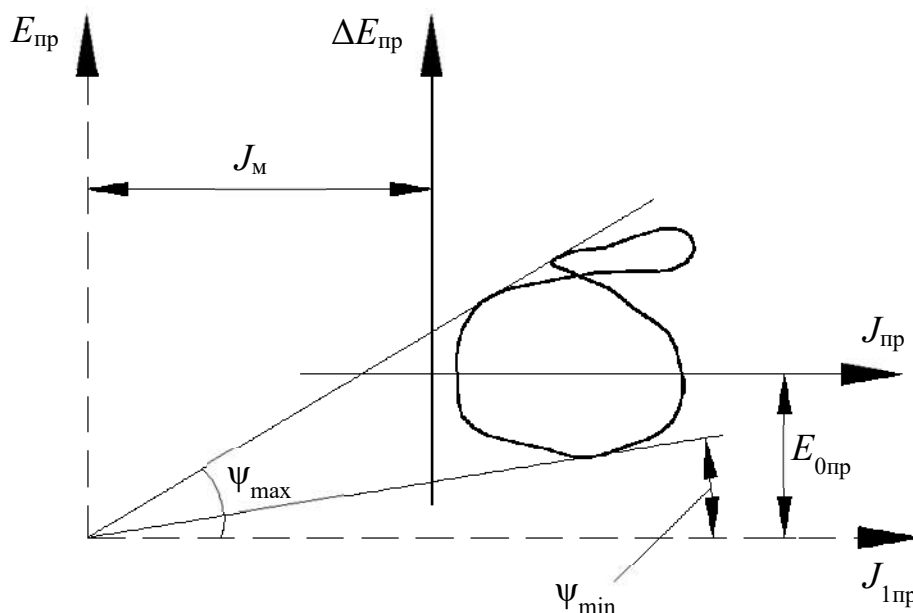


Рис. 30. Определение момента инерции маховика по диаграмме Виттенбауэра

В целом последовательность определения J_M включает следующие операции:

- 1) строится диаграмма $M_{пр}(\varphi)$ для установившегося движения;
- 2) строится диаграмма $\Delta E_{пр}(\varphi)$ путем графического интегрирования диаграммы $M_{пр}(\varphi)$;
- 3) строится график $J_{пр}(\varphi)$ и диаграмма энергомасс путем исключения параметра φ из графиков $\Delta E_{пр}(\varphi)$ и $J_{пр}(\varphi)$;
- 4) определяются углы ψ_{max} , ψ_{min} , после чего находится J_M в новых координатах $E_{пр}$ и $J_{1пр}$ диаграммы $E_{пр}(J_{1пр})$.

5.8. Регулирование неперiodических колебаний скорости движения машин

В процессе выполнения работы приходится регулировать скорость рабочего органа машины. Например, в стационарных двигателях необходимо

поддерживать скорость рабочего органа постоянной, а в двигателях транспортных машин эта скорость должна изменяться в широких пределах.

Из уравнения движения машины следует, что изменения скорости рабочего органа можно достигнуть за счет изменения разности работ движущих сил и сил сопротивления ($A_d - A_c$). Устройства, обеспечивающие изменения работы сил сопротивления применяются в виде тормозов, например, в транспортных машинах, которые снабжаются также и приспособлениями для одновременного разобщения двигателя с исполнительным механизмом.

Другим способом регулирования является изменение работы движущих сил путем воздействия на орган, подающий энергию к входному звену (поршню у двигателя внутреннего сгорания, лопаткам турбины и т. д.).

Регулирование может осуществляться либо человеком-оператором, либо автоматически – с помощью устройств, называемых регуляторами.

Одним из них является центробежный регулятор (рис. 31), приводимый во вращение валом двигателя B . Ползун A соединяется с органом, подводящим рабочее тело (пар, топливо и т. д.). Регулятор за счёт изменения сил инерции $F_{и}$, действующих на шары C , автоматически поддерживает угловую скорость вала двигателя постоянной, т. к. ее увеличение приводит к уменьшению подачи рабочего тела и наоборот.

5.9. Силовой расчет рычажных механизмов

Зная активные силы, действующие на звенья механизма и силы инерции этих звеньев, можно произвести его кинетостатический расчет, т.е. определить реакции в кинематических парах и уравновешивающую силу (момент) на входном звене, причем эта сила (момент) является движущей при совпадении ее направления с направлением движения входного звена или силой

(моментом) сопротивления, если ее направление противоположно этому движению.

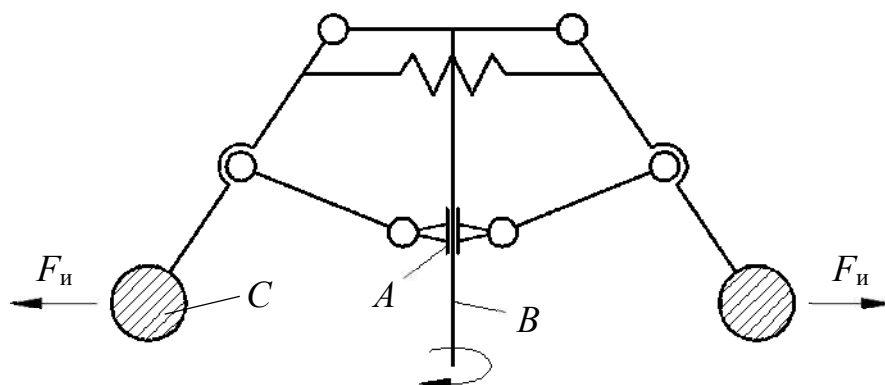


Рис. 31. Центробежный регулятор

При кинетостатическом расчете реакции в кинематических парах определяются путем статического расчета, который базируется на результатах кинематического анализа, включая ускорения, необходимые для определения сил (моментов) инерции.

При силовом расчете используется принцип Даламбера, позволяющий решение задачи динамики свести к статическому расчету (метод кинетостатики). Согласно этому принципу, приведение ускоренно движущейся системы в равновесие обеспечивается условным приложением к этой системе сил инерции. При этом неизвестные силы определяются из уравнений статики.

Силы взаимодействия между звеньями (реакции) можно считать направленными по нормали к контактирующим поверхностям, если расчет ведется без учета сил трения (рис. 32). Принято следующее обозначение реакций: R_{12} – реакция со стороны звена 1 на звено 2; R_{21} – реакция со стороны звена 2 на звено 1.

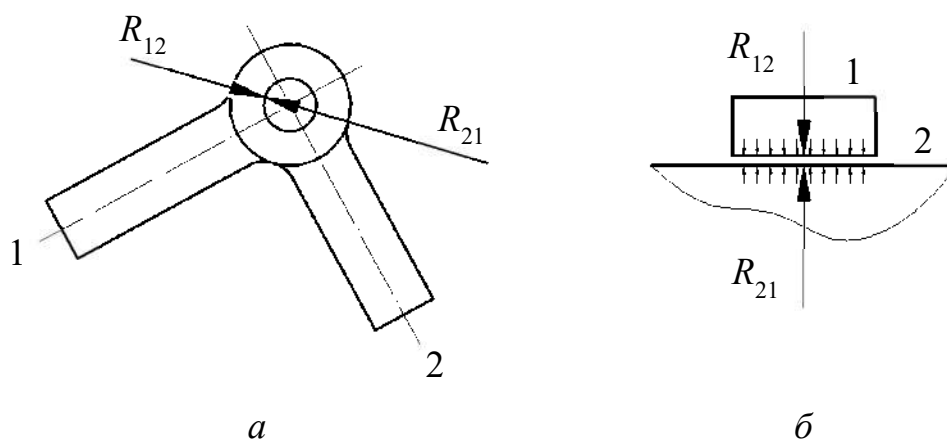


Рис. 32. Реакции в кинематических парах:
a – вращательной; *б* – поступательной

При графоаналитическом решении используется метод плана сил.

Механизм расчленяется на структурные группы Ассура и начальные звенья. Расчет ведется, начиная с последней структурной группы и заканчивается расчетом входного звена.

При расчете структурных групп к ним прикладываются все действующие силы, включая силы инерции и реакции отброшенных связей. Каждая из неизвестных реакций, при необходимости, может быть разложена на две составляющих по выбранным направлениям, например, вдоль оси звена (нормальная R^n) и перпендикулярно оси (тангенциальная R^t). При равенстве числа уравнений статики числу неизвестных реакций их можно определить аналитически и графически, построив многоугольник (план) сил. Неизвестные определяются из условия замкнутости векторной суммы сил.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Двухповодковая группа с вращательными парами (рис. 33).

Составляющая R_{i1}^t определяется из уравнения моментов для звена 1 относительно точки *B*: $\Sigma M_{B1} = 0$ (рис.33, *a*).

Составляющая R_{j2}^t определяется из уравнения моментов для звена 2 относительно точки *B*: $\Sigma M_{B2} = 0$ (рис.33, *a*).

При отрицательных значениях реакций необходимо изменить их направления на противоположные.

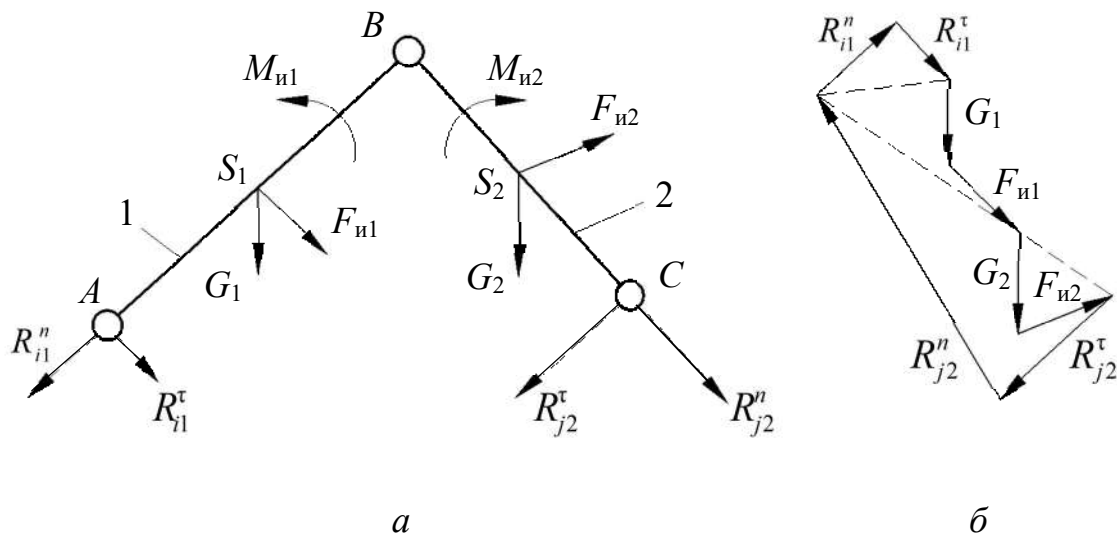


Рис. 33. Двухповодковая группа с вращательными парами:
а – план группы; б – план сил

Составляющие R_{i1}^n, R_{j2}^n определяются из плана сил (рис. 33, б), полученного на основе векторного уравнения $\Sigma \bar{F}_k = 0$, где $\bar{F}_k$ – силы, действующие на структурную группу, включая найденные составляющие реакций.

Пример 2. Двухповодковая группа шатун-ползун (рис. 34).

Реакция R_{j2} определяется из уравнения моментов $\Sigma M_A = 0$.

Реакция R_{i1} определяется непосредственно из плана сил (рис. 34, б) на основе векторного уравнения $\Sigma \bar{F}_k = 0$. Вычислять для этого составляющую $R_{i1}^τ$ нет необходимости.

Пример 3. Двухповодковая группа кулиса-камень (рис. 35) при $G_2 \approx 0$.

Реакция R_{j2} определяется из уравнения моментов $\Sigma M_A = 0$.

Реакция R_{i1} определяется непосредственно из плана сил (рис. 34, б) на основе векторного уравнения $\Sigma \bar{F}_k = 0$ по аналогии с примером 2.

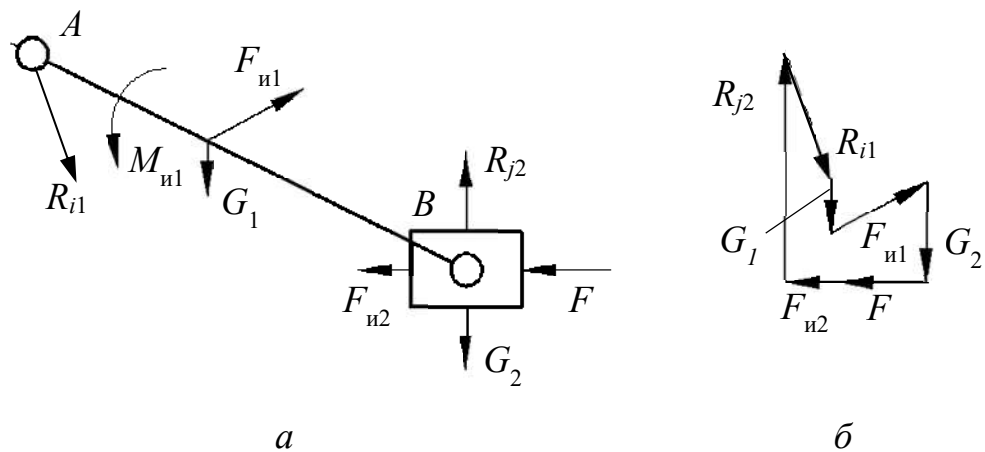


Рис. 34. Двухповодковая группа шатун-ползун:
 a – план группы; $б$ – план сил

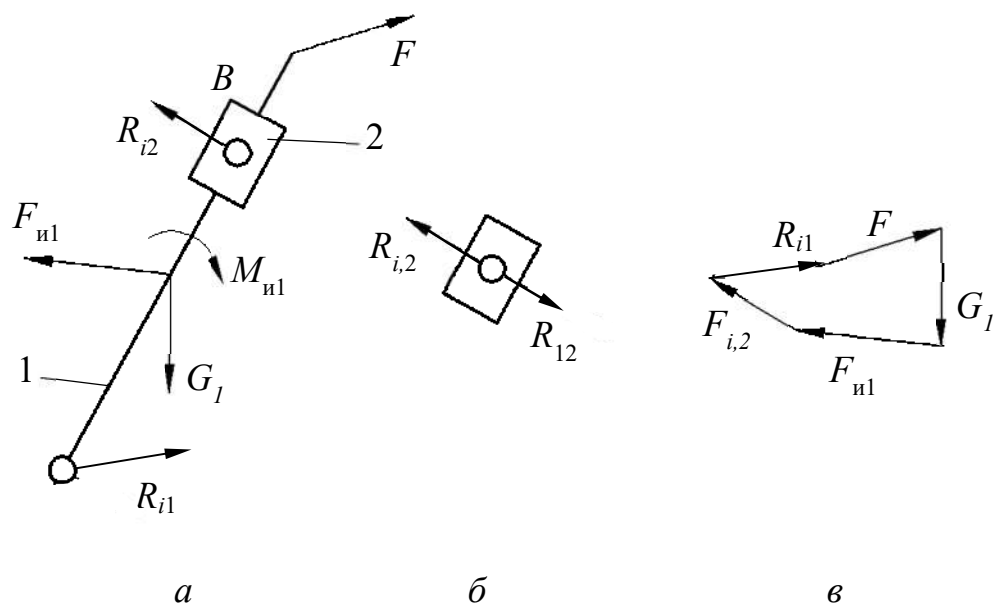


Рис. 35. Двухповодковая группа кулиса-камень:
 a – план группы; $б$ – силы на звене B ; $в$ – план сил

Особенность расчета данной группы Ассура состоит в возможности некоторого упрощения вычислений в случае, когда весом камня 2 можно пренебречь. Тогда реакция R_{12} равна по модулю и противоположна реакции R_{j2} (рис. 35, $б$).

4. Входное звено – кривошип (рис. 36).

Уравновешивающий момент M_y определяется из уравнения моментов $\Sigma M_O = 0$.

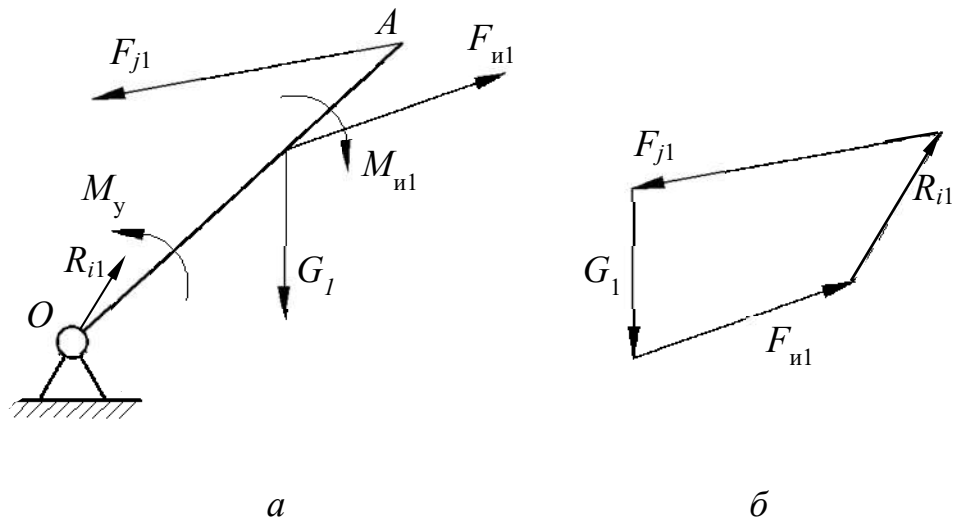


Рис. 36. Входное звено – кривошип:
а – план звена; б – план сил

Реакция $R_{и1}$ определяется непосредственно из плана сил (рис. 36, б) на основе векторного уравнения $\Sigma \vec{F}_k = 0$ по аналогии с примером 2.

6. СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

6.1. Постановка задачи, виды и способы синтеза

Задачи синтеза рычажных механизмов в общем случае являются сложными задачами оптимального проектирования, включающими этапы структурного, кинематического и динамического расчёта. Поэтому для упрощения решения рассматриваются частные задачи, в которых учитываются лишь некоторые (основные) условия проектирования.

В зависимости от исходных данных различают следующие виды синтеза:

- геометрический, когда заданы отдельные положения звеньев или траектории отдельных точек;
- кинематический, когда заданы некоторые скорости, ускорения или их соотношения;
- динамический, когда заданы действующие силы или наложены некоторые ограничения на динамические параметры.

К способам синтеза относятся:

- а) опытный, когда экспериментальным путём подбираются размеры звеньев для реализации заданной траектории;
- б) графический;
- в) аналитический.

Возможны различные комбинации видов и способов синтеза, перечисленных выше.

6.2. Решение задач оптимального синтеза стержневых механизмов

При постановке задачи оптимального синтеза следует различать входные и выходные параметры.

Входные – это изначально заданные параметры (размеры звеньев, скорости, ускорения или их соотношения).

Выходные – это параметры, определяемые в результате решения задачи.

При синтезе необходимо учитывать ряд требований кинематического, конструктивного, технологического характера и т. д., среди которых одно, как правило, является главным, а остальные – второстепенными (дополнительными).

Если главное требование записать математически в виде функции $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – выходные параметры, то такая функция называется *функцией цели* (целевой), при этом дополнительные условия, выраженные в виде $a_i \leq g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$, называются ограничениями.

Задачей оптимального синтеза является обеспечение экстремального значения Z при соблюдении всех ограничений.

Например, выразив вес механизма в виде функции Z его параметров (длин звеньев), можно решать задачу минимизации Z при соблюдении условий его существования. К таким условиям относятся условия проворачивания кривошипа в шарнирном четырёхзвеннике, условие соблюдения заданного угла давления и ряд других.

При малом числе выходных параметров решение задачи оптимизации может быть получено в аналитической форме. В противном случае используются численные методы направленного, случайного или комбинированного поиска оптимальных решений.

6.3. Условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырёхзвеннике

При проектировании (синтезе) механизма с ведущим звеном – кривошипом одним из учитываемых условий является проворачиваемость кривошипа. Данное условие иначе называется условием существования кривошипа.

Выполнение условия существования кривошипа обеспечивается определённым соотношением длин звеньев. Например, для того чтобы звено AB четырёхзвенника (рис. 37) могло стать кривошипом, оно должно последовательно пройти через два крайних положения.

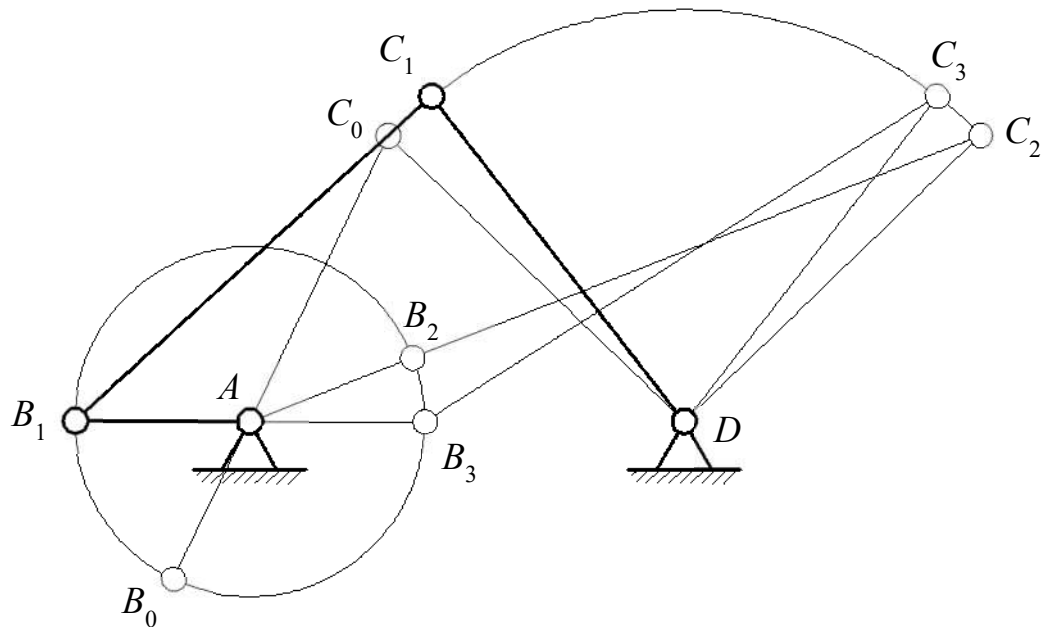


Рис. 37. Выполнение условия существования кривошипа

Используя три положения механизма, получим следующие условия для положений 1, 2, 3, предварительно обозначив длины звеньев $l_{AB} = a$; $l_{BC} = b$; $l_{CD} = c$; $l_{AD} = d$:

- а) $a + d < b + c$ – положение 1;
- б) $a + b < d + c$ – положение 2;
- в) $c < b + d - a$ или $a + c < b + d$ – положение 3;

то есть сумма длин кривошипа и любого другого звена меньше суммы остальных звеньев.

Сложим попарно полученные неравенства и получим: $a < c$; $a < d$; $a < b$, то есть кривошип является самым коротким звеном.

А если данные условия не выполняются, то механизм будет либо двухкривошипным, либо двухкоромысловым. Эти условия используются при геометрическом синтезе.

6.4. Учёт углов давления в стержневых механизмах

Углы давления во многом определяют условия работы механизма. Угол давления (например, угол α на рис. 38) измеряется между вектором силы и вектором скорости в точке её приложения и влияет на трение и износ в кинематических парах.

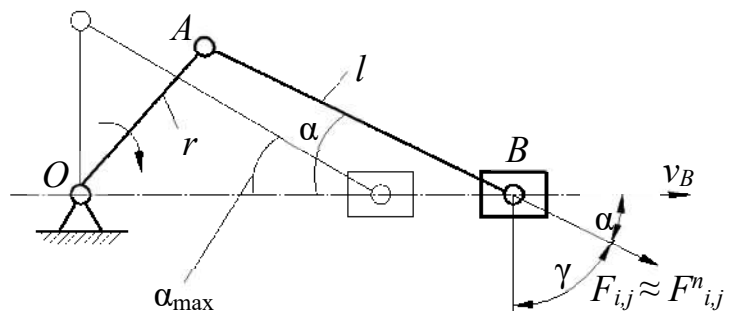


Рис. 38. Углы давления в стержневом механизме

Поэтому максимальные значения углов давления при синтезе механизмов ограничивают допустимыми значениями $[\alpha]$ для исключения возможности заклинивания и предотвращения снижения КПД. Для упрощения расчётов, связанных с определением углов давления, обычно пренебрегают тангенциальными составляющими реакций, что позволяет находить наихудшие положения с точки зрения риска заклинивания и назначать длины звеньев $l_{\min}$, обеспечивающие приемлемые условия работы при заданном $[\alpha]$, т. е. при выполнении условия $\alpha_{\max} \leq [\alpha]$.

Углы $\gamma = 90^\circ - \alpha$ называются углами передачи и ограничиваются при проектировании величиной $\gamma_{\min}$.

6.5. Синтез четырёхзвенника по трём заданным положениям шатуна

Так как точки В и С шарнирного четырёхзвенника описывают дуги окружностей (рис. 39), то, проведя перпендикуляры через середины хорд, соединяющих концы шатуна в трёх положениях, получим центры вращения звеньев АВ и CD (точки А и D). Вид синтеза – геометрический; способ синтеза – графический.

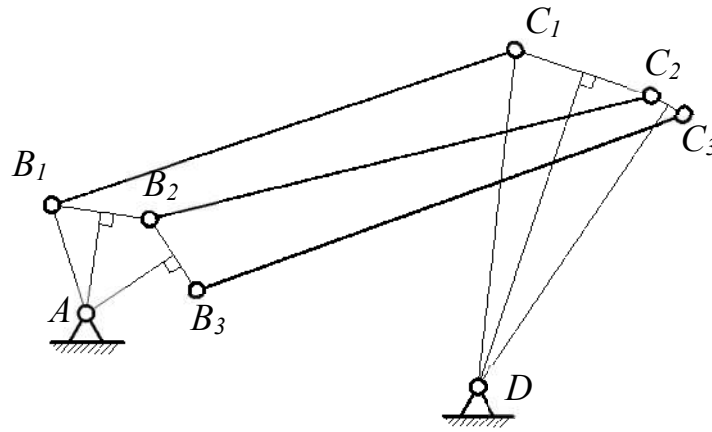


Рис. 39. Синтез четырёхзвенника

6.6. Синтез кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода

Схема кривошипно-кулисного механизма показана на рис. 40.

Одной из кинематических характеристик стержневого механизма может служить коэффициент изменения скорости хода k_v , представляющий собой отношение средней скорости холостого хода $v_{x.x}$ к средней скорости рабочего хода $v_{p.x}$.

При равномерном движении кривошипа коэффициент k_v равен

$$k_v = \frac{v_{x.x}}{v_{p.x}} = \frac{s}{t_{x.x}} \cdot \frac{t_{p.x}}{s} = \frac{180^\circ + \theta}{\omega} \cdot \frac{\omega}{180^\circ - \theta} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}, \quad (6.1)$$

где s – ход ползуна; $t_{p.x}$ и $t_{x.x}$ – время рабочего и холостого хода; ω – угловая скорость кривошипа; θ – угол размаха кулисы.

При заданном V k можно определить $\square$ или наоборот. Используя дополнительные конструктивные соображения, можно определить размеры всех звеньев механизма.

Вид синтеза – кинематический; способ – графоаналитический.

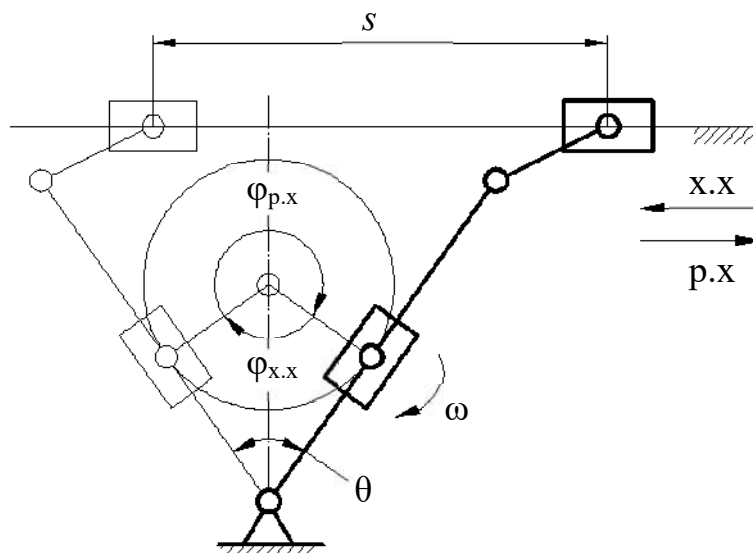


Рис. 40. Синтез кривошипно-кулисного механизма

6.7. Синтез кривошипно-ползунного механизма по некоторым заданным размерам

Кривошипно-ползунный механизм характеризуется пятью параметрами: a , φ_1 , φ_2 , $r = l_{OA}$, $l = l_{AB}$ (рис. 41), при этом можно записать два аналитических выражения, связывающие эти параметры:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{a}{l+r}; \\ \sin \varphi_2 &= \frac{a}{l-r}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

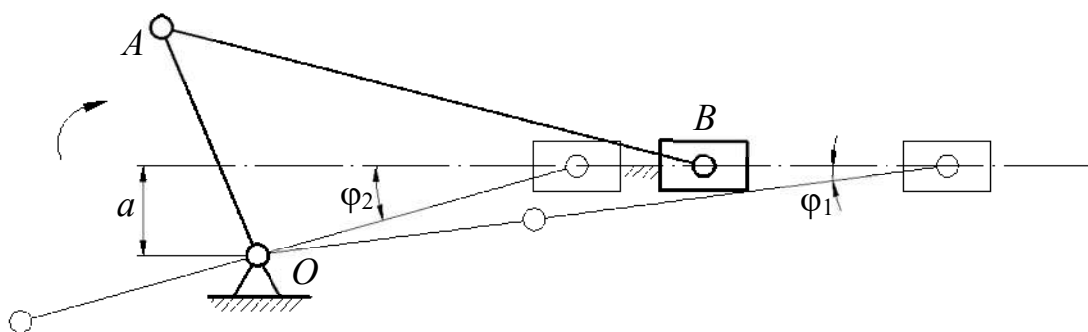


Рис. 41. Синтез кривошипно-ползунного механизма

Таким образом, задавая три параметра из пяти, можно определить два оставшихся из указанных выражений. Например, задав величины: a , φ_1 и φ_2 , можно определить r и l .

Вид синтеза – геометрический; способ – аналитический.

6.8. Понятие о синтезе механизма по заданному закону движения выходного звена

Пусть задан закон движения ведомого звена (угла поворота коромысла обозначен ψ) в зависимости от угла поворота кривошипа φ , например, в четырёхшарнирном механизме (рис. 42).

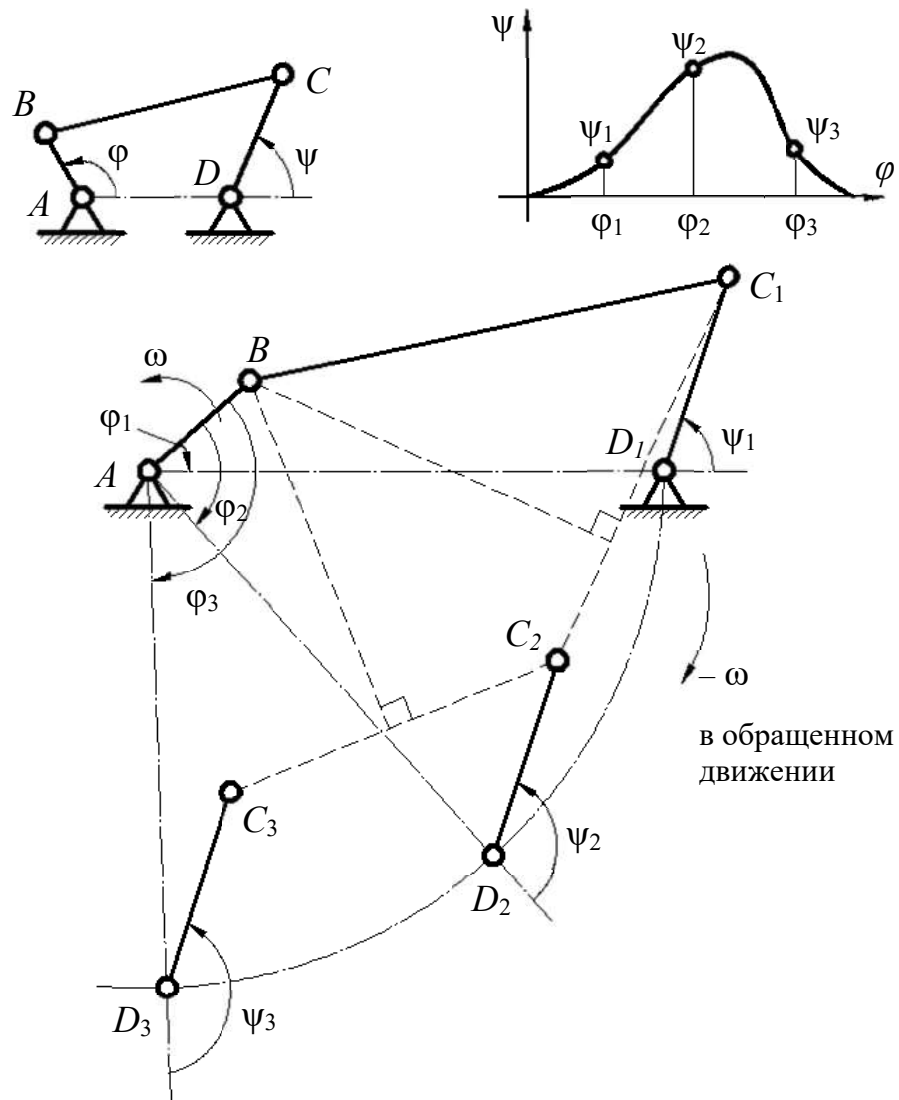


Рис. 42. Синтез механизма по заданному закону движения выходного звена

Приближенный синтез включает разбивку всего интервала по оси графика $\psi(\varphi)$ по оси абсцисс φ на участки, соответствующие трём произвольным значениям $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Используется метод обращения движения, когда механизму условно задаётся движение, обратное кривошипу. Если заданы длина коромысла и межцентровое расстояние, то по трём положениям в обращённом движении можно найти размеры шатуна и кривошипа согласно рис. 42, где точку B находят как центр вращения точки C в обращённом движении.

Существует постановка задачи, когда отыскивается оптимальный закон движения с точки зрения различных параметров: скорости, ускорения, работы динамических сил и т. д.

6.9. Понятие о синтезе механизма по заданной траектории

Часто требуется спроектировать механизм с заданной траекторией движения ведомого звена. Например, четырёхшарнирный механизм стрелы портального крана позволяет перемещать груз горизонтально при вращении стрелы в вертикальной плоскости (рис. 43).

Синтез таких механизмов осуществляется графическими и аналитическими методами с использованием теории функций с наибольшим приближением к заданной траектории. В этой области имеются работы

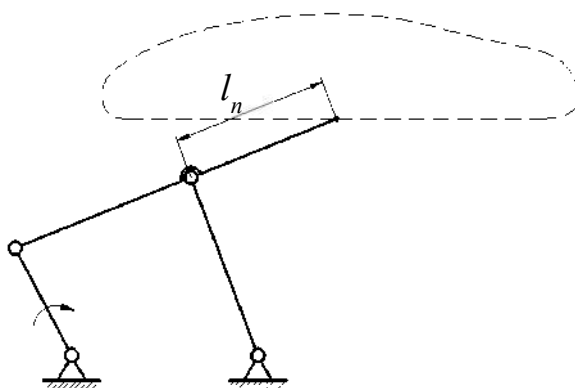


Рис. 43. Синтез механизма по заданной траектории

Чебышева, который первым предложил решение задачи для лямбдообразного прямолинейного траектория Чебышева, положенного в основу конструкции стрелы портального крана.

Искомыми параметрами являются длины звеньев, включая и l_n .

6.10. Общий порядок проектирования рычажного механизма

Процесс проектирования рычажного механизма включает следующие основные этапы:

- 1) производится синтез кинематической схемы (определяются длины звеньев по заданным условиям;
- 2) принимается упрощённый закон движения входного звена, определяются скорости и ускорения звеньев, производится приближённый силовой расчёт (определяются реакции в кинематических парах);
- 3) по найденным усилиям подбираются сечения звеньев и определяются их массы;
- 4) производится приведение сил и масс, подбор маховика и определение истинного закона движения звена приведения;
- 5) при найденном законе движения звена приведения находятся уточнённые значения скоростей и ускорений, определяются более точные величины реакций и производится проверка прочности и жёсткости звеньев. Размеры сечений и массы звеньев последовательно уточняются.

Иногда используют более простую последовательность, в которой расчёт ведётся при заданных длинах и массах звеньев, а также при упрощённом законе движения входного звена.

7. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

7.1. Классификация кулачковых механизмов

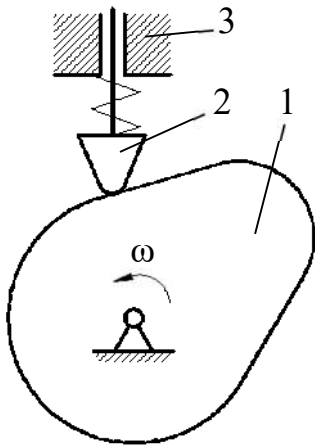


Рис. 44. Кулачковый механизм

Кулачковые механизмы содержат хотя бы одну высшую кинематическую пару и состоят из кулачка 1, толкателя 2 и стойки 3 (рис. 44).

Степень подвижности такого механизма равна:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1. \quad (7.1)$$

Основными достоинствами кулачковых механизмов является возможность получения заранее заданного закона движения толкателя с помощью кулачка. К недостаткам следует отнести большое удельное давление в точке контакта кулачка с толкателем, а также сложность изготовления профиля кулачка.

Постоянный контакт толкателя с кулачком обеспечивается с помощью кинематического (рис. 45, а) или силового замыкания (рис. 45, б).

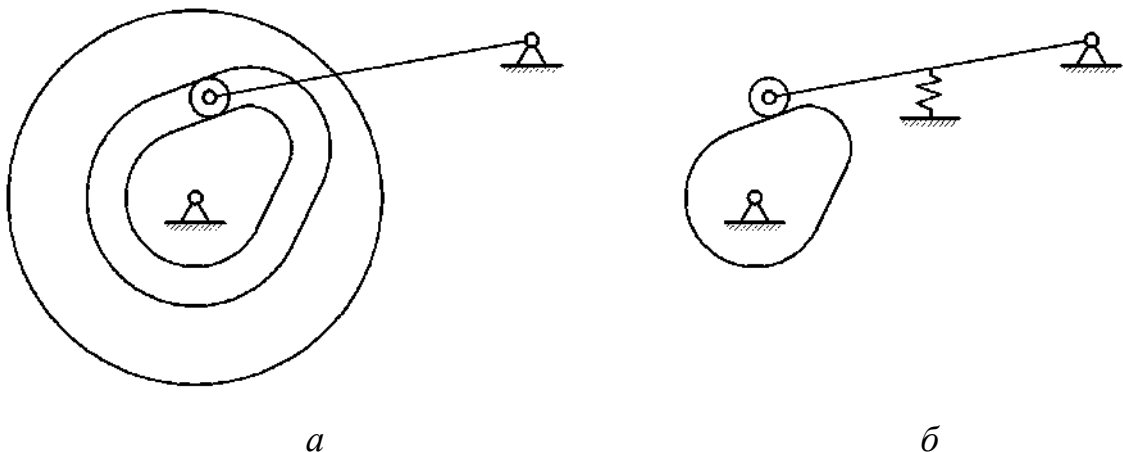


Рис. 45. Классификация кулачковых механизмов по типу контакта толкателя с кулачком:
а – с кинематическим замыканием; б – с силовым замыканием

В зависимости от характера движения кулачка и толкателя возможно преобразование вращательного или поступательного движения кулачка во вращательное или поступательное движение толкателя (рис. 46). На рис. 46, *а* показан механизм с преобразованием поступательного движения в поступательное (плоский с тарельчатым толкателем); на рис. 46, *б* – с преобразованием вращательного движения в поступательное (плоский внеосный с плоским толкателем); на рис. 46, *в* – с преобразованием вращательного движения в поступательное (пространственный с роликовым толкателем).

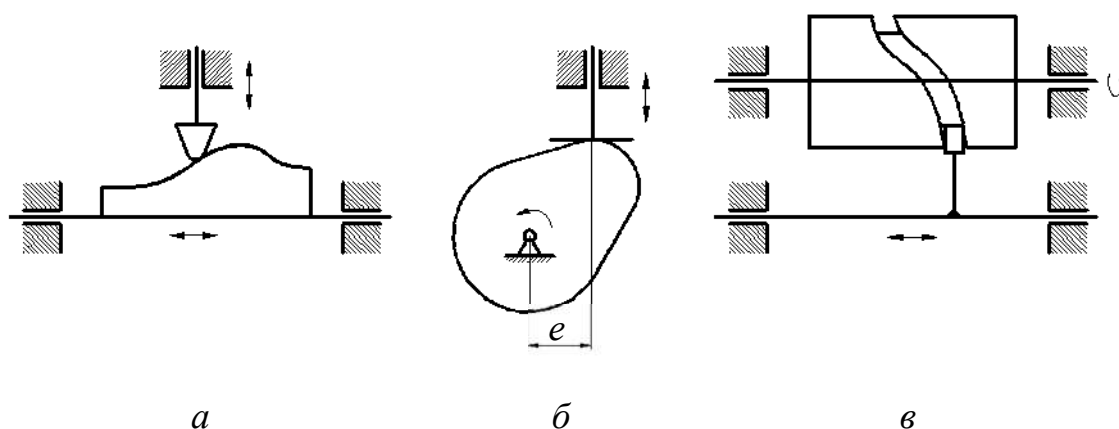


Рис. 46. Классификация кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы могут быть плоскими (рис. 46, *а*, *б*) и пространственными (рис. 46, *в*), осевыми ($e = 0$) и внеосными ($e \neq 0$), с плоским, тарельчатым или роликовым толкателем. Назначение ролика – уменьшение трения и износа в контакте толкателя с кулачком.

Кулачковые механизмы, как правило, используются в машинах автоматического или полуавтоматического действия и обеспечивают функции «жёсткого» управления выполняемого процесса.

7.2. Кинематический анализ кулачковых механизмов

Основной задачей кинематического анализа является определение перемещений, скоростей и ускорений толкателя при заданных схеме механизма и профиле кулачка. Решение этой задачи может быть осуществлено аналитическими и графическими методами, первый из которых более точен, но сложен, а второй – менее точен, но более прост.

Рассмотрим графический метод на примере осевого механизма с роликовым толкателем. Анализ начинается с построения планов механизма. При этом используется метод обращения движения, когда всему механизму условно задают вращение с угловой скоростью ($-\omega$), обратной скорости

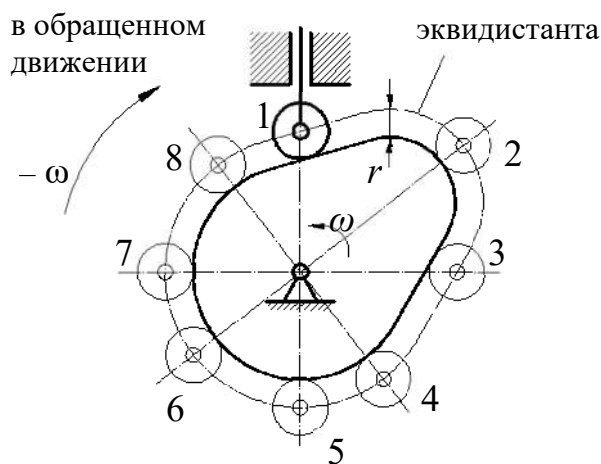


Рис. 47. Профилирование кулачка

кулачка (рис. 47). Тогда толкатель в обращённом движении будет двигаться вокруг неподвижного кулачка, а центр ролика опишет кривую, отстоящую от профиля кулачка на расстояние радиуса r ролика и называемую *эквидистантой*. Построение профиля кулачка называется *профилированием*.

Путь s любой точки толкателя при повороте кулачка на угол φ будет равен разности радиусов-векторов, соединяющих центр кулачка и соответствующие положения центра ролика.

На основе планов механизма можно построить диаграмму перемещений толкателя в координатах $(s; \varphi)$ или $(s; t)$, после чего определяются скорости v

(рис. 48) (аналоги скорости $\frac{ds}{d\varphi}$) и ускорения a (аналоги ускорения $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$)

путём графического дифференцирования графиков $s(\varphi)$, $s(t)$, $v(t)$, $\frac{ds}{d\varphi}(\varphi)$.

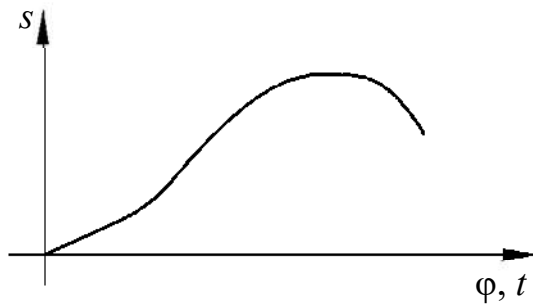


Рис. 48. Диаграмма перемещений толкателя

Движение толкателя имеет реверсивный характер за весь кинематический цикл, при этом наблюдаются четыре фазы движения толкателя (см. рис. 54), соответствующие четырём фазовым углам поворота кулачка: φ_y – угол удаления (подъёма) толкателя; φ_d –

угол дальнего выстоя; φ_v – угол возврата (опускания); φ_b – угол ближнего выстоя.

С целью непосредственного определения скоростей и ускорений толкателя осуществляют условную замену высшей пары на низшую. Замена осуществляется так, что движение заменяемого механизма в момент замены соответствует движению заменяющего.

В общем случае мгновенный заменяющий механизм представляет шарнирный четырёхзвенник с подвижными шарнирами A и B , расположенными в центрах кривизны, контактирующих в точке P профилей (рис. 49).

В частных случаях возможны различные варианты замены (рис. 50), при этом можно производить кинематический анализ кулачкового механизма как обычного стержневого.

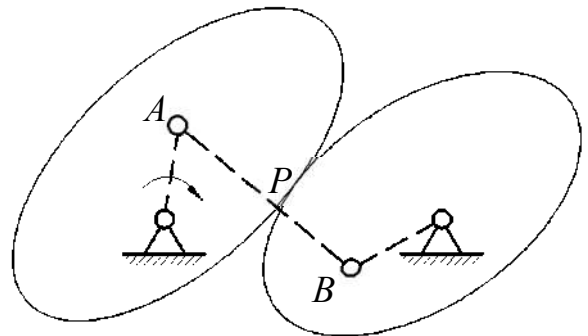


Рис. 49. Мгновенный заменяющий механизм

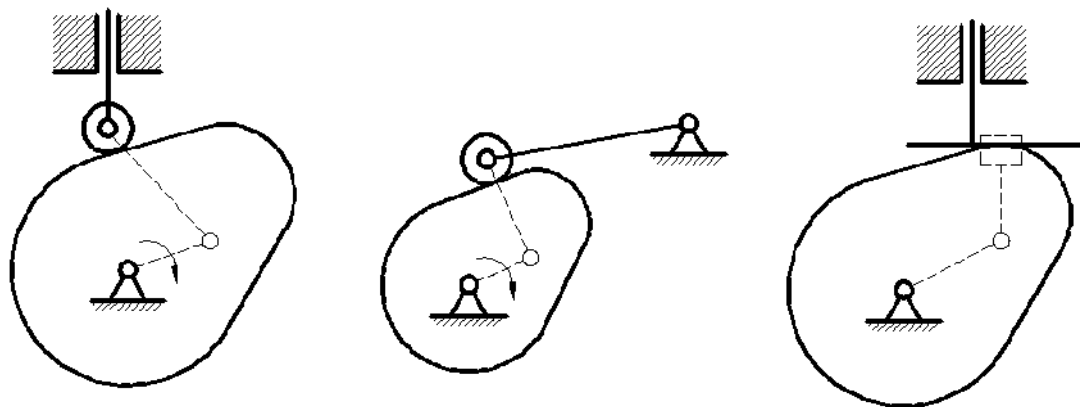


Рис. 50. Различные варианты замены кулачкового механизма

7.3. Некоторые вопросы динамического анализа кулачковых механизмов

Условия нормальной работы звеньев кулачкового механизма в существенной степени зависят от угла давления α между направлением усилия F , действующего на толкатель со стороны кулачка, и направлением скорости толкателя (рис. 51, *a*).

Угол давления – переменная величина, с увеличением которой возрастает опасность заклинивания механизма, т. к. увеличивается составляющая F_x , вызывающая трение в кинематических парах.

Обычно величину $\alpha_{\max}$ ограничивают подбором размеров кулачка при условии, что

$$\alpha_{\max} \leq \begin{cases} 30^\circ - \text{для механизмов с поступательным движением толкателя;} \\ 45^\circ - \text{для механизмов с коромысловым толкателем.} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу определения текущего угла α для любого положения механизма (рис. 51).

Построим заменяющий кривошипно-ползунный механизм OAB , где точка A совпадает с центром кривизны кулачка в точке его контакта с роликом (рис. 51, *a*).

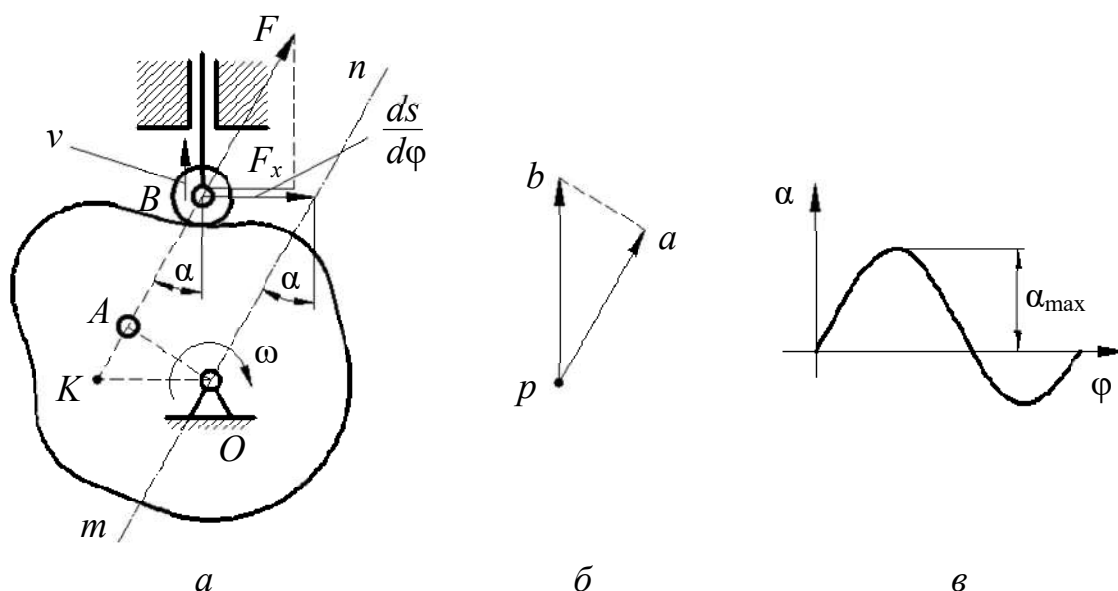


Рис. 51. Динамический анализ кулачковых механизмов:
a – план положений; *б* – план скоростей заменяющего механизма; *в* – диаграмма изменения угла α

На рис. 51, *б* приведён план скоростей заменяющего механизма, где $\triangle pab \sim \triangle OAK$ (треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами), поэтому

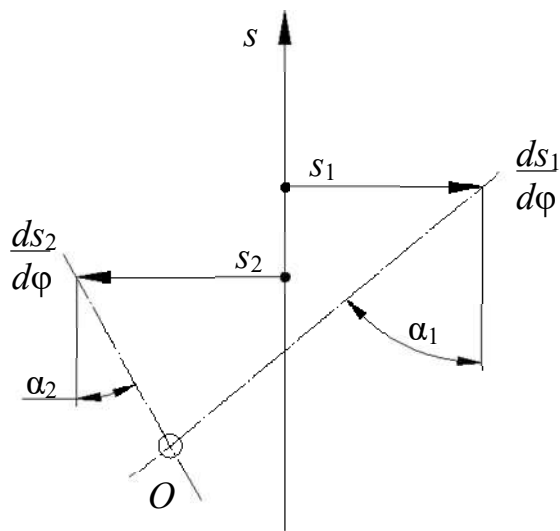
$$\frac{l_{OK}}{l_{OA}} = \frac{pb}{pa} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{ds}{dt\omega l_{OA}} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\phi l_{OA}}, \quad (7.2)$$

откуда

$$l_{OK} = \frac{ds}{d\phi}. \quad (7.3)$$

Таким образом, отложив вектор $\frac{ds}{d\phi}$ от точки *B* в направлении вектора скорости *v* толкателя, повернутого на 90° в сторону вращения кулачка, и проведя линию *tn* через точку *O* и конец вектора $\frac{ds}{d\phi}$, получим угол α .

Можно решить обратную задачу, находя положение центра O вращения кулачка при заданных значениях α и $\frac{ds_1}{d\varphi}$, $\frac{ds_2}{d\varphi}$ для двух положений толкателя



(рис. 52).

Из рис. 52 видно, что чем больших значений достигают углы давления α , тем меньшие габариты имеет механизм, но риск заклинивания при этом увеличивается.

Рис. 52. Решение обратной задачи (нахождение положения центра вращения)

7.4. Синтез кулачковых механизмов

7.4.1. Выбор закона движения толкателя

При проектировании кулачковых механизмов используются различные методы синтеза.

Если известен минимальный радиус ($r_{\min}$) кулачка и закон его движения, то построение профиля – задача кинематического синтеза. Если $r_{\min}$ должен определяться с условием отсутствия заклинивания, то построение профиля – задача динамического синтеза.

Вопрос о выборе закона движения толкателя отпадает в случае, если он полностью определяется той операцией, которую толкатель осуществляет, т. е. является исходно заданным. Однако во многих случаях заданы лишь частичные перемещения, скорости или ускорения толкателя и необходимо подобрать какой-либо закон движения на недостающих участках.

Например, может быть задано максимальное и минимальное перемещение толкателя по двум участкам t_2 и t_4 (рис. 53) в виде графика $s(t)$, показанного основной линией. На остальных участках t_1 и t_3 закон движения следует выбрать.

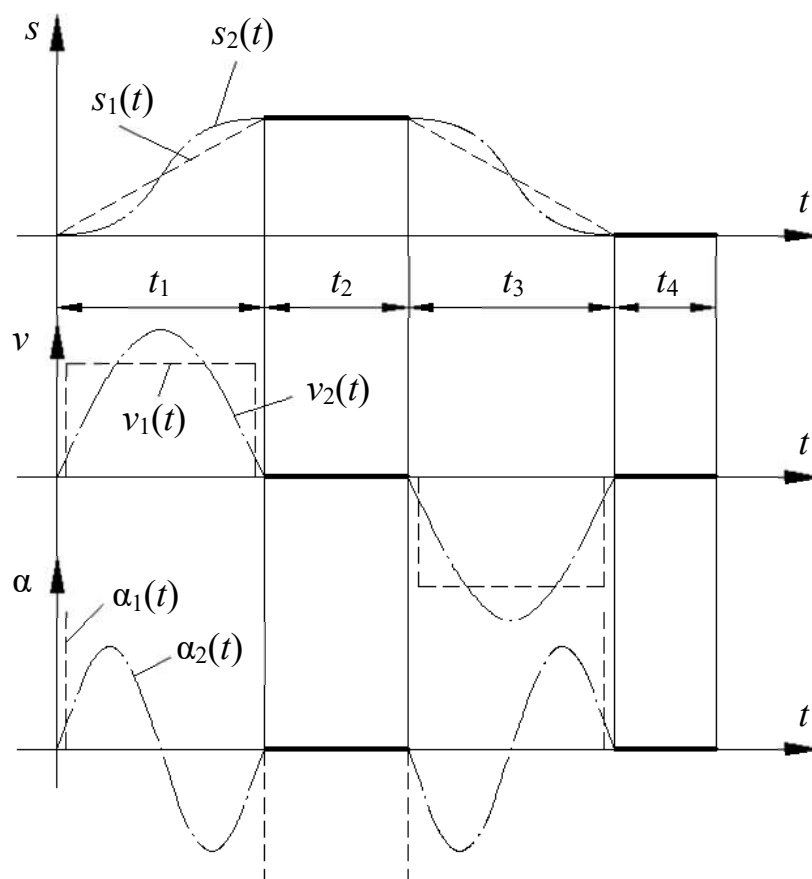


Рис. 53. Выбор закона движения толкателя

Из всех возможных законов движения необходимо выбирать оптимальный с точки зрения условий работы механизма. Одним из таких законов является синусоидальный закон $s_2(t)$, обеспечивающий плавную безударную работу механизма без резких изменений скорости и без больших значений ускорений, как, например, при выборе закона $s_1(t)$, где ускорения, а следовательно, силы инерции достигают больших величин, способных вызвать износ и поломку.

7.4.2. Профилирование кулачка

Рассмотрим графический метод получения профиля кулачка как задачу кинематического синтеза. В этом случае заданы схема кулачкового механизма, закон движения толкателя и $r_{\min}$ кулачка. Профилирование осуществляется на основе закона движения толкателя. В качестве примера рассмотрим профилирование кулачка в осевом механизме с поступательно движущимся толкателем.

Схема механизма, диаграмма движения толкателя и $r_{\min}$ кулачка даны (рис. 54).

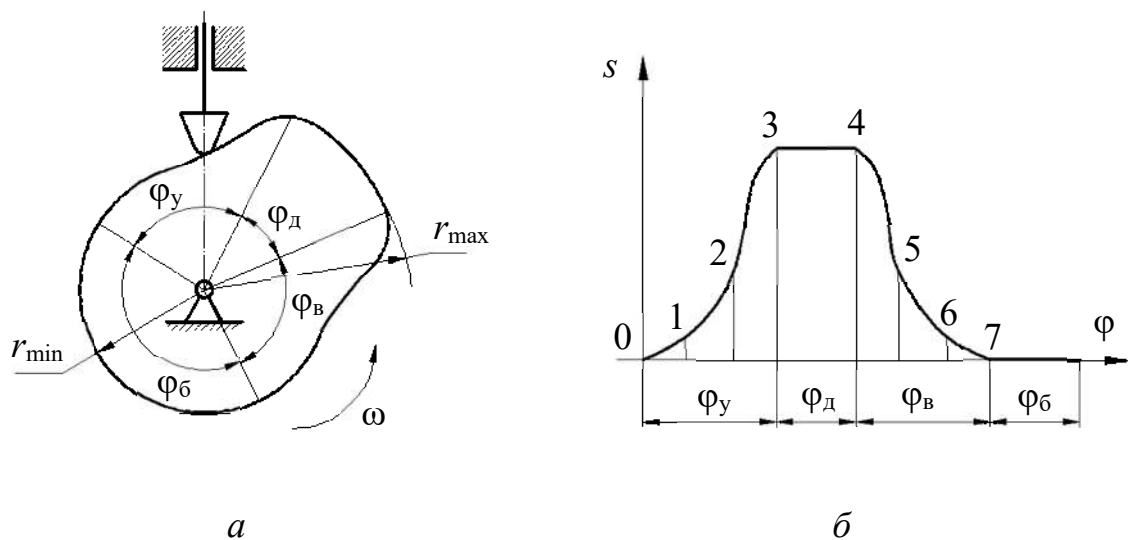


Рис. 54. Профилирование кулачка:
a – схема механизма; *б* – диаграмма движения толкателя

В начале размечаются основные размеры механизма в масштабе μ_l , а также фазовые углы, причём углы ϕ_y и ϕ_v делятся на ряд равных частей в соответствии с диаграммой (рис. 54, *б*). Строятся начальное, а затем ряд последующих положений толкателя в обратном движении (рис. 55, *а*), и полученные точки соединяются плавной кривой.

В случае построения профиля кулачка для механизма с роликовым толкателем сначала строится эквидистанта (центральной профиль) как и в

предыдущем случае, а затем и сам рабочий профиль кулачка, отстоящий от эквидистанты на величину радиуса ролика $r_{\text{рол}}$ (рис. 55, б).

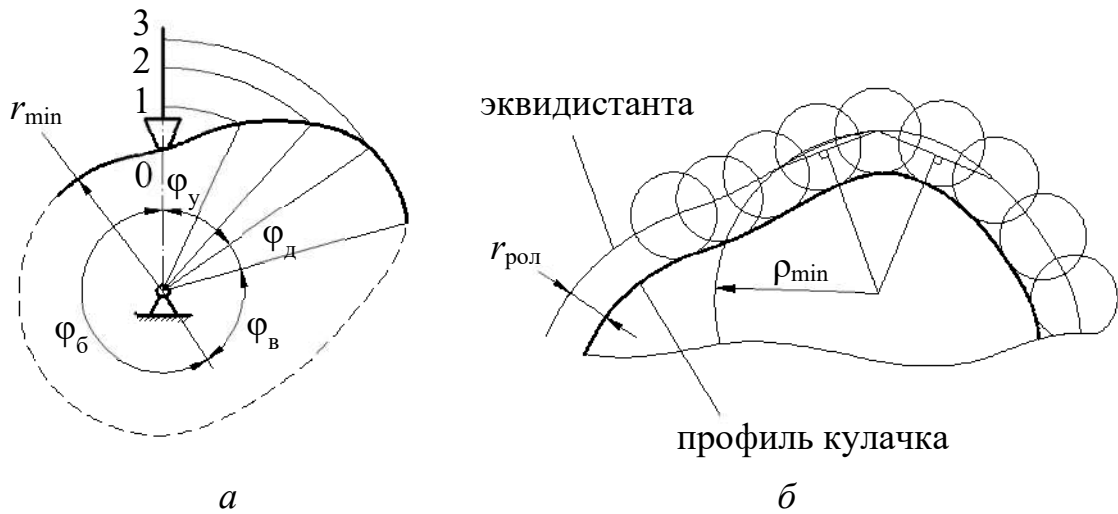


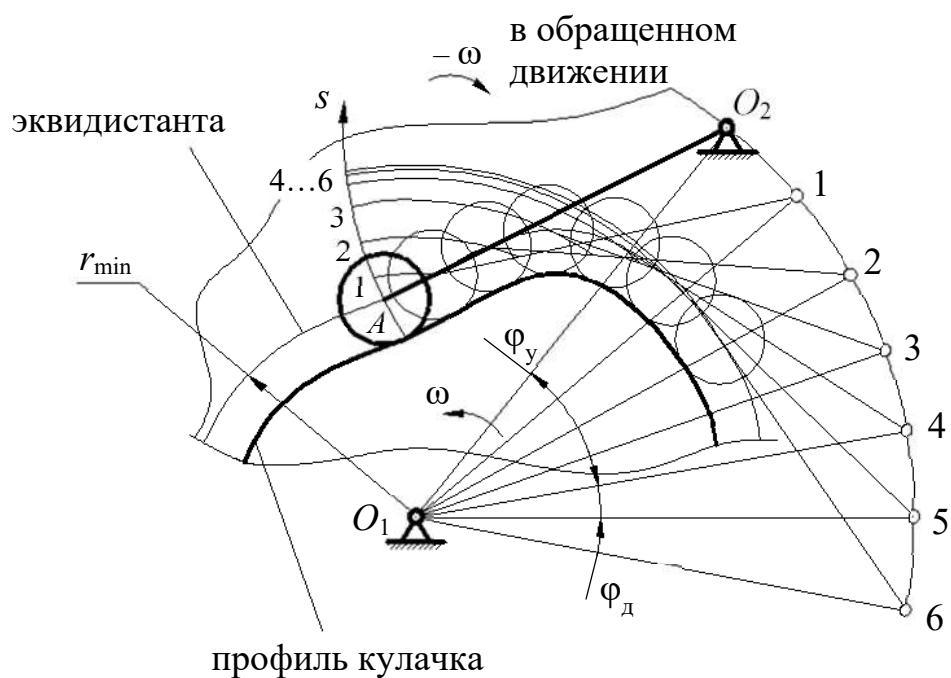
Рис. 55. Построение профиля кулачка:
а – ряд положений толкателя в обращенном движении; б – построение профиля кулачка для механизма с роликовым толкателем

Величина $r_{\text{рол}}$ выбирается из соотношения:

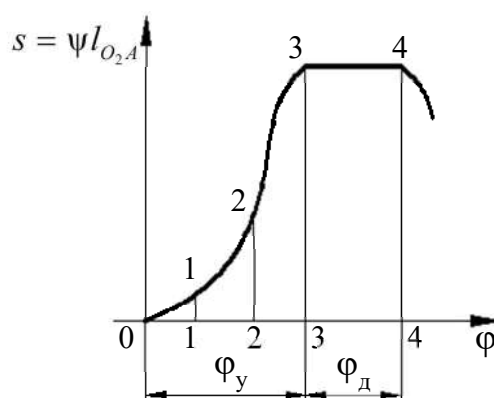
$$r_{\text{рол}} \leq \min \begin{cases} 0,4r_{\text{min}}; \\ 0,8\rho_{\text{min}}, \end{cases} \quad (7.4)$$

где ρ_{min} – минимальный радиус центрального профиля кулачка, который можно определить графически по трём точкам в месте наибольшей кривизны эквидистанты (рис. 55, б).

Профилирование кулачка механизма с коромысловым толкателем состоит из аналогичных операций, т. е. после разметки межцентровых расстояний строится ряд положений коромысла в обращённом движении (рис. 56, а) в соответствии с заданной диаграммой $s(\varphi)$, часть которой показана на рис. 56, б.



a



б

Рис. 56. Профилирование кулачка механизма с коромысловым толкателем:
a – ряд положений коромысла в обратном движении; *б* – диаграмма движения коромысла

7.4.3. Динамический синтез кулачкового механизма

Задача динамического синтеза заключается в нахождении центра вращения кулачка при условии минимизации размеров механизма, когда заданы закон движения толкателя и предельно допустимый угол давления $\alpha_{\text{доп}}$. В конечном итоге задача состоит в определении r_{min} кулачка, после чего может быть выполнен кинематический синтез (профилирование).

Рассмотрим пример определения $r_{\min}$ кулачка для механизма с поступательно движущимся толкателем, когда заданы диаграммы перемещений $s(\varphi)$ и аналогов скоростей $\frac{ds}{d\varphi}(\varphi)$, которые должны быть вычерчены в едином масштабе $\mu_s = \mu_{\frac{ds}{d\varphi}} = \dots$

Путём исключения параметра φ вычерчивается совмещённая диаграмма $s\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)$, как показано на рис. 57.

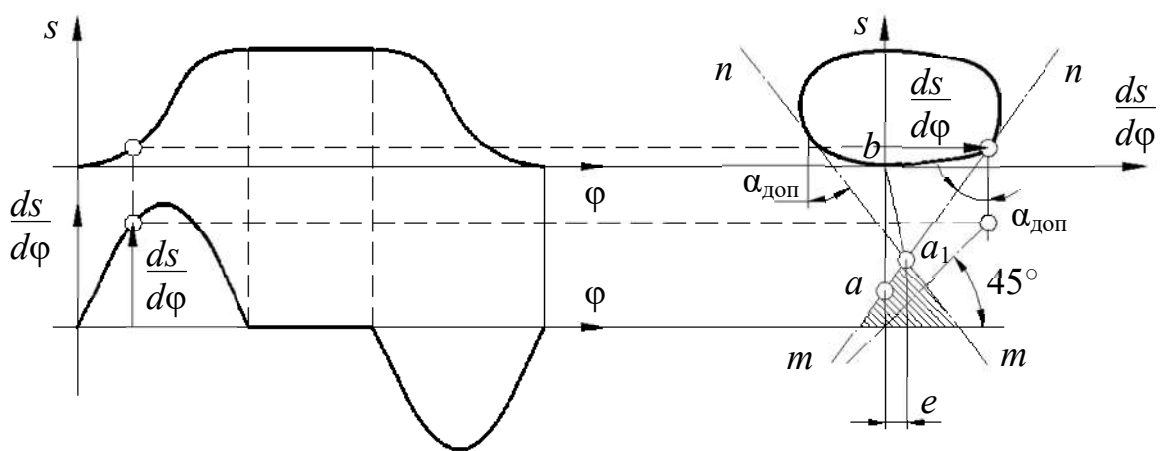


Рис. 57. Совмещенная диаграмма движения

Проведя касательные mn к диаграмме $s\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)$ под углами $\varphi_{\text{доп}}$, как показано на рис. 57, получим точку a_1 на их пересечении. Тогда отрезок a_1b будет соответствовать в масштабе μ_s величине

$$r_{\min} = \mu_s \cdot (a_1b) \quad (7.5)$$

для внеосного механизма со смещением оси толкателя $e \neq 0$ относительно центра вращения кулачка. Так как центр кулачка можно располагать в любой точке заштрихованной области, то при $e = 0$ получим

$$r = \mu_s \cdot (ab), \quad (7.6)$$

когда центр кулачка совпадает с осью толкателя.

Таким образом, габариты механизма уменьшаются при $e \neq 0$, т. к. центр кулачка приближается к точке b , а предельный угол давления $\varphi_{\text{доп}}$ остаётся неизменным.

Обычно при силовом замыкании такие построения делаются только для фазы удаления, т. к. на фазе возврата толкатель является ведущим звеном и заклинивания не происходит.

Для механизма с коромысловым толкателем построение совмещённой диаграммы $s \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)$ производится в пределах заданного максимального угла размаха коромысла ψ_{max} . Причём отрезки, равные $\frac{ds}{d\varphi}$ откладываются в масштабе μ_l от траектории точки A коромысла по его оси в сторону вектора $\frac{ds}{d\varphi}$, повёрнутого на 90° в направлении вращения кулачка (рис. 58).

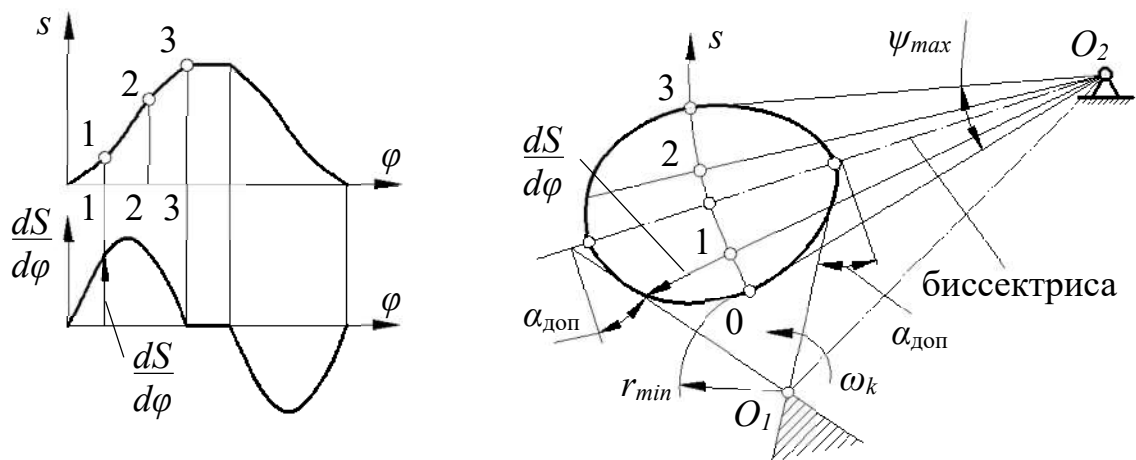


Рис. 58. Построение совмещённой диаграммы движения для механизма с коромысловым толкателем

Точки, полученные для нескольких положений коромысла, соединяют плавной кривой и строят допускаемую зону размещения центра вращения кулачка, которую приближённо можно получить, проведя касательные к диаграмме $s \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)$ под углами $\alpha_{\text{доп}}$, образованными биссектрисой угла ψ_{max} и

перпендикулярами к ней (рис. 58, б). Выбранное положение центра O_1 в допускаемой (заштрихованной) зоне определяет величину $r_{\min}$ и межцентровое расстояние O_1O_2 между кулачком и коромыслом.

7.4.4. Аналитический способ синтеза кулачковых механизмов

При аналитическом методе синтеза вместо диаграмм в графической форме используются аналитические зависимости $s(\varphi)$, $\frac{ds}{d\varphi}(\varphi)$ и т. д.

Например, для осевого кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем профиль кулачка может быть представлен аналитической зависимостью вида

$$r = r_{\min} + s(\varphi). \quad (7.7)$$

При заданном $r_{\min}$ и известной зависимости $S(\varphi)$ можно получить профиль кулачка с любой заданной степенью точности.

7.4.5. Понятие о проектировании пространственных кулачковых механизмов

Распространённым методом синтеза пространственных механизмов является условная их замена плоским кулачковым механизмом. Тогда задача сводится к синтезу плоского механизма. Например, задача проектирования механизма с поступательно движущимся толкателем и вращающимся кулачком сводится при заданном законе $s(\varphi)$ к построению развёртки цилиндра, на которой по данным диаграммы строится теоретический и действительный профиль кулачка (рис. 59).

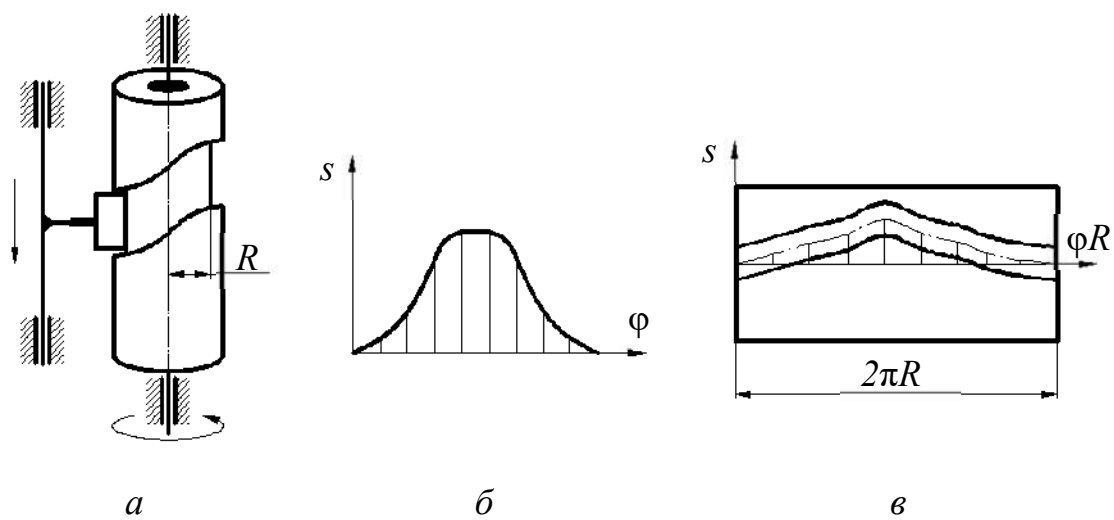


Рис. 59. Проектирование пространственного кулачкового механизма:
a – план механизма; *б* – диаграмма движения толкателя; *в* – развертка цилиндра

8. ФРИКЦИОННЫЕ И ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

8.1. Общие сведения о передачах вращения

Фрикционные и зубчатые механизмы предназначены для передачи вращательного движения с одного вала на другой с помощью деталей типа диска в основном цилиндрической формы. При этом, как правило, меняется величина угловой скорости и передаваемого момента, а также их направление. Вал, от которого передаётся движение, называется ведущим, а вал, которому передаётся движение – ведомым.

Оси валов могут быть параллельными, пересекаться или скрещиваться под различными углами. В первом случае механизм является плоским, в остальных случаях механизмы пространственные.

Если в механизме имеются только ведущие и ведомые валы и отсутствуют промежуточные вращающиеся звенья, то механизм называется *передачей*. Передача вращения может осуществляться:

- 1) путём непосредственного соприкосновения двух дисков, жёстко связанных с ведущим и ведомым валами (фрикционная, червячная, зубчатая);
- 2) посредством промежуточных гибких тел, сцепляющихся с дисками, которые жёстко связаны с ведущим и ведомым валами (ременная, цепная, волновая).

Отношения угловых скоростей вращения обоих валов передачи называется *передаточным отношением* (i), которое характеризует процесс преобразования движения количественно.

Отношения угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого называется *передаточным числом* (u), которое определяет направление передачи энергии.

Величина i и u может меняться или оставаться постоянным за время одного оборота ведущего вала.

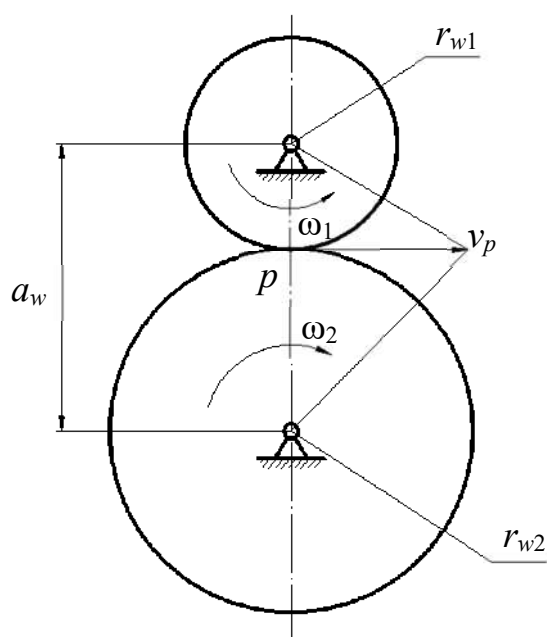


Рис. 60. Схема передачи вращения

Любую передачу можно схематично представить в виде двух начальных поверхностей, контактирующих между собой, а плоскую передачу – в виде двух начальных окружностей с радиусами r_{w1} и r_{w2} , перекатывающихся друг по другу без скольжения и контактирующих в полюсе p (рис. 60).

Тогда

$$v_p = r_{w1}\omega_1 = r_{w2}\omega_2, \quad (8.1)$$

откуда следует выражение для передаточного отношения

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (8.2)$$

Аналогично можно изобразить ременную или цепную передачи, а также пространственные передачи (рис. 61).

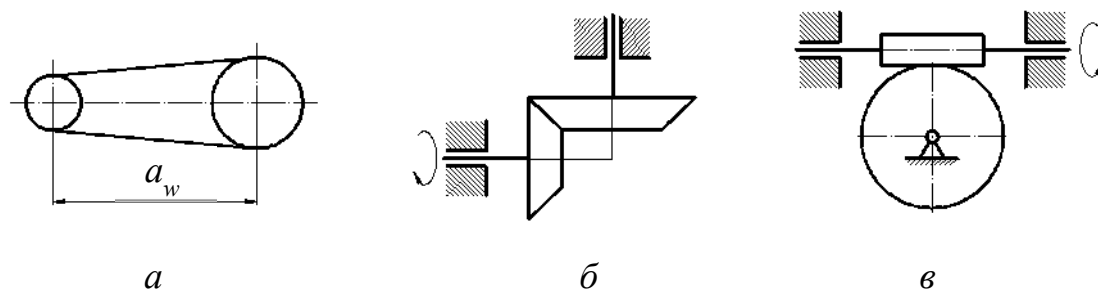


Рис. 61. Схематические обозначения различных типов передач:
 a – ременная или цепная передача; b – коническая зубчатая передача;
 c – червячная передача

8.2. Фрикционные передачи

Одной из наиболее простых и во многих случаях достаточно надёжной является фрикционная передача, состоящая в простейшем случае из двух колёс (роликов), закреплённых на ведущем и ведомом валах. Для передачи движения без скольжения необходимо приложить к одному из роликов силу Q , достаточную для возникновения трения в месте контакта (рис. 62), при этом касательная сила их сцепления равна

по величине передаваемого окружному усилию.

Фрикционные передачи могут быть с постоянным и переменным передаточным отношением. Передачи с переменным передаточным отношением называются *вариаторами* (рис. 64).

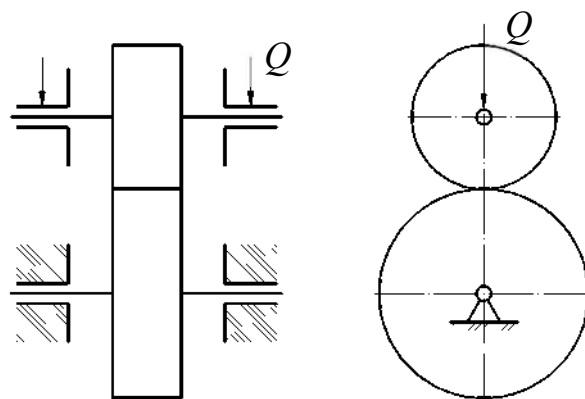


Рис. 62. Фрикционная передача

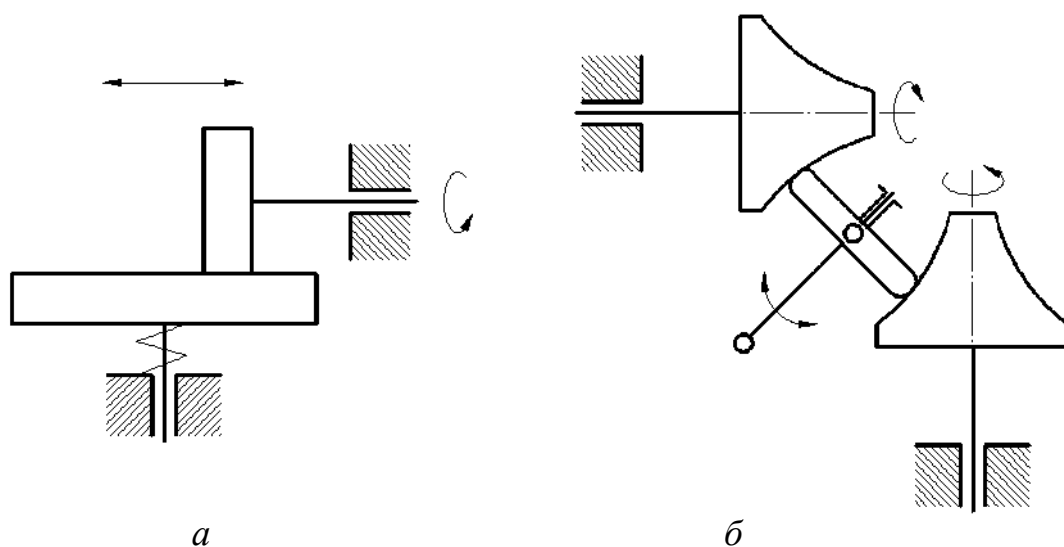


Рис. 63. Вариаторы: а – лобовой; б – торовый

Достоинствами фрикционных передач являются: плавность и бесшумность в работе, простота конструкции, невозможность поломки при резком изменении крутящего момента на одном из валов благодаря возможности проскальзывания роликов, возможность бесступенчатого регулирования скоростей.

Недостатками являются: необходимость прижимного устройства, непостоянство передаточного отношения, невозможность передачи значительных крутящих моментов.

В связи с указанными недостатками фрикционные передачи не получили такого широкого распространения как зубчатые.

8.3. Зубчатые передачи. Виды и классификация

Зубчатые передачи осуществляют передачу вращательного движения с одного вала на другой с помощью цилиндрических, конических, червячных колёс, имеющих специально профилированные зубья, при этом зубчатые колёса могут иметь прямые, косые, спиральные, шевронные зубья и т.д. (рис. 64).

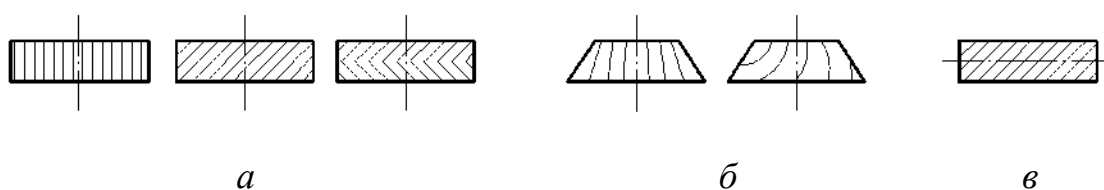


Рис. 64. Виды зубчатых колес:
a – цилиндрические колеса; *б* – конические колеса; *в* – червяк

При использовании колёс с непрямыми зубьями повышается плавность и бесшумность работы и увеличивается нагрузочная способность передачи.

В зубчатых передачах с пересекающимися осями в качестве начальных поверхностей используются усечённые конусы, вершины которых пересекаются в одной точке (рис. 65, *a*), а в передачах с перекрещивающимися

осями теоретическими начальными поверхностями являются гиперболоиды вращения (рис. 65, б). Такие передачи называются *гиперболоидными*.

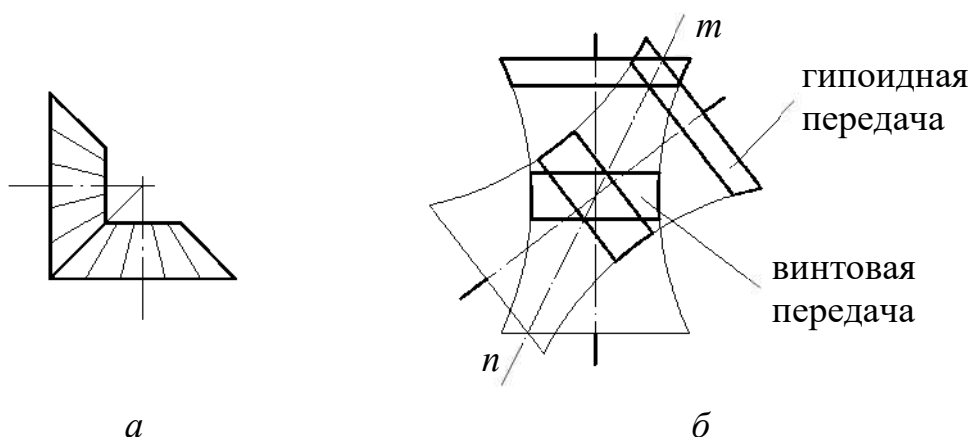


Рис. 65. Начальные плоскости зубчатых передач: *а* – зубчатая передача с пересекающимися осями; *б* – зубчатая передача с перекрещивающимися осями

При использовании колёс с непрямыми зубьями повышается плавность и бесшумность работы и увеличивается нагрузочная способность передачи.

В зубчатых передачах с пересекающимися осями в качестве начальных поверхностей используются усечённые конусы, вершины которых пересекаются в одной точке (рис. 65, а), а в передачах с перекрещивающимися осями теоретическими начальными поверхностями являются гиперболоиды вращения (рис. 65, б). Такие передачи называются *гиперболоидными*.

Контакт зубьев колёс в таких передачах происходит по прямолинейным образующим mn . В машиностроительной практике ограничиваются отдельными короткими частями гиперболоидов. Например, используя среднюю часть гиперболоидов, получают винтовую зубчатую передачу, а если использовать усечённые конусы, близкие по профилю к гиперболоидам в их широкой части, то получим так называемую *гипоидную передачу* (рис. 65, б).

Частным случаем винтовой передачи является червячная передача, в которой малое колесо называется *червяком*, а большое – *червячным колесом* (рис. 66).

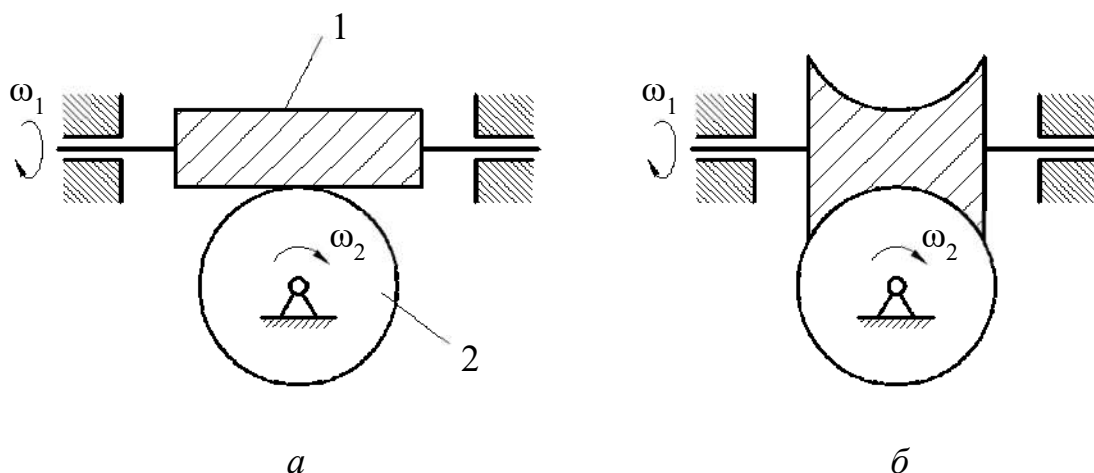


Рис. 66. Червячная передача:
а – передача с цилиндрическим червяком; *б* – передача с тороидным (глобоидным) червяком

Червячные передачи могут быть с одно и многозаходными червяками, при этом число заходов червяка равно числу его зубьев.

Червячные передачи позволяют обеспечить большое передаточное отношение при сравнительно малых габаритах вследствие малого числа z_1 зубьев (заходов) на червяке (обычно $z_1 = 1; 2; 4$). Однако коэффициент КПД передачи ниже, чем у цилиндрической.

Широко употребляются следующие значения передаточных отношений для зубчатой пары: $1...6$ – для цилиндрических передач; $1...4$ – для конических передач; $10...40$ – для червячных передач.

По форме профиля зуба различают передачи *эвольвентные*, *циклоидные*, *цевочные*, а также *передачи с зацеплением Новикова*.

Наибольшее распространение получили эвольвентные передачи с профилем, предложенным Л. Эйлером в 1754 г. Преимуществом этого профиля является простота изготовления, достаточно высокая нагрузочная способность, малая чувствительность к неточностям межцентрового расстояния. Однако эвольвентный профиль удовлетворяет не всем требованиям, предъявляемым к современным зубчатым передачам. Так, например, в мощных передачах внешнего зацепления, где контактируют

выпуклые зубья с малыми радиусами кривизны профилей, происходит их быстрое разрушение из-за недостаточной контактной прочности. Одним из путей повышения контактной прочности является использование внутреннего зацепления, в котором профиль зуба одного из колёс вогнутый.

Другой путь – применение передач с зацеплением Новикова, где выпуклые профили зубьев одного из колёс, очерченные по дуге окружности, контактируют с вогнутыми профилями другого колеса. При этом нагрузочная способность передачи повышается в два – три раза по сравнению с эвольвентной, а также уменьшаются потери на трение.

Одной из интересных и перспективных передач является так называемая волновая передача (рис. 67), состоящая из жёсткого 1 и гибкого 2 зубчатых колёс, а также генератора волн 3 с роликами 4. При вращении генератора 3, благодаря разнице чисел зубьев жёсткого и гибкого колёс, приводится во вращение колесо 2, причём передаточное отношение может быть очень большим ($i = 40...400$). Изобретатель волновой передачи У. Массер (США, 1959 г.) указывал на возможность использования треугольного профиля зубьев.

К зубчатым передачам относятся передачи с некруглыми, секторными

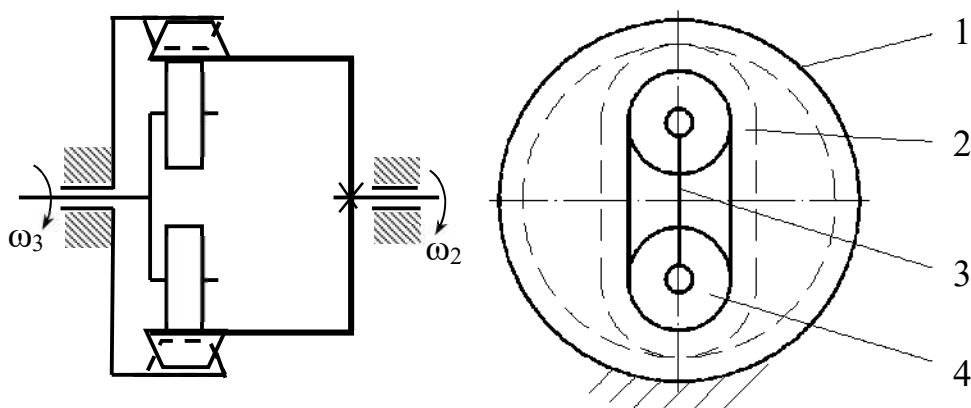


Рис. 67. Волновая передача

колёсами, колёсами, имеющими зубья на части обода и т. д.

Обычно в зубчатых передачах меньшее колесо называется *шестерней*.

Выбор той или иной передачи зависит от традиционной области её применения и конкретных функциональных особенностей механизма, в котором эта передача будет использована.

8.4. Основная теорема зацепления (теорема Виллиса)

Для постоянства передаточного отношения при зацеплении двух профилей зубьев необходимо, чтобы радиусы начальных окружностей зубчатых колёс, перекатывающихся друг по другу без скольжения, оставались неизменными. Если рассмотреть обращённое движение начальных окружностей (рис. 68, *a*), когда всей системе задана угловая скорость $(-\omega_2)$, то второе колесо будет условно неподвижным и точка p является мгновенным центром относительного вращения колёс. Эта точка, называемая *полюсом зацепления*, где контактируют начальные окружности, делит межцентровое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям, т. к. при $r_w = const$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w1}}{r_{w2}} = const. \quad (8.1)$$

Рассмотрим обращённое движение профилей зубьев зубчатых колёс (рис. 68).

Точка контакта зубьев (точка k), принадлежащая первому колесу, вращается вокруг точки p , которая будет мгновенным центром скоростей. Скорость $v_k \perp pk$ и совпадает с общей касательной к профилям в точке k при условии постоянства этого контакта. В противном случае постоянного контакта не будет, так как появится составляющая v_k'' , и профили разомкнутся (рис. 69). Так как рассматривается произвольное положение зубьев, то можно сформулировать теорему.

Нормаль $n - n$ к касающимся профилям зубьев, проведённая через точку их касания, делит межцентровое расстояние на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

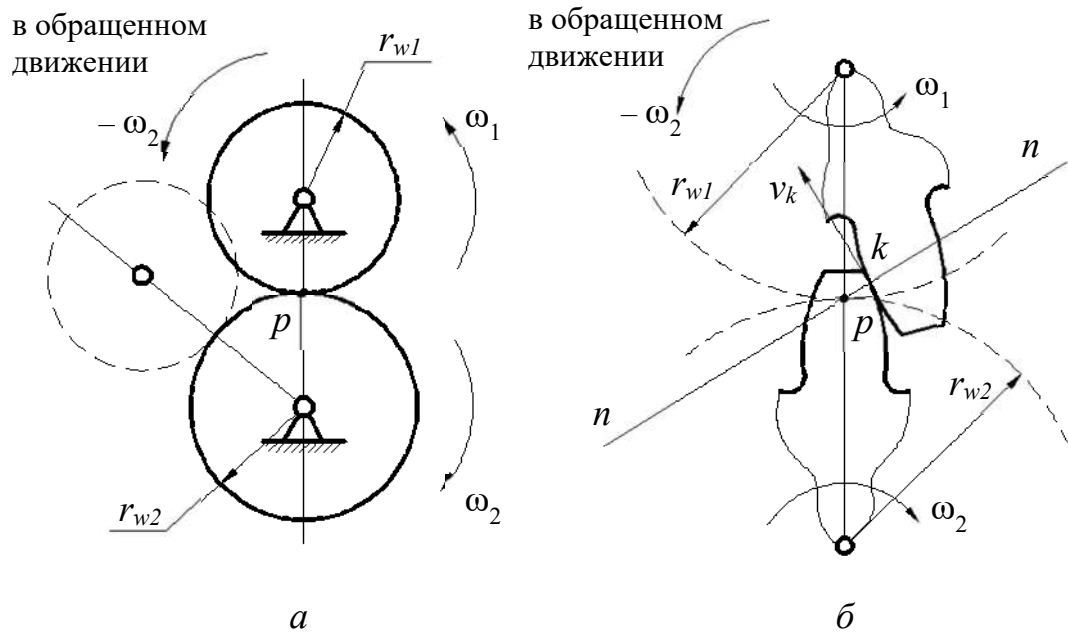


Рис. 68. Обращенное движение зубчатых колес:
 a – обращенное движение зубчатых колес; b – обращенное движение профилей зубьев

Эта теорема, сформулированная Р. Виллисом в 1841 г., определяет основной закон зацепления профилей, которые не могут быть произвольными, а должны быть специально подобраны.

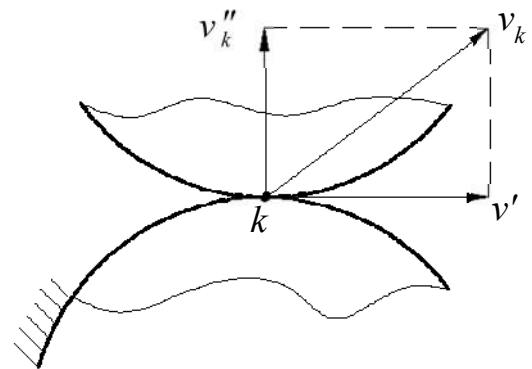


Рис. 69. Размыкание контакта в точке k

8.5. Эвольвента и её свойства

Наибольшее применение получили эвольвентные зубчатые передачи с профилем зубьев, очерченным по эвольвенте (рис. 70).

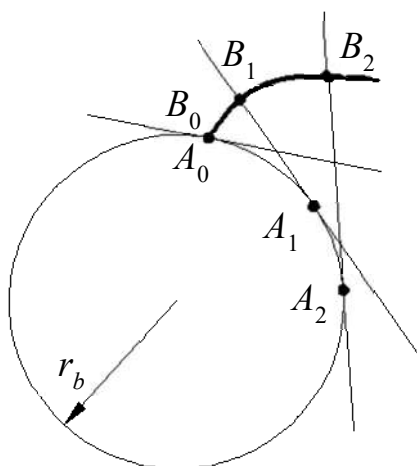


Рис. 70. Эвольвента круга

Эвольвентой круга называется траектория точки, лежащей на прямой, которая перекатывается без скольжения по окружности радиуса r_b , называемой *основной*.

Эвольвента имеет следующие свойства:

- 1) начинается с основной окружности;
- 2) нормаль к эвольвенте является касательной к основной окружности;
- 3) радиус кривизны эвольвенты в каждой её точке лежит на нормали к эвольвенте в этой

точке.

Основная окружность представляет собой геометрическое место центров кривизны эвольвенты и является её *эволютой*.

8.6. Геометрия эвольвентного зацепления

В процессе зацепления зубья касаются друг друга различными точками профиля (рис. 71). Так как эти точки лежат на нормали к профилям, которая одновременно является касательной к обеим основным окружностям, то совокупность точек касания (линия ab) совпадает с общей для обеих основных окружностей касательной $n - n$.

Эта линия называется *теоретической линией зацепления*, а линия ab длиной g_a является её активной частью, где располагаются все точки контакта зубьев. Угол α_w , измеряемый между нормалью $n - n$ к профилям в полюсе зацепления p и общей касательной к обеим начальным окружностям, называется *углом зацепления*. Таким образом:

$$\begin{aligned} r_{b1} &= r_{w1} \cos \alpha_w; \\ r_{b2} &= r_{w2} \cos \alpha_w. \end{aligned} \quad (8.2)$$

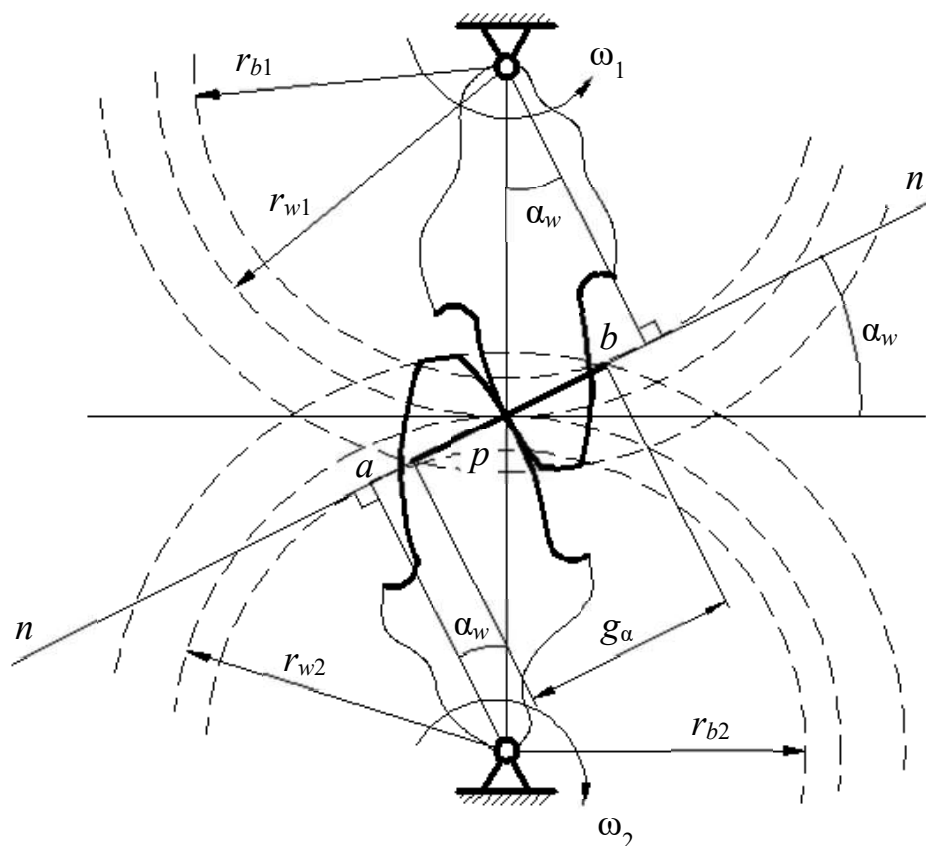


Рис. 71. Геометрия эвольвентного зацепления

8.7. Качественные показатели зацепления

Одним из качественных показателей зубчатой передачи является коэффициент перекрытия ε_α , равный

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_b}, \quad (8.3)$$

где p_b – шаг по основной окружности (расстояние между сходственными точками двух соседних зубьев, замеренное по дуге основной окружности).

Коэффициент ε_α показывает, сколько пар зубьев в среднем одновременно находится в зацеплении. Для прямозубой передачи обычно $1 < \varepsilon_\alpha < 2$. Чем больше ε_α , тем более плавно и бесшумно работает передача.

Другим качественным показателем является коэффициент скольжения, который учитывает влияние геометрии передачи и её кинематики на

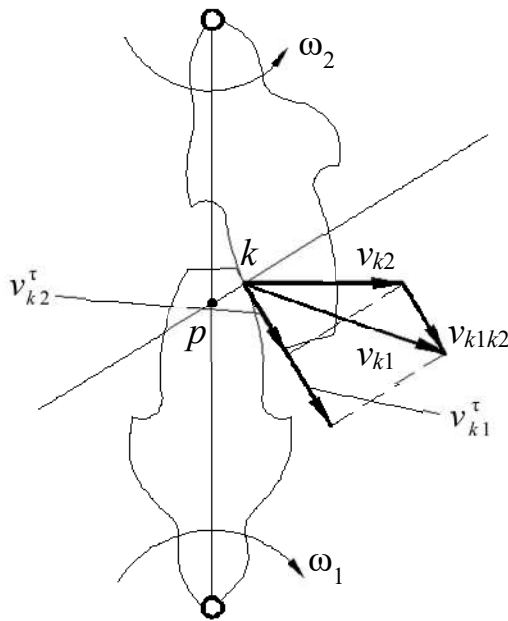


Рис. 72. План скоростей в зубчатом зацеплении

скольжение и износ профилей, скользящих друг по другу (рис. 72), что видно из плана скоростей.

На плане:

v_{k1} — скорость точки k первого профиля;

v_{k1}^{τ} — проекция этой скорости на касательную к контактирующим профилям;

v_{k2}, v_{k2}^{τ} — то же для колеса 2.

Скорость скольжения колес 1 и 2 относительно друг друга равна:

$$v_{c.k} = v_{k1k2} = v_{k1}^{\tau} - v_{k2}^{\tau}. \quad (8.4)$$

Коэффициенты скольжения колёс 1 и 2 равны:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v_{c.k}}{v_{k1}^{\tau}}; \\ \lambda_2 &= \frac{v_{c.k}}{v_{k2}^{\tau}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Эти коэффициенты равны нулю в полюсе (точка p) и увеличиваются с удалением от него по линии зацепления.

Таким образом, чем длиннее линия зацепления, (и чем больше коэффициент перекрытия ε_a), тем больше скольжение и износ профилей зубьев.

8.8. Основные параметры зубчатых колёс

Основными параметрами зубчатого колеса являются (рис. 73):

z — число зубьев;

r_a (d_a) — радиус (диаметр) окружности выступов;

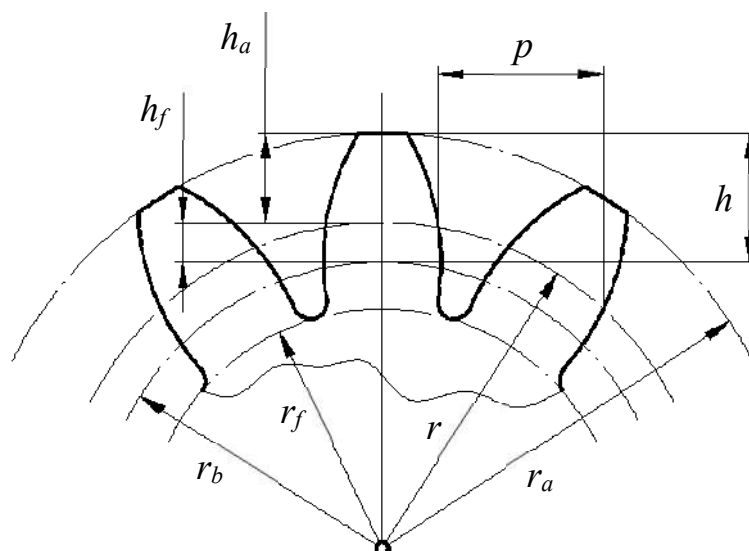


Рис. 73. Основные геометрические параметры зубчатого колеса

$r_f (d_f)$ – радиус (диаметр) окружности впадин;

$r_b (d_b)$ – радиус (диаметр) основной окружности;

$r (d)$ – радиус (диаметр) делительной окружности, т. е. окружности, которая является начальной в станочном зацеплении колеса с режущим инструментом;

p – шаг зубьев по делительной окружности;

m – модуль зацепления, определяемый следующим образом:

$$d = zm = \frac{zp}{\pi},$$

$$m = \frac{p}{\pi};$$
(8.6)

h – высота зуба, равная

$$h = h_a + h_f,$$
(8.7)

где $h_a = m$ – высота головки зуба;

$h_f = 1,25 m$ – высота ножки зуба;

Величина m стандартизирована и выражена в миллиметрах, а делительная окружность является окружностью стандартного модуля.

Обычно используется угол зацепления $\alpha = 20^\circ$.

8.9. Методы нарезания зубчатых колёс

Существует два принципиально различных метода нарезания: метод копирования и метод обкатки.

В методе копирования впадина зубчатого колеса фрезеруется на универсальном фрезерном станке фасонными дисковыми или пальцевыми фрезами, профиль которых соответствует профилю впадины (рис. 74). Затем заготовку поворачивают на угол $360^\circ / z$ и выполняют следующую впадину. При этом используется делительная головка, а также имеются наборы фрез для нарезания колёс с различным модулем и различным числом зубьев. Метод имеет низкую производительность и применяется в мелкосерийном и

единичном производстве.

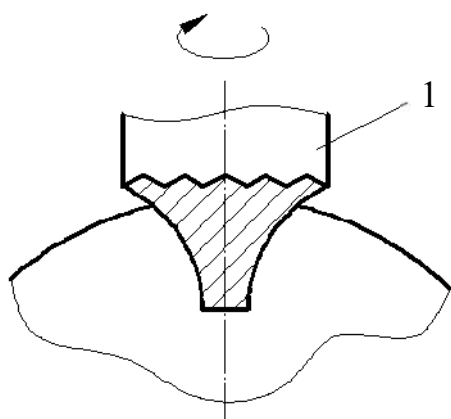


Рис. 74. Метод копирования:
1 – пальцевая модульная фреза

Метод обкатки (другое название – метод огибания) может производиться с помощью инструментальной рейки (гребёнки) на зубострогальном станке; долбяком на зубодолбёжном станке или червячной фрезой на зубофрезерном станке.

Этот метод высокопроизводителен и применяется в массовом и крупносерийном производстве. Одним и тем же инструментом

можно нарезать колёса с различным числом зубьев. Нарезание с помощью инструментальной рейки имитирует реечное зацепление (рис. 75, а), где профиль зуба образуется как огибающая последовательных положений профиля инструмента, угол исходного контура которого $\alpha=20^\circ$ (рис. 75, б). Зацепление между режущим инструментом и нарезаемым колесом называется *станочным*. В станочном зацеплении начальная окружность всегда совпадает с делительной.

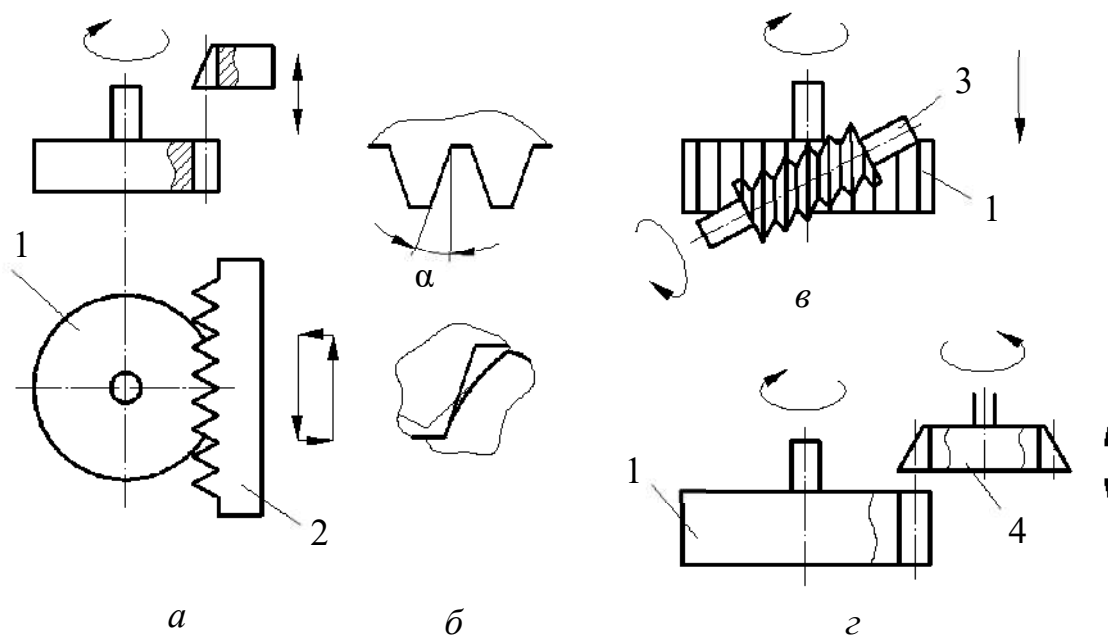


Рис. 75. Метод обкатки:

- а) – нарезание с помощью инструментальной рейки; б) – формирование профиля зуба;
 в) – нарезание с помощью червячной фрезы; г) – нарезание долбяком;
 1 – заготовка; 2 – рейка; 3 – фреза; 4 – долбяк

Самым производительным из рассмотренных методов является зубофрезерование с помощью червячных фрез, которые находятся в зацеплении с заготовкой по аналогии с червячной передачей (рис. 75, в).

При нарезании долбяком осуществляется его возвратно поступательное движение при одновременном вращении. Фактически при этом осуществляется зацепление заготовки с инструментальным зубчатым колесом – долбяком (рис. 75, г). Этот метод чаще всего используется при нарезании внутренних зубчатых венцов.

Все рассмотренные методы используются для нарезания цилиндрических колёс как с прямыми, так и с косыми зубьями.

8.10. Корригирование зубчатых колёс

При нарезании колёс режущий инструмент можно располагать ближе к заготовке или дальше от неё. Положение инструмента определяется расстоянием между делительной окружностью колеса и так называемой модульной прямой рейки, проходящей через середину высоты зуба режущего инструмента (рис. 76).

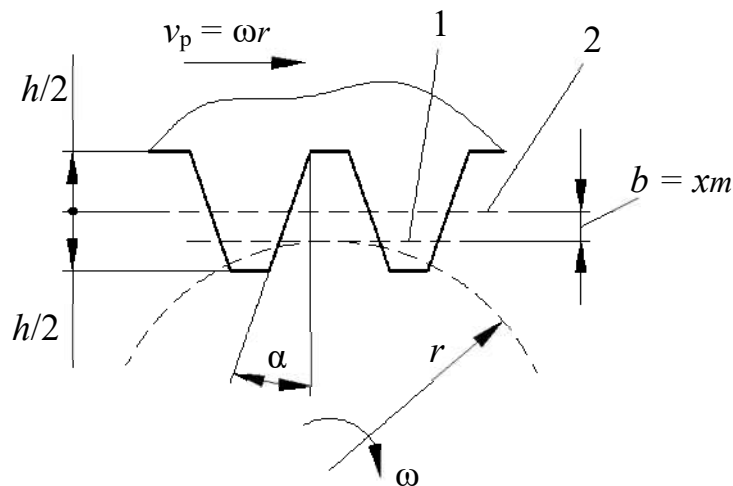


Рис. 76. Корригирование зубчатых колёс:
1 – модульная прямая рейка; 2 – начальная прямая рейка;
 v_p – скорость рейки

В зависимости от положения рейки по делительной окружности может перекатываться без скольжения либо модульная прямая рейки, либо начальная прямая, отстоящая от модульной прямой на величину смещения b , которое называется *сдвигом* или *коррекцией*, а коэффициент x , равный

$$x = \frac{b}{m}, \quad (8.8)$$

называется *коэффициентом смещения инструмента*. Если инструмент смещён от нарезаемого колеса, то x считается положительным (положительная коррекция), а если к центру колеса, то x считается отрицательным (отрицательная коррекция). При $x = 0$ нарезаемое колесо называется

нормальным (нулевым). Толщина зуба и ширина впадины такого колеса по делительной окружности равны между собой.

При положительной коррекции увеличивается прочность зуба, но уменьшается длина линии зацепления, а следовательно, и коэффициент перекрытия ε_α . При отрицательной коррекции – обратный эффект, т. е. увеличивается плавность и бесшумность работы передачи, но прочность зуба уменьшается.

Зацепление двух зубчатых колёс характеризуется суммарным коэффициентом коррекции $x_\Sigma = x_1 + x_2$, причём возможны три случая:

1) $x_\Sigma = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$, когда в зацеплении находятся два нулевых зубчатых колеса (нулевое зацепление);

2) $x_\Sigma = 0$ при $x_1 = -x_2$, когда в зацеплении находятся два корригированных зубчатых колеса, коэффициенты коррекции которых равны по величине и противоположны по знаку (равносмещённое зацепление с высотной коррекцией);

3) $x_\Sigma \neq 0$, когда в зацеплении находятся два корригированных колеса, имеющих:

а) $x_\Sigma > 0$ – положительное неравносмещённое зацепление с угловой коррекцией;

б) $x_\Sigma < 0$ – отрицательное неравносмещённое зацепление с угловой коррекцией.

В первых двух случаях ($x_\Sigma = 0$) делительные окружности совпадают с начальными, угол зацепления α_w равен углу исходного контура рейки α и межосевое расстояние равно

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}, \quad (8.9)$$

в отличие от неравносмещённого зацепления, где делительные и начальные окружности не совпадают, $\alpha_w \neq \alpha$, а межосевое расстояние и диаметры начальных окружностей равны

$$\begin{aligned}
 a_w &= \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}; \\
 d_{w1} &= mz_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}; \\
 d_{w2} &= mz_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.
 \end{aligned}
 \tag{8.10}$$

8.11. Наименьшее число зубьев зубчатых колёс. Подрезание и заострение зубьев

При нарезании нулевых колёс с малым числом зубьев может возникнуть явление врезания головок зубьев режущего инструмента в ножки зубьев колеса. Это явление называется *подрезанием зуба*. При этом уменьшается его прочность и увеличивается износ рабочей части зуба (рис. 77).

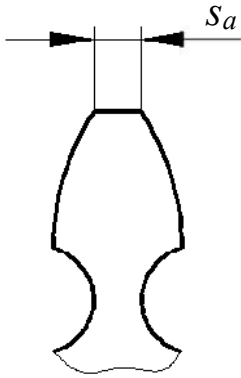


Рис. 77. Подрезание зуба

Согласно свойствам эвольвентного зацепления точки контакта зубьев эвольвентного профиля совпадают с линией np , начиная с точки n (рис. 78), т. е. высота прямолинейной части головки зуба режущего инструмента (рейки), равная m , должна быть меньше отрезка pf , иначе часть головки зуба рейки будет контактировать с заготовкой (нарезать её) не по эвольвенте.

Так как $m \leq pf$, а размер pf равен

$$pf = r \sin^2 \alpha = \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha, \tag{8.11}$$

то

$$z \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha}. \tag{8.12}$$

Подстановка в выражение (8.12) стандартного $\alpha = 20^\circ$ даёт условие отсутствия подреза в виде $z \geq z_{\min} = 17$.

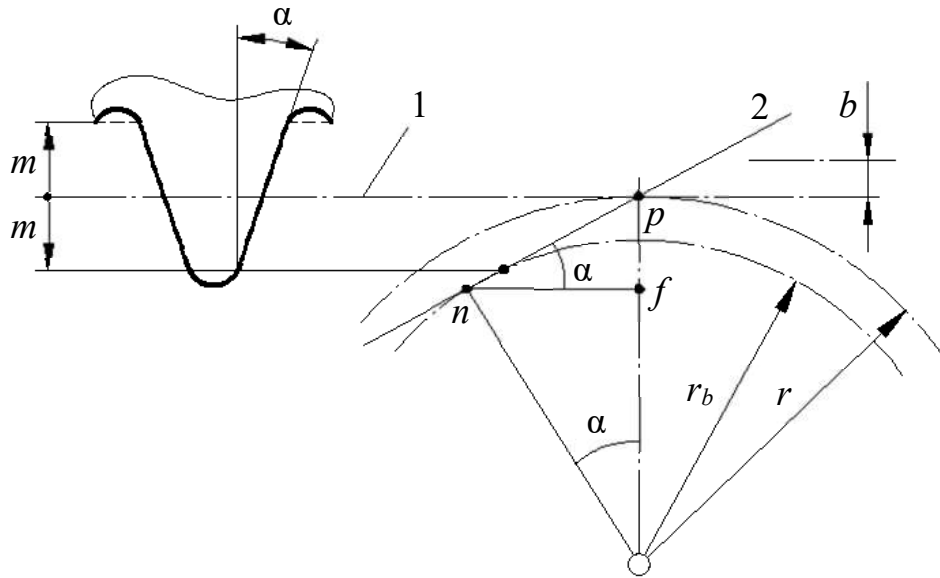


Рис. 78. Условие контакта рейки с заготовкой:
1 – модульная прямая; 2 – линия зацепления

Для исключения подреза при $z < z_{\min}$ необходимо сместить инструмент от центра заготовки (положительная коррекция) так, чтобы

$$m - b \leq \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha, \quad (8.12)$$

откуда

$$b = mx \geq m - \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha. \quad (8.13)$$

С учётом того, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{z_{\min}}, \quad (8.14)$$

из формулы (8.13) после преобразований получим нижний предел коэффициента коррекции по условию отсутствия подреза.

$$x_{\min} = \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}. \quad (8.15)$$

Если увеличивать коэффициент x , то толщина зуба s_a у вершины (рис. 77) будет уменьшаться и при некотором $x_{\max}$ наступит заострение зуба ($s_a = 0$). Опасность заострения наиболее велика у колёс с малым числом зубьев ($z < 15$).

Для предотвращения разрушения заострённого зуба коэффициент смещения x назначают с расчётом, чтобы $s_a \geq 0,2m$.

8.12. Выбор расчётных коэффициентов смещения для передач внешнего зацепления

При назначении коэффициентов смещения x_1 и x_2 для любой передачи должны выполняться три условия:

- 1) отсутствие подрезания;
- 2) отсутствие заострения;
- 3) непрерывность зацепления.

Первое условие выполняется при $x_i \geq x_{\min i}$ ($x_{\min i}$ определяются из условия отсутствия подреза). Второе и третье условия выполняются при ограничении верхних пределов x_i величинами $x_{\max i}$ с учётом возможности заострения зубьев и уменьшения коэффициента перекрытия ε_α до величины $\varepsilon_\alpha < 1$. Для этого при выборе x_i необходимо чтобы $x_{\min i} \leq x_i \leq x_{\max i}$, где $x_{\max i}$ для каждого из колёс берётся наименьшим из значений, учитывающих заострение зуба и снижения ε_α до величины $\varepsilon_\alpha < 1$.

Внутри указанных диапазонов x назначают так, чтобы по возможности улучшить качественные показатели передачи (прочность, износостойкость, плавность хода).

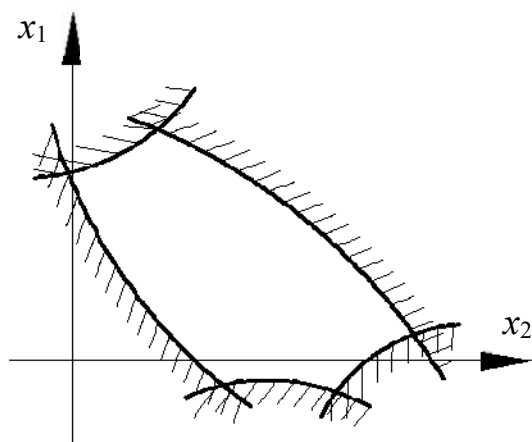


Рис. 79. Блокирующий контур

Для передачи можно построить область допустимых значений коэффициентов смещения в координатах x_1 и x_2 , которая называется *блокирующим контуром*. Допустимые значения x_1 и x_2 расположены внутри контура (рис. 79).

Для каждой передачи можно построить свой контур. Такие

блокирующие контуры для различных передач имеются в справочной литературе.

8.13. Цилиндрические колёса с косыми зубьями и их особенности

Образование косозубого колеса можно представить, если взять цилиндрическое прямозубое колесо и сообщить ему крутильную деформацию. При этом угол скручивания, образованный осью колеса и винтовой линией, является углом наклона винтовой линии β .

Цилиндрические колёса с косыми зубьями применяются при передаче вращения между параллельными и перекрещивающимися осями. В передаче с параллельными осями углы β обоих колёс равны по величине и противоположны по направлению при внешнем зацеплении и одинаковы по направлению при внутреннем зацеплении. Угол β (рис. 80, *a*) называется *углом наклона зубьев по делительному цилиндру радиуса r* . С другими соосными цилиндрами, начальным (r_w) и основным (r_b) винтовая поверхность зуба образует, соответственно, углы β_w β_b . Шаг винтовой линии равен

$$p = 2\pi r \operatorname{ctg} \beta = 2\pi r_w \operatorname{ctg} \beta_w = 2\pi r_b \operatorname{ctg} \beta_b. \quad (8.16)$$

В косозубом колесе различают торцовый m_t , нормальный m_n и осевой m_x модули, причём стандартное значение имеет нормальный модуль m_n , соответствующий размерам зуба, замеренным по нормали $n - n$ к его оси (рис. 80, *б*), что объясняется установкой режущего инструмента. Аналогично различают торцовый p_t , нормальный p_n и осевой p_x шаг. Значения модуля и шага определяются формулами:

$$\begin{aligned} m_t &= \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{m_x}{\operatorname{ctg} \beta}; \\ p_t &= \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{p_x}{\operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

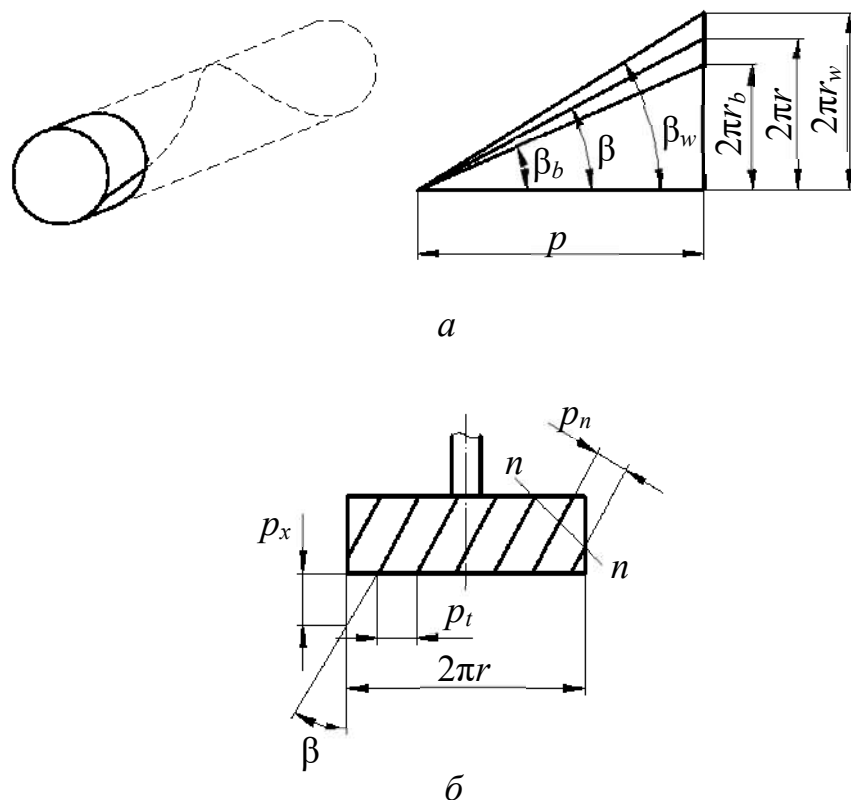


Рис. 80. Особенности цилиндрических колес с косыми зубьями:
 а – углы наклона зубьев; б – шаги косых зубьев

Большим достоинством зацеплений с косыми зубьями является возможность получения малогабаритных передач. Так, если для прямозубого колеса $z_{\min} = 17$, то для косозубого

$$z_{\min} = 17 \cos^3 \beta. \quad (8.18)$$

В экспериментальных конструкциях $z_{\min}$ доводят до трёх и менее зубьев. Кроме того, увеличивается коэффициент перекрытия, доходя до 10 и выше, что также повышает нагрузочную способность и позволяет уменьшить габариты передачи. *Недостатком* косозубой передачи является возникновение дополнительных осевых усилий, нагружающих подшипники.

Этот недостаток устраняется в шевронных передачах.

8.14. Конические зубчатые передачи

Конические передачи являются передачами с пересекающимися осями вращения звеньев. Применяются, главным образом, передачи с углом между осями $\delta = 90^\circ$ (ортогональные). Основные параметры аналогичны параметрам цилиндрических колёс (рис. 81), причём делительной окружностью внешнего окружного модуля m_e является внешняя делительная окружность конического колеса диаметром d_e .

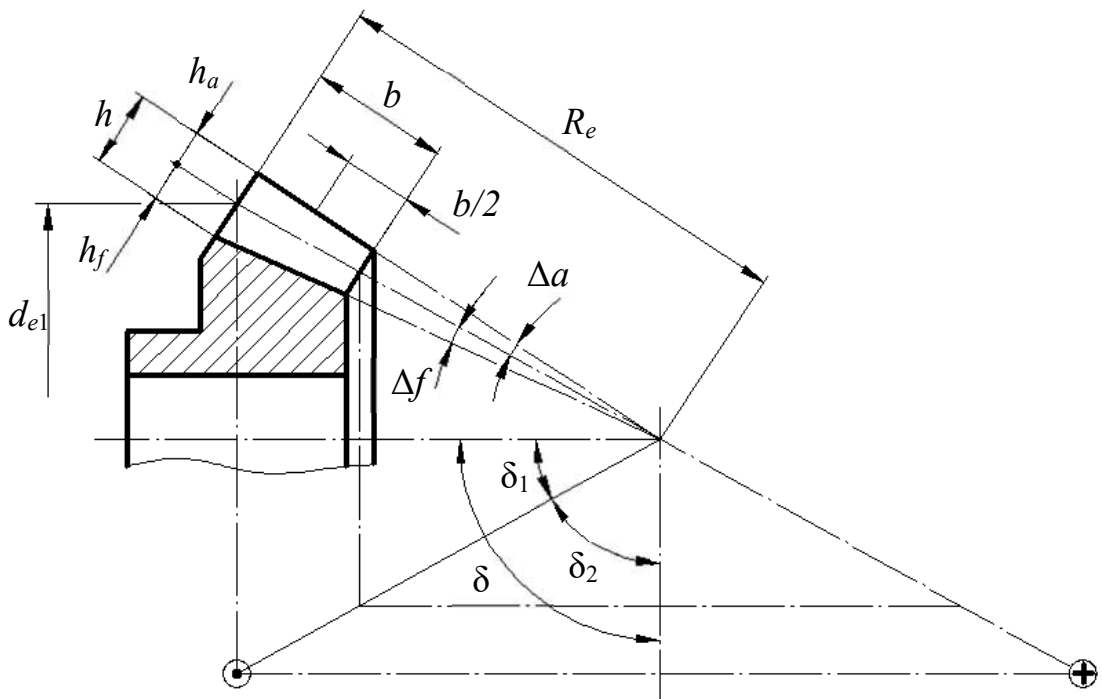


Рис. 81. Основные геометрические параметры конического зубчатого колеса

Через модуль выражаются все остальные размеры. Для расчёта зубьев на изгиб используется величина среднего модуля m_m , замеренного в середине ширины b зубчатого венца. Передаточное отношение равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (8.19)$$

где δ_1, δ_2 – углы делительных конусов колёс 1 и 2 соответственно.

В конических передачах $i(u)$ не имеет знака, а для определения направления вращения изображают векторы абсолютных скоростей точек на начальных конусах в виде кружка с точкой (на зрителя) и крестиком (от зрителя), как показано на рис. 81.

Важным параметром является внешнее конусное расстояние R_e , равное

$$R_e = \frac{d_{e1}}{2\sin\delta_1}. \quad (8.20)$$

8.15. Червячные передачи

Червячные передачи являются передачами со скрещивающимися осями.

Угол между осями в плане обычно равен 90° . Принцип их действия аналогичен передаче винт-гайка.

Червяки подразделяются по числу заходов (винтовых линий) на одно- и многозаходные. Число заходов z_1 есть число винтовых линий (витков), по которым расположены зубья. Расстояние между двумя соседними витками называется *шагом* p , а размер h , равный

$$h = z_1 p, \quad (8.21)$$

называется *ходом* винтовой линии.

Угол подъема винтовой линии γ определяется по формуле

$$\gamma = \arctg \frac{h}{\pi d_1}, \quad (8.22)$$

где d_1 – диаметр делительной окружности червяка (рис. 82, а).

За основной параметр червячного зацепления принимается осевой модуль червяка m_s (принято обозначать его m), равный торцевому модулю червячного колеса. Значения m стандартизованы. Кроме того, стандартным параметром является относительный диаметр червяка q

$$q = \frac{m}{d_1}. \quad (8.23)$$

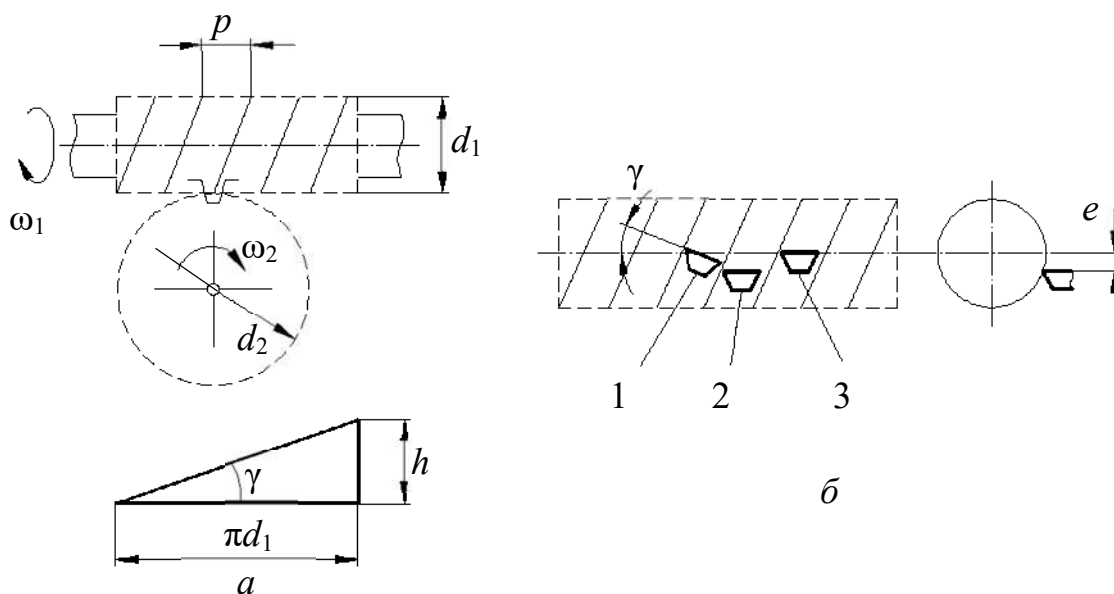


Рис. 82. Геометрические параметры червяка

По форме боковой поверхности резьбы различают конволютный, эвольвентный и архимедов червяки, образуемые при расположении резца трапецевидной формы, как указано на рис. 82, б, с режущей кромкой под углом γ наклона винтовой линии (положение 1) или при $\gamma = 0$ и смещении $e \neq 0$ (положение 2), а также при $e = 0$ (положение 3). Наименования червяков соответствуют наименованиям кривых, по которым очерчены зубья червяка в сечении, перпендикулярном его оси.

8.16. Кинематический анализ и классификация зубчатых механизмов

8.16.1. Механизмы с неподвижными осями

В практике машиностроения чаще возникает необходимость понижения, реже повышения скорости при передаче движения от входного звена к выходному.

Механизмы для передачи вращения, в которых происходит понижение

скорости вращения, называются *редукторами*, а механизмы, повышающие эту скорость, называются *мультипликаторами*.

По кинематическому признаку различают:

- механизмы с неподвижными геометрическими осями всех колёс (рядовые);
- механизмы с подвижными геометрическими осями некоторых колёс (эпициклические), которые обладают одной степенью свободы (планетарные) или двумя и более (дифференциальные).

Кроме того, различают одно- и многоступенчатые механизмы. Многоступенчатые состоят из одной или двух и более пар колёс, соединённых последовательно (рис. 83, *а*), параллельно (рис. 83, *б*), или смешанно.

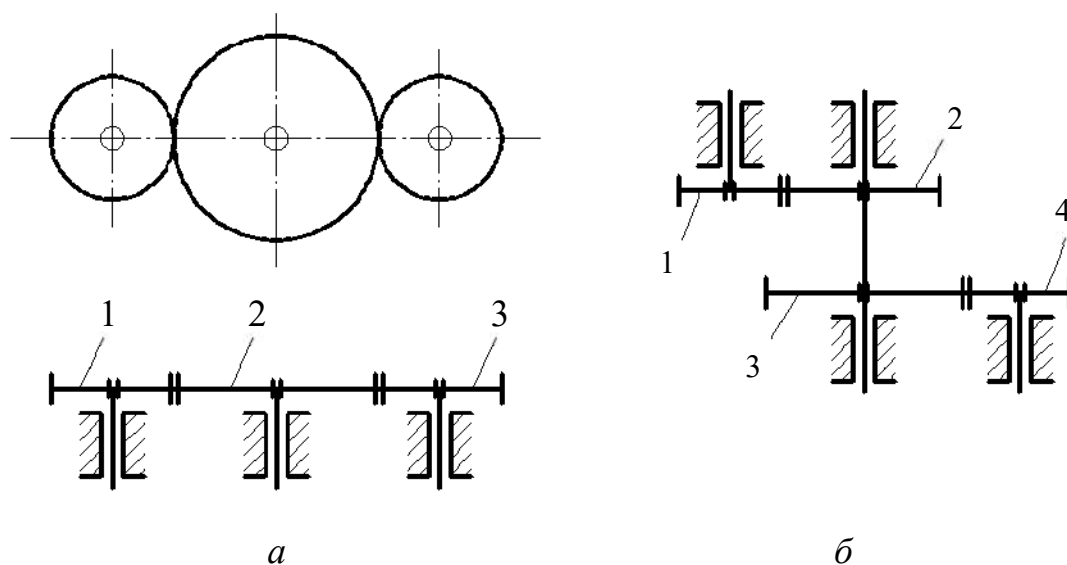


Рис. 83. Многоступенчатые механизмы:
а – последовательное соединение; *б* – параллельное соединение

При проектировании механизмов для передачи вращения с заданным значением передаточных отношений и крутящего момента стремятся обеспечить высокий коэффициент полезного действия (кпд), минимальные габариты и вес.

Передаточное отношение одноступенчатого зубчатого редуктора (при отсутствии скольжения) равно

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (8.24)$$

Для зубчатых понижающих передач принято использовать понятие *передаточное число u* .

Передаточное отношение считается положительным, если оба колеса зубчатой пары вращаются в одну сторону, и отрицательным, если в разные стороны. Обычно положительное передаточное отношение имеет зубчатая передача с внутренним зацеплением (рис. 84, б), а отрицательное – с внешним зацеплением (рис. 84, а).

В случае многоступенчатого механизма с параллельным соединением колёс (рис. 81, б) получим

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_{12} \cdot u_{34}. \quad (8.25)$$

При последовательном соединении колёс (рис. 83, а)

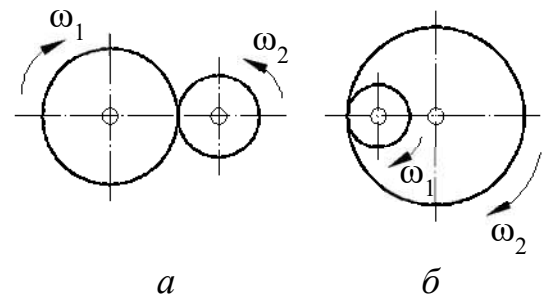


Рис. 84. Направление угловых скоростей:
а – внешнее зацепление; б – внутреннее зацепление

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3}. \quad (8.26)$$

Таким образом, в общем виде передаточное отношение многоступенчатого механизма равно произведению частных передаточных отношений отдельных ступеней:

$$i_{1k} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{(k-1)k}, \quad (8.27)$$

причём промежуточные колёса в механизме с последовательным соединением не влияют на величину передаточного отношения, а служат лишь для изменения направления вращения. Эти промежуточные колёса называются *паразитными*.

Для кинематического анализа механизмов можно использовать графоаналитический метод, наглядно иллюстрирующий характер

распределения линейных скоростей звеньев механизма. Метод основан на использовании линейной зависимости скорости v от радиуса, т. е. $v = \omega r$.

При построении картины, иллюстрирующей характер распределения линейных скоростей, сначала откладываются в выбранном масштабе μ_v известные вектора линейных скоростей точек, закон движения которых задан (рис. 85).

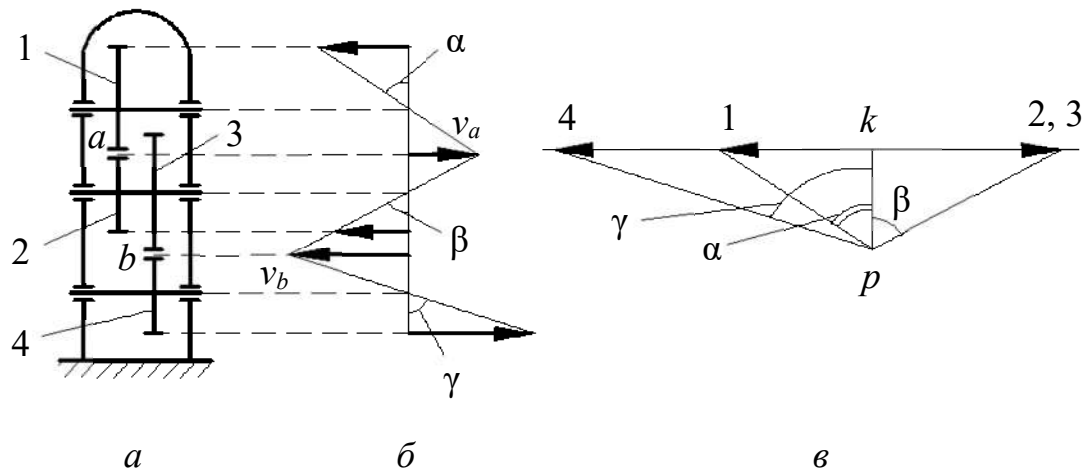


Рис. 85. Планы скоростей:
 а – схема редуктора (μ_l); б – план линейных скоростей (μ_v);
 в – план угловых скоростей (μ_ω), частот вращения (μ_n)

Затем, проводя отрезки через концы векторов известных скоростей, получим план линейных скоростей.

Для определения угловых скоростей (частот вращения) всех звеньев удобно использовать план угловых скоростей (частот вращения), где отрезки $k_1, k_2, \dots$ соответствуют угловым скоростям (частотам вращения) колёс 1, 2, ... При этом схема редуктора вычерчивается в масштабе μ_l , а поскольку отрезки $k_1, k_2, \dots$ пропорциональны $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \dots$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{r} = \omega. \quad (8.28)$$

Выбор полюсного расстояния pk может быть произвольным.

8.16.2. Эпициклические механизмы

Простейший эпициклический механизм (редуктор Джемса) состоит из центральных колёс 1 и 3 (рис. 86), сателлитного колеса (сателлита) 2 и водила H . Если одно из центральных колёс, например, колесо 3 остановить с помощью тормоза T , то эпициклический механизм превращается в планетарный, где при вращении колеса 1 сателлит 2 обегает неподвижное колесо 3, вращая водило H с угловой скоростью ω_H . Степень подвижности такого редуктора равна единице.

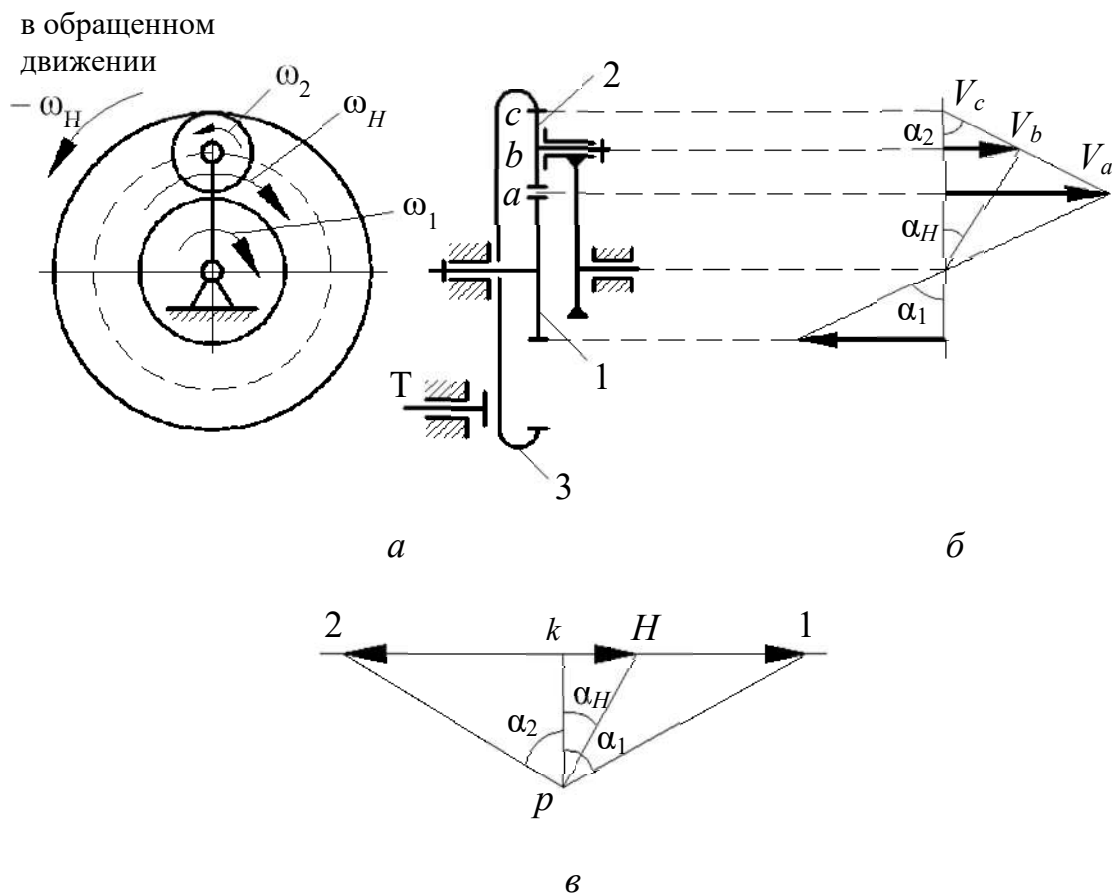


Рис. 86. Эпициклический механизм (редуктор Джемса):
 а – схема механизма; б – картина скоростей; в – план угловых скоростей
 (частот вращения)

Для планетарного механизма можно построить картину скоростей и план угловых скоростей (частот вращения), используя рассмотренные выше

приёмы. План угловых скоростей можно использовать для приближённого определения передаточного числа планетарного механизма, которое равно

$$i_{1H} = \frac{k_1}{k_H}. \quad (8.29)$$

Аналитически передаточное число определяется с использованием метода обращения движения, когда механизму в целом сообщается вращение с угловой скоростью, обратной скорости водила ($-\omega_H$). При этом относительное движение звеньев не изменится, а водило H в обращённом движении будет оставаться неподвижным, и планетарный редуктор превращается в рядовой (с неподвижными осями). Если обозначить угловые скорости звеньев в обращённом движении с индексом в круглых скобках, указывающим неподвижное звено, то

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \quad (8.30)$$

а поскольку в планетарном механизме $\omega_3 = 0$, то выражение (8.30) принимает вид

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = -i_{1H} + 1. \quad (8.31)$$

С другой стороны, через соотношение чисел зубьев,

$$i_{13}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_1}, \quad (8.32)$$

поэтому

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^{(H)} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (8.33)$$

Если в эпициклическом механизме (рис. 86) оба центральных колеса совершают вращение, то степень подвижности такого механизма будет равна двум, и он превращается в дифференциальный. Такие механизмы служат:

- 1) для привода одного рабочего органа от двух или более двигателей (т. е. для сложения движения нескольких ведущих звеньев);

2) для разложения движения одного вала на два и более независимых движений ведомых валов.

Выражение (8.30) называется *формулой Виллиса*, оно позволяет получить любую неизвестную угловую скорость в эпициклическом механизме при заданных остальных скоростях.

Одним из распространённых типов дифференциальных механизмов являются так называемые замкнутые, в которых благодаря дополнительной зубчатой передаче связаны оба центральных колеса (рис. 87).

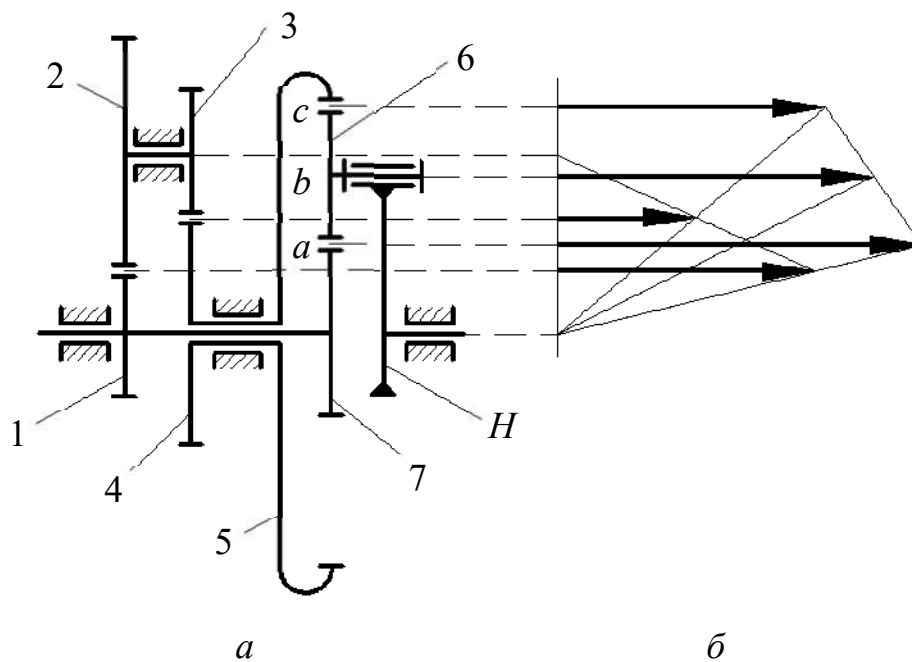


Рис. 87. Замкнутый дифференциальный механизм:
а – схема механизма; б – план скоростей

Это позволяет использовать один двигатель для привода механизма. Для определения передаточного отношения используем формулу Виллиса.

Так как

$$i_{75}^{(H)} = -\frac{z_5}{z_7}, \quad (8.34)$$

то

$$-\frac{z_5}{z_7} = \frac{i_{1H} - 1}{\frac{\omega_5}{\omega_H} - 1}, \quad (8.35)$$

где

$$\frac{\omega_5}{\omega_H} = \frac{\omega_5}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_H} = \left(-\frac{z_3}{z_4} \right) \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) i_{1H}. \quad (8.36)$$

После подстановки выражения (8.36) в (8.35) и преобразований получается:

$$\left(1 - i_{1H} \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2} \right) \frac{z_5}{z_7} = i_{1H} - 1. \quad (8.37)$$

Выразив из уравнения (8.37) передаточное отношение i_{1H} , получим:

$$i_{1H} = \frac{1 + \frac{z_5}{z_7}}{1 + \frac{z_1 z_2 z_5}{z_2 z_4 z_7}}. \quad (8.38)$$

8.16.3. Эпициклические механизмы с коническими колёсами

Примером дифференциального механизма с коническими колёсами является дифференциал автомобиля (рис. 88).

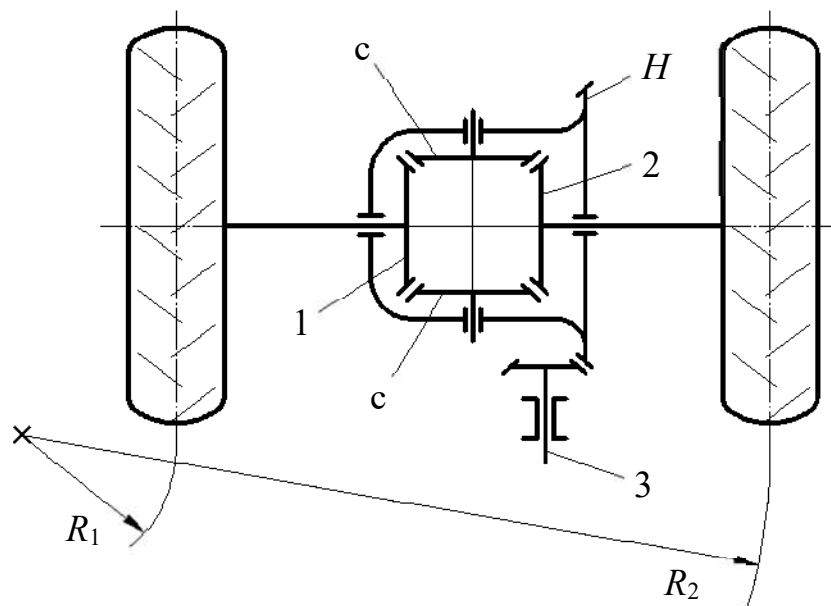


Рис. 88. Дифференциал автомобиля:

1, 2 – конические зубчатые колеса; с – сателлит; H – водило; 3 – карданный вал

Согласно формуле Виллиса

$$-\frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H}. \quad (8.39)$$

Числа зубьев $z_2 = z_1$, поэтому

$$\omega_H = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (8.40)$$

т.е. при постоянной скорости вращения карданного вала и скорости автомобиля в целом полуоси могут вращаться с различными или с одинаковыми скоростями. Например, на повороте скорости вращения полуосей пропорциональны радиусам поворота R_1 и R_2 , а при ровной прямой дороге скорость полуосей одинакова и равна $\omega_1 = \omega_2 = \omega_H$.

8.17. Некоторые вопросы синтеза зубчатых механизмов

8.17.1. Синтез эпициклических механизмов с цилиндрическими колёсами. Условия синтеза

Комплексные задачи синтеза зубчатых механизмов настолько сложны, что в полной постановке с учётом факторов кинематики и динамики они не решены до настоящего времени. Известны решения частных задач как геометрического, так и динамического синтеза зубчатых механизмов, причём эти решения часто носят характер рекомендаций по выбору параметров. Например, выбор передаточных отношений каждой ступени в многоступенчатом зубчатом механизме с общим передаточным отношением, определяемым по формуле (8. 27), рекомендуется осуществлять так, чтобы $i_{12} > i_{23} > \dots > i_{(k-1)k}$. Это связано с возрастанием нагрузки по мере уменьшения угловой скорости. Выполнение указанного условия позволяет более равномерно распределить нагрузку между зубчатыми парами.

При заданных передаточных отношениях и известном числе зубьев колёс задача синтеза сводится к определению их параметров. Сначала должен быть выбран материал колёс с учётом назначения передачи, условий работы и

других факторов, затем определяется модуль передачи, позволяющий обеспечить изгибную и контактную прочность зубьев, а затем – все геометрические параметры зубчатых колёс.

Известны решения частных задач подбора чисел зубьев сложных зубчатых механизмов с учётом различных условий, например, геометрического характера.

При проектировании планетарного редуктора с заданным передаточным отношением возникает задача определения чисел зубьев при соблюдении следующих условий:

- 1) кинематическое условие;
- 2) условие соосности;
- 3) условие соседства;
- 4) условие сборки;
- 5) условие правильного зацепления.

Физический и математический смысл этих условий разберём на конкретной схеме планетарного механизма с нулевыми эвольвентными цилиндрическими колёсами (рис. 89).

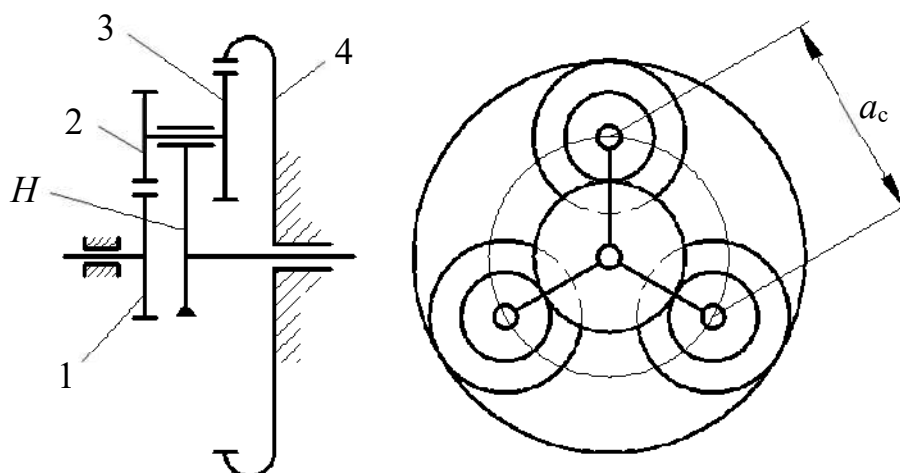


Рис. 89. Планетарный механизм с нулевыми эвольвентными цилиндрическими колёсами:

1 – солнечная шестерня; 2, 3 – сателлиты; 4 – неподвижное колесо; H – водило

Кинематическое условие обеспечивает заданное передаточное отношение и для данного механизма имеет следующий вид:

$$i_{14}^{(H)} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H}, \quad (8.41)$$

откуда при $\omega_4 = 0$ получим:

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (8.42)$$

Обычно допускается отклонение передаточного отношения в пределах 5% от заданного.

Условие соосности требует, чтобы оси колёс 1 и 4, в данном случае, совпадали для обеспечения зацепления сателлитов с центральными колёсами. Для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения радиусов делительных окружностей и (при равных модулях зубьев всех колёс) чисел зубьев:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r_4 - r_3; \\ z_1 + z_2 &= z_4 - z_3. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Условие соседства включает требование совместного размещения нескольких сателлитов по общей окружности так, чтобы они не задевали друг друга своими зубьями. Необходимость выполнения этого условия возникает при числе сателлитов $k > 2$ (увеличение числа сателлитов уменьшает нагрузку на зубья). В этом случае необходимо, чтобы выполнялось неравенство $a_c > 2r_a^c$, где r_a^c - радиус окружности вершин наибольшего сателлита). Так как

$$\begin{aligned} a_c &= 2(r_1 + r_2) \sin \frac{2\pi}{2k} = m(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k}; \\ z_a^c &= z_a + h_a m = m \left(\frac{z_c}{2} + 1 \right), \end{aligned} \quad (8.44)$$

то

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_c + 2}{z_1 + z_2}, \quad (8.45)$$

где z_c – число зубьев наибольшего сателлита (2 или 3).

Условие сборки учитывает необходимость одновременного зацепления

всех сателлитов с центральными колёсами, т.е. установив первый сателлит и повернув водило на угол $\frac{2\pi}{k}$ рад, необходимо в то же самое место установить следующий сателлит. Это может быть осуществлено, если зубья колёс второго блока сателлитов окажутся точно против впадин зубьев центральных колёс. Иначе сборку осуществить невозможно. Для формирования условия примем, что оба колеса всех k блоков сателлитов имеют одинаковую ориентацию зубьев друг относительно друга. После установки первого сателлита на ось водило должно быть повернуто на угол $\frac{2\pi}{k}$, при этом колесо 1 необходимо повернуть на угол

$$\varphi_1 = i_{1H} \frac{2\pi}{k}. \quad (8.46)$$

С другой стороны, угол φ_1 поворота колеса 1 должен быть кратным его угловому шагу зубьев $\frac{2\pi}{z_1}$, в противном случае при повороте на угол φ_1 положение зубьев колеса 1 изменится и второй сателлит вставить будет невозможно. Таким образом,

$$\varphi_1 = q \frac{2\pi}{z_1}, \quad (8.47)$$

где q – целое число).

Таким образом,

$$\begin{aligned} q \frac{2\pi}{z_1} &= i_{1H} \frac{2\pi}{k}; \\ q &= i_{1H} \frac{z_1}{k}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Условие правильного зацепления включает условие отсутствия подреза у колёс с внешним зубчатым венцом и условие отсутствия заедания (интерференции) во внутреннем зацеплении. Эти условия имеют вид:

$$z_i \geq z_{\min}, \quad (8.49)$$

где $z_{\min} = 17$ для колёс с внешним зацеплением; $z_{\min} = 85$ для колёс с внутренним зацеплением без смещения исходного контура; $z_{\min} = 20$ – то же со смещением исходного контура.

8.17.2. Методы синтеза эпициклических механизмов

Задача подбора чисел зубьев колёс для эпициклического механизма в общей постановке является оптимизационной ввиду множества возможных решений. Её можно считать типичной задачей дискретного нелинейного программирования, если за критерий оптимальности принять габариты или вес механизма, а ограничения на целочисленные параметры $z_1, z_2, \dots$ будут условия (8.43), (8.45), (8.48), (8.49).

Такую задачу можно решать различными методами, например, численными методами направленного перебора, когда варьируются $z_1, z_2, \dots$ с целью минимизации габаритов или веса при соблюдении ограничений. Такая задача может быть решена с помощью ЭВМ.

Применяются упрощённые методы, позволяющие найти одно из конструктивно допустимых решений. Один из таких методов – метод сомножителей.

Представим числа зубьев в виде нескольких сомножителей:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha \cdot A \cdot t; \\ z_2 &= \alpha \cdot B \cdot t; \\ z_3 &= \beta \cdot C \cdot t; \\ z_4 &= \beta \cdot D \cdot t. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Из условия (8.45)

$$\alpha(A + B) = \beta(D - C). \quad (8.51)$$

Это уравнение превращается в тождество при:

$$\begin{aligned} \alpha &= D - C; \\ \beta &= A + B. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}z_1 &= A \cdot t \cdot (D - C); \\z_2 &= B \cdot t \cdot (D - C); \\z_3 &= C \cdot t \cdot (A + B); \\z_4 &= D \cdot t \cdot (A + B).\end{aligned}\tag{8.53}$$

Подставив эти выражения в условие (8.43), получим:

$$\frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C} = i_{1H} - 1.\tag{8.54}$$

Таким образом, величину $(i_{1H} - 1)$ можно представить в виде нескольких сомножителей (A, B, C, D) . Далее определяются значения t , обеспечивающие выполнение условий сборки и правильного зацепления и выбирается одно из этих значений. Например, из условия сборки (8.48)

$$q = t \frac{A(D - C)}{k} i_{1H}\tag{8.55}$$

выбираются значения t , обеспечивающие целочисленность q . После этого можно определить числа зубьев.

9. ТРЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

9.1. Виды трения

Когда одно тело соприкасается с другим, то независимо от их физического состояния (твёрдое, жидкое, газообразное) возникает явление, называемое *трением*. В зависимости от характера относительного движения тел различают *трение скольжения* и *трение качения*. Сила, препятствующая относительному движению контактирующих тел, называется *силой трения*. Вектор этой силы лежит в плоскости, касательной к поверхности тел в зоне их контакта.

Сила трения скольжения уменьшается, если соприкасающиеся тела смазаны специальными смазочными материалами, причём, если материал – жидкость, полностью разделяющая контактирующие поверхности, то трение называется *жидкостным*. При совершенном отсутствии смазки имеет место *сухое трение*.

Если смазывающая жидкость не полностью разделяет трущиеся поверхности, то трение называется *полужидкостным* или *полусухим* в зависимости от того, какой из двух видов трения преобладает.

Применяемые смазки делятся на несколько видов: *твёрдые*, *жидкие*, *газовые*; при этом смазка может быть: *гидро-* или *газостатической*, когда она поступает под давлением в зазор между трущимися телами, а также *гидро-* или *газодинамической*, когда она разделяет трущиеся поверхности в результате давления, возникающего в слое жидкости при относительном движении тел.

Сцепление и трение широко используется в современной технике. Благодаря сцеплению движутся различные транспортные средства. Принцип действия фрикционной, ременной и других передач основан на использовании трения. Распространение получила также сварка трением.

Вместе с тем трение отрицательно сказывается там, где оно вызывает потери энергии.

9.2. Трение скольжения в поступательных парах

Сила трения на поверхности соприкосновения двух звеньев направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения и приближённо может быть определена по формуле Кулона

$$F_{\text{тр}} = F_n f, \quad (9.1)$$

где F_n – сила реакции, нормальная к поверхности контакта; f – коэффициент трения скольжения (величина, постоянная в определённом диапазоне скоростей и удельных давлений).

Коэффициент трения зависит от многих факторов (чистоты поверхности, наличия и качества смазки, материала тел и др.) и определяется экспериментально.

Сила трения покоя (сила сцепления), т.е. сила, которую надо преодолеть, чтобы тело привести в движение, обычно больше силы трения скольжения, поэтому различают коэффициент сцепления f_0 и коэффициент трения скольжения f .

Сила трения возникает как результат действия внешних сил F , поэтому она является реактивной силой, в результате действия которой суммарная реакция F_{Σ} отклоняется на угол ρ от нормали к трущимся поверхностям (рис. 90, а).

При этом

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{F_n} = \operatorname{tg} \rho. \quad (9.2)$$

Угол ρ называется *углом трения скольжения*.

Если построить конус с углом при вершине 2ρ (рис. 90, б), то получим *конус трения*. Движение возможно при $F_t \geq F_{\text{тр}}$, или при

$$\begin{aligned} F_n \operatorname{tg} \lambda &\geq F_n \operatorname{tg} \rho; \\ \lambda &\geq \rho, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где λ – угол между линиями действия сил F и F_n (рис. 90, а).

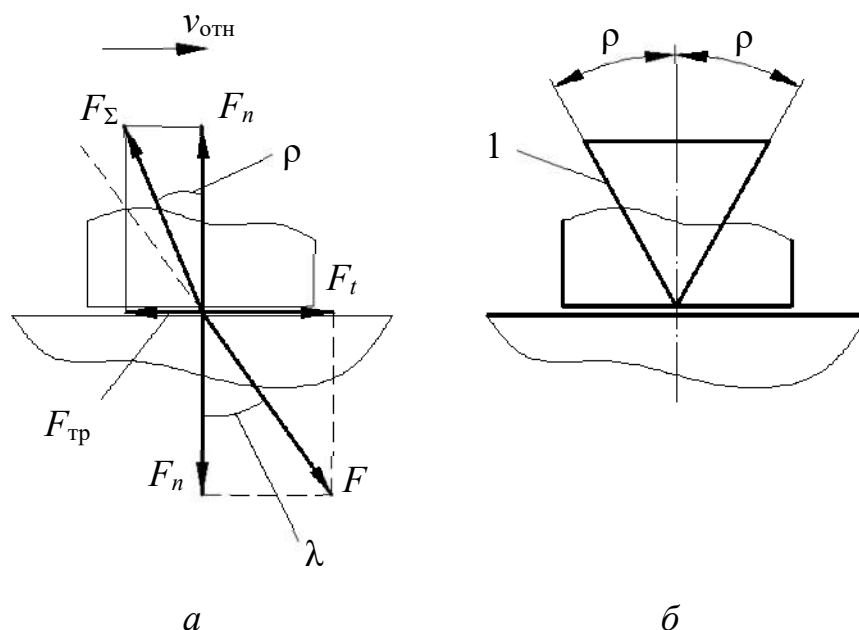


Рис. 90. Трение скольжения в поступательных парах:
 а – силы в точке контакта; б – конус трения (позиция 1)

Если $\lambda = \rho$, то движение происходит с постоянной скоростью: $v_{\text{отн}} = \text{const.}$

Мощность, затрачиваемая на трение скольжения, равна:

$$P_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} v_{\text{отн}} = F_n f (v_1 \pm v_2), \quad (9.4)$$

где v_1, v_2 – скорости тела и опорной поверхности соответственно; знак «+» – при противоположно направленном движении; знак «–» – при однонаправленном движении.

9.3. Трение скольжения во вращательных парах

Вращательные кинематические пары, образуемые цапфами валов и их опорами, широко распространены в машиностроении. *Цапфами* называются части валов и осей, посредством которых они опираются на подшипники. Трение цапф в подшипниках удобно оценивать величиной момента сил трения скольжения относительно оси вращения (рис. 91):

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} r = F_n f r = F_{\Sigma} r_{\text{тр}}, \quad (9.5)$$

где F_{Σ} – полная реакция; $r_{\text{тр}}$ – радиус круга трения, равный:

$$r_{\text{тр}} = r \sin \rho \approx r \operatorname{tg} \rho \approx fr. \quad (9.6)$$

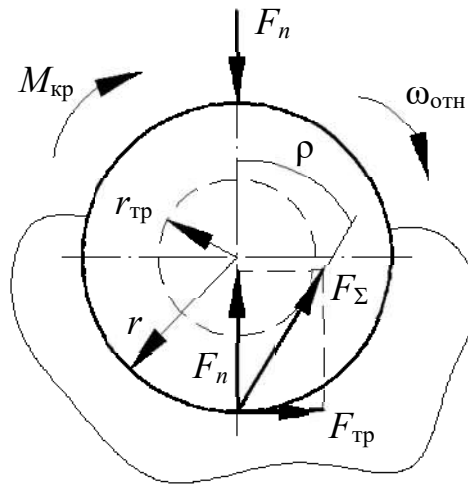


Рис. 91. Трение скольжения во вращательной паре

Мощность, затрачиваемая на трение, равна:

$$P_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \omega_{\text{отн}} = M_{\text{тр}} (\omega_1 \pm \omega_2), \quad (9.7)$$

где ω_1 , ω_2 – угловые скорости цапфы и опорной поверхности соответственно; знак плюс – при противоположно направленном вращении; знак минус – при однонаправленном вращении.

9.4. Трение качения

В случаях идеально твёрдых тел, одно из которых катится по поверхности другого, соприкосновение их происходит по линии или в точке и сопротивление качению отсутствует, так как линии действия сил F_n совпадают (рис. 92, а) и сумма моментов относительно точки А равна

$$\Sigma M_A = Fh. \quad (9.8)$$

В действительности соприкосновение происходит не по линии, а по поверхности вследствие деформаций (рис. 92, б) и сумма моментов ΣM_A равна:

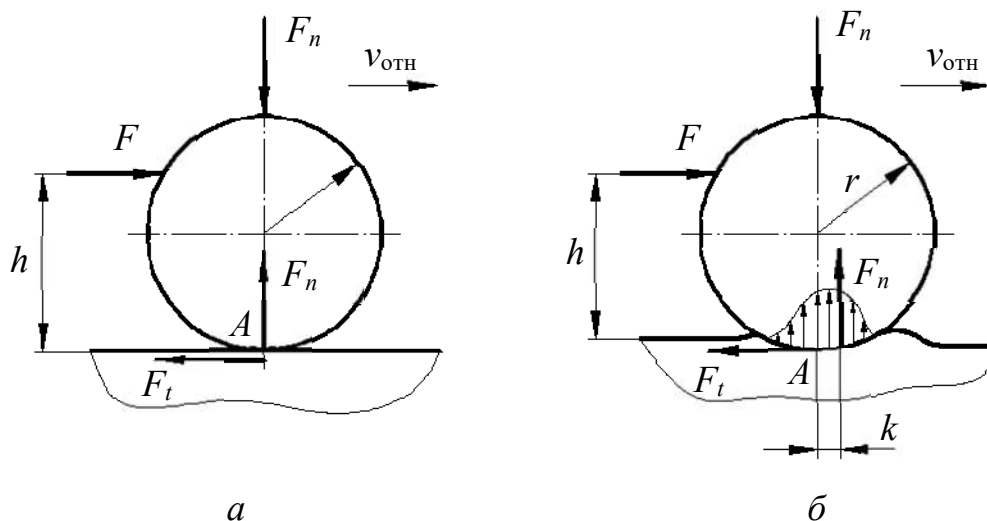


Рис. 92. Трение качения:
a – идеально твердые тела; *б* – реальные тела

$$\Sigma M_A = Fh - F_n k, \quad (9.9)$$

где h, k – плечи сил F и F_n .

При $v_{\text{отн}} = \text{const}$ и $F_t = F$ получим

$$\begin{aligned} Fh - F_n k &= 0; \\ k &= h \frac{F}{F_n}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Плечо k называется *коэффициентом трения качения* и измеряется в единицах длины. Часто используется величина

$$f_k = \frac{k}{r}, \quad (9.11)$$

называемая *приведённым коэффициентом трения качения*. При этом сила трения качения $F_{\text{тр}}^k$ по аналогии с силой трения скольжения может быть представлена в виде

$$F_{\text{тр}}^k = F_n f_k = F_n \frac{k}{r} = \frac{M_{\text{тр}}}{r}. \quad (9.12)$$

Мощность, затрачиваемая на трение, равна:

$$P_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}^k v_{\text{отн}}, \quad (9.13)$$

где $v_{\text{отн}}$ – скорость центра катка.

Для подшипников качения затраты мощности на преодоление трения равны

$$P_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \omega_{\text{отн}} = F_n f_k (\omega_1 \pm \omega_2) \frac{d}{2}, \quad (9.14)$$

где d – диаметр внутреннего кольца подшипника.

Принимается $f_k = 0,003$ для шарикоподшипников; $f_k = 0,005$ для роликоподшипников.

9.5. Особенности учёта сил трения при силовом расчёте рычажных механизмов

Для учёта сил трения в кинематических парах рычажных механизмов при определении $F_{\text{ур}}$ или $M_{\text{ур}}$ используется метод приведения сил трения, позволяющий определять уточнённые значения $F_{\text{ур}}^*$ ($M_{\text{ур}}^*$) без повторного силового расчёта с учётом трения по формуле:

$$M_{\text{ур}}^* = M_{\text{ур}} + M_{\text{пр}}^{\text{тр}}, \quad (9.15)$$

где $M_{\text{ур}}$ – уравнивающий момент, вычисленный без учёта трения; $M_{\text{пр}}^{\text{тр}}$ – момент трения, приведённый к вращающемуся с угловой скоростью $\omega_{\text{в}}$ входному звену, и равный

$$M_{\text{пр}}^{\text{тр}} = \frac{\sum P_i^{\text{тр}}}{\omega_{\text{в}}}, \quad (9.16)$$

где $\sum P_i^{\text{тр}}$ – суммарная мощность сил трения в кинематических парах.

Для определения реакций в кинематических парах с учётом трения обычно используется метод последовательных приближений, когда по найденным без учёта трения реакциям определяются силы и моменты трения в кинематических парах. Затем эти силы прикладываются как внешние и производится перерасчёт реакций в установленном порядке. Обычно достаточно одного перерасчёта (итерации).

9.6. Коэффициент полезного действия (КПД) машины

Энергия, потребляемая машиной, расходуется на преодоление полезных и вредных сопротивлений. Полезные –это сопротивления, для преодоления которых машина предназначена. Вредные –это сопротивления, преодоление которых не даёт производственного эффекта.

Механическим КПД (η) называется отношение полезной работы $A_{\text{пл}}$ или мощности $P_{\text{пл}}$ к затраченной $A_{\text{зт}}(P_{\text{зт}})$. Потери механической энергии в разного рода устройствах состоят главным образом из потерь на трение:

$$\eta = \frac{A_{\text{пл}}}{A_{\text{зт}}} = \frac{P_{\text{пл}}}{P_{\text{зт}}} = \frac{A_{\text{зт}} - A_{\text{тр}}}{A_{\text{зт}}} = \frac{P_{\text{зт}} - P_{\text{тр}}}{P_{\text{зт}}} = 1 - \xi_{\text{п}}, \quad (9.17)$$

где $\xi_{\text{п}} = \frac{A_{\text{тр}}}{A_{\text{зт}}} = \frac{P_{\text{тр}}}{P_{\text{зт}}}$ – коэффициент потерь.

При холостом ходе машины $\eta = 0$, но могут быть случаи когда $\eta < 0$, что означает невозможность совершать движение из-за явления, называемого *самоторможением*. Например, червячный редуктор не может совершать вращение со стороны червячного колеса.

Рассмотрим машину как совокупность n элементов, соединённых различным образом между собой.

1. Элементы соединены последовательно и КПД каждого из них η_i известен (рис. 93, а). Тогда

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \eta_1; \\ A_3 &= A_2 \eta_2 = A_1 \eta_1 \eta_2; \\ &\vdots \\ A_{n+1} &= A_1 \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \end{aligned} \quad (9.18)$$

т. е. общий КПД всей цепи равен

$$\eta_{\Sigma} = \frac{A_{n+1}}{A_1} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (9.19)$$

Поэтому следует стремиться к созданию простых конструкций с малым числом элементов.

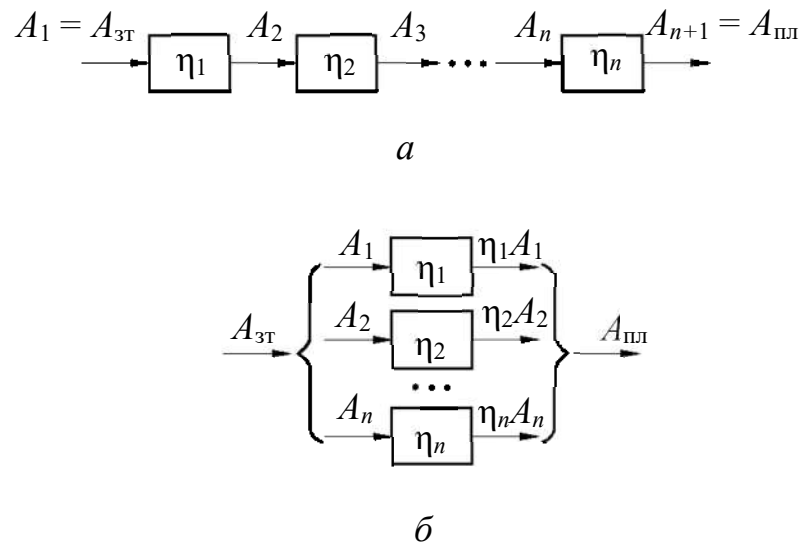


Рис. 93. Машина как совокупность элементов:
a – элементы соединены последовательно; *б* – элементы соединены параллельно

2. Элементы соединены параллельно (рис. 93, б). Тогда

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \dots + \eta_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i, \quad (9.20)$$

где $\alpha_i = \frac{A_i}{A_{\text{зт}}}$ – коэффициент распределения энергии.

При $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$ получим $\eta_{\Sigma} = \eta_i$, следовательно, низкое качество отдельных элементов меньше влияет на общий КПД машины, чем при последовательном соединении.

Сложные механизмы могут образовывать разветвлённую систему, состоящую из последовательного и параллельного соединённых более простых механизмов, где КПД определяется согласно указанным выше правилам.

Так как любой механизм представляет собой кинематическую цепь с последовательно и параллельно соединёнными в кинематических парах

звеньями, то общий КПД механизма вычисляется аналогично при известных КПД кинематических пар.

Например, необходимо определить η_Σ механизма с низшими парами, изображённого на рис. 94.

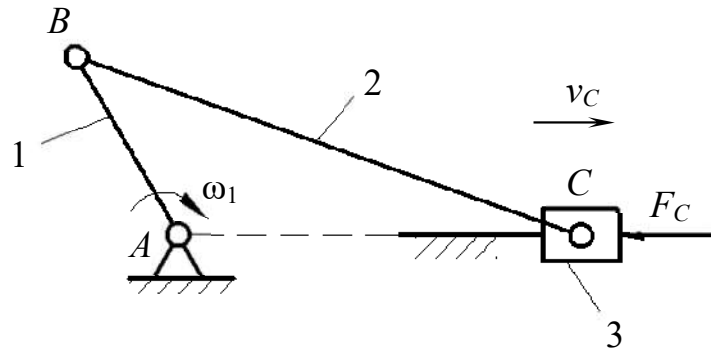


Рис. 94. Схема рычажного механизма

Мощность сил полезного сопротивления

$$P_{\text{пл}} = F_C v_C, \quad (9.21)$$

где v_C – скорость точки C ; F_C – сила полезного сопротивления.

Затраченная мощность

$$P_{\text{зт}} = P_{\text{пл}} + \sum_{i=1}^4 P_i^{\text{тр}}. \quad (9.22)$$

В формуле (9.22) мощность, затраченная на трение в кинематических парах, равна:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 P_i^{\text{тр}} &= P_A^{\text{тр}} + P_B^{\text{тр}} + P_C^{\text{тр}} + P_{30}^{\text{тр}}; \\ P_A^{\text{тр}} &= F_{01} f_A \frac{d_A}{2} \omega_1; \\ P_B^{\text{тр}} &= F_{12} f_B \frac{d_B}{2} (\omega_1 \pm \omega_2); \\ P_C^{\text{тр}} &= F_{23} f_C \frac{d_C}{2} \omega_2; \\ P_{30}^{\text{тр}} &= F_{30} f_{30} v_C, \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $P_A^{\text{тр}}, P_B^{\text{тр}}, P_C^{\text{тр}}$ – затраты мощности на трение в шарнирах; $P_{30}^{\text{тр}}$ – затраты мощности на трение в поступательной паре; f_A, f_B, f_C – коэффициенты трения в шарнирах; f_{30} – коэффициент трения в поступательной паре; d_A, d_B, d_C – диаметры шарниров; ω_1, ω_2 – угловые скорости звеньев.

Мгновенный КПД, который является функцией положения звена 1, равен

$$\eta_{\Sigma} = \frac{P_{\text{пл}}}{P_{\text{зт}}}. \quad (9.24)$$

10. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС В МЕХАНИЗМАХ

10.1. Действие сил на фундамент. Условия уравнивания

В общем случае в кинематических парах механизмов и машин возникают динамические усилия, переменные по величине и направлению. Через стойку они передаются на фундамент, вызывая дополнительные напряжения в отдельных звеньях, вибрацию и ухудшение условий работы. Чтобы этого избежать, необходимо рационально подобрать и расположить массы звеньев с условием полного или частичного гашения динамических усилий. Эта задача решается при уравнивании.

Основными динамическими составляющими при работе любого механизма являются силы инерции, которые, как правило, переменны по величине и направлению. Это характерно и для случаев, когда входное звено вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$ (см. рис. 94). Все силы и моменты сил инерции можно привести к главному вектору $\bar{F}_{и\Sigma}$ и моменту $\bar{M}_{и\Sigma}$ относительно выбранной точки (точки приведения):

$$\begin{aligned}\bar{F}_{и\Sigma} &= \Sigma \bar{F}_{иi}; \\ \bar{M}_{и\Sigma} &= \Sigma \bar{M}_{иi} + \Sigma \overline{F_{иi} h_{F_{иi}}},\end{aligned}\tag{10.1}$$

где $\bar{F}_{иi}, \bar{M}_{иi}$ – сила инерции и момент сил инерции i -го звена; $h_{F_{иi}}$ – плечо силы инерции относительно точки приведения.

Полностью уравновешенным считается механизм, в котором $F_{и\Sigma} = 0$ и $M_{и\Sigma} = 0$, т. е. сила давления стойки на фундамент остаётся постоянной при движении звеньев.

Из теоретической механики известно, что

$$\bar{F}_{и\Sigma} = -m_{\Sigma} \bar{a}_s,\tag{10.2}$$

где m_{Σ} – масса всех подвижных звеньев; a_s – ускорение центра масс системы.

Следовательно, для выполнения условия $F_{и\Sigma} = 0$ необходимо, чтобы ускорение $a_s = 0$.

Это равносильно требованию постоянства положения центра масс механизма относительно стойки. Такое уравнивание называется *статическим* или *уравниванием первого рода*. В этом случае используется метод заменяющих (сосредоточенных) масс, обладающих массой, центром масс и моментом инерции J_S заменяемого твёрдого тела (звена) с распределённой массой. Если поместить начало системы координат в центр масс системы, то условия эквивалентности заменяемой и заменяющих масс запишутся так:

$$\begin{aligned}\Sigma m_i &= m_\Sigma; \\ \Sigma m_i x_i &= 0; \\ \Sigma m_i y_i &= 0; \\ \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) &= J_S,\end{aligned}\tag{10.3}$$

где m_i – масса i -го звена; x_i, y_i – координаты центра тяжести i -го звена.

Таким образом, в общем случае плоского звена необходимы четыре заменяющих массы. В частных случаях число заменяющих масс может быть сведено к двум. Например, для звена AB (рис. 95) можно ограничиться частичной заменой его массы m двумя массами m_1 и m_2 , учитывая условия:

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 &= m; \\ m_1 l_1 - m_2 l_2 &= 0.\end{aligned}\tag{10.4}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}m_1 &= m \frac{l_2}{l}; \\ m_2 &= m \frac{l_1}{l}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Для полного уравнивания механизма необходимо выполнение обоих условий: $F_{и\Sigma} = 0$; $M_{и\Sigma} = 0$, причём выполнение условия $M_{и\Sigma} = 0$ решается

при моментном (динамическом) уравнивании, которое называется *уравниванием второго рода*.

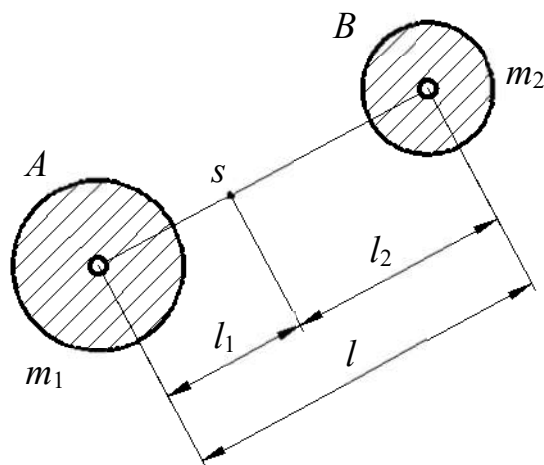


Рис. 95. Звено AB

10.2. Уравнивание с помощью противовесов на звеньях механизма

Рассмотрим последовательность статического уравнивания на примере четырёхшарнирного механизма (рис. 96, *а*). Заменяем массы звеньев 1, 2, 3 сосредоточенными массами в точках A , B , C , D , причём в силу неподвижности точек A и D , массы, сосредоточенные в этих точках, можно не учитывать.

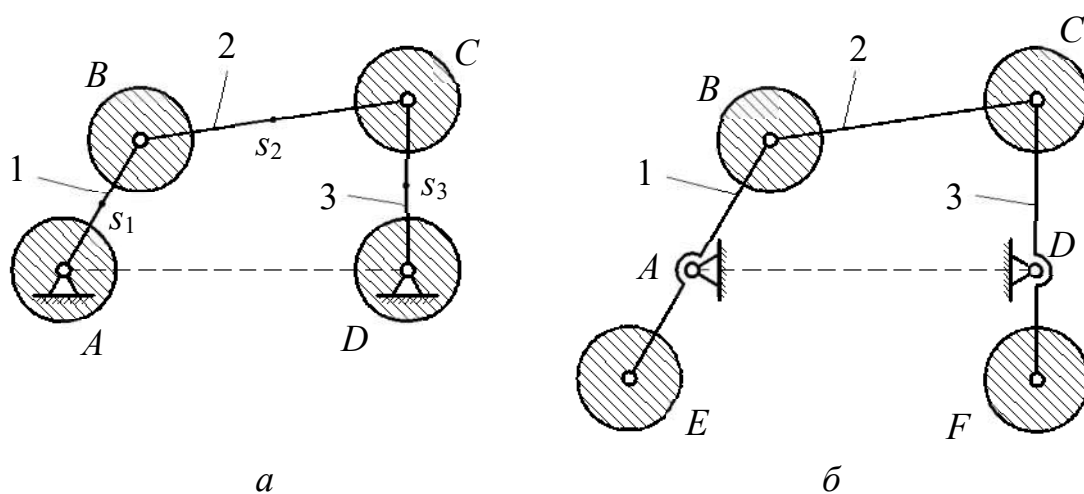


Рис. 96. Статическое уравнивание механизма:
а – схема механизма; *б* – статически уравновешенный механизм

Приведённые массы в точках B и C равны:

$$\begin{aligned} m_B &= m_{B_1} + m_{B_2} = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}}; \\ m_C &= m_{C_2} + m_{C_3} = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3 \frac{l_{DS_3}}{l_{CD}}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Так как заменяющие массы m_B и m_C совершают вращательное движение, то для уравнивания сил инерции необходимы противовесы с массами m_E и m_F , определяемыми из следующих условий (рис. 96, б):

$$\begin{aligned} m_E l_{AE} &= m_B l_{AB}; \\ m_F l_{DF} &= m_C l_{DC}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где, задавая длины противовесов, можно получить их массы и наоборот.

Рассмотрим моментное уравнивание на примере четырёхшарнирного механизма. Его приближённое моментное уравнивание можно осуществить после статического уравнивания, введя в схему механизма два одинаковых дополнительных противовеса m_M (рис. 97), соединённых с зубчатыми колёсами a и b . Колесо a жёстко связано с кривошипом 1 и вращается с угловой скоростью ω_1 , а равное ему колесо b вращается с той же угловой скоростью ω_1 , но угловые координаты противовесов отличаются на 180° , поэтому момент пары сил инерции от противовесов m_M равен

$$M_{иМ} = F_{иМ} h_M. \quad (10.8)$$

Подбирая положение точки E , можно обеспечить направление $M_{иМ}$, противоположное направлению $M_{иΣ}$, а массу противовесов m_M определяют из условия $M_{иΣ} = M_{иМ}$.

неподвижного центра вращения (рис. 98, а), то можно записать уравнение динамики:

$$\bar{G} + \bar{F}_A + \bar{F}_и = 0, \quad (10.9)$$

где G – вес; F_A – реакция в опоре; $F_и$ – сила инерции, равная

$$F_и = ma_S^n = \frac{G}{g} \omega^2 \rho = d \frac{\omega^2}{g}, \quad (10.10)$$

где $\rho = AS$ – радиус окружности вращения массы m ; $d = G\rho$ – дисбаланс, который характеризует неуравновешенность и направлен так же, как сила инерции $F_и$.

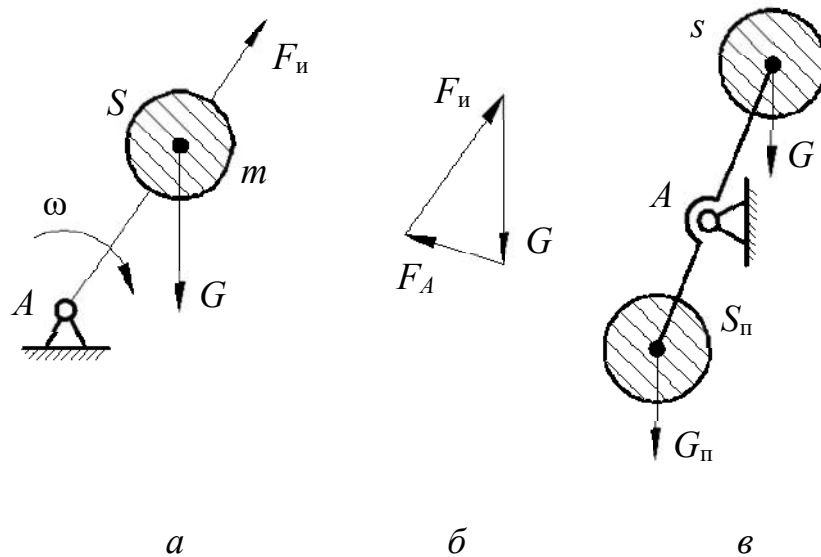


Рис. 100. Уравновешивание вращающихся масс

План сил в данном положении (рис. 98, б) показывает, что F_A – сила переменная по направлению и создаёт динамические нагрузки и вибрацию. Если $d = 0$, то $\bar{G} + \bar{F}_A = 0$, и динамические нагрузки отсутствуют. Для этого необходимо уравновесить дисбаланс установкой массы противовеса с противоположной стороны (рис. 98, в). Тогда дисбалансы будут уравновешены, и вес противовеса G_{Π} определится из условия

$$G\rho = G_{\Pi}\rho_{\Pi}, \quad (10.11)$$

где $\rho_{\Pi} = AS_{\Pi}$ – радиус окружности вращения противовеса.

Рассмотрим уравнивание неплоской детали, которую можно представить, например, в виде двух грузов G_1 и G_2 (рис. 99, а), с углом α_2 между радиусами ρ_1 и ρ_2 . В этом случае возникают реакции, вызванные неуравновешенностью как сил, так и моментов от сил инерции. При этом момент от сил инерции относительно точки A равен

$$M_{и2} = F_{и2}a \quad (10.12)$$

и характеризуется дисбалансом

$$d_2a = G_2\rho_2a. \quad (10.13)$$

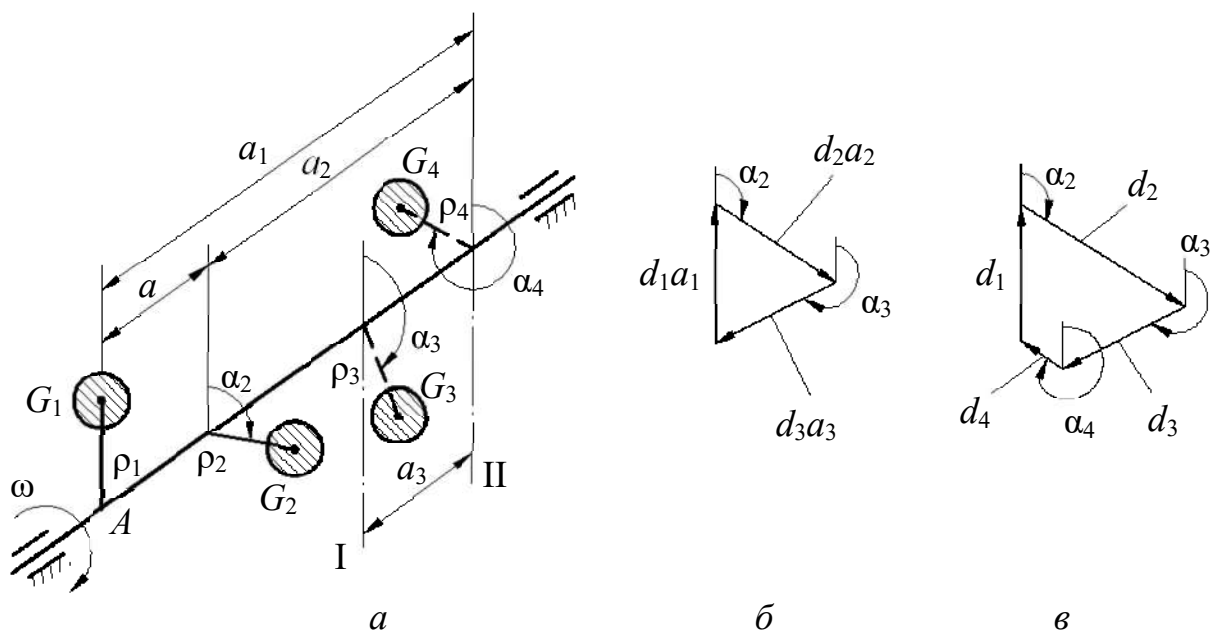


Рис. 99. Уравнивание неплоской детали

В этом случае динамические нагрузки на опоры возникают даже если проведена статическая балансировка, когда центр тяжести грузов 1 и 2 совпадает с центром вращения. Уравнивание моментов от сил инерции вращающихся деталей будет обеспечена динамической балансировкой.

Полное уравнивание системы можно осуществить двумя дополнительными грузами G_3 и G_4 , установленными в разных плоскостях I и II, называемых *плоскостями исправления*, под углами α_3 и α_4 . При этом должны выполняться условия:

$$\begin{aligned}\Sigma \bar{F}_{ii} &= 0, \text{ или } \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \bar{d}_4 = 0; \\ \Sigma \bar{M}_{ii} &= 0, \text{ или } \bar{d}_1 a_1 + \bar{d}_2 a_2 + \bar{d}_3 a_3 + \bar{d}_4 a_4 = 0.\end{aligned}\tag{10.14}$$

Совместное решение уравнений (10.14), например, графическим путём (рис. 99, б, в) позволяет найти вес и положение противовесов G_3 и G_4 .

Балансировка вращающихся масс осуществляется на специальных балансировочных станках, при этом исключается неуравновешенность, вызванная неточностью изготовления детали.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов. – М.: Наука, 1988.
2. Артоболевский И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин: для машин. спец. вузов. – М.: Наука, 1975.
3. Левитская О. Н., Левитский Н. И. Курс теории механизмов и машин: учеб. пособие для механ .спец. вузов. – М.: Наука, 1990.
4. Прикладная механика: учеб. пособие и контрольные задания на курсовой проект «Кинематический, силовой анализ и синтез плоского механизма» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Горные машины и оборудование» очного и заочного обучения. / А. И. Афанасьев, Ю. М. Казаков, С. А. Ляпцев и др. – 2-е издание, переработанное и дополненное. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019.

Учебное издание

Виталий Михайлович ТАУГЕР, Александр Анатольевич ЛЕОНТЬЕВ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебное пособие

Редактор изд-ва
Компьютерная вёрстка авторов
Дизайн обложки

Подписано в печать
Бумага офсетная. Гарнитура *Times New Roman*. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.
Печать на ризографе. Печ. л. 8,0. Уч. изд. л. 6,0
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский гос. горный ун-т
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ