МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
Комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## Б1.В.01.01. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год приёма: 2022

Автор: Раевская Л.Т., доцент, канд. ф.-м. наук

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
|---|---|
| Электрификации горных предприятий (ЭГП) | Горно-механический |
| Зав. кафедрой _____ *(подпись)* | Председатель _____ *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| Протокол №1 от 28.09.2021 г. | Протокол №2 от 12.10.2021 г. |

Екатеринбург

*Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, владений (опыта деятельности), характеризующие формирование компетенций*

Ознакомление обучающихся с процедурой и алгоритмом оценивания (в течение первой недели начала изучения дисциплины).

Проведение предварительных консультаций.

Проверка ответов на задания письменного экзамена.

Сообщение результатов оценивания обучающимся.

Оформление необходимой документации.

Экзамен– форма контроля промежуточной аттестации, в результате которого обучающийся получает оценку по четырехбалльной шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»

Экзамен проводится по расписанию.

Цель экзамена– завершить курс изучения дисциплины, проверить сложившуюся у обучающегося систему знаний, понятий, отметить степень полученных знаний, определить сформированность компетенций.

Для того чтобы быть уверенным на экзамене, необходимо ответы на наиболее трудные, с точки зрения обучающегося, вопросы подготовить заранее и тезисно записать. Запись включает дополнительные ресурсы памяти.

К экзамену по Вычислительным методам и прикладным программам необходимо начинать готовиться с первой лекции, практического (семинарского) занятия, так как материал, набираемый памятью постепенно, неоднократно подвергавшийся обсуждению, образует качественные знания, формирует необходимые компетенции.

При подготовке к экзамену следует пользоваться конспектами лекций, учебниками.

Экзамен по Вычислительным методам и прикладным программам проводится в устной или письменной форме путем выполнения экзаменационного задания

На подготовку к устному ответу обучающегося дается 40-60 минут в зависимости от объема билета. На подготовку ответа в письменной форме – не менее 120 минут.

При опоздании к началу письменного экзамена обучающийся на экзамен не допускается. Использование средств связи, «шпаргалок», подсказок на экзамене является основанием для удаления обучающегося с экзамена, а в экзаменационной ведомости проставляется оценка «неудовлетворительно».

Для подготовки к экзамену в письменной форме обучающийся должен иметь лист (несколько листов) формата А-4.

Лист (листы) формата А-4, на котором будет выполняться экзаменационное задание, должен быть подписан обучающимся в начале работы в правом верхнем углу. Здесь следует указать:

- Ф. И. О. обучающегося;
- группу, курс
- дату выполнения работы
- название дисциплины.

Страницы листов с ответами должны быть пронумерованы.

Проверка письменных работ осуществляется преподавателем, проводившим экзамен, в течение 3-х рабочих дней после его проведения. Результаты письменного экзамена объявляются путем выдачи копии экзаменационной ведомости старосте группы

или, результаты устного экзамена объявляются в процессе проведения экзамена после ответа обучающегося.

Экзамен может проводиться с использованием технических средств обучения.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

РАЗДЕЛ 1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле и погрешности результата

**Цель занятия:**

- закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий; косвенных и прямых измерений;
- закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

### 1.1 . Приближение числа. Погрешности приближенных значений чисел

Пусть X - точное значение некоторой величины, $x$ - наилучшее приближение этой величины.

**Определение:** *Абсолютной погрешностью $e_x$ приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X его приближенным значением x, т.е.*

$$e_x = |X - x|.$$

**Определение:** *Число x называется приближённым значением точного числа X с точностью до $\Delta x$, если абсолютная погрешность приближённого значения a не превышает $\Delta x$, т.е.*

$$|X - x| \le \Delta x. \qquad (1.1)$$

**Определение:** *Число $\Delta x$ называется границей абсолютной погрешности приближённого значения числа x.*

Число $\Delta x$ на практике стараются подобрать как можно меньше. Из неравенства (1.1) найдём границы, в которых заключено точное значение числа X:

$x - \Delta x \le X \le x + \Delta x$.

$НГ_x = x - \Delta x$ - нижняя граница приближения величины $X$.

$ВГ_x = x + \Delta x$ - верхняя граница приближения величины $X$.

**Определение:** *Относительной погрешностью $\delta x$ приближенного числа x называется отношение абсолютной погрешности $\Delta x$ этого приближения к числу x, т.е.*

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности $\delta x$ меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства $\delta x \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, где $n$- количество верных цифр.

***Погрешности арифметических действий***

| **x; y** | **Δ(x; y)** | **δ (x; y)** |
|---|---|---|
| x+y | Δ x+ Δ y | $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta x + \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta y$ |

| | | |
|---|---|---|
| x-y | $\Delta x+\Delta y$ | $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta x+\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta y$ |
| xy | $\lvert x\rvert\Delta y+\lvert y\rvert\Delta x$ | $\delta x+\delta y$ |
| x/y | $\frac{\lvert x\rvert\Delta y+\lvert y\rvert\Delta x}{y^2}$ | $\delta x+\delta y$ |

***Погрешности значений функций***

| f(x) | $\Delta f(x)$ | $\delta f(x)$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ | $\frac{1}{2}\delta x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{\Delta x}{x^2}$ | $\delta x$ |
| sin x | $\lvert\cos x\rvert\cdot\Delta x$ | $\lvert xctgx\rvert\cdot\delta x$ |
| cos x | $\lvert\sin x\rvert\cdot\Delta x$ | $\lvert xtgx\rvert\cdot\delta x$ |
| tg x | $\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$ | $\frac{2\lvert x\rvert}{\lvert\sin 2x\rvert}\cdot\delta x$ |
| ln x | $\frac{\Delta x}{x}$ | $\frac{\delta x}{\lvert\ln x\rvert}$ |
| lg x | $\frac{\Delta x}{x\ln 10}$ | $\frac{\delta x}{\lvert\lg x\rvert}\cdot\ln 10$ |
| $e^x$ | $e^x\Delta x$ | $\lvert x\rvert\cdot\delta x$ |
| arcsin x | $\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert\arcsin x\rvert\sqrt{1-x^2}}\cdot\delta x$ |
| arccos x | $\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert\arccos x\rvert\sqrt{1-x^2}}\cdot\delta x$ |
| arctg x | $\frac{\Delta x}{1+x^2}$ | $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert arctgx\rvert\sqrt{1+x^2}}\cdot\delta x$ |
| $x^y$ | $x^y(\lvert y\rvert\frac{\Delta x}{x}+\lvert\ln x\rvert\cdot\Delta y)$ | $\lvert y\ln x\rvert\cdot\delta y+\lvert y\rvert\cdot\delta x$ |

Погрешности функций вычисляются по формуле

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

**Пример 1**. Вычисление погрешности $S$ с учетом погрешностей функций

$S=\frac{\sqrt{ab}}{3a+c^2}$, если $a=12.3$, $b=0.43$, $c=0.029$ все цифры чисел верные, т. е. $\Delta a=0.1$, $\Delta b=0.01$, $\Delta c=0.001$.

*Решение.*

$S = \frac{\sqrt{ab}}{3a + c^2} = \frac{\sqrt{12.3 * 0.43}}{3 * 12.3 + 0.029} = 0.062$. Относительную погрешность можно расписать как

$$\delta S = \delta(числ.) + \delta(знам.) = \delta(\sqrt{ab}) + \delta(3a + c^2) = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{3a + c^2} = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{2.299} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{36.929},$$

где $\Delta(3a+c^2) = \Delta(3a) + \Delta(c^2) = 3\,\Delta a + 2c\,\Delta c$

$\Delta\sqrt{ab} = \frac{\Delta(ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{2\sqrt{ab}} = 0.036$ и $\Delta(3a + c^2) = 3\Delta a + 2c\Delta c = 0.300$. Тогда получаем

$\delta S = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{3a + c^2} = 0.024$, $\Delta S = 0.062 * 0.024 = 0.001488$, $S = 0.062 \pm 0.002$, или верными цифрами $S = 0.06 \pm 0.01$

### Задание 1.4. Погрешности косвенных измерений

Определить погрешность косвенного измерения момента статического сопротивления *Mc* электродвигателя для номинального режима работы. Использовать второй закон Ньютона, закон электромагнитных сил для вычисления электромагнитного момента и уравнение связи между током возбуждения и магнитным потоком

$$M_{дв} - Mc = J\frac{d\omega}{dt} \qquad M_{дв} = k * \Phi(t) I_{дв} \qquad k = M_{ном} / \Phi_{ном}(t) I_{дв}$$

$$\Phi_{ном}(t) = k_ф I_{В.ном} \qquad k_1 = k * k_Ф \qquad M_{ном} = \frac{P_{ном}}{\varpi_{ном}} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{\omega_{ном} - \omega_0}{t_{разг}}$$

где $M_{дв}(t)$– крутящий момент двигателя, $I_{дв}$ - ток обмотки якоря, $\Phi(t)$- магнитный поток, $I_в(t)$ - ток возбуждения, $\omega(t)$ – угловая скорость и $\varepsilon(t)$ – угловое ускорение электродвигателя, $J$ – момент инерции. Расчеты выполнить для заданной относительной погрешности измеряемых величин 10, 5, и 1 %. Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

**Варианты задания 1.4**

| № варианта | Мощность P, кВТ | Напряжение U, В | Число оборотов n, об/мин | Магнитный поток Ф, Вб | Масса m, кг | Радиус R, м | Скорость V, м/с | Время t, с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 550 | 1200 | 1.1 | 450 | 0.4 | 1.1 | 5 |
| 2 | 11 | 500 | 1100 | 1.0 | 500 | 0.3 | 1.2 | 4 |
| 3 | 12 | 510 | 1300 | 1.2 | 600 | 0.5 | 1.4 | 3 |
| 4 | 13 | 520 | 1200 | 1.3 | 400 | 0.4 | 1.5 | 5 |
| 5 | 17 | 520 | 1400 | 1.1 | 550 | 0.3 | 1.4 | 4 |
| 6 | 11 | 540 | 1000 | 1.1 | 450 | 0.4 | 1.0 | 2 |
| 7 | 12 | 500 | 1200 | 1.2 | 640 | 0.5 | 1.1 | 5 |
| 8 | 13 | 480 | 1300 | 1.3 | 500 | 0.3 | 1.4 | 4 |
| 9 | 14 | 470 | 1400 | 1.4 | 550 | 0.4 | 1.0 | 3 |
| 10 | 15 | 460 | 1500 | 1.5 | 450 | 0.5 | 1.5 | 5 |
| 11 | 10 | 540 | 1100 | 1.1 | 400 | 0.4 | 1.0 | 3 |
| 12 | 10 | 530 | 1000 | 1.2 | 540 | 0.5 | 1.5 | 4 |
| 13 | 11 | 520 | 1200 | 1.1 | 600 | 0.5 | 1.4 | 3 |
| 14 | 12 | 550 | 1300 | 1.3 | 500 | 0.4 | 1.0 | 3 |
| 15 | 15 | 500 | 1400 | 1.2 | 400 | 0.5 | 1.4 | 4 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 12 | 560 | 1500 | 1.4 | 450 | 0.5 | 1.4 | 4 |
| 17 | 11 | 400 | 1000 | 1.1 | 500 | 0.4 | 1.5 | 5 |
| 18 | 10 | 520 | 1200 | 1.0 | 550 | 0.5 | 1.5 | 3 |
| 19 | 14 | 510 | 1100 | 1.0 | 600 | 0.3 | 1.4 | 4 |
| 20 | 13 | 570 | 1300 | 1.1 | 480 | 0.3 | 1.0 | 3 |
| 21 | 12 | 580 | 1400 | 1.2 | 580 | 0.4 | 1.4 | 4 |
| 22 | 10 | 500 | 1500 | 1.0 | 500 | 0.4 | 1.4 | 5 |
| 23 | 13 | 550 | 1500 | 1.4 | 600 | 0.4 | 1.1 | 5 |
| 24 | 14 | 500 | 1000 | 1.5 | 400 | 0.3 | 1.4 | 4 |
| 25 | 11 | 510 | 1200 | 1.1 | 550 | 0.5 | 1.0 | 3 |
| 26 | 12 | 520 | 1100 | 1.2 | 450 | 0.4 | 1.5 | 5 |
| 27 | 13 | 530 | 1300 | 1.1 | 640 | 0.3 | 1.0 | 4 |
| 28 | 14 | 540 | 1400 | 1.3 | 500 | 0.4 | 1.5 | 2 |
| 29 | 15 | 500 | 1500 | 1.2 | 550 | 0.5 | 1.4 | 5 |
| 30 | 10 | 480 | 1100 | 1.4 | 450 | 0.3 | 1.0 | 4 |

**Пример 7.** Определить абсолютную и относительную ошибки момента статического сопротивления в двигателе постоянного тока, если угловое ускорение, ток возбуждения, ток обмотки якоря даны с относительной погрешностью 10%, 5%, 1%. Масса поднимаемого груза *m*. Момент инерции вычислить по формуле $J= mR^2/2$.В данном примере принять
$J$= 2 кгм$^2$.
Дано: $P$=11 кВт, $U$=520 В, n=1200 об/мин, Ф=1,1 Вб, $R$=0,5 м, $V$=1,4 м/с, $t$=3 с.
*Решение:*
1) Найдем потребляемую силу тока двигателя Mc=Mдв-Jε

$$I_{дв} = \frac{P}{U} = \frac{11000}{520} = 21.2\,A$$

2) Определим ток возбуждения

$$I_{в} = 10\% \cdot I_{дв} = 0.1 \cdot 21.2 = 2.12\,A$$

3) Найдем угловую скорость

$$\omega = n\frac{об}{мин} \to \frac{рад}{сек} = \frac{1200 \cdot 2\pi}{60} = 125.7\,\frac{рад}{сек}$$

4) Вычислим линейную скорость привода

$$\nu_{пр} = \omega \cdot R = 125.7 \cdot 0.5 = 62.9\,{}^{м}\!/_{сек}$$

5) Передаточное отношение получается равным

$$i = \frac{\nu_{пр}}{V} = \frac{62.9}{1.4} = 44.9$$

6) Найдем крутящий момент двигателя

$$M_{дв} = \frac{P}{\omega} = \frac{11000}{125.7} = 87.5\,H \cdot м$$

7) Найдем тангенциальное ускорение (начальная скорость равна нулю)

$$a^{\tau} = \frac{\nu_0 - \nu}{t} = \frac{1.4}{3} = 0.47\ м/с^2$$

8) Определим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{a^{\tau}}{R} = \frac{0.47}{0.5} = 0.9\ рад/с^2$$

9) Зная момент двигателя, ток возбуждения и ток двигателя, выразим коэффициент $k_1$

$$k_1 = \frac{M_{дв}}{I_в \cdot I_{дв}} = \frac{87.5}{2.12 \cdot 21.2} = 2.0\ рад/с^2$$

10) Находим абсолютные погрешности при 10 % относительной погрешности

$$\Delta\varepsilon = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$$

$$\Delta I_{дв} = 0.1 \cdot 21.2 = 2.12$$

$$\Delta I_в = 0.1 \cdot 2.12 = 0.21$$

Далее полученные данные подставляем в формулу

$$\Delta M_C = \frac{\partial Mc}{\partial I_в} \cdot \Delta I_в + \frac{\partial Mc}{\partial I_{дв}} \cdot \Delta I_{дв} + \frac{\partial Mc}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon = k_1 \cdot I_{дв} \cdot \Delta I_в + k_1 \cdot I_в \cdot \Delta I_{дв} + J \cdot \Delta\varepsilon$$

Абсолютная погрешность при 10 %:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.21 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 2.12 + 2 \cdot 0.09 = 18.1 H \cdot м$$

При номинальном режиме работы можно считать, что $M_c = M_{дв} = 87.5 H \cdot м$

относительная погрешность $\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{18.1}{87.5} = 0.207 = 20.7\%$

11) Находим абсолютные погрешности при 5 % относительной погрешности

$$\Delta\varepsilon = 0.05 \cdot 0.9 = 0.05$$

$$\Delta I_{дв} = 0.05 \cdot 21.2 = 1.06$$

$$\Delta I_в = 0.05 \cdot 2.12 = 0.11$$

Абсолютная погрешность при 5% :

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.11 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 1.06 + 2 \cdot 0.05 = 9.3 H \cdot м$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{9.3}{87.5} = 0.106 = 10.6\%$$

12) Находим абсолютные погрешности при 1 % относительной погрешности

$$\Delta\varepsilon = 0.01 \cdot 0.9 = 0.01$$

$$\Delta I_{дв} = 0.01 \cdot 21.2 = 0.21$$

$$\Delta I_{в} = 0.01 \cdot 2.12 = 0.02$$

Абсолютная погрешность при 1%:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.02 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.01 = 1.8 H \cdot м$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{1.8}{87.5} = 0.021 = 2.1\%$$

***Контрольные вопросы***

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях значений по правилам подсчета цифр.
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей.
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?

## РАЗДЕЛ 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами

**Цель занятия:**

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления, метод хорд (секущих), метод Ньютона (метод касательных);
- разработать алгоритм и использовать программу для решения вычислительных задач приближенными методами, учитывая необходимую точность получаемого результата.

### 2.1. Постановка задачи отделения корней нелинейного уравнений

Решение нелинейного уравнения, описывающего состояние электрической цепи, может быть реализовано приближенными численными методам. Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$ , где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция. Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения

корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления *количества корней и интервалов, каждый из которых содержит только один корень.*
Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для *любых* уравнений, не существует. Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.
Упростим задачу, заменив уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$. В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси x отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

**Пример 1.** Пусть необходимо найти корни уравнения $f(x)=e^x-x^2=0$.
*Решение.*Преобразуем исходное уравнение к виду $y_1(x)=e^x$; $y_2(x)=x^2$; $e^x=x^2$. Чтобы найти корни уравнения, необходимо найти точку пересечения графиков функций $y_1(x)=e^x$ и $y_2(x)=x^2$. Построим графики функций в Scilab и нанесем на график сетку для удобства визуального определения точки пересечения. Необходимые команды приведены в листинге программы, результат выполнения команд можно видеть на рис. 2.1.

Листинг
```
x=-2:0.01:2;
y1=exp(x);
y2=x.^2;
plot(x,y1,x,y2)
xgrid(001)
```
Ответ:
x=-0.7

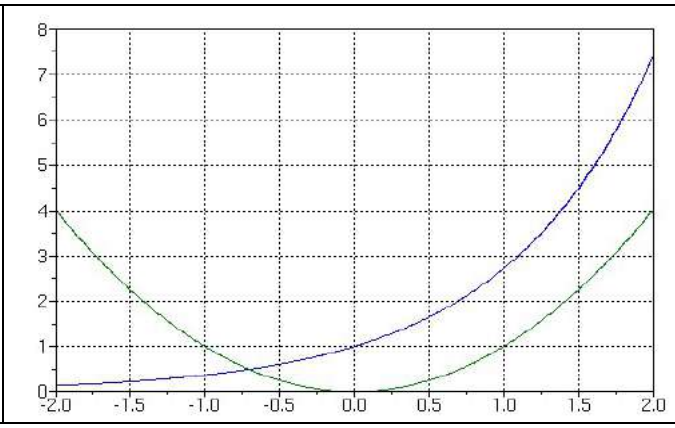



Рис.2.1. Графическое решение уравнения $f(x)=e^x-x^2$

**Пример 2.** Пусть необходимо найти корни уравнения $f(x)=x-8.5*Sin(x)$. Графическое решение уравнения $f(x)=x-8.5*Sin(x)$ показано на рис. 2.2.

Листинг
```
x=8:0.1:8.5;
y1=x;
y2=8.5*sin(x);
plot(x,y1,x,y2)
xgrid(001)
```
Ответ:x=8.14

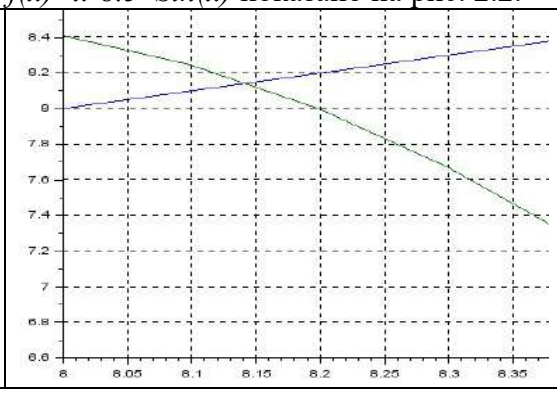



Рис.2.2. Графическое решение уравнения $f(x)=x-8.5*Sin(x)$.

При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие очевидные положения:

1. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков, т.е. произведение $f(a)\cdot f(b)<0$), то уравнение $f(x)=0$ имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень.

2. Если функция *f(x)* к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке [*a;b*] единственный.

3. **РАЗДЕЛ 3. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).**

***Контрольные вопросы***

1. Какие методы решения СЛАУ вы знаете?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. На чем основываются подходы к организации контроля вычислений в прямом ходе, обратном ходе?
4. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?
5. Каким образом схема единственного деления может использоваться для вычисления обратной матрицы?

## РАЗДЕЛ 4. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приближенными методами

**Цель занятия:**

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных алгебраических уравнений приближенными методами: методом простой итерации, методом Зейделя.

### 4.1. Метод простых итераций

Как отмечалось ранее, итерационные методы используются для решения уравнений и систем любой природы. Рассмотрим, как это делается применительно к системам линейных алгебраических уравнений.

Приведём систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (4.1)$$

к равносильной ей системе вида **x=Ax**:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ ..... \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \qquad (4.2)$$

В сокращенной форме: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j + \beta_i, \quad i = \overline{1,n}$.

О системе уравнений (4.2) говорят, что она «приведена к нормальному виду».

Правая часть системы определяет отображение $F: y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j + \beta_i$, (4.3)

которое переводит точку $\bar{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точку $\bar{y}(y_1, y_2, ..., y_n)$. Используя отображение (4.3) и выбрав начальную точку $\bar{x}_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение *F* является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (4.2) , следовательно, и решением исходной системы (4.1).

**Замечание.** Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (4.3) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее:

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1, \qquad (4.4)$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (4.2), взятых по столбцам, должна быть меньше 1. Из этого условия следует, что прежде чем начать решение системы (4.1) необходимо ее привести к нормальному виду (4.2), т.е. коэффициенты $\alpha_{ij}$ при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (4.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (4.2), у которой все $\left|\alpha_{ij}\right|<1$.

Для проверки точности решения используем условие (4.4).

**Пример 1.** Привести систему линейных уравнений к нормальному виду

$$\begin{cases}2{,}34x_1-4{,}21x_2-11{,}61x_3=14{,}41,\\ 8{,}04x_1+5{,}22x_2+0{,}27x_3=-6{,}44,\\ 3{,}92x_1-7{,}99x_2+8{,}37x_3=55{,}56.\end{cases}$$

*Решение.* Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 3-го уравнений. Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases}\underline{8{,}04}x_1+5{,}22x_2+0{,}27x_3=-6{,}44,\\ 6{,}26x_1-\underline{12{,}2}x_2-3{,}24x_3=69{,}97,\\ 2{,}34x_1-4{,}21x_2-\underline{11{,}61}x_3=14{,}41.\end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases}x_1=-0{,}649x_2-0{,}034x_3-0{,}801,\\ x_2=0{,}573x_1-0{,}266x_3-5{,}735,\\ x_3=0{,}202x_1-0{,}363x_2-1{,}241.\end{cases}$$

Система приведена к нормальному виду. Проверку условия сходимости (4.4) и точности решения можно осуществить с помощью программы.

Далее приведем пример решения системы линейных алгебраических уравнений данным методом.

**Пример 2**. Решить систему уравнений методом простых итераций. Проверить расчет с помощью программы. Дана система с преобладающими диагональными коэффициентами.

$$4.3x_1+0.217x_2=2.663$$
$$0.1x_1-3.4x_2-0.207x_3=2.778$$
$$0.09x_2+2.5x_3+0.197x_4=2.533$$

$$0.08x_3 - 1.6x_4 = 1.928$$

Запишем эквивалентную систему уравнений

$$x_1 = \frac{2.663}{4.3} - \frac{0.217x_2}{4.3}$$

$$x_2 = -\frac{2.778}{3.4} - \frac{0.207x_4}{3.4} + \frac{0.1x_1}{3.4}$$

$$x_3 = \frac{2.533}{2.5} - \frac{0.197x_4}{2.5} - \frac{0.09x_2}{2.5}$$

$$x_4 = -\frac{1.928}{1.6} + \frac{0.08x_3}{1.6}$$

Нулевое приближение $x_1^0 = 0.6193$ $x_2^0 = -0.8170$ $x_3^0 = 1.013$ $x_4^0 = -1.205$.

Первая итерация

$$x_1^1 = 0.6193 + 0.0411 = 0.6604$$

$$x_2^1 = -0.8170 - 0.0616 + 0.018 = -0.8606$$

$$x_3^1 = 1.013 + 0.0949 + 0.0294 = 1.1373$$

$$x_4^1 = -1.205 + 0.05 = -1.155$$

Вторая итерация

$$x_1^2 = 0.06193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623$$

$$x_2^2 = -0.817 - (0.06 * 1.137) = -0.8678$$

$$x_3^2 = 1.013 + (0.078 * 1.55) + (0.036 * 0.86) = 1.072$$

$$x_4^2 = -1.205 + 0.05 * 1.137 = -1.148$$

Третья итерация

$$x_1^3 = 0.06193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623$$

$$x_2^3 = -0.817 - (0.06 * 1.072) + (0.029 * 0.66) = -0.862$$

$$x_3^3 = 1.013 + (0.078 * 1.148) + (0.036 * 0.86) = 1.133$$

$$x_4^3 = -1.205 + (0.05 * 1.072) = -1.151$$

Оценим сходимость итерационной процедуры

$$\left|x_1^2 - x_1^1\right| = 0.0019 \qquad \left|x_1^3 - x_1^2\right| = 0.00001$$

$$\left|x_2^2 - x_2^1\right| = 0.0063 \qquad \left|x_2^3 - x_2^2\right| = 0.005$$

$$\left|x_3^2 - x_3^1\right| = 0.069 \qquad \left|x_3^3 - x_3^2\right| = 0.061$$

$$\left|x_4^2 - x_4^1\right| = 0.007 \qquad \left|x_4^3 - x_4^2\right| = 0.003$$

Проверим решение с помощью программы.

| | |
|---|---|
| *// решение СЛАУ методом простых итераций. Листинг программы*<br>*// ввод матрицы A*<br>A=[4.3 0.217 0 0 ;<br>0.1 -3.4 -0.207 0;<br>0 0.09 2.5 0.197;<br>0 0 0.08 -1.6]<br>*// ввод вектора B*<br>B=[2.633;2.778;2.533;1.928]<br>*// формирование матрицы D*<br>R=diag(A); | *// вычисление начальных приближений*<br>X0=B;<br>X=P*X0+G;<br>*//циклические вычисления*<br>while max(abs(X-X0))>=0.00001,<br>X0=X; X=P*X0+G;<br>end;<br>*//вывод результата*<br>X<br>// проверка обусловленности матрицы A<br>cond(A) |

| | |
|---|---|
| D=diag(R);<br>*// формирование матриц P и G*<br>P=-inv(D)*(A-D);<br>G=inv(D)*B; | X =<br>0.6560717<br>- 0.8668572<br>1.1348894<br>- 1.1482556 |

Сравним результаты «ручного» счета и с помощью ЭВМ

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Ручной счет | 0.6623 | - 0.862 | 1.1373 | -1.151 |
| ЭВМ | 0.6560717 | - 0.8668572 | 1.1348894 | - 1.1482556 |

*Типовые контрольные задания и материалы*

**Тема 1**. Оценка погрешности прямых измерений. Виды погрешностей. Представление результата прямых измерений.

Относительная погрешность. Использование относительной погрешности при умножении результатов измерений.

Абсолютная погрешность косвенных измерений.

Статистические характеристики результатов измерений. Доверительный интервал.

**Тема 2**. Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод отделения корней. Метод и алгоритм отделения корней уравнения с одной переменной.

**Тема 3**. Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом деления пополам (дихотомии).

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом хорд.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом Ньютона.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом секущих.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом простых итераций.

**Тема 4.** Метод Гаусса решения систем линейных алгоритмических уравнений.

Итерационный метод решений СЛАУ методом Зейделя.

Решение системы линейных алгоритмических уравнений методом простой итерации. Понятие метрики. Принцип сжимающих отображений.

**Тема 5**. Интерполирование функции. Интерполяция сплайнами. Линейные, кубические сплайны. Интерполирование функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционные многочлены Ньютона. Конечные разности.

**Тема 6.** Численное дифференцирование по формуле Лагранжа.

Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Ньютона.

**Тема 7**. Численное интегрирование. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

**Тема 8.** Метод Эйлера решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Тема 9.** Метод Рунге-Кутта решений обыкновенных дифференциальных уравнени

**Тема 10**. Виды задач линейного программирования.

**ПРИМЕР оформления курсовой работы. Вычислительные методы и прикладные программы**

**Министерство науки и высшего образования**
**Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Уральский государственный горный университет»**

# Курсовая работа

## по дисциплине «Вычислительные методы и прикладные программы»

… вариант

Выполнил …..
студент группы …

Проверил: доцент
Раевская Л. Т.

Екатеринбург

2020

**Задание 1. Правильная запись результатов выполнения округлений**

1)

| | | |
|---|---|---|
| 127,3±0,2 | → | Верно |
| 127±0,2 | → | 127,0±0,2 |
| 127,00±0,2 | → | 127,0±0,2 |

2)

| | | |
|---|---|---|
| 122,13±0,2 | → | 132,1±0,2 |
| 122,13±0,17 | → | 132,1±0,2 |
| 122,1±0,17 | → | 132,1±0,2 |

3)

| | | |
|---|---|---|
| 246,402±0,15 | → | 246,4±0,2 |
| 246,4±0,15 | → | 246,4±0,2 |
| 246,40±0,15 | → | 246,4±0,2 |

4) Округлить до сотых

| | | |
|---|---|---|
| 0,27439±0,0791 | → | 0,27±0,08 |

5) Округлить до десятых

| | | |
|---|---|---|
| 22,7849±0,98 | → | 22,8±1,0 |

6) Округлить до десятков

| | | |
|---|---|---|
| 2789±32 | → | 2790±40 |

## Задание 2. Расчет погрешности прямых измерений

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 35,0 | 35,1 | 35,2 | 35,3 | 35,0 | 35,0 | 35,1 | 35,0 | 35,0 | 35,1 |

$$x = \frac{35{,}0 + 35{,}1 + 35{,}2 + 35{,}3 + 35{,}0 + 35{,}0 + 35{,}1 + 35{,}0 + 35{,}0 + 35{,}1}{10} = 35{,}08$$

$$\Delta x_1 = |35{,}1 - 35{,}08| = 0{,}02$$

$$\Delta x_2 = |35{,}1 - 35{,}08| = 0{,}02$$

$$\Delta x_3 = |35{,}2 - 35{,}08| = 0{,}12$$

$$\Delta x_4 = |35{,}3 - 35{,}08| = 0{,}22$$

$$\Delta x_5 = |35{,}0 - 35{,}08| = 0{,}08$$

$$\Delta x_6 = |35{,}0 - 35{,}08| = 0{,}02$$

$$\Delta x_7 = |35{,}1 - 35{,}08| = 0{,}02$$

$$\Delta x_8 = |35{,}0 - 35{,}08| = 0{,}08$$

$$\Delta x_9 = |35{,}0 - 35{,}08| = 0{,}08$$

$$\Delta x_{10} = |35{,}1 - 35{,}08| = 0{,}02$$

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}12 + 0{,}22 + 0{,}08 + 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}02}{10} \right| = 0{,}08$$

$$\delta x = \frac{0{,}08}{35{,}08} * 100\% = 0{,}23\%$$

35,08±0,08; δ*x*=0,23%

Ответ: 35,1±0,1 – ответ верными цифрами

## Задание 3. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле

| | |
|---|---|
| a=1,75 | Δa=0,01 |
| b=1,21 | Δb=0,01 |
| c=0,199 | Δc=0,001 |

$$S = \frac{a - \sin b}{b^2 - 6c} = \frac{1{,}75 - \sin 1{,}21}{1{,}21^2 - 6 * 0{,}199} = \frac{0{,}814}{2{,}658} = 0{,}306245$$

$$\delta S = \delta(a - \sin b) + \delta(b^2 - 6c) = \frac{\Delta(a - \sin b)}{a - \sin b} + \frac{\Delta(b^2 - 6c)}{b^2 - 6c} =$$
$$= \frac{\Delta(a) + \Delta(\sin b)}{a - \sin b} + \frac{\Delta(b^2) + \Delta(6c)}{b^2 - 6c} =$$
$$= \frac{\Delta a}{a - \sin b} + \frac{(\cos b) * \Delta b}{a - \sin b} + \frac{2b * \Delta b}{b^2 - 6c} + \frac{6 * \Delta c}{b^2 - 6c} =$$
$$= \frac{0{,}01}{0{,}814} + \frac{0{,}00353}{0{,}814} + \frac{0{,}0242}{2{,}658} + \frac{0{,}006}{2{,}658} =$$
$$= 0{,}0123 + 0{,}0043 + 0{,}0091 + 0{,}0026 = 0{,}0283 * 100 = 2{,}83\%$$

$$\Delta S = \delta S * S = 0{,}0283 * 0{,}306245 = 0{,}0086 \approx 0{,}009$$

Ответ: 0,306±0,009; δS=2,83%

**Задание 4. Решение СЛАУ методом простых итераций**

$$\begin{cases} 10{,}8x_1 - 0{,}576x_2 = 12{,}143 \\ 0{,}321x_1 + 9{,}9x_2 + 3{,}3x_3 = 13{,}089 \\ 0{,}369x_2 + 9x_3 - 6{,}06x_4 = 13{,}674 \\ 0{,}416x_3 + 8{,}1x_4 = 13{,}897 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 10{,}8 & -0{,}576 & 0{,}000 & 0{,}000 & 12{,}143 \\ 0{,}321 & 9{,}9 & 3{,}3 & 0{,}000 & 13{,}089 \\ 0{,}000 & 0{,}369 & 9 & -6{,}06 & 13{,}674 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}416 & 8{,}1 & 13{,}897 \end{vmatrix}$$

| | |
|---|---|
| $x_1 = \frac{12{,}143}{10{,}8} + \frac{0{,}576}{10{,}8}x_2;$ | $x_1^0 = \frac{12{,}143}{10{,}8} = 1{,}124;$ |
| $x_2 = \frac{13{,}089}{9{,}9} - \frac{0{,}321}{9{,}9}x_1 - \frac{3{,}3}{9{,}9}x_3;$ | $x_2^0 = \frac{13{,}089}{9{,}9} = 1{,}322;$ |
| $x_3 = \frac{13{,}674}{9} - \frac{0{,}369}{9}x_2 + \frac{6{,}06}{9}x_4;$ | $x_3^0 = \frac{13{,}674}{9} = 1{,}519;$ |

| | |
|---|---|
| $x_4 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} x_3.$ | $x_4^0 = \frac{13,897}{8,1} = 1,716.$ |
| $x_1^1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 1,322 = 1,195;$<br>$x_2^1 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,124 - \frac{3,3}{9,9} * 1,519 = 0,779;$<br>$x_3^1 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 1,322 + \frac{6,06}{9} * 1,716 = 2,62;$<br>$x_4^1 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 1,519 = 1,638.$ | $\varepsilon_1^1 = \lvert 1,124 - 1,195 \rvert = 0,071;$<br>$\varepsilon_2^1 = \lvert 1,322 - 0,779 \rvert = 0,543;$<br>$\varepsilon_3^1 = \lvert 1,519 - 2,62 \rvert = 1,101;$<br>$\varepsilon_4^1 = \lvert 1,716 - 1,638 \rvert = 0,078.$ |
| $x_1^2 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,779 = 1,166;$<br>$x_2^2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,195 - \frac{3,3}{9,9} * 2,62 = 0,41;$<br>$x_3^2 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,779 + \frac{6,06}{9} * 1,638 = 2,59;$<br>$x_4^2 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,62 = 1,581.$ | $\varepsilon_1^2 = \lvert 1,195 - 1,166 \rvert = 0,029;$<br>$\varepsilon_2^2 = \lvert 0,41 - 0,779 \rvert = 0,369;$<br>$\varepsilon_3^2 = \lvert 2,62 - 2,59 \rvert = 0,03;$<br>$\varepsilon_4^2 = \lvert 1,638 - 1,581 \rvert = 0,057.$ |
| $x_1^3 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,41 = 1,146;$<br>$x_2^3 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,166 - \frac{3,3}{9,9} * 2,59 = 0,42;$<br>$x_3^3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,41 + \frac{6,06}{9} * 1,581 = 2,567;$<br>$x_4^3 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,59 = 1,583.$ | $\varepsilon_1^3 = \lvert 1,146 - 1,166 \rvert = 0,02;$<br>$\varepsilon_2^3 = \lvert 0,42 - 0,41 \rvert = 0,01;$<br>$\varepsilon_3^3 = \lvert 2,567 - 2,62 \rvert = 0,053;$<br>$\varepsilon_4^3 = \lvert 1,583 - 1,638 \rvert = 0,055.$ |

С помощью программы Scilab выполняем расчет методом простых итераций:

```
A=[10.8 -0.576 0 0;
0.321 9.9 3.3 0;
0 0.369 9 -6.06;
0 0 0.416 8.1]
B=[12.143;13.089;13.674;13.897]
R=diag(A);
D=diag(R);
P=-inv(D)*(A-D);
G=inv(D)*(B);
X0=B;
X=P*X0+G;
while max(abs(X-X0))>=0.00001,
X0=X; X=P*X0+G;
end;
X
cond(A)
```

```
запуск программы:
 загрузка исходного окружения
 -->A=[10.8 -0.576 0 0;
-->0.321 9.9 3.3 0;
-->0 0.369 9 -6.06;
-->0 0 0.416 8.1]
 A  =

    10.8   - 0.576    0.       0.
    0.321    9.9      3.3      0.
    0.       0.369    9.     - 6.06
    0.       0.       0.416    8.1
-->B=[12.143;13.089;13.674;13.897]
 B  =

    12.143
    13.089
    13.674
    13.897
-->R=diag(A);
-->D=diag(R);
-->P=-inv(D)*(A-D);
-->G=inv(D)*(B);
-->X0=B;
-->X=P*X0+G;
-->while max(abs(X-X0))>=0.00001,
-->X0=X; X=P*X0+G;
-->end;
-->X
 X  =

    1.1472248
    0.4288683
    2.5681637
    1.5837831
-->cond(A)
 ans  =

    2.1486732
-->
```

## Задание 5. Решение СЛАУ методом Зейделя

$$\begin{cases} 10{,}8x_1 - 0{,}576x_2 = 12{,}143 \\ 0{,}321x_1 + 9{,}9x_2 + 3{,}3x_3 = 13{,}089 \\ 0{,}369x_2 + 9x_3 - 6{,}06x_4 = 13{,}674 \\ 0{,}416x_3 + 8{,}1x_4 = 13{,}897 \end{cases} \rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 10{,}8 & -0{,}576 & 0{,}000 & 0{,}000 & 12{,}143 \\ 0{,}321 & 9{,}9 & 3{,}3 & 0{,}000 & 13{,}089 \\ 0{,}000 & 0{,}369 & 9 & -6{,}06 & 13{,}674 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}416 & 8{,}1 & 13{,}897 \end{array}\right|$$

| | |
|---|---|
| $x_1 = \frac{12{,}143}{10{,}8} + \frac{0{,}576}{10{,}8}x_2;$ | $x_1^0 = \frac{12{,}143}{10{,}8} = 1{,}124;$ |
| $x_2 = \frac{13{,}089}{9{,}9} - \frac{0{,}321}{9{,}9}x_1 - \frac{3{,}3}{9{,}9}x_3;$ | $x_2^0 = \frac{13{,}089}{9{,}9} = 1{,}322;$ |
| $x_3 = \frac{13{,}674}{9} - \frac{0{,}369}{9}x_2 + \frac{6{,}06}{9}x_4;$ | $x_3^0 = \frac{13{,}674}{9} = 1{,}519;$ |
| $x_4 = \frac{13{,}897}{8{,}1} - \frac{0{,}416}{8{,}1}x_3.$ | $x_4^0 = \frac{13{,}897}{8{,}1} = 1{,}716.$ |

| | |
|---|---|
| $x_1^1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 1,322 = 1,195;$<br>$x_2^1 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,195 - \frac{3,3}{9,9} * 1,519 = 0,777;$<br>$x_3^1 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,777 + \frac{6,06}{9} * 1,716 = 2,643;$<br>$x_4^1 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,643 = 1,58.$ | $\varepsilon_1^1 = \lvert 1,124 - 1,195 \rvert = 0,071;$<br>$\varepsilon_2^1 = \lvert 1,322 - 0,777 \rvert = 0,545;$<br>$\varepsilon_3^1 = \lvert 1,519 - 2,643 \rvert = 1,124;$<br>$\varepsilon_4^1 = \lvert 1,716 - 1,58 \rvert = 0,136.$ |
| $x_1^2 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,777 = 1,166;$<br>$x_2^2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,166 - \frac{3,3}{9,9} * 2,643 = 0,4;$<br>$x_3^2 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,4 + \frac{6,06}{9} * 1,58 = 2,567;$<br>$x_4^2 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,567 = 1,584.$ | $\varepsilon_1^2 = \lvert 1,195 - 1,166 \rvert = 0,029;$<br>$\varepsilon_2^2 = \lvert 0,4 - 0,777 \rvert = 0,377;$<br>$\varepsilon_3^2 = \lvert 2,643 - 2,567 \rvert = 0,076;$<br>$\varepsilon_4^2 = \lvert 1,58 - 1,584 \rvert = 0,004.$ |
| $x_1^3 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,4 = 1,146;$<br>$x_2^3 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,146 - \frac{3,3}{9,9} * 2,567 = 0,43;$<br>$x_3^3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,43 + \frac{6,06}{9} * 1,584 = 2,568;$<br>$x_4^3 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,568 = 1,5838.$ | $\varepsilon_1^3 = \lvert 1,146 - 1,166 \rvert = 0,02;$<br>$\varepsilon_2^3 = \lvert 0,4 - 0,43 \rvert = 0,03;$<br>$\varepsilon_3^3 = \lvert 2,567 - 2,568 \rvert = 0,001;$<br>$\varepsilon_4^3 = \lvert 1,583 - 1,5838 \rvert = 0,0002.$ |

С помощью программы Scilab выполняем расчет методом Зейделя:

```
A=[10.8 -0.576 0 0;
0.321 9.9 3.3 0;
0 0.369 9 -6.06;
0 0 0.416 8.1]
B=[12.143; 13.089; 13.674; 13.897]
R=tril((A))
T=A-R
P=-inv(R)*T;
G=inv(R)*B;
X0=B;
X=P*X0+G;
while max(abs(X-X0))>=0.00001,
    X0=X; X=P*X0+G;
end;
X
cond(A)
```

```
 -->A=[10.8 -0.576 0 0;
-->0.321 9.9 3.3 0;
-->0  0.369 9 -6.06;
-->0  0  0.416 8.1]
 A  =

    10.8   - 0.576    0.        0.
    0.321    9.9      3.3       0.
    0.       0.369    9.      - 6.06
    0.       0.       0.416     8.1
-->B=[12.143; 13.089; 13.674; 13.897]
 B  =

    12.143
    13.089
    13.674
    13.897
-->R=tril((A))
 R  =

    10.8     0.       0.        0.
    0.321    9.9      0.        0.
    0.       0.369    9.        0.
    0.       0.       0.416     8.1
-->T=A-R
 T  =

    0.  - 0.576    0.      0.
    0.     0.       3.3     0.
    0.     0.       0.    - 6.06
    0.     0.       0.      0.
-->P=-inv(R)*T;
-->G=inv(R)*B;
-->X0=B;
-->X=P*X0+G;
-->while max(abs(X-X0))>=0.00001,
-->    X0=X; X=P*X0+G;
-->end;
-->X
```

```
 X  =

    1.1472248
    0.4288687
    2.5681637
    1.5837832
-->cond(A)
 ans  =

    2.1486732
-->
```

## Задание 6. Вычисление интегралов приближенными методами

### 1. Метод прямоугольника

$$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3,0 |
| $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ |
| 3,510 | 3,816 | 4,126 | 4,439 | 4,754 | 5,068 | 5,382 | 5,691 | 5,996 | 6,295 | 6,585 |

$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * (y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}) = \frac{3-2}{10} * (3{,}816 + 4{,}126 + 4{,}439 + 4{,}754 + 5{,}068 + 5{,}382 + 5{,}691 + 5{,}996 + 6{,}295 + 6{,}585) = 5{,}2152$
– метод «правых» прямоугольников;

$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * (y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9) = \frac{2-3}{10} * (3{,}510 + 3{,}816 + 4{,}126 + 4{,}439 + 4{,}754 + 5{,}068 + 5{,}382 + 5{,}691 + 5{,}996 + 6{,}295) = 4{,}9077$ –
метод "левых" прямоугольников

$$\frac{4{,}9077 + 5{,}2152}{2} = 5{,}06145.$$

### 2. Метод трапеции

$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * \left(y_0 + \frac{y_1+y_{10}}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right) = 0{,}1 * \left(3{,}510 + \frac{3{,}51+6{,}585}{2} + 4{,}126 + 4{,}439 + 4{,}754 + 5{,}068 + 5{,}382 + 5{,}691 + 5{,}996 + 6{,}295\right) = 5{,}06145.$

**Задание 7. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера**

$$yy' + x = 1$$

| | |
|---|---|
| *a=0.1* | $y_0 = 1$ |
| *b=1.1* | *h=0.1* |

$$y' = \frac{1-x}{y} = f(x,y)$$

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 |
| y | 1 | 1,09 | 1,1634 | 1,2236 | 1,2726 | 1,3119 | 1,3424 | 1,3648 | 1,3794 | 1,3866 | 1,3866 |
| | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ |

$$y_i = y_{i-1} + h * f(x_{i-1}; y_{i-1})$$

$$y_1 = 1 + 0.1 * \frac{1-0.1}{1} = 1{,}09$$

$$y_2 = 1{,}09 + 0.1 * \frac{1-0{,}2}{1{,}09} = 1{,}1634$$

$$y_3 = 1{,}1634 + 0.1 * \frac{1-0{,}3}{1.1634} = 1{,}2236$$

$$y_4 = 1{,}2236 + 0.1 * \frac{1-0{,}4}{1.2236} = 1{,}2726$$

$$y_5 = 1{,}2726 + 0.1 * \frac{1-0{,}5}{1.2726} = 1{,}3119$$

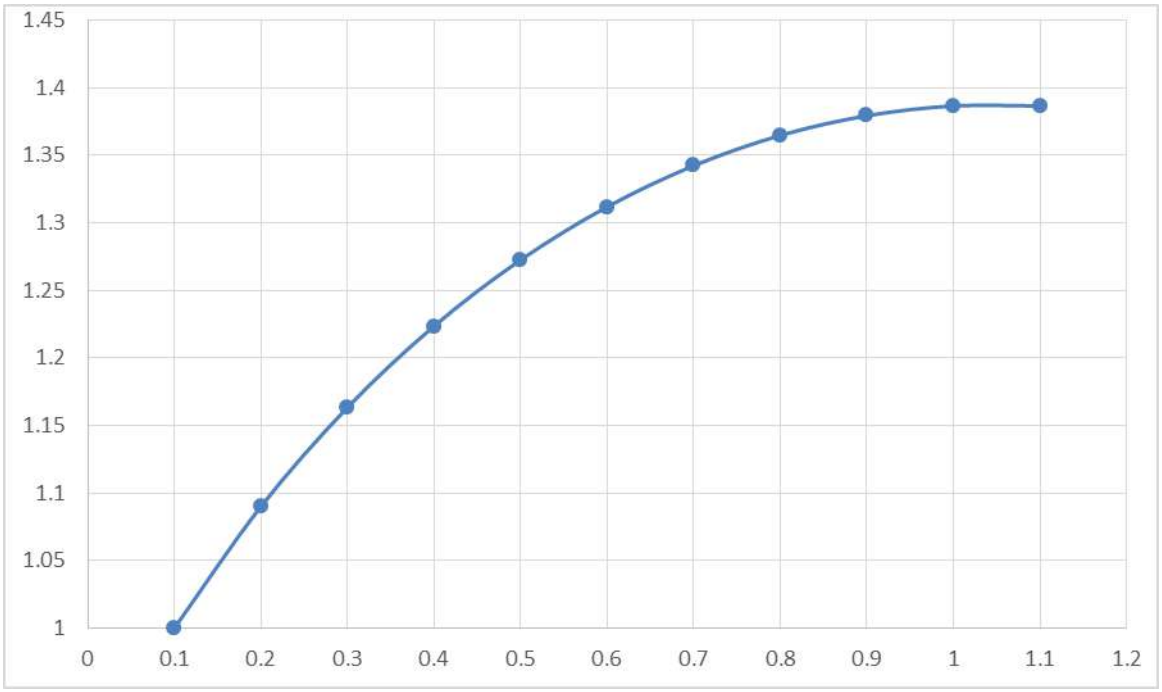
$$y_6 = 1{,}3119 + 0.1 * \frac{1-0{,}6}{1{,}3119} = 1{,}3424$$

$$y_7 = 1{,}3424 + 0.1 * \frac{1-0{,}7}{1{,}3424} = 1{,}3648$$

$$y_8 = 1{,}3648 + 0.1 * \frac{1-0{,}8}{1{,}3648} = 1{,}3794$$

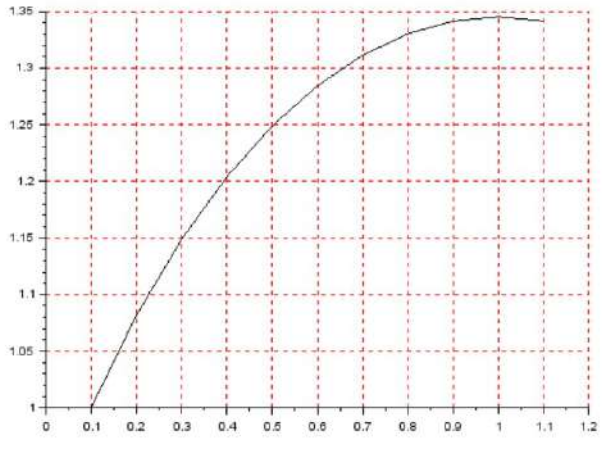
$$y_9 = 1{,}3794 + 0.1 * \frac{1-0{,}9}{1{,}3794} = 1{,}3866$$

$$y_{10} = 1{,}3866 + 0.1 * \frac{1-1}{1{,}3866} = 1{,}3866$$



С помощью программы Scilab выполняем расчет методом Эйлера:

```
Запуск программы:
  загрузка исходного окружения
 -->function w=f(x,y),w=(1-x)/y,
-->endfunction;
-->x0=0.1;y0=1;x=0.1:0.1:1.1;
-->z=ode(y0,x0,x,f);
-->plot2d(x,z);
-->xgrid(5)
-->function w=f(x,y),w=(1-x)/y,
-->endfunction;
-->x0=0.1;y0=1;x=0.1:0.1:1.1;
-->z=ode(y0,x0,x,f);
-->plot2d(x,z);
-->xgrid(5)
-->
```




```
1 function w=f(x,y),w=(1-x)/y,
2 endfunction;
3 x0=0.1;y0=1;x=0.1:0.1:1.1;
4 z=ode(y0,x0,x,f);
5 plot2d(x,z);
6 xgrid(5)
7
```

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов./В. М. Вержбицкий. –М.: Высш. шк., 2002.
2. Турчак Л. И. Основы численных методов/ Л. И. Турчак. – М.: Наука, 1987.
3. Агальцов В. П. Математические методы в программировании: учебник / В. П. Агальцов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИД «ФОРУМ», 2010. – 240 с. (Профессиональное образование).
4. Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: http://window.edu.ru
5. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О.В.Чеснокова, Е. А.Рудченко. _ М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. _ 260 с. (Библиотека ALT Linux).
6. Лапчик М. П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер.— М. : Академия, 2009.— 384 с.
7. Раевская Л.Т., ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ: учеб. пособие /Л. Т. Раевская, А. Л. Карякин.- Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2021. – 128 с.

Министерство науки и высшего образования
ФБГОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**П. А. Осипов**

# КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

***Методические указания по организации самостоятельной работы для обучающихся специальности 21.05.04 Горное дело, специализации электрификация и автоматизация горного производства***

***Год набора: 2021***

**Екатеринбург**
**2020**

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Введение** ..... 3

**1. Тематический план дисциплины** ..... 4

**2. Тематика лабораторных, практических работ** ..... 5

**3. Вопросы к экзамену по дисциплине** ..... 7

**4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины** ..... 9

**5. Перечень ресурсов информационнотелекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины** ..... 9

**6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационнх справочных систем** ..... 9

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| 1 | Понятие, функции, классификация и эволюция операционных систем. Компоненты операционных систем: ядро, загрузчик, интерпретатор команд, драйверы устройств, встроенное программное обеспечение. | 1 | 5 | [1] с. 13…28, 57…86<br>[4] с. 11…15 |
| 2 | Понятие операционной среды и прикладного интерфейса программирования. Вычислительный процесс и ресурс. Прерывания. Мультипрограммирование и | 1 | 5 | [1] с. 32…39, 124…131<br>[4] с. 16…30 |

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| | многозадачность. | | | |
| 3 | Диаграмма состояний процессора. Процессы и задачи. Последовательный вычислительный процесс. Разделение ресурсов. Управление задачами, памятью и вводом-выводом в операционных системах. Файловые системы. | 1 | 5 | [1] с. 87...97, 106 -118<br>[4] с. 30…46, 163…208 |
| 4 | Организация параллельных взаимодействующих вычислений: семафоры, мьютексы, мониторы, почтовый ящики, конвейеры, очереди. | 1 | 5 | [1] с. 87...97, 140…157<br>[4] с. 209…246 |
| 5 | Определение, функции и состав операционных систем реального времени. Принципы построения операционных систем реального времени. | 1 | 5 | [1] с. 92...93, 119…123<br>[4] с. 340…351 |
| 6 | Понятие, функции, классификация и эволюция компьютерных сетей. Глобальные и локальные компьютерные сети. | 1 | 5 | [2] с. 24...37,<br>[5] с. 16…62 |
| 7 | Совместное использование ресурсов. Сетевые операционные системы, службы, сервисы, интерфейсы и приложения. | 1 | 5 | [2] с. 40...52,<br>[5] с. 368…416 |
| 8 | Физическая передача данных по линиям связи: кодирование и характеристики физических каналов. | 1 | 5 | [2] с. 52...54, 256…282<br>[5] с. 31…57 |
| 9 | Топология физических связей. Адресация узлов сети. Коммутация и маршрутизация. | 1 | 5 | [2] с. 55...75<br>[5] с. 31…57 |
| 10 | Сети TCP/IP: типы адресов стека, формат IP-адреса, система DNS. | 1 | 5 | [2] с. 482...656,<br>[5] с. 418…439 |
| 11 | Понятие, функции, классификация и эволюция баз данных. Реляционная алгебра. | 1 | 5 | [3] с. 4…7 |
| 12 | Реляционная модель данных. Определение реляционной базы данных и отношения, атрибута, кортежа, первичного ключа. | 1 | 5 | [3] с. 7…11 |
| 13 | Проектирование баз данных. Концепция функциональных зависимостей. | 1 | 5 | [3] с. 11…17 |
| 14 | Нормализация. Декомпозиция. Первая нормальная форма. Нормальная форма Бойса-Кодда. | 1 | 5 | [3] с. 18…27 |
| 15 | Определение, функции, классификация и эволюция системы управления базами данных. | 1 | 5 | [3] с. 28…30 |
| 16 | Современные системы управления базами данных. Понятие о языке запросов SQL. | 2 | 8 | [3] с. 34…54 |
| 17 | Выполнение курсовой работы «Проектирование реляционной базы данных» | 36 | 36 | [3] с. 1…80 |

* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем лабораторных работ | Трудоемкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 1.4 | Взаимоисключение доступа к дисплею при помощи семафора | 2 | |
| 1.4 | Реализация взаимоисключения при помощи задачи — монитора | 2 | |
| 3.1, 3.2, 3.3 | Определение имен и типов данных атрибутов отношения реляционной базы данных. Концепция функциональных зависимостей. | 6 | |
| 3.4 | Первая нормальная форма 1НФ отношения реляционной базы данных | 1 | |
| 3.4 | Нормальная форма Бойса-Кодда НФБК отношения реляционной базы данных | 1 | |
| 3.5 | Изучение СУБД Apache OpenOffice Base 4.1.2 | 2 | |
| 3.6 | Реализация отношения реляционной базы данных НФБК в СУБД Apache OpenOffice Base 4.1.2. Создание таблиц и схемы данных | 2 | |
| 3.6 | Создание запросов на выборку, удаление, обновление, добавление данных и формирование новых таблиц | 2 | |
| 3.6 | Создание простых форм. Элементы управления на формах. Списки и поля со списком. Создание отчетов. | 2 | |
| Итого: | | 16 | |

Таблица 3 – Перечень практических работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 1.2 | Несинхронизированная параллельная работа задач | 1 | 0,5 |
| 1.2 | Синхронизация задач при помощи механизма рандеву (критическая секция отсутствует) | 1 | 0,5 |
| 1.3 | Синхронизация задач при помощи механизма рандеву (имеется критическая секция) | 1 | |
| 1.3 | Синхронизация задач при помощи рандеву (сообщение поступает от задачи потребитель) | 1 | |
| 1.4 | Обмен данными при помощи буферизующей задачи | 2 | 1 |
| 1.5 | Система задач производитель — кольцевой буфер — потребитель с возможностью потери данных | 1 | |

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 1.5 | Система задач производитель — кольцевой буфер — потребитель без потери данных | 1 | |
| 2.1 | Изучение конфигурации вычислительной сети | 2 | |
| 2.2 | Маршрутизация в вычислительных сетях | 2 | |
| 2.3 | Изучение утилит TCP/IP в ОС Windows | 4 | 2 |
| 3.4 | Первая нормальная форма 1НФ отношения реляционной базы данных | | 1 |
| 3.4 | Нормальная форма Бойса-Кодда НФБК отношения реляционной базы данных | | 1 |
| 3.6 | Реализация отношения реляционной базы данных НФБК в СУБД Apache OpenOffice Base 4.1.2. Создание таблиц и схемы данных | | 1 |
| 3.6 | Создание запросов на выборку, удаление, обновление, добавление данных и формирование новых таблиц | | 0,5 |
| 3.6 | Создание простых форм. Элементы управления на формах. Списки и поля со списком. Создание отчетов. | | 0,5 |
| Итого: | | 16 | 8 |

## 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Дать определение операционной системе.
2. Перечислить основные функции операционных систем.
3. Классификация операционных систем.
4. К какому типу относится операционная система Windows?
5. Этапы эволюция операционных систем и аппаратного обеспечения компьютеров.
6. Перечислить компоненты операционных систем.
7. Назначение и классификация ядер.
8. Основное назначение загрузчика.
9. Типы интерфейсов операционных систем.
10. Назначение встроенного программного обеспечения.
11. Дать понятие операционной среды и прикладного интерфейса программирования.
12. Пояснить концепцию процесса и вычислительного ресурса.
13. Определение процесса и ресурса.
14. Классификация ресурсов.
15. Назначение механизма прерываний.
16. Этапы прерывания.
17. Отличие мультипрограммирования и многозадачности.
18. Изобразить диаграмму состояний процессора.
19. Что такое последовательный процессор и последовательный вычислительный

процесс?
20. Методы разделения ресурсов.
21. Назначение файловых систем.
22. Перечислить средства для организации параллельных взаимодействующих вычислений.
23. Дать определение семафора и монитора.
24. Сравнить семафор и монитор, указать их достоинства и недостатки.
25. Дать определение операционным системам реального времени.
26. Применение операционных систем реального времени.
27. Функции и состав операционных систем реального времени.
28. Отличие операционной системы реального времени от системы не реального времени.
29. Системы «жесткого» и «мягкого» реального времени.
30. Определение компьютерных сетей.
31. Необходимость возникновения компьютерных сетей.
32. Основные функции компьютерных сетей.
33. На стыке каких областей возникли компьютерные сети? Эволюция компьютерных сетей.
34. Какие сети возникли первыми глобальные или локальные?
35. Механизм доступа к периферийному устройству по сети.
36. Состав сетевых операционных систем.
37. Назначение сетевых служб, модулей клиент-сервер.
38. Какие сетевые службы существуют в операционной системы Windows?
39. Типы сетевых приложений.
40. Дать определение среды передачи данных.
41. Классификация сред передачи данных.
42. Отличие дуплексного, симплексного и полудуплексного каналов.
43. Характеристики физических каналов.
44. Определение топологии связей компьютеров.
45. Какая самая популярная топология сетей на сегодняшний день?
46. Какую сетевую топологию лучше использовать для соединения удаленных устройств шахты?
47. Критерии выбора маршрутов в сетях.
48. Задача коммутации и маршрутизации.
49. Модель взаимодействия открытых систем OSI и ее уровни.
50. Стек протоколов TCP/IP как основа для построения сетей.
51. Классы сетей.
52. Формат IP-адреса.
53. Версии протоколов IPv4 и IPv6.
54. Для чего необходимо переходить на версию протокола IPv6?
55. Для чего нужен DNS-сервер?
56. Дать определение базам данных.
57. Отличие данных от информации.
58. Чем вызвана необходимость использовать базы данных?
59. Классификация баз данных.
60. Какой самый популярный тип баз данных на данный момент?
61. Какой самый перспективный тип баз данных на данный момент?
62. Соотношений понятий таблица, столбец и строка для представления в реляционной модели данных и на компьютере.
63. Определение отношения.
64. Что такое кортеж?
65. Что такое первичный ключ и возможный?

66. Цели проектирования баз данных.
67. Определение функциональной зависимости и ее состав.
68. Для чего необходимо составлять функциональные зависимости?
69. Что такое нормализация и декомпозиция?
70. Определение первой нормальной формы.
71. Почему нельзя использовать отношение базы дынных в первой нормальной форме для реализации в системе управления базой данных?
72. Определение нормальной формы Бойса-Кодда.
73. Определение системы управления базами данных.
74. Отличие базы данных от системы управления базой данных?
75. Для чего необходима система управления базой данных?
76. Какие системы управления базами данных лучше клиент-серверные или файл-серверные?
77. Apache OpenOffice Base к какому типу систем управления базами данных относится?
78. MySQL к какому типу систем управления базами данных относится?
79.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 1 | Олифер В. Г. Сетевые операционные системы: учебник для вузов / В. Г. Олифер В. Г., Н. А. Олифер. - Санкт-Петербург: Питер, 2002. - 544 с. |
| 2 | Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер - 2-е изд. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 864 с. |
| 3 | Реляционные базы данных: учебное пособие / П. А. Осипов, А. Л. Карякин, М. Б. Носырев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 83 с. |

### 4.2 Дополнительная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 4 | Гордеев А. В. Системное программное обеспечение: учебник для вузов / А. В. Гордеев А. В., А. Ю. Молчанов. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 736 с. |
| 5 | Бройдо В. Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: учебное пособие для вузов / В. Л. Бройдо - Санкт-Петербург : Питер, 2003. - 688 с. |

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Официальный сайт ПО Apache OpenOffice - свободный и открытый офисный пакет – https://www.openoffice.org/ru/

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

1. 1. Microsoft Windows 10 Professional
2. 2. Apache Open Office (бесплатный пакет офисных программ)

Информационные справочные системы

ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri
E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

# *МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ..... 3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ..... 4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса ..... 4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам ..... 5
Подготовка и написание контрольной работы ..... 6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) ..... 7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ..... 8
Подготовка к зачёту ..... 8
Подготовка к экзамену ..... 8

# ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

## Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

– рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

– изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
– изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– составление плана проведения эксперимента;
– составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
– аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

**Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

– чтение основной и дополнительной литературы;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– работа с конспектом лекций;
– ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

– решение задач по образцу и вариативных задач;
– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- -во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

**Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### Подготовка к экзамену

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

# *МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ*

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ..... 3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ..... 4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса ..... 4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам ..... 5
Подготовка и написание контрольной работы ..... 6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) ..... 7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ..... 8
Подготовка к зачёту ..... 8
Подготовка к экзамену ..... 8

# ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

## Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

– рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

– изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
– изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– составление плана проведения эксперимента;
– составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
– аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

**Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

– чтение основной и дополнительной литературы;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– работа с конспектом лекций;
– ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

– решение задач по образцу и вариативных задач;
– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- -во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

**Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### Подготовка к экзамену

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

**МИНОБРНАУКИ РФ**
**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный университет»**

М. Е. Садовников

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ АППАРАТЫ

## Методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»

**Екатеринбург**

**2021**

## Задание

1. Выбрать все электрические аппараты, указанные на схеме (см. рис. 1). При выборе аппаратов считать, что ШР-1 защищается таким же автоматическим выключателем, что и QF1, но его уставки выбраны с учётом требований селективности (эти уставки необходимо определить).
2. Варианты заданий указаны в таблице 1 (задаются преподавателем).
3. Электроаппараты следует выбрать того производителя, который указан в таблице 1.
4. В случае невозможности выбрать какой-либо аппарат заданного в таблице 1 производителя, обоснованно показать это в работе (подтвердить расчётами), и выбрать данный аппарат у другого производителя.
5. Характеристики электроприёмников и расчётные токи короткого замыкания (ТКЗ), в зависимости от выданного варианта задания, приводятся в таблице 1.
6. Считать токи короткого замыкания незначительными для системы.
7. Расчётные токи электроприёмников (ЭП) определить по формуле

$$I_{\text{р}} = \frac{P_{\text{н}}}{\sqrt{3} \cdot U_{1\text{н}} \cdot cos\varphi_{\text{н}} \cdot \eta_{\text{н}}},$$

где $P_{\text{н}}$ – активная номинальная мощность электродвигателя, кВт; $cos\varphi_{\text{н}}$ – номинальный коэффициент мощности электродвигателя; $\eta_{\text{н}}$ – номинальный КПД электродвигателя, о. е.; $U_{1\text{н}}$ – номинальное напряжение электродвигателя, кВ.

8. Суммарный ток двух ЭП принять как сумму их номинальных токов.
9. Пиковый ток каждого из ЭП определить по формуле

$$I_{\text{пуск}} = K_{\text{п}} \cdot I_{\text{р}},$$

где $K_{\text{п}}$ – кратность пускового тока электродвигателя.

10. $\cos\varphi_{\text{н}}$, $\eta_{\text{н}}$, $K_{\text{п}}$ определить по [1], по заданной в таблице 1 марке двигателя.
11. При выполнении работы использовать методику, приведённую в пп 5.5.2...5.5.5 [2], пп 9.1…9.5 [3] и каталоги изготовителей электроаппаратов, приведённые на сайтах изготовителей оборудования (ссылки на сайты приведены в таблице 1).
12. К работе, в обязательном порядке, в качестве приложения добавить копии каталожных данных по выбираемым аппаратам, по всем используемым при выборе переменным.
13. Отчёт оформить в соответствии с требованиями [4].

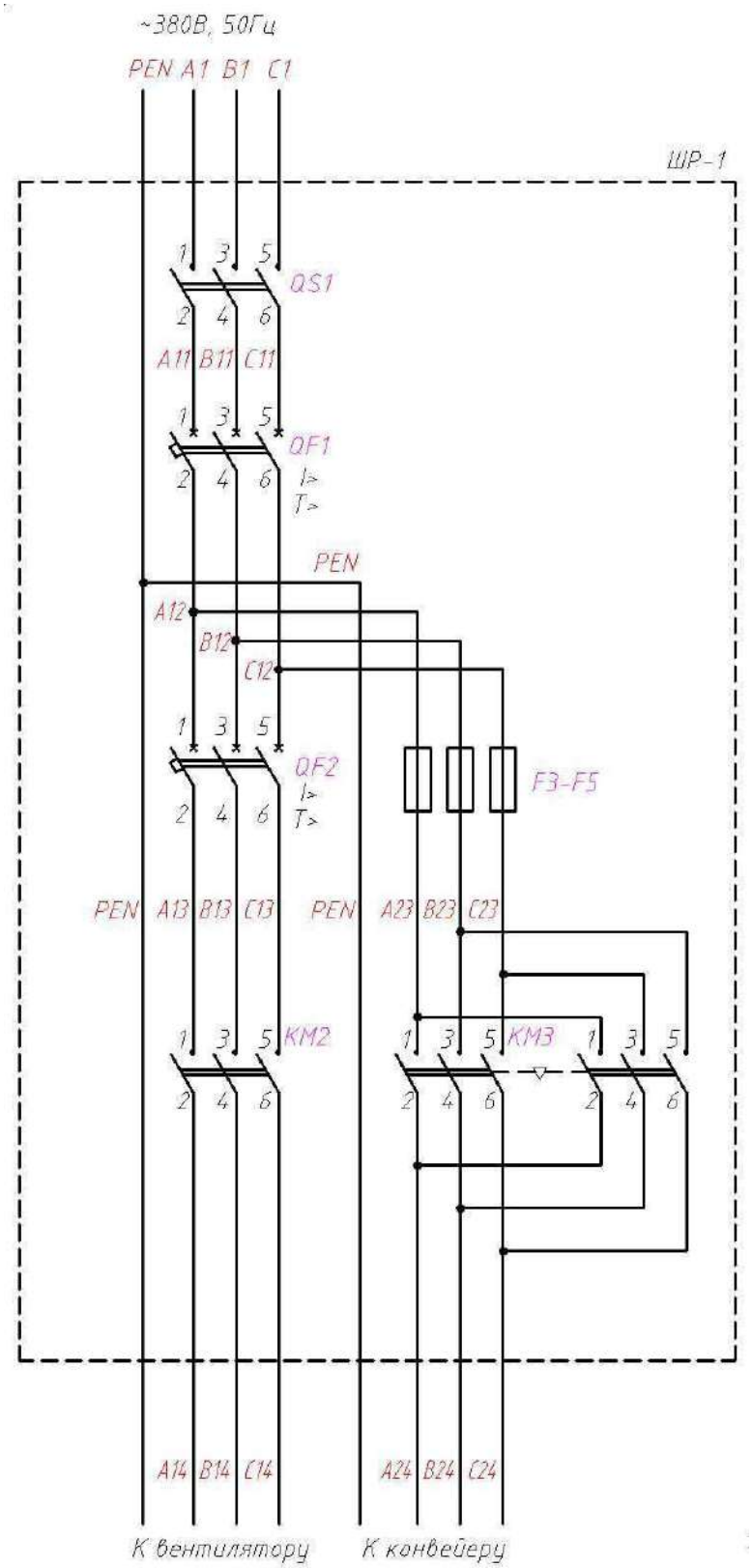



Рисунок 1 - Схема электрическая принципиальная ШР-1

Таблица 1 - Варианты заданий контрольной работы

| Вариант | Изготовитель электроаппаратов | Технологическое оборудование | Тип двигателя | Однофазный ТКЗ на зажимах двигателя, кА | Однофазный ТКЗ в конце участка защиты QF1, кА | Трёхфазный ТКЗ на верхних губках рубильника QS1, кА |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **ABB**<br>http://new.abb.com/ru | Вентилятор | 4А132S4У3 | 0,4 | 28 | 44 |
| | | Конвейер | 4А280М2У3 | 7 | | |
| 2 | **ИЭК**<br>http://www.iek.ru/ | Насос | 4А80В4У3 | 0,6 | 25 | 41 |
| | | Конвейер | 4А355S6У3 | 6,5 | | |
| 3 | **EKF**<br>http://ekfgroup.com/ | Грохот | 4А100S4У3 | 0,7 | 18 | 33 |
| | | Конвейер | 4А315М6У3 | 6 | | |
| 4 | **ДЗНВА** (автоматические выключатели)<br>http://www.dznva.ru/<br>**ОАО «Коренёвский завод низковольтной аппаратуры»** (предохранители)<br>http://www.nva-korenevo.ru/<br>**КЭАЗ** (контакторы)<br>https://keaz.ru/ | Питатель | 4А112М4У3 | 0,8 | 22 | 32 |
| | | Конвейер | 4А315S6У3 | 5,5 | | |
| 5 | **Schneider Electric**<br>http://www.schneider-electric.ru/ru/ | Вентилятор | 4А160S4У3 | 0,95 | 30 | 45 |
| | | Конвейер | 4А250М4У3 | 5 | | |
| 6 | **OEZ**<br>http://www.oez.ru/ | Насос | 4А160М2У3 | 1 | 17 | 26 |
| | | Конвейер | 4А250S4У3 | 4,5 | | |
| 7 | **КЭАЗ**<br>https://keaz.ru/ | Грохот | 4А180М6У3 | 1,1 | 26 | 35 |
| | | Конвейер | 4А225М4У3 | 4 | | |
| 8 | **Moeller (EATON)**<br>http://www.eaton.ru/EatonRU/ProductsServices/Electrical/index.htm | Питатель | 4А132М4У3 | 1,2 | 15 | 23 |

## Список литературы


1. Кравчик А. Э. Асинхронные двигатели серии 4А: справочник [Текст]: А. Э. Кравчик, М. М. Шлаф, В. И. Афонин [и др.]. – М.: Энергоиздат, 1982. – 504 с.: ил.
2. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 229 с.
3. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 2 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 191 с.
4. Садовников М. Е. Единые требования по оформлению текстовых и графических документов на кафедре ЭГП [Текст]: учебно-метод. пособие для студентов очного и заочного обучения / сост.: М. Е. Садовников, А. Л. Карякин, Х. Б. Юнусов; Уральский гос. горный ун-т. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 31 с.

**МИНОБРНАУКИ РФ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный горный университет»**

**М. Е. Садовников**

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ АППАРАТЫ

***Методические указания по организации самостоятельной работы для обучающихся специальности 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»***

**Екатеринбург**
**2021**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение . . . . . 3
1. Тематический план дисциплины . . . . . 4
2. Тематика лабораторных, практических работ. . . . . 5
3. Вопросы к экзамену по дисциплине . . . . . 6
4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины . . . . . 8
4.1. Основная литература . . . . . 8
4.2. Дополнительная литература . . . . . 8
5. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. . . . . 9
6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем ……10

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| 1 | Общие сведения об ЭиЭА. Классификация ЭиЭА | 2 | 2 | [1] с. 5…7, [3] с. 5...7 |
| 2 | Исполнение и область применения ЭиЭА | 4 | 6 | Конспект лекций |
| 3 | Источники тепла в ЭиЭА | 4 | 6 | [1] с. 9...16, [3] с. 59…64 |
| 4 | Режимы работы (нагрева) ЭиЭА. Нагрев и охлаждение ЭиЭА | 3 | 4 | [1] с. 9...17, [3] с. 64…86 |
| 5 | Термическая стойкость ЭиЭА. Разновидности токов | 4 | 4 | |

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| | короткого замыкания. Нагрев ЭиЭА при коротком замыкании | | | |
| 6 | Электродинамическая стойкость ЭиЭА. Электродинамические силы на постоянном и переменном токе. Электродинамические силы при коротком замыкании. Механический резонанс | 4 | 6 | [1] с. 79...84, [3] с. 31…57 |
| 7 | Электрическая дуга. Электрическая дуга постоянного и переменного тока | 4 | 6 | [1] с. 57...68, [3] с. 123…181 |
| 8 | Коммутация электрических цепей. Отключающая способность ЭиЭА. Способы гашения электрической дуги | 4 | 6 | |
| 9 | Электрические контакты и контактные соединения. Материалы контактов. Износ контактов | 4 | 6 | [1] с. 20...26, [3] с. 88…122, 60...68 |
| 10 | Высоковольтные силовые контактные коммутационные и защитно-коммутационные электроаппараты | 4 | 6 | [1] с. 127...149, [3] с. 504…526, 552…618, [4] с. 148...172, [5] с. 3...83 |
| 11 | Низковольтные силовые контактные коммутационные и защитно-коммутационные электроаппараты | 4 | 6 | [1] с. 106...127, [3] с. 308…336, 500…605, * |
| 12 | Силовые бесконтактные коммутационные, защитно-коммутационные и силовые преобразовательные аппараты (установки) | 4 | 6 | [1] с. 57...60, [2] с. 180...230, [3] с. 455…461 |
| 13 | Гибридные аппараты постоянного и переменного тока. Бесконтактная коммутация электрических цепей | 4 | 6 | [2] с. 318 |
| 14 | Основные элементы и функциональные узлы систем управления электронных аппаратов | 4 | 6 | [2] с. 243...255 |
| 15 | Силовые защитные аппараты для защиты от внешних и внутренних перенапряжений | 4 | 6 | [1] с. 154, 155, [3] с. 629…639 |
| 16 | Силовые компенсирующие аппараты. Токоограничивающие реакторы | 4 | 6 | [1] с. 155, 156, [3] с. 619…629 |
| 17 | Электроаппараты контроля. Измерительные трансформаторы тока и напряжения | 4 | 6 | [1] с. 149...154, [3] с. 640...681 |
| 18 | Электроаппараты управления. Реле, программируемые логические контроллеры (ПЛК). Электроаппараты сигнализации | 4 | 6 | [1] с. 84...97, [3] с. 337...403 |
| 19 | Магнитные цепи. Законы и схемы замещения для магнитных цепей. Методы расчёта магнитных цепей. Короткозамкнутый виток | 6 | 6 | [1] с. 27...56, [3] с. 183…240 |
| 20 | Расчёт магнитных цепей постоянного и переменного тока | 4 | 5 | |
| 21 | Выбор ЭиЭА | 6 | 6 | [12] с. 101...114, [3] с. 605, 664, 680 |
| 22 | Эксплуатация ЭиЭА в системах электроснабжения, электропривода и электротранспорта на горных и общепромышленных предприятиях | 4 | 4 | |

* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем лабораторных работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 11 | Изучение и испытание контакторов переменного и постоянного тока *Литература*: [6] с. 5...19 | 4 | 4 |
| 11 | Плавкие предохранители и электротепловые реле *Литература:* [6] с. 19...43 | 4 | - |
| 18 | Программируемые логические контроллеры. *Литература:* [7] с. 4...71 | 4 | - |
| 10, 15...17 | Электрические аппараты напряжением выше 1000 В. *Литература:* [5] с. 3...83 | 4 | - |
| Итого: | | 16 | 4 |

Таблица 3 – Перечень практических работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 10, 15...17, 21 | Выбор электрических аппаратов напряжением выше 1000 В. *Литература:* Конспект лекций, каталоги на электрические аппараты напряжением выше 1000 В | 8 | 4 |
| 2 | Выбор исполнения электрических и электронных аппаратов *Литература:* Конспект лекций, нормативно-техническая документация по указанию преподавателя, и каталоги на электрические аппараты | 8 | - |
| Итого: | | 16 | 4 |

## 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4. Понятие электродинамической силы (ЭС). Направления действия ЭС. Правило левой руки. Правило буравчика. Учет ЭС при расчёте и эксплуатации электрических аппаратов.
5. Электродинамические силы между параллельными проводниками на постоянном токе.
6. Расчёт электродинамических сил. Геометрический коэффициент. Коэффициент формы.
7. Электродинамические силы в кольцевом витке.
8. Учёт электродинамических сил между кольцевыми витками. Взаимодействие проводника с током с ферромагнитной массой.
9. Электродинамические силы на переменном токе.
10. Механический резонанс.
11. ВАХ газового разряда. ВАХ электрической дуги. Статическая и динамические ВАХ.
12. Виды ионизации и деионизации.
13. Распределение напряжения по дуговому столбу свободно горящей дуги. Короткая и длинная дуга.
14. Условия гашения дуги постоянного тока.
15. Перенапряжения при гашении дуги постоянного тока.
16. Особенности горения и гашения дуги переменного тока при активной нагрузке.

17. Особенности горения и гашения дуги переменного тока при сильно индуктивной нагрузке.
18. Способы гашения электрической дуги.
19. Магнитное дутье. Конструктивные решения.
20. Гашение дуги путём соприкосновения столба дуги с поверхностью холодного твердого диэлектрика. Конструктивные решения.
21. Гашение дуги путём повышения давления в дуговом промежутке. Конструктивные решения.
22. Гашение дуги при помощи дутья в дуговом промежутке. Конструктивные решения.
23. Гашение дуги в специальных средах (трансформаторном масле, элегазе, вакууме). Сравнительная характеристика.
24. Гашение дуги в деионизационной решётке М.О. Доливо-Добровольского.
25. Тиристорные пускатели. Достоинства и недостатки. Конструкция.
26. Устройства плавного пуска электродвигателей. Их отличие от тиристорного пускателя. Конструкция.
27. Понятие электрического контакта. Классификация контактов.
28. Материалы, используемые в конструкциях контактов и контактных соединений. Достоинства, недостатки. Области применения.
29. Конструкции контактов и области их применения.
30. Явление электрического контактирования. Переходное сопротивление контакта. Факторы, от которых зависит переходное сопротивление контакта.
31. Понятие износа контактов. Классификация причин износа. Износ контактов при отключении под действием электрических факторов на малых токах. Схемотехнические способы борьбы с износом на малых токах.
32. Износ контактов при отключении под действием электрических факторов на больших токах. Факторы износа.
33. Износ контактов при замыкании.
34. Виды потерь в электрических аппаратах. Потери в проводниках. Поверхностный эффект. Эффект близости.
35. Виды потерь в электрических аппаратах. Потери в деталях из магнитных материалов. Потери в изоляции.
36. Отдача тепла нагретым телом. Основные постулаты. Теплопроводность. Конвекция. Тепловое излучение. Коэффициент теплоотдачи.
37. Нагрев и охлаждение проводника в длительном режиме работы.
38. Нагрев и охлаждение проводника в кратковременном режиме работы.
39. Нагрев и охлаждение проводника в повторно-кратковременном режиме работы.
40. Нагрев и охлаждение проводника в режиме короткого замыкания. Понятие термической стойкости.
41. Вентильные разрядники и нелинейные ограничители перенапряжения. Назначения. Область применения. Конструкция. Выбор.
42. Трубчатые разрядники. Назначение. Область применения. Конструкция. Выбор.
43. Токоограничивающие реакторы. Назначение. Область применения. Конструкция. Выбор.
44. Элементы магнитной цепи. Схемы замещения магнитных цепей.
45. Законы Ома и Киргофа для магнитной цепи.
46. Особенности расчёта проводимости воздушного зазора.
47. Расчёт тороидальной магнитной цепи, содержащей сталь постоянного сечения и воздушный зазор.
48. Графоаналитический метод расчёта магнитной цепи. Расчёт разветвлённой магнитной цепи.
49. Расчёт магнитной цепи на переменном токе.

50. Учёт влияния короткозамкнутого витка при расчёте магнитной цепи на переменном токе.
51. Разъединители. Назначение. Классификация.
52. Основные параметры разъединителей. Выбор. Типы приводов.
53. Отделители и короткозамыкатели. Назначение. Область применения. Выбор.
54. Недостатки схемы подстанций с отделителем и короткозамыкателем. Условные обозначения. Выбор.
55. Выключатели нагрузки. Назначение. Классификация. Привод.
56. Двухпозиционные и трёхпозиционные выключатели нагрузки. Выключатели нагрузки с пристроенными предохранителями. Выбор выключателей нагрузки.
57. Выключатели. Назначение. Классификация. Выбор.
58. Способы гашения дуги у масляных баковых и маломасляных выключателей.
59. Способы гашения дуги у электромагнитных выключателей.
60. Способы гашения дуги у воздушных выключателей.
61. Схемы дугогасительных камер вакуумных выключателей. Требования к контактам вакуумных выключателей.
62. Способы гашения дуги у элегазовых выключателей.
63. Высоковольтные предохранители. Назначение. Классификация. Выбор.
64. Понятие токоограничения. Конструкция и материалы корпусов и плавких вставок. Металлургический эффект.
65. Измерительные трансформаторы тока. Назначение. Классификация.
66. Основные параметры измерительных трансформаторов тока.
67. Выбор измерительных трансформаторов тока.
68. Измерительные трансформаторы напряжения. Назначение. Классификация. Выбор.
69. Автоматические выключатели низкого напряжения. Назначение. Классификация. Виды встроенных расцепителей. Особенности конструкции.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 1 | Электрические и электронные аппараты [Текст]: учебник: в 2 т. Т. 1, Электромеханические аппараты / Е. Г. Акимов, Г. С. Белкин [и др.]; под ред.: А. Г. Годжелло, Ю. К Розанова. - М.: Академия, 2010. – 352 с.: ил. |
| 2 | Электрические и электронные аппараты [Текст]: учебник: в 2 т. Т. 2, Силовые электронные аппараты / А. П. Бурман, А. А. Кваснюк [и др.]; под ред. Ю. К. Розанова. - М.: Академия, 2010. – 320 с.: ил. |
| 3 | Чунихин А. А. Электрические аппараты [Текст]: общий курс. учебн. для вузов / А. А. Чунихин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 720 с.: ил. |

### 4.2 Дополнительная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 4 | Садовников, М.Е. Электрические и электронные аппараты [Текст]: учебн. пособие для студентов специальности 140604 - “Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) очного и заочного обучения. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. - 83 с. |
| 5 | Садовников М. Е. Контакторы, пускатели, электротепловые реле и предохранители [Текст]: учебн. пособие по дисциплине «Электрические и электронные аппараты» для |

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| | студентов специальности 140604 - “Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) очного и заочного обучения / М. Е. Садовников.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010.- 64 с. |
| 6 | Садовников М. Е. Электрические и электронные аппараты [Текст]: методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 140604 - “Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) очного и заочного обучения / М.Е. Садовников.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010.- 46 с. |
| 7 | Садовников М. Е. Электрические и электронные аппараты [Текст]: методическое пособие к лабораторным работам по дисциплине “Электрические и электронные аппараты” для студентов профилизации 180400-“Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) направления 654500 “Электротехника, электромеханика и электротехнологии”.- Изд-во УГГГА, 2004.- 71 с. |
| 8 | Садовников М. Е. Учебное пособие к практическим занятиям по дисциплине “Электроника и преобразовательная техника” для студентов профилизации “Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) направления 551300 “Электротехника, электромеханика и электротехнологии”: Часть 1.- Изд-во УГГГА, 2000.- 60 с. |
| 9 | Садовников М. Е. Учебное пособие к практическим занятиям по дисциплине “Электроника и преобразовательная техника” для студентов профилизации “Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов” (ЭГП) направления 551300 “Электротехника, электромеханика и электротехнологии”: Биполярные и полевые транзисторы. Часть 2.- Изд-во УГГГА, 2000.- 80 с. |

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Сайт компании ABB в России - http://new.abb.com/ru

Сайт компании Schneider Electric в России - http://www.schneider-electric.ru/ru/

Сайт компании Siemens в России - https://www.siemens.com/ru/ru/home.html

Сайт компании Mitsubishi Electric в России - https://www.mitsubishielectric.ru/

Сайт компании АО «Уралэлектротяжмаш» - http://www.uetm.ru/

Сайт компании ОАО «Карпинский электромашиностроительный завод» - http://www.aokemz.ru/

Сайт компании АО НПП «Контакт» - http://www.kontakt-saratov.ru/

Сайт компании АО «ГК «Таврида Электрик» - http://www.tavrida.com/ter/

Сайт компании ОАО «Свердловский завод трансформаторов тока» (СЗТТ) - http://www.cztt.ru/main.html

Сайт компании АО «Контактор» - http://www.kontaktor.ru/

ГК «Чебоксарский электроаппаратный завод» (ЧЭАЗ)Сайт компании АО «Курский электроаппаратный завод» (КЭАЗ) - http://www.keaz.ru/

Сайт группы компаний IEK - https://www.iek.ru/

ГК «Чебоксарский электроаппаратный завод» (ЧЭАЗ) - http://www.cheaz.ru/

Сайт компании ЗАО «Электротекс» - http:// http://etx-in.ru/

Сайт корпорации ТРИОЛ - https://triolcorp.ru/

Сайт компании ОАО «ВЭЛАН» - http://velan.ru/

Сайт компании ООО "Производственное предприятие шахтной электроаппаратуры" (ШЭЛА) - http://www.shela71.ru/

Сайт компании СТРОЙ-ЭНЕРГОМАШ - http://www.stemash.ru/

Сайт компании «ЕХС» - http://www.oaoex.ru/

Сайт компании Becker Mining Systems http://www.ru.becker-mining.com/ru/products

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

1. Бесплатная свободно распространяемая demo-версия программного обеспечение для разработки программ для программируемого логического контроллера (ПЛК) LOGO! фирмы Siemens (без функции записи программы в ПЛК) - пакет LOGO! Soft Comfort.
2. Microsoft Windows 8 Professional.
3. Microsoft Office Standard 2013.

Информационные справочные системы

ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri
E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
Комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

# Б1.В.02.06 ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Направление подготовки/ специальность -
***21.05.04 Горное дело***

Направленность(профиль)/ специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| Электрификации горных предприятий | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол №1 от 28.09.2021 г. | Протокол №2 от 12.10.2021 г. |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение……2
2. Тематический план дисциплины……..4
3. Указания по выполнению расчетно-графической работы…….5
4. Вопросы к экзамену по дисциплине……...15
5. Рекомендуемая литература……..16
5.1. Основная литература…….....16
5.2. Дополнительная литература…….16
Приложение. Исходные данные для расчетно-практической работы…….18

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Приобретение знаний, умений и навыков, необходимых студенту для осуществления практической деятельности, связанной с применением, выбором и эксплуатацией современных схем электроснабжения горных предприятий, комплектных распределительных устройств напряжением выше 1000 В, основной коммутационной аппаратуры, устройств релейной защиты и сетевой автоматики, а также элементов электрических сетей, таких, как силовые трансформаторы, линии электропередачи и др.

Изучение дисциплины решает задачу подготовки студентов к завершающему этапу обучения - дипломному проектированию, где один из разделов проекта «Внешнее электроснабжение» целиком базируется на знаниях, полученных в процессе изучения дисциплины.

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

– подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;

– самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;

– написание рефератов, докладов, эссе;

– подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;

– выполнение письменных контрольных и курсовых работ;

– подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;

– подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;

– другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4.1), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

**Для студентов очной формы обучения:**

| *№* | *Тема, раздел* | *Контактная работа обучающихся с преподавателем* | | | *Практическая подготовка* | *Самостоятельная работа* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *лекции* | *практич. занятия и др. формы* | *лаборат. занятия* | | |
| 1. | Общие сведения о системах электроснабжения горных предприятий | 2 | 1 | - | - | 4 |
| 2. | Электрические нагрузки горных предприятий | 4 | 2 | - | - | 8 |
| 3. | Электрические сети систем внешнего электроснабжения горных предприятий | 6 | 3 | - | - | 9 |
| 4. | Переходные процессы в системах электроснабжения горных предприятий | 6 | 3 | - | - | 10 |
| 5. | Подстанции и распределительные устройства | 4 | 2 | 6 | - | 6 |
| 6. | Защита электроустановок горных предприятий | 6 | 3 | 6 | - | 8 |
| 7. | Заземляющие устройства главных понижающих подстанций | 2 | 1 | - | | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8. | Устройства автоматики в системах электроснабжения горных предприятий | 2 | 1 | 4 | | 4 |
| 9. | Подготовка к экзамену | - | - | - | - | 27 |
| | **ИТОГО** | **32** | **16** | **16** | **-** | **80** |

**Для студентов заочной формы обучения:**

| *№* | *Тема, раздел* | *Контактная работа обучающихся с преподавателем* | | | *Практическая подготовка* | *Самостоятельная работа* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *лекции* | *практич. занятия и др. формы* | *лаборат. занятия* | | |
| 1. | Общие сведения о системах электроснабжения горных предприятий | 0,5 | - | - | - | 8 |
| 2. | Электрические нагрузки горных предприятий | 2 | 2 | - | - | 16 |
| 3. | Электрические сети систем внешнего электроснабжения горных предприятий | 2 | 2 | - | - | 20 |
| 4. | Переходные процессы в системах электроснабжения горных предприятий | 2 | 2 | - | - | 20 |
| 5. | Подстанции и распределительные устройства | - | - | 1 | - | 12 |
| 6. | Защита электроустановок горных предприятий | 1 | - | 1 | - | 16 |
| 7. | Заземляющие устройства главных понижающих подстанций | 0,5 | - | - | | 8 |
| 8. | Устройства автоматики в системах электроснабжения горных предприятий | - | - | - | | 10 |
| 9. | Подготовка к экзамену | - | - | - | - | 9 |
| | **ИТОГО** | **8** | **6** | **2** | **-** | **119** |

## 3. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Целью выполнения работы является закрепление теоретических положений дисциплины и формирование практических навыков и приемов проектирования систем электроснабжения предприятий.

Работа выполняется по заданию, которое выдается студенту или группе студентов. Работа выполняется во время практических занятий (20 часов) и самостоятельной работы студентов (ориентировочная трудоемкость 16 часов).

В работе необходимо выполнить следующее: произвести расчет электрических нагрузок; выбрать средства компенсации реактивной мощности; произвести выбор силовых трансформаторов ГПП; выполнить расчет питающих ЛЭП; выполнить расчет токов короткого замыкания на шинах РУ-6 (10) кВ ГПП; выбрать средства ограничения токов к.з.; выбрать основное электрооборудование ГПП (в том числе и кабельные вставки отходящих

ЛЭП); составить принципиальную электрическую схему главных цепей ГПП (чертеж на формате А1); предусмотреть необходимый объем релейной защиты одного из элементов системы электроснабжения или крупного электроприемника; определить необходимые уставки и настройки; выполнить расчет устройств заземления и грозозащиты электрооборудования ГПП.

Работа выполняется в виде пояснительной записки с необходимыми расчетами, пояснениями и обоснованиями. Записка ориентировочным объемом 25-30 страниц выполняется на бумаге формата А4 рукописным или печатным образом. Графическая часть работы выполняется на листе формата А1.

При выполнении расчетно-графической работы студенты могут руководствоваться учебным пособием для курсового и дипломного проектирования [2].

### 3.1. Методические указания по расчету электрических нагрузок.

В соответствии с полученным вариантом задания на расчетную работу следует исходные данные извлечь из общего массива и привести их в более удобном для практического использования виде – в виде таблицы «Исходные данные по электроприемникам предприятия» Пример таблицы с исходными данными приведен ниже.

**Исходные данные по электроприемникам предприятия**

Таблица 1

| Наименование потребителя или электроприемника (ЭП) | Кол-во в работе | Тип ЭП | Номин.единичная мощность ЭП, кВТ/кВ А* | Линия от ЗРУ до ЭП | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Тип линии | Длина линии, м |
| Компрессоры | 2 | СД | 320 | КЛ | 100 |
| Центральная подземная подстанция (включая главный водоотлив) | 2 | АД | 2х1250 | КЛ | 800 |
| Электроприемники промплощадки (КТП-6/0,4 кВ) | 1 | ТМ | 2х1000* | КЛ | 400 |
| Электроприемники отопительной котельной (КТП-6/0,4 кВ) | 1 | ТМ | 2х630* | КЛ | 1600 |
| ЛЭП «Карьер» (экскаваторы, буровые станки) | 3 | СД | 1500 | ВЛ | 2000 |

Дополнительные сведения:

- напряжение питающих ЛЭП – 110 кВ;
- протяженность питающих ЛЭП (от РПС до ГПП) – 25 км;
- мощность короткого замыкания на шинах РПС – 1500 МВ А;
- допустимый ток короткого замыкания на шинах ЦПП – 5 кА;
- рассмотреть РЗ и А фидера «Карьер».

Обозначения в таблице: СД – синхронный двигатель; АД – асинхронный двигатель; ТМ – трехфазный силовой трансформатор с масляным охлаждением; КЛ – кабельная линия; ВЛ – воздушная линия.

Электроприемники (ЭП) предприятия необходимо проанализировать с точки зрения последствий от перерывов электроснабжения и определить категории, к которым относятся те или иные ЭП. Категории ЭП приведены в Правилах устройства электроустановок (ПУЭ). В зависимости от категории необходимо обосновать необходимое количество источников питания для ЭП предприятия, способ резервирования источников питания и питающих ЛЭП (допускается без резерва, допустимо явное резервирование, требуется применить неявное резервирование); конструктивное исполнение питающих ЛЭП (воздушная ЛЭП или кабельная; одноцепные ЛЭП или двухцепные); необходимый способ включения резервного питания (обязательно АВР или допускается без него) и др. На основании такого анализа составляется структурная схема внешнего электроснабжения предприятия.

Кроме того, при составлении структурной схемы необходимо электроприемники предприятия распределить по узлам электрических нагрузок, соблюдая требования ПУЭ по резервированию питания. При этом нагрузку по секциям шин подстанций следует распределить по возможности равномерно; синхронные двигатели также распределить по узлам нагрузок во избежание значительного перекоса по реактивной мощности; электроприемники, работающие на один технологический процесс, запитать желательно от разных источников. Необходимо помнить, что в расчете электрических нагрузок учитываются только электроприемники, которые могут находится в одновременной работе. Резервные электроприемники, находящиеся в ремонте, в расчете нагрузок не учитываются.

Расчет электрических нагрузок является основой для выбора мощности трансформатора ГПП, для выбора компенсирующих устройств, для выбора сечения проводников ЛЭП и решения других задач.

Для расчета электрических нагрузок систем внешнего электроснабжения горных предприятий наиболее широко используют метод коэффициентов спроса и установленной мощности электроприемников [1,2]. Установленную мощность электроприемников определяют по их паспортным данным и в зависимости от продолжительности рабочего режима.

Коэффициенты спроса принимают по справочной и нормативной литературе [6, 9] Кроме того, в этих источниках приводятся расчетные значения коэффициентов мощности. Для расчета электрических нагрузок необходимо электроприемники предприятия разделить на отдельные группы однородных по режиму работы электроприемников (насосы, вентиляторы, экскаваторы, подъемные установки, компрессоры и т.д.).

Для удобства результаты расчетов представляют в виде таблицы – **Формуляра электрических нагрузок.**

При составлении формуляра электрических нагрузок все потребители электроэнергии независимо от их напряжения следует сгруппировать по отдельным узлам электрических нагрузок (секциям шин ГПП, секциям шин распределительных пунктов РП, отдельным крупным фидерам и т. д.). Это в дальнейшем облегчит расчет электрических сетей предприятия.

В графе 2 формуляра указываются потребители электроэнергии (экскаваторы, буровые станки, установки освещения, конвейеры, водоотливные установки и пр.), подключаемые по проекту к конкретному узлу системы электроснабжения.

Для потребителей электроэнергии напряжением 6(10) кВ необходимо в графе 2 дополнительно указать наименование электроприемников на это напряжение (для экскаваторов это сетевые двигатели и трансформаторы собственных нужд ТСН).

В графе 3 формуляра указывается количество электроприемников (двигателей, трансформаторов, ламп и т. п.), установленных на соответствующих потребителях.

В графах 4 и 5 указываются установленная (номинальная) мощность одного электроприемника и общая установленная мощность группы однородных по режиму работы электроприемников. Эти данные по электроприемникам берутся из их технических данных и справочной литературы.

В графах 6 и 7 указываются коэффициенты спроса $K_c$ и расчетные коэффициенты мощности cos $\varphi_p$ для потребителей электроэнергии, принятые по справочной литературе. При заполнении формуляра следует учитывать, что синхронные двигатели, как правило, работают с опережающим коэффициентом мощности cos $\varphi_p$ (оп).

В графе 7 также приводятся значения tg $\varphi_p$, соответствующие расчетным коэффициентам мощности cos $\varphi_p$.

При работе электроприемника с опережающим коэффициентом мощности cos $\varphi_p$ (оп) значения функции tg $\varphi_p$ заносятся в формуляр со знаком «–» – минус.

Расчетные значения активной, реактивной и полной мощности групп электроприемников заносятся, соответственно, в графы 8, 9 и 10.

Для узла электрических нагрузок алгебраическим суммированием (т. е. с учетом знаков) определяют:

- сумму расчетных максимумов активной нагрузки $\sum P_м$;

- сумму расчетных максимумов реактивной нагрузки $\sum Q_м$

При этом следует иметь в виду, что итоговое значение $\sum Q_м$ в целом по узлу нагрузок должно быть положительным и минимально возможным для конкретных условий. Если при первоначальных прикидочных расчетах окажется, что $\sum Q_м$ при работе синхронных двигателей с опережающим коэффициентом мощности cos $\varphi_p$ (оп) окажется отрицательной, то следует перевести синхронные двигатели на работу с более высоким коэффициентом мощности (вплоть до 1) и внести соответствующие изменения в формуляр электрических нагрузок.

Пример выполнения расчета электрических нагрузок по **Исходным данным** (смотри таблицу выше) приведен в сканированных файлах, приведенных в папке «Б1.Б.20 Электроснабжение предприятий. Практика. Расчет электрических нагрузок».

### 3.2. Методические указания по выбору мощности трансформаторов ГПП

Практически на всех горных предприятиях имеются электроприемники I и II категорий. При этом электрические нагрузки от электроприемников I категории обычно незначи-

тельны, а основная нагрука создается элетроприемниками II и частично III категорий. Необходимость выполнения требований ПУЭ в части обеспечения надежности электроснабжения электроприемников I и II категорий приводит к проектированию резервированных схем электроснабжения, более сложных и дорогих по сравнению с нерезервирванными. При этом предпочтение из экономических соображений обычно отдается схемам неявного резервирования, в которых используется допустимая перегрузочная способность элементов сети.

В соответствии с руководящими указаниями по проектированию электроснабжения и нормами технологического проектирования систем электроснабжения при решении схемных вопросов следует отдавать преимущество подстанциям глубокого ввода (ПГВ) с максимально возможным приближением напряжения 35 – 220 кВ к потребителям и с наименьшим числом ступеней трансформации. Выполнение этого требования позволяет снизить потери электрической энергии в распределительных сетях, уменьшить их стоимость и упростить задачу прокладки этих сетей в условиях насыщенности промплощадки другими инженерными коммуникациями. Кроме того, горные предприятия, как правило, находятся на значительном удалении (не менее 20 – 50 км) от сетей энергосистем и районных подстанций. Поэтому для передачи электрической энергии, как правило, используются магистральные воздушные ЛЭП напряжением 35 – 110 кВ (иногда 220 кВ).

Для приема, преобразования и распределения электрической энергии на территории предприятия сооружается одна или несколько главных понижающих подстанций (ГПП). Питание ГПП (или ПГВ) от сетей энергосистемы должно выполняться не мене чем по двум линиям, подключенным к независимыми и взаиморезервируемым источникам питания.

Распределительные сети на горных предприятиях выполняются, как правило, на напряжение 6 кВ, так как в России за долгие годы выпущено и эксплуатируется значительное количество мощных горных машин, дробилок, мельниц, подъемных установок, вентиляторов главного проветривания и других электроустановок на это напряжение.

Для повышения надежности электроснабжения главные понижающие подстанции ГПП выполняются, как правило, двухтрансформаторными с трансформаторами одинаковой мощности, что необходимо для обеспечения однотипности применяемого на ГПП электрооборудования. Более двух трансформаторов на ГПП предусматривают в случаях использования на предприятии электроприемников с резкопеременной нагрузкой (электрифицированный ж.д.транспорт, дуговые сталеплавильные печи, дуговая электросварка и т.п.). Силовые трансформаторы размещаются, как правило, на территории открытого распределительного устройства (ОРУ) напряжением 35-110 кВ. В нормальном режиме оба трансформатора работают раздельно на разные секции шин закрытого распределительного устройства ЗРУ-6 кВ. В электротехническом помещении ЗРУ-6 кВ устраивается секционированная система шин, состоящая из двух секций, между которыми предусмотрен секционный выключатель (СВ). В нормальном режиме работы СВ отключен и секции шин ЗРУ-6 кВ работают раздельно. Таким образом электроприемники предприятия получают питание по двум вводам и от разных источников. При повреждении электрооборудования одного ввода поврежденный ввод отключают с обеих сторон, после чего СВ включают (автомати-

чески при наличии электроприемников I категории или вручную) и электроснабжение электроприемников предприятия будет выполняться от одного исправного ввода. Этот режим работы системы электроснабжения называется послеаврийным.

В послеаврийном режиме оставшийся в работе трансформатор должен обеспечить бесперебойную работу электроприемников I и II категории и взять не менее 75...80 % расчетной нагрузки. Кроме того, мощность трансформаторов выбирают с учетом их допустимой перегрузочной способности (см. лекцию №7).

При эксплуатации трансформатора, кроме относительно длительных послеаварийных перегрузок допускается кратковременные перегрузки. Эти аварийные перегрузки не зависят от предшествующего режима работы, являются кратковременными и используется для прохождения максимума нагрузки. Для трансформаторов с масляным охлаждением (со всеми его видами: М, Д, Ц, ДЦ) аварийные перегрузки составляют не более 30% продолжительностью не более 120 минут.

При выборе мощности трансформаторов намечают, как правило, два варианта трансформаторов с разной мощностью, которые в дальнейшем сравнивают с помощью технико-экономических расчетов.

### 3.3. Методические указания по расчету электрических сетей

В соответствии с заданием на расчетную работу студентам необходимо выполнить электрические расчеты линий электропередач (ЛЭП) напряжением выше 1000 В. В выполняемых заданиях к таким линиям относятся:

- питающие ЛЭП напряжением 35 или 110 кВ (в зависимости от варианта расчетной работы);

- распределительные (отходящие) кабельные и воздушные ЛЭП напряжением 6 кВ;

- кабельные вставки напряжением 6 кВ, с помощью которых осуществляется передача электрической энергии от ячеек ЗРУ подстанции (ГПП) на отходящие воздушные ЛЭП напряжением 6 кВ.

Электрические расчеты ЛЭП производятся с целью определения сечений проводников линий по условиям воздействия токовой нагрузки в нормальных, аварийных и послеаварийных режимах. Кроме того, при выборе сечений проводников ЛЭП должны учитываться требования ПУЭ и ГОСТ в части качества передаваемой электрической энергии и экономические показатели электроснабжения. Методы электрических расчетов и требования нормативных документов к проводникам различных ЛЭП рассмотрены в материалах лекций №8…№10 курса «Основы электроснабжения горных предприятий».

Последовательность выполнения расчетов обычно следующая:

- Формирование нормальных и послеаварийных токовых нагрузок по каждой линии (на основе расчета электрических нагрузок);

- определение типа электрической связи (воздушная линия, кабельная линия, магистральный шинопровод);

- выбор экономических сечений проводников (ПУЭ, глава 1.3) для нормального режима работы;

- проверка проводника выбранного сечения по допустимой токовой нагрузке нормального и послеаварийного режимов (ПУЭ, глава 1.3);

- ориентировочная проверка проводов воздушных линий электропередачи по механической прочности (ПУЭ, глава 2.5 и табл. 2.5.5);

- проверка проводов воздушных ЛЭП напряжением более 35 кВ по условиям коронообразования и радиопомех (ПУЭ, глава 1.3, глава 2.5 и табл. 2.5.6)

- проверка жил выбранных кабелей на термическую стойкость к токам короткого замыкания;

- проверка проводников воздушных и кабельных линий по потере напряжения;

- проверка магистральных шинопроводов на электродинамическую стойкость.

Выбранный провод (сечение жилы кабеля, тип шинопровода) должны удовлетворять наиболее жесткому из указанных условий, любое из которых может оказаться определяющим.

Питающие линии напряжением 35 – 110 кВ предназначены для передачи электрической энергии от источников питания (одна или несколько районных подстанций – РПС) до главной понижающей подстанции предприятия (ГПП). Как правило, питающие ЛЭП на 35-110 кВ выполняются двумя воздушными линиями на одноцепных или двухцепных опорах. В соответствии с НТП ЭПП-94 для предприятий, на которых преобладают электроприемники I категории, питающие линии следует выполнять на одноцепных опорах, проложенных по разным трассам. Для предприятий с преобладанием электроприемников II и III категорий питающие линии могу быть выполнены на двухцепных опорах, что при питании от разных секций шин одной РПС является более рациональным. Следует напомнить, что использование двухцепных ЛЭП напряжением 35 кВ и выше отражается на выборе сечения проводов ВЛ по условиям механической прочности и требует применения проводов сечением не менее 120 мм2.

Сечение проводов стационарных воздушных ЛЭП напряжением 6(10) кВ выбирается и проверяется по всем условиям, применяемым для воздушных ЛЭП напряжением 35-110 кВ, за исключением проверки по условиям коронообразования и радио помех. Дополнительно к этому провода временных и передвижных ВЛ напряжением 6(10) кВ (к таким относятся внутрикарьерные распределительные сети и ЛЭП «Карьер») не проверяют по экономической плотности тока, так как основной статьей расходов по таким ВЛ являются эксплуатационные расходы, связанные с частыми работами по монтажу – демонтажу и переносу таких линий.

По этим же причинам гибкие кабели самоходных горных машин (карьерных экскаваторов, буровых станков) так же не проверяют по экономическим критериям. Электрические расчеты по выбору сечения токоведущих жил бронированных и небронированных кабелей **(в том числе кабельных вставок)** напряжением выше 1000 В, предназначенных для стационарной прокладки, выполняют, как правило, в следующей последовательности:

- выбор сечения жил кабеля по экономической плотности тока;

- проверка жил выбранного кабеля по длительно допустимому току нормального и послеаварийного режимов;

- расчет кабельной линии на термическую стойкость к токам короткого замыкания;

- проверка кабельной линии по потере напряжения.

Марка кабеля выбирается в зависимости от условий эксплуатации и способа прокладки кабельной линии (табл.1).

Таблица 2

Рекомендуемые для применения марки кабелей

| Способ прокладки | Марки кабелей | |
|---|---|---|
| | При отсутствии растягивающих усилий, механических воздействий | При наличии растягивающих усилий, механических воздействий |
| В траншее (в земле) | ААШВ, ААБ, АСБ | ААП, АСП |
| В кабельных каналах, тоннелях (сырые помещения) | ААШВ, ААГ, АСГ | ААБлГ, АСБлГ |
| В пожароопасных помещениях, по кабельным конструкциям | ААШВ, ААГ, АСГ | ААПГ, АСПГ, ЦСПн, ЦСКн ЦАСПн, ЦАСКн |
| При крутонаклонной и вертикальной прокладке | ЦСПн, ЦСКн, ЭВТ ЦАСПн, ЦАСКн | ЦСПн, ЦСКн, ЭВТ ЦАСПн, ЦАСКн |
| Во взрывоопасных зонах | СБГ, СБШВ | СПГ |

Кабели любой конструкции даже самого малого сечения, выпускаемые отечественными производителями, являются механически прочными при горизонтальной или слабонаклонной (до 45 градусов) прокладке. Для вертикальной или крутонаклонной (более 45 градусов) прокладке в стволах необходимо использовать бронированные кабели конструкции, которых должны удовлетворять следующим требованиям:

- кабели должны иметь прочную броню, предохраняющую изоляцию и токоведущие жилы от механических повреждений и растягивающих усилий: для этой цели применяется броня, выполненная из стальных круглых или плоских оцинкованных проволок, так называемая несущая броня;

- кабели должны быть устойчивы против сырости, окисления и разъедания: для этого предназначена герметизирующая оболочка (свинцовая, алюминиевая или поливинилхлоридная);

- в кабеле не должно создаваться гидростатических давлений вследствие стекания изоляционной пропиточной массы на основе церезина или жилы кабеля должны иметь пластмассовую изоляцию (кабели типа ЭВТ);

- конструкция кабеля должна быть устойчива против вибраций.

Этим требованиям соответствуют кабели марок ЦСПн или ЦСКн, которые имеют медные жилы с бумажной изоляцией, пропитанной нестекающей массой на основе церезина, свинцовую оболочку, бронированные плоскими или круглыми стальными оцинкованными проволоками с негорючим наружным покровом. Эти кабели допускаются к применению в пожароопасных помещениях, в шахтах при значительных растягивающих усилиях, на вертикальных и крутонаклонных трассах, без ограничения разности уровней прокладки. Кабели с алюминиевыми жилами типа ЦАСКн и ЦАСПн предназначены для прокладки в тех же условиях, что и кабели типа ЦСКн и ЦСПн за исключением прокладки в стволах угольных шахт.

В соответствии с ВНТП 13-2-93 (ведомственные нормы технологического проектирования) для рудников цветной металлургии «питание центральных подземных подстанций напряжением 6 и 10 кВ предусматривать не менее чем по двум кабельным фидерам: при выходе из строя одного из них оставшийся в работе должен обеспечить 100%-ную нагрузку потребителей I и II категорий» (п.7.3.3). Там же в п. 7.3.4 «питание подстанций насосных главного водоотлива осуществлять по самостоятельным линиям от поверхностных подстанций. При этом каждая линия должна быть рассчитана на 100%-ную нагрузку.

При расчете электрических нагрузок на подстанциях насосных водоотлива следует учитывать все насосные агрегаты (рабочие и резервные)».

«Минимальное сечение питающих кабелей, прокладываемых по вертикальному стволу, необходимо принимать 35мм$^2$, максимальное – не более 185 мм$^2$» (п.7.3.5).

### 3.4. Методические указания по расчетам токов короткого замыкания в сетях напряжением выше 1000 В.

Для расчета токов короткого замыкания составляют расчетную схему. Расчетная схема составляется на основе анализа схемы электроснабжения предприятия в зависимости от целей расчета и представляет собой однолинейную электрическую схему. На расчетной схеме указывают все источники питания точки КЗ (генераторы энергосистемы), силовые трансформаторы и автотрансформаторы, воздушные и кабельные линии электропередачи, токоограничивающие реакторы, синхронные компенсаторы, мощные синхронные и асинхронные электродвигатели, а также основные параметры перечисленных элементов. Коммутационные аппараты на расчетной схеме не приводятся. Резервные элементы указываются в том случае, если в нормальном режиме допустима их параллельная работа с основными.

При расчете начального действующего значения периодической составляющей тока трехфазного короткого замыкания в электроустановках выше 1000 В в исходную расчетную схему должны быть введены все синхронные генераторы и компенсаторы, а также синхронные и асинхронные электродвигатели мощностью 100 кВт и более, если между электродвигателем и точкой КЗ отсутствуют токоограничивающие реакторы или силовые трансформаторы.

Расчетная схема составляется с учетом назначения расчетов:

- для выбора и проверки электрооборудования расчетная схема должна соответствовать максимально возможным токам КЗ;

- для настройки и оценки чувствительности релейных токовых защит расчетная схема должна соответствовать минимально возможным токам КЗ.

В связи с этим при схеме внешнего электроснабжения, построенной по принципу неявного резерва, максимально возможный ток КЗ на шинах ЗРУ-6(10) кВ будет при питании обеих секций шин через включенный секционный выключатель от одного силового трансформатора (т. е. в послеаварийном режиме). В этом случае в точку КЗ будут поступать токи от энергосистемы и от всех электродвигателей напряжением выше 1000 В.

Минимально возможный ток КЗ за силовым трансформатором будет иметь место на шинах ЗРУ-6(10) кВ при нормальной схеме и без учета токов подпитки от электродвигателей.

На расчетной схеме указываются расчетные точки, в которых требуется определить токи короткого замыкания. В выполняемом расчетном задании необходимо определить токи КЗ в 2 – 3 точках. Точка К1 расположена на стороне ВН перед силовым трансформатором ГПП. Знание токов КЗ в точке К1 необходимо для проверки электрооборудования ОРУ ГПП на устойчивость к токам короткого замыкания. Точка К2 расположена на шинах ЗРУ-6 кВ ГПП. Токи КЗ в этой точке необходимы для проверки электрооборудования ЗРУ-6 кВ и проверки отходящих кабелей на термическую стойкость. В некоторых вариантах заданий имеются ограничения по токам короткого замыкания в точке К3, которая находится на шинах ЦПП или шинах дренажной шахты. Могут потребоваться расчеты токов КЗ и в других точках для выбора уставок и проверки чувствительности токовых защит отдельных электроустановок или присоединений.

По расчетной схеме составляют схему замещения, в которой трансформаторные связи заменяют электрическими. Элементы системы электроснабжения вводят в схему замещения как сопротивления, а источники энергии как сопротивления и ЭДС (электродвижущие силы).

В сетях напряжением выше 1000 В при расчете токов КЗ наиболее широко используют параметры цепей в относительных базисных единицах. При расчете тока КЗ в относительных базисных единицах упрощаются вычисления. Кроме того, этот метод позволяет учитывать типовые характеристики источников питания и электрических двигателей. Для перевода параметров схемы замещения СЭС и показателей режима в относительные единицы (о.е.) устанавливаются базовые значения мощности $S_б$, напряжения $U_б$, тока $I_б$ и сопротивлений $Z_б$. Из четырех базовых величин две являются независимыми (могут выбираться произвольно), две другие определяются из известных соотношений.

За базисную мощность $S_б$ обычно принимают 100 МВ·А, 1000 МВ·А или номинальную мощность какого-либо элемента системы, если она повторяется в расчетах несколько раз, или суммарную рабочую мощность энергосистемы, от которой осуществляется электроснабжение предприятия. **Значение базисной мощности принимается единым** для всех ступеней трансформации СЭС.

За базисное напряжение $U_б$ принимают среднее номинальное напряжение ступени, на которой определяют ток КЗ ($U_б = U_{ср}$ **= 6,3**;10,5; **37**; **115**; 230 кВ). Эти значения соответствуют требованиям ГОСТ и для расчетов **принимается столько базисных напряжений сколько ступеней** трансформации в рассматриваемой СЭС.

Системы электроснабжения современных горных предприятий характеризуются разветвленной сетью напряжением 6 кВ с двигательной нагрузкой (сетевые двигатели преобразовательных агрегатов, вентиляторы главного проветривания, главные водоотливные установки, стационарные компрессоры, шаровые мельницы и пр.) При возникновении короткого замыкания в сети 6 кВ напряжение в точке КЗ становится равным нулю и работающие двигатели преобразуются в электрические генераторы. Это происходит по следующим причинам:

- у двигателя, работающего с номинальными параметрами и номинальной скоростью, эдс на зажимах в момент возникновения КЗ близка к номинальному напряжению сети;

- вследствие сохранения инерции вращения ротора в первые периоды возникновения режима КЗ двигатель генерирует эдс свободного выбега.

В таких сетях токи подпитки от двигателей могут быть значительными и соизмеримыми с токами КЗ от энергосистемы. Синхронные и асинхронные электродвигатели влияют на общий ток короткого замыкания по-разному: эдс свободного выбега у асинхронных двигателей затухает много быстрее, чем у синхронных двигателей, так как в момент возникновения режима КЗ одновременно с снижением напряжения питания до нуля снижается и магнитное поле обмотки статора. У двигателя синхронного магнитное поле создается током возбуждения обмотки ротора и для гашения магнитного поля требуется некоторое время из-за электромагнитной инерции. В связи с этим асинхронные электродвигатели оказывают влияние только на сверхпереходный $I''$ток и на ударный $i_{уд}$ ток. Двигатели синхронные влияют, помимо указанных, на токи $I_{nt}$ и на установившийся ток $I_{\infty}$.

Более подробно и детально с расчетами токов КЗ необходимо разобраться с помощью приложенного к этому файлу примера.

## 4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ»

1. Энергетическая система России и её составные части. Типы электростанций.
2. Уровни стандартных номинальных напряжений источников и электроприемников.
3. Основные требования к системам внешнего электроснабжения предприятий.
4. Классификация электроприемников по степени надежности их электроснабжения.
5. Радиальные и магистральные схемы внешнего электроснабжения предприятий. Их особенности, достоинства и недостатки.
6. Типовые схемы внешнего электроснабжения предприятий. Способы резервирования источников и электрических сетей.
7. Графики электрических нагрузок, их основные показатели и практическое использование.
8. Расчет электрических нагрузок методом коэффициента спроса.
9. Коэффициент мощности электроустановок. Способы повышения коэффициента мощности.
10. Выбор силовых трансформаторов главных понижающих подстанций.
11. Картограмма электрических нагрузок. Определение символического центра электрических нагрузок.
12. Выбор проводников по допустимому току нормального и форсированного режимов работы.
13. Выбор сечения проводников по экономической плотности тока.
14. Выбор проводников по допустимой потере напряжения.
15. Выбор проводников по электродинамической и термической стойкости.
16. Конструкции воздушных ЛЭП. Типы опор, марки и сечения проводов, изоляторы.
17. Конструкции кабельных ЛЭП. Способы прокладки. Защита от механических повреждений.
18. Потери мощности и электрической энергии в элементах системы электроснабжения. Способы снижения потерь.

19. Методика технико-экономического сравнения вариантов при выборе схем электроснабжения.
20. Причины и виды коротких замыканий в системах электроснабжения.
21. Процесс протекания короткого замыкания. Периодическая и апериодическая составляющие тока к.з. Ударный ток к.з.
22. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В в именованных единицах. Расчетная и эквивалентная схемы.
23. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В в относительных единицах.
24. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В по расчетным кривым (кривым затухания).
25. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В с двигательной нагрузкой.
26. Методы преобразования схем замещения при определении токов к.з.(кроме метода коэффициентов распределения).
27. Преобразование схем замещения при определении токов к.з. методом коэффициентов распределения.
28. Способы ограничения токов к.з. Выбор и проверка реакторов.
29. Выбор высоковольтных выключателей и ячеек КРУ.
30. Выбор выключателей нагрузки и предохранителей.
31. Выбор разъединителей, отделителей и короткозамыкателей.
32. Выбор и проверка трансформаторов тока. Кривые 10%-ной погрешности, их применение.
33. Основные требования к релейной защите.
34. Схема соединения ТТ и обмоток реле в полную звезду, особенности работы схемы в цепях релейной зашиты, область применения.
35. Схема соединения ТТ и обмоток реле в неполную звезду, особенности работы схемы в цепях релейной зашиты, область применения.
36. Схема соединения ТТ в треугольник и обмоток реле в звезду, особенности работы схемы в цепях релейной зашиты, область применения.
37. Схема с двумя ТТ и одним реле, включенным на разность токов двух фаз, особенности работы схемы в цепях релейной защиты, область применения.
38. Максимальная токовая защита. Назначение, принцип действия, условия настройки.
39. Максимальная токовая отсечка. Назначение, принцип действия, условия настройки.
40. Продольная дифференциальная защита. Назначение, принцип действия, условия настройки.
41. Защита от однофазных замыканий на землю в сетях напряжением выше 1000 В с изолированной нейтралью.
42. Требования ПУЭ по выполнению релейных защит силовых трансформаторов. Схемы защит, условия настройки.
43. Требования ПУЭ по выполнению релейных защит электродвигателей напряжением выше 1000 В. Схемы защит, условия настройки.
44. Общий характер растекания тока в земле. Напряжение шага и напряжение прикосновения. Способы выравнивания потенциалов.
45. Требования ПУЭ по выполнению заземляющих устройств. Нормы допустимых значений сопротивления заземляющих устройств ГПП.
46. Методика расчета заземляющих устройств ГПП.
47. Стержневые и тросовые молниеотводы. Зоны защиты молниеотводов. Заземляющие устройства молниеотводов.

## 5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 5.1. Основная литература

1. Плащанский Л.А. Основы электроснабжения горных предприятий. Учебник для вузов. М.: Изд-во МГГУ, 2005, 499 с.

2. Плащанский Л.А. Основы электроснабжения горных предприятий. Учебное пособие. М.: Изд-во МГГУ, 2006, 116 с.

### 5.2. Дополнительная литература

3. Андреев В.А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения: Учебник для вузов – 5-е изд. стер. М.: Высшая школа, 2007, 639 с.

4. Старков В.В. Основы электроснабжения и электротехнические системы. Релейная защита элементов систем электроснабжения горных предприятий. Учебное пособие. Издание УГГГА, 2003, 35 с.

5. Руководящие указания по расчету токов короткого замыкания и выбору электрооборудования (РД 153-34.0-20.527-98) /Под ред. Б.Н. Неклепаева. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2006, 144 с.

6. Справочник по проектированию электроснабжения / Под ред. Ю.Г. Барыбина и др. М.: Энергоатомиздат, 1990.

7. Справочник энергетика /Под ред. А.Н. Чохонелидзе. М.: Колос, 2006, 488 с.

8. Ополева Г.Н. Схемы и подстанции электроснабжения: Справочник: Учебное пособие. М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2006, 480 с.

**Приложение. Исходные данные для расчетно-практической работы**

| Наименование потребителей или электроприемников (ЭП) | Параметры ЭП | Варианты заданий | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| | | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
| Вентилятор главного проветривания | Кол-во, Тип ЭП | 2 СД | 1 СД | 1 СД | 1 СД | 1 СД | - | - | - | - | |
| | Номинальн. мощн. кВт | 630 | 1250 | 1500 | 1000 | 840 | - | - | - | - | |
| | Тип, длина линии , м | КЛ, 400 | КЛ, 300 | КЛ, 250 | КЛ, 300 | КЛ, 250 | - | - | - | - | |
| Клетевой подъем | Кол-во, Тип ЭП | 1 АД | 1 АД | 1 АД | 1 АД | 1 АД | - | - | - | - | |
| | Номинальн. мощн. кВт | 1250 | 630 | 1250 | 630 | 630 | - | - | - | - | |
| | Тип, длина линии, м | КЛ, 350 | КЛ, 200 | КЛ, 280 | КЛ, 200 | КЛ, 250 | - | - | - | - | |
| Скиповой подъем | Кол-во, Тип ЭП | 2 АД | 2 АД | 2 АД | 2 АД | 2 АД | - | - | - | - | |
| | Номинальн. мощн. кВт | 1000 | 1000 | 1600 | 1600 | 1000 | - | - | - | - | |
| | Тип, длина линии, м | КЛ, 350 | КЛ, 200 | КЛ, 300 | КЛ, 200 | КЛ, 230 | - | - | - | - | |
| Компрессор | Кол-во, Тип ЭП | 2 СД | 3 СД | 3 СД | 4 СД | 3 СД | 2 СД | 3 СД | - | - | |
| | Номинальн. мощн. кВт | 540 | 520 | 440 | 360 | 320 | 630 | 340 | - | - | |
| | Тип,длина линии, м | КЛ, 400 | КЛ, 180 | КЛ, 200 | КЛ, 400 | КЛ, 160 | КЛ, 300 | КЛ, 200 | - | - | |
| Центральная подземная подстанция, включая водоотлив | Кол-во, Тип ЭП | 2 АД | 2 АД | 2 АД | 2 АД | 1 АД | - | - | - | - | |
| | Номинальн. мощн. кВт | 2*630 | 2*800 | 2*560 | 2*940 | 2*1250 | - | - | - | - | |
| | Тип,длина линии, м | КЛ, 800 | КЛ, 1000 | КЛ, 800 | КЛ, 860 | КЛ, 860 | - | - | - | - | |
| Электроприемники промплощадки (КТП – 6/0,4 кВ) | Кол-во, Тип ЭП | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | |
| | Номинальн. мощн. кВ А | 2*1000 | 2*1600 | 2*630 | 2*630 | 2*1000 | 2*1000 | 2*1000 | 2*630 | 2*1600 | 2 |
| | Тип, длина линии, м | КЛ, 200 | КЛ, 200 | КЛ, 160 | КЛ, 100 | КЛ, 180 | КЛ, 180 | КЛ, 100 | КЛ, 180 | КЛ, 180 | |
| Электроприемники отопительной котельной (КТП – 6/0,4 кВ) | Кол-во, Тип ЭП | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | 1 ТМ | |
| | Номинальн. мощн. кВ А | 2*630 | 2*630 | 2*400 | 2*630 | 2*400 | 2*630 | 2*400 | 2*400 | 2*400 | |
| | Тип, длина линии, м | ВЛ. 2000 | ВЛ, 1600 | ВЛ, 1400 | ВЛ, 1200 | ВЛ, 800 | ВЛ, 1500 | ВЛ, 1000 | ВЛ, 1500 | ВЛ, 1350 | |

**Таблица (продолжение)**

| Наименование потребителей или электроприемников (ЭП) | Параметры ЭП | Варианты заданий | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| ЛЭП «Карьер» (экскаваторы, буровые станки) | Кол-во, Тип ЭП | - | - | - | - | - | 2 СД | 4 АД | 2 АД | 2 АД |
| | Номинальн. мощн. кВт | - | - | - | - | - | 1500 | 1200 | 1440 | 1680 |
| | Тип, длина линии, м | - | - | - | - | - | ВЛ, 1800 | ВЛ, 1300 | ВЛ, 1500 | ВЛ, 1800 |
| Электроприемники обогатительной фабрики (КТП – 6/0,4 кВ) | Кол-во, Тип ЭП | - | - | - | - | - | - | 1 ТМ | 2 ТМ | 2 ТМ |
| | Номинальн. мощн. кВ А | - | - | - | - | - | - | 2*1600 | 2*1000 | 2*1000 |
| | Тип, длина линии, м | - | - | - | - | - | - | КЛ, 300 | КЛ, 400 | КЛ, 600 |
| Дробилка конусная | Кол-во, Тип ЭП | - | - | - | - | - | - | 2 АД | 1 АД | 1 АД |
| | Номинальн. мощн. кВт | - | - | - | - | - | - | 250 | 320 | 520 |
| | Тип, длина линии, м | - | - | - | - | - | - | КЛ, 250 | КЛ, 400 | КЛ, 300 |
| Шаровая мельница | Кол-во, Тип ЭП | - | - | - | - | - | - | 2 СД | 2 СД | 2 СД |
| | Номинальн. мощн. кВт | - | - | - | - | - | - | 630 | 540 | 630 |
| | Тип, длина линии, м | - | - | - | - | - | - | КЛ, 250 | КЛ, 350 | КЛ, 400 |
| Дренажная шахта | Кол-во, Тип ЭП | - | - | - | - | - | 2 АД | - | 2 АД | 2 АД |
| | Номинальн. мощн. кВт | - | - | - | - | - | 520 | - | 360 | 320 |
| | Тип, длина линии, м | - | - | - | - | - | КЛ, 800 | - | КЛ, 600 | КЛ, 800 |
| Напряжение питающих ЛЭП, кВ | Для вариантов 1 - 15 | 110 | 35 | 110 | 110 | 35 | 35 | 35 | 110 | 110 |
| | Для вариантов 16 - 30 | 35 | 110 | 35 | 35 | 110 | 110 | 110 | 35 | 35 |
| Длина питающих ЛЭП. км | Для вариантов 1 - 15 | 36 | 18 | 32 | 24 | 10 | 15 | 25 | 35 | 25 |
| | Для вариантов 16 - 30 | 10 | 50 | 12 | 18 | 36 | 40 | 50 | 20 | 16 |
| Мощность к. з. на шинах РПС, МВ А | Для вариантов 1 - 15 | 1200 | 500 | 1500 | 1300 | 300 | 600 | 800 | 1400 | 900 |
| | Для вариантов 16 - 30 | 400 | 1000 | 600 | 450 | 650 | 900 | 1500 | 450 | 300 |
| Допустимый ток к. з. на шинах ЗРУ-6 кВ | | - | - | - | - | - | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Допустимый ток к. з. на шинах ЦПП, кА | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | - | - | - |
| Рассмотреть необходимый объем, уставки и чувствительность РЗ и А | | СД | АД | КЛ+СД | АД | ТМ | ВЛ+СД | ВЛ | КЛ+АД | АД |

**Министерство образования и науки РФ**

**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный университет»**

**ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ УГГУ**

В.П. Барановский

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы
для студентов всех форм обучения
направления подготовки бакалавров 13.03.02
«Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04
«Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация
горного производства»

**Екатеринбург**
**2018**

Министерство образования и науки РФ

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета
«___» _____ 2018г.
Председатель комиссии
_____ В. П. Барановский

**ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ УГГУ**



В. П. Барановский

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы
для студентов всех форм обучения
направления подготовки бакалавров 13.03.02
«Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04
«Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация
горного производства»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

Электронное издание УГГУ
УДК 681.5.011 (075.8)

**№ ЭЛЕКТРОННОГО ИЗДАНИЯ _____**

РЕЦЕНЗЕНТ: *Маругин А.П.,* канд. техн. наук, доцент кафедры электрификации горных предприятий Уральского государственного горного университета.

Работа рассмотрена на заседании кафедры автоматики и компьютерных технологий (протокол № 4 от 15. 12.2017 г.) и рекомендована в качестве электронной версии печатного издания в УГГУ.

**В. П. Барановский**

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

: учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы / В. П. Барановский; Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. 80 с.

АННОТАЦИЯ

Приведены задания на курсовую работу, изложен порядок выбора вариантов исходных данных, указана общая последовательность и даны рекомендации по выполнению расчетов и оформлению курсовой работы. В Приложении рассмотрены примеры выполнения отдельных разделов работы.

Для студентов всех форм обучения направления подготовки бакалавров 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»

УДК 681.5.011 (075.8)

©Уральский государственный
горный университет, 2018
©Барановский В. П., 2018

Акт передачи
Электронного образовательного ресурса
для дальнейшего использования, в том числе коммерческого ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

г. Екатеринбург «____»_____201 г.

Мы, нижеподписавшиеся, Заказчик ФБГОУ ВО «Уральский государственный горный университет», в лице проректора по учебной работе Фролова С.Г., действующего на основании доверенности от 13.11.2017 г. № 108/17, с одной стороны, и Исполнитель Барановский Валерий Петрович, с другой стороны, составили акт о том, автор обязуется подготовить и передать в коммерческую собственность ФБГОУ ВО «Уральский государственный горный университет» электронную версию печатного издания учебно-методического пособия по выполнению курсовой работы по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов всех форм обучения направления подготовки бакалавров 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация горного производства» с передачей исключительных прав университету для обеспечения проведения учебного процесса с элементами дистанционных образовательных технологий.

**Заказчик** **Исполнитель**

_____ _____ Барановский В.П.

ВЫПИСКА
из протокола заседания кафедры
автоматики и компьютерных технологий
от 15.12.2017, протокол № 4

Присутствовали 9 человек из 9 научно-педагогических работников кафедры.

СЛУШАЛИ: Проф. Барановского В.П. о подготовленном им электронном учебно-методическом пособии по выполнению курсовой работы дисциплины «Теория автоматического управления» для студентов всех форм обучения направления бакалавриата 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация горного производства».

Выступления научно-педагогических работников кафедры, принявших участие в обсуждении:
Ельняков М.А.:
- Представленный электронный образовательный ресурс (ЭОР) отвечает требованиям орфографии и стилистики, текст написан технически грамотно, содержание отвечает профессиональной направленности.

Скобцов С.Н.:
- Предложил рекомендовать к использованию в учебном процессе готовый ЭОР.

Участвовало в голосовании 9 из 9 присутствующих научно-педагогических работников кафедры.

Итоги голосования:
ЗА – 9;
ПРОТИВ – нет;
ВОЗДЕРЖАЛИСЬ – нет.

**ПОСТАНОВИЛИ:** Рекомендовать к использованию в учебном процессе для всех форм обучения готовый ЭОР по дисциплине «Теория автоматического управления».

Выписка верна

Зав. кафедрой АКТ _____ Лапин Э.С.

Ученый секретарь _____ Ситдикова С.В.

# РЕЦЕНЗИЯ

на учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы дисциплины «Теория автоматического управления» (автор Барановский В.П.)

Рукопись учебно-методического пособия представлена на 80 страницах машинописного текста. Пособие содержит 4 главы, в которых представлены задания, указания и рекомендации по выполнению, инструкция по оформлению и примеры расчета курсовой работы.

Структурно пособие построено логично.

В первой и второй главах приведены варианты заданий по структуре и параметрам рассчитываемой системы управления, по характеристикам внешних воздействий, по заданным показателям точности и качества системы, по заданному критерию устойчивости, а также предложено содержание курсовой работы.

В третьей главе в общем виде приведены рекомендации по выполнению всех 6 разделов курсовой работы со ссылками на страницы литературных источников.

В четвертой главе изложена инструкция по оформлению курсовой работы.

В Приложениях 1 и 2 приведены обложка и бланк задания на выполнение курсовой работы.

В Приложении 3 приведены рекомендации и примеры выполнения всех разделов курсовой работы (с рисунками и таблицами).

Методически пособие построено удачно. В пособии используется единая терминология и единые обозначения величин.

Рецензируемое учебное пособие необходимо для студентов направления подготовки бакалавров 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Электрификация и автоматизация горного производства» и может быть рекомендовано к изданию.

Доцент кафедры ЭГП УГГУ,
канд. техн. наук А.П. Маругин

# ВВЕДЕНИЕ

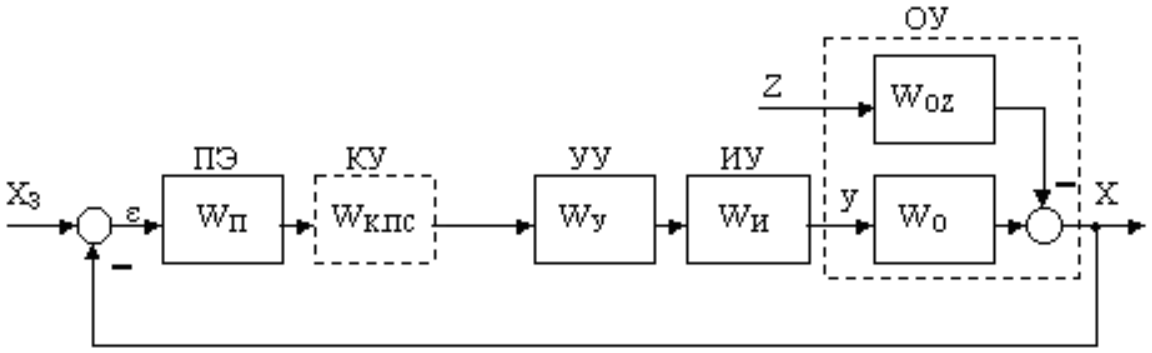
Учебными планами направления 13.03.02 и специальности 21.05.04, а также соответствующими программами дисциплины «Теория автоматического управления» предусмотрено выполнение студентами курсовой работы. Выполняя курсовую работу, студент должен глубже понять основные теоретические положения дисциплины и освоить ряд технических приемов расчета автоматических систем управления.

В курсовой работе студенту необходимо выполнить комплекс расчетов автоматической системы управления, заданной в виде обобщенной унифицированной алгоритмической схемы. В зависимости от варианта задания (см. раздел 1) это будет система, изображенная на рис. В.1 или на рис. В.2. Система состоит из объекта управления ОУ, преобразующего элемента ПЭ, исполнительного устройства ИУ, управляющего устройства УУ и одного корректирующего устройства КУ, включенного либо последовательно (см. рис. В.1), либо встречно-параллельно (см. рис. В.2) в основной контур системы. Кроме того, в основной контур системы, изображенной на рис. В.2, включен усилительный элемент УЭ. В зависимости от варианта задания исполнительное устройство системы ИУ может рассматриваться как идеальное интегрирующее звено или как инерционное звено первого порядка (без множителя $p$, обведенного на рис. В.1 и В.2 кружком). Соответственно вся система будет астатической или статической.

Выходная величина объекта $x$ (управляемая величина системы) зависит от управляющего воздействия $y$ и возмущающего воздействия $z$. Требуемый закон изменения величины $x$ определяется задающим воздействием $x_з$.

Из-за действия обоих входных сигналов и из-за инерционности элементов системы в замкнутом контуре в переходных и установившихся режимах возникает сигнал отклонения (сигнал ошибки) $\varepsilon$, который складывается из двух составляющих: составляющей $\varepsilon_з$, обусловленной неточным воспроизведением задающего воздей-

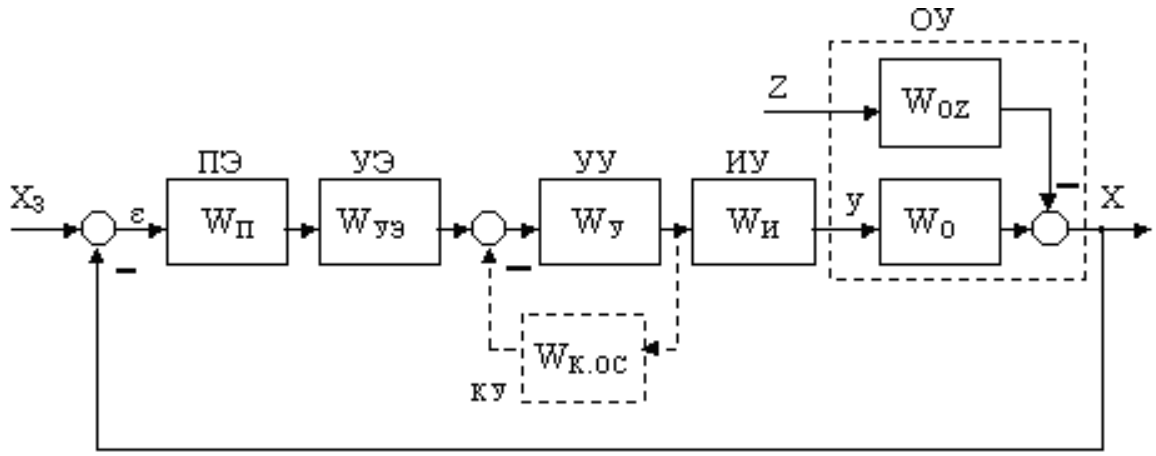
ствия, и составляющей $\varepsilon_z$, обусловленной неполным подавлением возмущающего воздействия.




$$W_{\text{о}}(p)=\frac{k_{\text{о}}}{T_{\text{о}}p+1};\qquad W_{\text{oz}}(p)=\frac{k_{\text{oz}}}{T_{\text{oz}}p+1};\qquad W_{\text{у}}(p)=\frac{k_{\text{у}}}{T_{\text{у}}p+1};$$

$$W_{\text{и}}(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p\,(T_{\text{и}}p+1)};\qquad W_{\text{п}}(p)=k_{\text{п}}$$

Рис. В.1. Алгоритмическая схема автоматической системы управления (для вариантов 0 – 4)




$$W_{\text{о}}(p)=\frac{k_{\text{о}}}{T_{\text{о}}p+1};\quad W_{\text{oz}}(p)=\frac{k_{\text{oz}}}{T_{\text{oz}}p+1};\quad W_{\text{у}}(p)=\frac{k_{\text{у}}}{T_{\text{у}}p+1};$$

$$W_{\text{и}}(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p\,(T_{\text{и}}p+1)};\qquad W_{\text{п}}(p)=k_{\text{п}};\quad W_{\text{уэ}}(p)=\frac{k_{\text{уэ}}}{\mathrm{T}_{\text{уэ}}p+1}$$

Рис. В.2. Алгоритмическая схема автоматической системы управления (для вариантов 5 – 9)

При расчете автоматической системы управления рассматриваются вопросы анализа и структурно-параметрического синтеза при детерминированных воздействиях.

Анализ системы заключается в:

- расчете установившейся ошибки замкнутой системы по заданному каналу воздействия при заданном виде входного воздействия;
- определении устойчивости замкнутой системы по заданному критерию устойчивости;
- получению графика переходного процесса по заданному каналу воздействия и вычислению качественных показателей процесса.

Синтез системы состоит в:

- определении структуры и параметров корректирующего устройства;
- вычислении оптимального значения передаточного коэффициента усилительного элемента из условия минимума квадратичной интегральной оценки.

# 1. ВЫБОР ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Исходные параметры системы (и саму систему) каждый студент определяет в зависимости от номера задания, который выбирается в зависимости от первых трех букв фамилии студента (табл. 1.1). Например,

| ИВАнов, | ПЕТров, | ТРОфимов |
|---|---|---|
| ↓↓↓ | ↓↓↓ | ↓↓↓ |
| 210 | 628 | 865 |

Таблица 1.1

**Определение номера задания на выполнение курсовой работы**

| Первые три буквы фамилии студента | А, Б | В, Г | Д, Е,Ё, Ж,З, И,Й | К | Л,М | Н,О | П,Р | С | Т,У, Ф,Х, Ъ,Ь | Ц,Ч Ш,Щ, Ы,Э, Ю,Я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Цифры разрядов номера задания | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Примечание. Если в группе учатся супруги, то жена номер задания определяет по девичьей фамилии.

В зависимости от номера задания выбирают варианты задания (рис. 1.1).

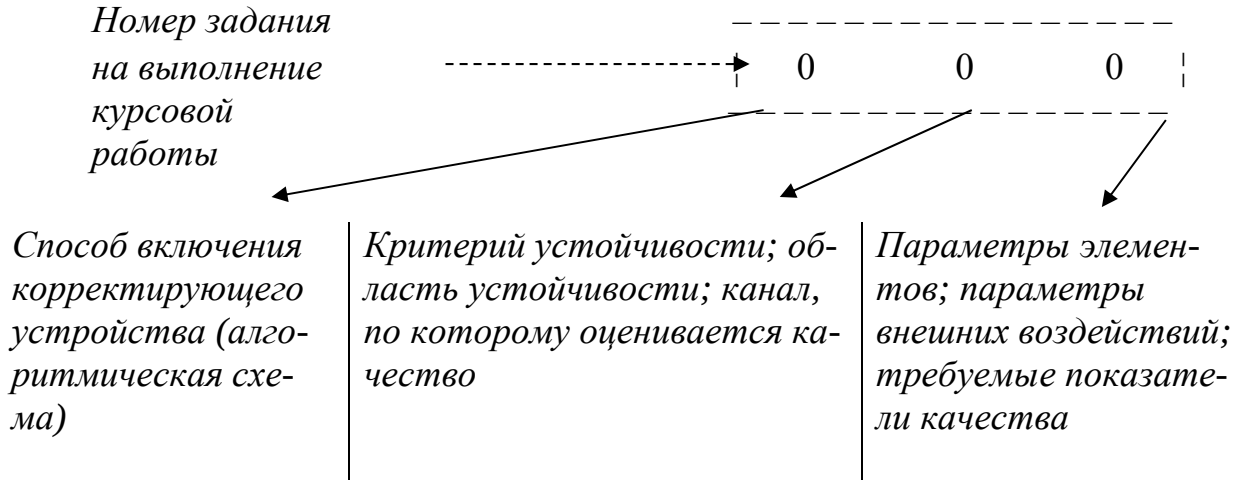



Рис. 1.1. Схема выбора вариантов задания

Цифра, стоящая в разряде единиц, определяет вариант параметров элементов (табл. 1.2, *а, б*) и вариант параметров внешних воздействий и требуемых показателей качества (табл. 1.3, *а*, *б*) Для нечетных цифр постоянная времени $T_и$ задана, и исполнительное устройство рассматривается как инерционное звено первого порядка (без множителя «*p*» на рис. В.1 и В.2), для четных цифр $T_и$=0 и исполнительное устройство рассматривается как идеальное интегрирующее звено с одним параметром $k_и$.

Цифра, стоящая в разряде десятков, определяет:

по табл. 1.4 – применяемый критерий устойчивости; параметры, в пространстве которых необходимо построить область устойчивости; канал системы, по которому необходимо оценить качество управления в установившихся и переходных режимах.

Каждый раздел работы соответствует определенному пункту задания.

Цифра, стоящая в разряде сотен, определяет способ включения корректирующего устройства и, вследствие этого, выбор исследуемой системы: для цифр 0-4 – последовательное включение (см. рис. В.1), для цифр 5-9 – встречно-параллельное (см. рис. В.2).

Таблица 1.2, *а*

**Параметры элементов системы**
**(для алгоритмической схемы на рис. В.1)**

| Цифра единиц номера задания | ОУ | | | ИУ | | УУ | | ПЭ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_{о}$ | $k_{oz}$ | $T_{о}=T_{oz}$, с | $k_{и}$ | $T_{и}$, с | $k_{у}$ | $T_{у}$, с | $k_{п}$ |
| 9 | 0,1 | 0,1 | 1,0 | 10,0 | 0,1 | 15 | 0,35 | 0,8 |
| 8 | 1,0 | 0,2 | 1,1 | 1,0 | - | 3 | 0,35 | 0,9 |
| 7 | 0,2 | 0,1 | 1,2 | 5,0 | 0,25 | 20 | 0,60 | 1,0 |
| 6 | 3,0 | 0,6 | 1,3 | 0,3 | - | 2 | 1,00 | 1,1 |
| 5 | 0,4 | 0,2 | 1,4 | 2,5 | 0,50 | 5 | 1,40 | 1,2 |
| 4 | 5,0 | 1,0 | 1,5 | 0,2 | - | 1 | 1,5 | 1,2 |
| 3 | 0,6 | 0,3 | 1,6 | 0,35 | 0,35 | 20 | 1,20 | 1,1 |
| 2 | 7,0 | 1,4 | 1,7 | 0,1 | - | 2 | 0,85 | 1,0 |
| 1 | 0,8 | 0,4 | 1,8 | 1,2 | 0,20 | 15 | 0,60 | 0,9 |
| 0 | 9,0 | 1,8 | 1,9 | 0,1 | - | 3 | 0,45 | 0,8 |

Таблица 1.2, *б*

**Параметры линейных элементов системы**
**(для алгоритмической схемы на рис. В.2)**

| Цифра единиц номера задания | УО | | | ИУ | | УУ | | УЭ | | ПЭ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_{о}$ | $k_{oz}$ | $T_{о}=T_{oz}$, с | $k_{и}$ | $T_{и}$, с | $k_{у}$ | $T_{у}$, с | $k_{уэ}$ | $T_{уэ}$, с | $k_{п}$ |
| 9 | 0,5 | 0,25 | 2,0 | 2,0 | 0,2 | 0,2 | 0,8 | 10,0 | 0,6 | 0,90 |
| 8 | 1,0 | 0,50 | 2,1 | 1,0 | - | 1,0 | 1,0 | 2,0 | 0,7 | 0,95 |
| 7 | 2,0 | 1,00 | 2,2 | 0,50 | 0,4 | 2,0 | 1,2 | 5,0 | 0,8 | 1,00 |
| 6 | 3,0 | 1,50 | 2,3 | 0,35 | - | 0,5 | 1,4 | 2,0 | 0,9 | 1,05 |
| 5 | 4,0 | 2,00 | 2,4 | 0,25 | 0,6 | 3,0 | 1,6 | 5,0 | 1,2 | 1,10 |
| 4 | 5,0 | 2,50 | 2,5 | 0,20 | - | 0,5 | 1,8 | 3,0 | 1,4 | 1,10 |
| 3 | 6,0 | 3,00 | 2,6 | 0,15 | 0,8 | 2,0 | 2,0 | 2,5 | 1,8 | 1,05 |
| 2 | 7,0 | 3,50 | 2,7 | 0,15 | - | 0,25 | 2,2 | 2,0 | 1,9 | 1,00 |
| 1 | 8,0 | 4,00 | 2,8 | 0,10 | 1,0 | 2,0 | 2,4 | 5,0 | 1,5 | 0,95 |
| 0 | 9,0 | 4,50 | 2,9 | 0,10 | - | 0,5 | 2,6 | 2,0 | 1,7 | 0,90 |

Таблица 1.3, *а*

**Параметры внешних воздействий и требуемые показатели качества системы (для алгоритмической схемы на рис. В.1)**

| Цифра единиц номера задания | Параметры воздействий вида $a_o+a_1t$ | | Показатели качества | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | в установившемся режиме | | в переходном режиме | | |
| | $a_o$ | $a_1$ | $\varepsilon_з$ | $\varepsilon_z$ | σ, % | $t_п$, с | $M$ |
| 9 | 1,0 | - | 0,05 | 0,005 | 20 | 1,0 | 1,25 |
| 8 | - | 2,0 | 0,50 | 0,10 | 25 | 3,0 | 1,30 |
| 7 | 3,0 | - | 0,20 | 0,02 | 30 | 1,5 | 1,50 |
| 6 | - | 4,0 | 2,00 | 1,20 | 35 | 4,5 | 1,60 |
| 5 | 5,0 | - | 0,50 | 0,10 | 40 | 2,5 | 1,80 |
| 4 | - | 6,0 | 4,00 | 4,00 | 40 | 5,0 | 1,80 |
| 3 | 7,0 | - | 0,50 | 0,15 | 35 | 2,0 | 1,60 |
| 2 | - | 8,0 | 4,00 | 5,60 | 30 | 5,5 | 1,50 |
| 1 | 9,0 | - | 0,45 | 0,20 | 25 | 1,5 | 1,30 |
| 0 | - | 10,0 | 3,00 | 5,00 | 20 | 5,0 | 1,25 |

Таблица 1.3, *б*

**Параметры внешних воздействий и требуемые показатели качества системы (для алгоритмической схемы на рис. В.2)**

| Цифра единиц номера задания | Параметры воздействий вида $a_o+a_1t$ | | Показатели качества | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | в установившемся режиме | | в переходном режиме | | |
| | $a_o$ | $a_1$ | $\varepsilon_з$ | $\varepsilon_z$ | σ, % | $t_п$, с | $M$ |
| 9 | 0,5 | - | 0,02 | 0,005 | 25 | 1,5 | 1,3 |
| 8 | - | 1,0 | 0,50 | 0,25 | 25 | 6,0 | 1,3 |
| 7 | 2,0 | - | 0,10 | 0,10 | 30 | 2,0 | 1,5 |
| 6 | - | 3,0 | 2,00 | 3,00 | 30 | 10,0 | 1,5 |
| 5 | 4,0 | - | 0,30 | 0,60 | 35 | 3,0 | 1,6 |
| 4 | - | 5,0 | 4,00 | 10,0 | 35 | 8,0 | 1,6 |
| 3 | 6,0 | - | 0,50 | 1,50 | 30 | 4,0 | 1,5 |
| 2 | - | 7,0 | 8,00 | 28,0 | 30 | 10,0 | 1,5 |
| 1 | 8,0 | - | 0,70 | 2,80 | 25 | 5,0 | 1,3 |
| 0 | - | 9,0 | 11,0 | 50,0 | 25 | 10,0 | 1,3 |

Таблица 1.4

**Выбор заданий по анализу устойчивости и качества системы**

| Цифра десятков номера задания | Критерий устойчивости | Область устойчивости по параметрам | Показатели качества по каналу | |
|---|---|---|---|---|
| | | | в установившемся режиме | в переходном режиме |
| 9 | Гурвица | $k_{и}$ и $T_{у}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - x$ |
| 8 | Михайлова | $k_{и}$ и $T_{о}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - \varepsilon$ |
| 7 | Найквиста | $k_{п}$ и $T_{у}$ | $z - x$ | $z - x$ |
| 6 | «Логарифмический» | $k_{о}$ и $T_{у}$ | $z - \varepsilon$ | $z - \varepsilon$ |
| 5 | Гурвица | $k_{п}$ и $T_{и}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - x$ |
| 4 | Михайлова | $k_{и}$ и $T_{о}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - \varepsilon$ |
| 3 | Найквиста | $k$ и $T_{и}$ | $z - x$ | $z - x$ |
| 2 | «Логарифмический» | $k$ и $T_{о}$ | $z - \varepsilon$ | $z - \varepsilon$ |
| 1 | Гурвица | $k_{п}$ и $T_{о}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - x$ |
| 0 | Найквиста | $k$ и $T_{у}$ | $x_{з} - \varepsilon$ | $x_{з} - \varepsilon$ |

Все исходные данные и указания, выбранные из табл. 1.2 – 1.4 в соответствии с номером задания, выбранным из табл. 1.1, студент вписывает в специальный бланк задания на курсовую работу (см. Приложения 1, 2) и представляет на утверждение руководителю курсовой работы.

При оформлении курсовой работы бланк задания служит титульным листом.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа состоит из 6 разделов:

1. Оценка точности в установившемся режиме.
2. Проверка устойчивости исходной системы.
3. Расчет корректирующего устройства.
4. Построение области устойчивости скорректированной системы.
5. Построение графика переходного процесса и оценка качества скорректированной системы.
6. Вычисление и минимизация квадратичной интегральной оценки при типовом воздействии.

### Перечень возможных рисунков курсовой работы

Рис. 1. Алгоритмическая схема рассчитываемой системы управления.

Рис. 2. Годограф Михайлова нескорректированной системы.

Рис. 2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутого контура нескорректированной системы.

Рис. 2. Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура нескорректированной системы.

Рис. 3. К расчету корректирующего устройства.

Рис. 4. Принципиальная схема корректирующего устройства.

Рис. 5. Область устойчивости скорректированной системы в плоскости параметра… .

Рис. 5. Область устойчивости скорректированной системы в плоскости параметров… и … .

Рис. 6. Переходная характеристика замкнутой скорректированной системы по каналу … .

Рис. 7. Зависимость квадратичной интегральной оценки скорректированной системы от коэффициента $k_y$.

В некоторых вариантах курсовой работы рис. 2 отсутствует и нумерация рисунков соответственно смещается.

## Перечень возможных таблиц курсовой работы

Таблица 1. Годограф Михайлова.

Таблица 1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутого контура.

Таблица 1. Фазовая частотная характеристика разомкнутого контура.

Таблица 2. Граница области устойчивости системы.

Таблица 3. Исходные данные для цифрового моделирования.

Таблица 4. Результаты цифрового моделирования.

Таблица 5. Зависимость квадратичной интегральной оценки от коэффициента $k_y$**.**

# 3. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

## 3.1. Указания к разделу «Оценка точности в установившемся режиме»

Точность статической системы в установившемся режиме оценивают при ступенчатом воздействии, а точность астатической – при линейном. Для вычисления значения сигнала ошибки в установившемся режиме следует воспользоваться теоремой Лапласа о конечном значении оригинала или методом коэффициентов ошибок.

Сначала записывают передаточную функцию замкнутой системы по заданному каналу воздействия. Например, по каналу «$x_з$–$\varepsilon$» передаточная функция запишется (для рис. В.1) в виде:

$$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_з(p)}=\frac{1}{1+W_п(p)W_у(p)W_и(p)W_о(p)}. \qquad (3.1)$$

Затем в формулу (3.1) следует подставить выражения для передаточных функций элементов системы. Далее для заданного канала воздействия записывают теорему Лапласа о конечном значении оригинала

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0}p\Phi(p)X_з(p). \qquad (3.2)$$

Результатом решения формулы (3.2) является полученное в общем виде (а затем и в численном) значение сигнала ошибки $\varepsilon(t)$ в установившемся режиме. Если это значение удовлетворяет заданному, то расчет окончен. Если не удовлетворяет, то следует вычислить новое (большее) значение передаточного коэффициента $k_у$, обеспечивающее требуемое значение сигнала ошибки. Проверить правильность решения в общем виде для различных каналов воздействий можно при помощи табл. 4.2 в [1].

## 3.2. Указания к разделу «Проверка устойчивости исходной системы»

Проверка устойчивости замкнутой нескорректированной системы по заданному критерию проводится или один раз (если в разделе «Оценка точности...» численное значение передаточного коэффициента $k_у$ осталось неизменным), или дважды (при исходном и большем значении $k_у$).

### *3.2.1. Критерий устойчивости Гурвица*

Исходным выражением для определения устойчивости по данному критерию является характеристическое уравнение **замкнутого** контура системы

$$1 + W_{рк}(p) = 0, \qquad (3.3)$$

где $W_{рк}(p)$ – передаточная функция разомкнутого контура. Например, для алгоритмической схемы на рис. В.2 передаточная функция разомкнутого контура системы запишется в виде

$$W_{рк}(p) = W_{п}(p)W_{уэ}(p)W_{у}(p)W_{и}(p)W_{о}(p). \qquad (3.4)$$

Подставив в формулу (3.3) формулу (3.4), получают характеристическое уравнение замкнутого контура системы сначала в общем, а затем в численном виде. Затем составляют определитель Гурвица (с. 259-264 [1]) и на основании формулировки критерия Гурвица делают вывод об устойчивости (или неустойчивости) системы.

### *3.2.2. Критерий устойчивости Михайлова*

Исходным выражением для определения устойчивости по данному критерию является характеристическое уравнение **замкнутого** контура системы (см. формулу (3.3) данного пособия). После подстановки в формулу (3.3) передаточной функции разомкнутого контура системы $W_{рк}(p)$, затем подстановки в формулу для $W_{рк}(p)$ передаточных функций элементов системы, получают характеристиче-

ский полином системы, который в общем виде (для схемы на рис. В.1) записывается как

$$F(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \qquad (3.5)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3$ – коэффициенты характеристического полинома, зависящие от постоянных времени и передаточных коэффициентов элементов системы.

Далее в выражении (3.5) делают подстановку $p = j\omega$ и получают функцию комплексного переменного

$$F(j\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3 = P(\omega) + jQ(\omega). \qquad (3.6)$$

Затем задаются численными значениями частоты ω от 0 до ω=∞, вычисляют значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ на этих частотах и строят годограф Михайлова. Далее на основании формулировки критерия Михайлова (с. 266-272 [1]) делают вывод об устойчивости системы.

Суждение об устойчивости системы можно сделать и без построения годографа Михайлова, используя следствие из критерия. Для этого надо найти корни уравнений

$$P(\omega) = 0, \qquad Q(\omega) = 0 \qquad (3.7)$$

и на основании формулировки следствия сделать вывод об устойчивости системы.

### *3.2.3. Критерий устойчивости Найквиста*

Исходным выражением для определения устойчивости по данному критерию является передаточная функция **разомкнутого** контура системы $W_{\text{рк}}(p)$. Затем в этой формуле делают подстановку $p = j\omega$ и записывают

$$W_{\text{рк}}(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3.8)$$

где $A(\omega) = |W_{\text{рк}}(j\omega)|$ – амплитудно-частотная функция системы;
$\varphi(\omega) = \arg W_{\text{рк}}(j\omega)$ – фазо-частотная функция системы.

Далее, задаваясь значениями частоты ω от 0 до ω=∞, в координатах $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ строят график $W_{рк}(j\omega)$ – амплитудно-фазочастотную характеристику разомкнутого контура системы, и на основании основной формулировки критерия Найквиста (с. 272-280 [1]) делают вывод об устойчивости системы. График функции $W_{рк}(j\omega)$ можно построить и другим способом, разложив эту функцию на действительную и мнимую составляющие

$$W_{рк}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \qquad (3.9)$$

### *3.2.4. Логарифмический критерий устойчивости*

Этот критерий является разновидностью основной формулировки критерия Найквиста и применяется для определения устойчивости замкнутых систем, разомкнутый контур которых образован последовательным соединением типовых динамических звеньев. Для определения устойчивости системы строят 2 графика: логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) и фазо-частотную характеристику **разомкнутого** контура. Формулировка критерия и пример определения устойчивости статической системы третьего порядка приведены на с. 280-282 [1].

## 3.3. Указания к разделу «Расчет корректирующего устройства»

Расчет корректирующего устройства осуществляется при помощи логарифмических частотных характеристик. Результатами расчета являются передаточная функция, принципиальная схема и параметры корректирующего устройства, передаточная функция скорректированной системы. Для замкнутой скорректированной системы следует определить запасы устойчивости по фазе и по амплитуде. При выборе корректирующего устройства по справочным таблицам допускается приближенная замена требуемой характеристики.

### *3.3.1. Расчет последовательного корректирующего устройства (для алгоритмической схемы на рис. В.1)*

Решение задачи коррекции осуществляют в следующей последовательности (с. 392-396 [1]):

1. Строят ЛАЧХ нескорректированной системы $L_{нс}(\omega)$.

2. По заданным показателям качества замкнутой системы в переходном режиме $\sigma$, $t_п$, $M$ строят ЛАЧХ скорректированной (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$. При этом параметры среднечастотного участка ЛАЧХ желаемой системы рассчитывают по формулам

$$\omega_{ср} = \frac{0{,}12\pi\sigma}{t_п},\ \omega_2 = \frac{M-1}{M}\omega_{ср},\ \omega_3 = \frac{M+1}{M}\omega_{ср}. \qquad (3.10)$$

3. Из ЛАЧХ скорректированной системы вычитают ЛАЧХ нескорректированной системы и получают ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства $L_{ку}(\omega)$.

4. По виду ЛАЧХ корректирующего устройства выбирают принципиальную схему (см. табл. 7.2 [1]), записывают передаточную функцию $W_{ку}(p)$, а затем рассчитывают параметры устройства.

5. Записывают передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы $W_{ск}(p)=W_{ку}(p)W_{нс}(p)$ и вычисляют запасы устойчивости замкнутой системы по фазе $\Delta\varphi$ и по амплитуде $\Delta L$.

Для вычисления запаса по фазе $\Delta\varphi$ вычисляют фазовый сдвиг системы на частоте среза ($\omega_{ср}$)

$$\varphi(\omega_{ср}) = \arg W_{ск}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_{ср}}, \qquad (3.11)$$

откуда запас по фазе равен

$$\Delta\varphi = 180^{\circ} - \left|\varphi(\omega_{ср})\right|. \qquad (3.12)$$

Для определения запаса устойчивости по амплитуде $\Delta L$ следует сначала найти частоту $\omega_\pi$, при которой фазовый сдвиг системы будет равен $-180^{\circ}\pm 1^{\circ}$,

$$\varphi(\omega_\pi) = \arg W_{ск}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_\pi} = -180^\circ(\pm 1^\circ) \qquad (3.13)$$

Частоту $\omega_\pi$ находят подбором, учитывая при этом, что $\omega_\pi > \omega_{ср}$. *З*атем по графику ЛАЧХ скорректированной системы находят запас устойчивости по амплитуде $\Delta L$ (см. рис. 6.5 [1]).

### *3.3.2. Расчет встречно-параллельного корректирующего устройства (для алгоритмической схемы на рис. В.2)*

Решение задачи коррекции осуществляется в следующей последовательности (с. 392-396 [1]):

1. Строят ЛАЧХ звеньев, не охваченных обратной связью $L_{но}(\omega)$. При этом передаточный коэффициент $k_у$ следует реализовать за счет изменения передаточного коэффициента $k_п$.

2. По заданным показателям качества системы в переходном режиме $\sigma$, $t_п$, $M$ строят ЛАЧХ скорректированной (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$. При этом параметры среднечастотного участка ЛАЧХ желаемой системы находят по формулам (3.10).

3. Из ЛАЧХ звеньев, не охваченных обратной связью, вычитают ЛАЧХ скорректированной системы и получают ЛАЧХ звена обратной связи $L_{ос}(\omega)$.

4. По виду ЛАЧХ обратной связи $L_{ос}(\omega)$ выбирают принципиальную схему (см. табл. 7.2 [1]) и записывают передаточную функцию устройства $W_{ос}(\omega)$, а затем рассчитывают параметры устройства.

5. Записывают передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы $W_{ск}(p) = W_{но}(p)/W_{ос}(p)$ и вычисляют запасы устойчивости замкнутой системы по фазе $\Delta\varphi$ и по амплитуде $\Delta L$ (см. формулы (3.11-3.13) данного пособия).

## 3.4. Указания к разделу «Построение области устойчивости скорректированной системы»

### *3.4.1. Построение области устойчивости в плоскости одного параметра (с. 284-287 [1])*

Исходным выражением для построения является характеристическое уравнение **замкнутого** контура скорректированной системы (см. раздел 3.3. данного пособия)

$$1 + W_{\text{ск}}(p) = 0\,. \tag{3.14}$$

Данное уравнение решают относительно интересующего нас параметра *(*$k$, $k_{\text{о}}$, $k_{\text{у}}$, $k_{\text{и}}$*)* и после подстановки $p=j\omega$ представляют в виде, например,

$$k = P(\omega) + jQ(\omega)\,. \tag{3.15}$$

Затем, изменяя частоту ω от 0 до $+\infty$, строят одну ветвь кривой *D*-разбиения, а вторую ветвь кривой (при изменении частоты ω от $-\infty$ до 0) достраивают как зеркальное отражение первой ветви, затем кривую штрихуют.

После построения кривой *D*-разбиения на рисунке следует показать точку, соответствующую принятому значению варьируемого параметра.

### *3.4.2. Построение области устойчивости в плоскости двух параметров*

Исходным выражением для построения области устойчивости является характеристическое уравнение замкнутого контура скорректированной системы (см. формулу (3.14) данного пособия). Затем в соответствии с методикой и примерами, приведенными на с. 287-295 [1], строят кривую *D*-разбиения, особые прямые и штрихуют их. На рисунке следует показать точку, соответствующую принятым значениям варьируемых параметров.

В процессе выполнения раздела «Расчет корректирующего устройства» может оказаться, что в передаточную функцию скорректированной системы не будет входить постоянная времени, ко-

торая приведена в задании для построения области устойчивости. В этом случае построение области устойчивости в плоскости двух параметров иногда «вырождается» в построение области устойчивости в плоскости одного параметра и **следует проконсультироваться** с преподавателем о дальнейшем ходе решения.

### 3.5. Указания к разделу «Построение графика переходного процесса и оценка качества скорректированной системы»

В этом разделе необходимо построить график переходного процесса в **замкнутой** скорректированной системе по заданному каналу воздействия, вызванного единичным ступенчатым воздействием. Оценка качества системы осуществляется по форме переходного процесса, числу полуколебаний, периоду затухающих колебаний, первому максимальному отклонению, длительности и перерегулированию. Значения двух последних показателей сравнивают с требуемыми значениями. График переходного процесса системы следует получить при помощи моделирования системы на цифровой вычислительной машине (ЦВМ).

Исходным выражением для моделирования является передаточная функция **замкнутой** скорректированной системы по заданному каналу воздействия, представленная в следующем виде:

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}. \qquad (3.16)$$

Затем составляют таблицу исходных данных для цифрового моделирования, куда входят коэффициенты $b_i$ и $a_i$ из формулы (3.16), а также «шаг интегрирования» $\Delta t$, «шаг печати» $t_{\text{печ}}$ и «длительность выполнения расчетов» $t_{\text{к}}$.

Таблица 3.1

**Исходные данные для цифрового моделирования**

| $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\Delta t$ | $t_{\text{печ}}$ | $t_{\text{к}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

Рекомендуется выбирать $t_{\text{к}} \approx 1{,}2t_{\text{п}}$, где $t_{\text{п}}$ – заданное время переходного процесса; $t_{\text{печ}} = t_{\text{к}}/20$; $\Delta t = t_{\text{печ}}/50$. В табл. 3.1 вместо отсутствующих коэффициентов следует (без смещения других коэффициентов) ставить нули.

После ввода исходных данных в ПК получают листинг результатов расчёта, на основании которого строят график переходного процесса. Листинг результатов расчёта подшивается к курсовому проекту. Результаты расчёта следует проверить, используя формулы Лапласа о конечном и начальном значении оригинала,

$$\Phi(0) = h(\infty),\ \Phi(\infty) = h(0) \qquad (3.17)$$

и при необходимости повторить решение, подкорректировав численные значения $\Delta t$, $t_{\text{печ}}$, $t_{\text{к}}$.

При получении неустойчивого машинного решения следует уменьшить $\Delta t$ с соответствующим пересчётом $t_{\text{печ}}$ и $t_{\text{к}}$.

График переходного процесса можно получить и другим способом, используя систему МАТЛАБ [2].

## 3.6. Указания к разделу «Вычисление и минимизация квадратичной интегральной оценки при типовом воздействии»

Квадратичная интегральная оценка вычисляется при **единичном ступенчатом воздействии**. При этом допускается (по согласованию с преподавателем) упрощение передаточной функции скорректированной системы.

Исходным выражением для дальнейших расчетов является передаточная функция **замкнутой** скорректированной системы по заданному каналу воздействия, записанная в виде:

$$\Phi(p)=\frac{b_0 p^{\mathrm{m}}+b_1 p^{\mathrm{m}-1}+\ldots+b_{\mathrm{m}}}{a_0 p^{\mathrm{n}}+a_1 p^{\mathrm{n}-1}+\ldots+a_{\mathrm{n}}}. \qquad (3.18)$$

Пусть задан канал воздействия «$x_з$-ε»,тогда:

$$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_з(p)}. \qquad (3.19)$$

Находят выражение для изображения переходной составляющей сигнала ошибки

$$\varepsilon_{\mathrm{п}}(p)=\left[\Phi_\varepsilon(p)-\Phi_\varepsilon(0)\right]\cdot 1/p. \qquad (3.20)$$

При решении выражения (3.20) сначала проводят математические операции в квадратных скобках, при этом возможны следующие упрощения (если передаточный коэффициент разомкнутого контура $k_{\mathrm{рк}}\geq 10$):

$$k_{\mathrm{рк}}+1=k_{\mathrm{рк}}, \qquad k_{\mathrm{рк}}-1=k_{\mathrm{рк}}. \qquad (3.21)$$

Далее выражение (3.20) записывают как отношение следующих полиномов:

$$\varepsilon_{\mathrm{п}}(p)=\frac{c_0 p^{n-1}+c_1 p^{n-2}+\ldots+c_{n-1}}{d_0 p^{n}+d_1 p^{n-1}+\ldots+d_n}=\frac{C(p)}{D(p)}. \qquad (3.22)$$

В дальнейшем для вычисления квадратичной интегральной оценки $Q_{\text{кв}_\text{в}}$ по выражению (3.22) используют методику, изложенную на с. 328-336 [1].

Минимум интегральной оценки и оптимальное значение передаточного коэффициента $k_{\text{рк}}$ рекомендуется определять непосредственно по графику функции $Q_{\text{кв}}=f(k_{\text{рк}})$, построенного по точкам. Затем от оптимального значения коэффициента $k_{\text{рк}}$ следует перейти к оптимальному значению передаточного коэффициента $k_{\text{у}}$.

## 4. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа оформляется на стандартных листах белой писчей бумаги формата А4 (210×297) в виде распечатки с электронного варианта, причем используется только одна сторона каждого листа.

Страницы курсовой работы должны иметь поля. Заголовки разделов рекомендуется выделять.

Математические преобразования и расчеты, выполняемые в каждом разделе курсовой работы, необходимо сопровождать краткими текстовыми пояснениями, связывающими исходное математическое выражение (характеристическое уравнение, характеристическую функцию, амплитудно-фазовую частотную характеристику, передаточную функцию и т. п.), конечную расчетную формулу, таблицу с вычисленными значениями и соответствующий график. **Особое внимание следует уделять четкому формулированию выводов в конце каждого раздела.**

При получении переходных характеристик скорректированной системы (см. раздел 5 курсовой работы) способом **цифрового моделирования** следует привести листинг программы с распечаткой результатов или результаты расчета в виде вычисленных значений ординат переходной функции в соответствующие моменты времени.

Математические выражения необходимо записывать вначале в самом общем виде – через передаточные и частотные функции отдельных звеньев, затем, вместо каждой функции $W_i$, подставляется

ее конкретный вид, далее производятся алгебраические преобразования и упрощения, и, наконец, подстановка числовых значений постоянных времени и передаточных коэффициентов звеньев.

Название и номер рисунка пишутся под рисунком. Название и номер таблицы пишутся над таблицей. Располагают рисунки и таблицы после первой ссылки на них.

При использовании справочников, учебников и специальной литературы в тексте следует делать соответствующие ссылки: в квадратных скобках указывается номер литературного источника в списке. Список литературы приводится на последней странице курсовой работы сразу после раздела 6. **Перед списком литературы должно быть приведено развернутое заключение по выполненной работе.**

В конце курсовой работы ставятся дата и подпись студента.

Все листы курсовой работы (включая лист с содержанием работы и листы с рисунками и таблицами) необходимо пронумеровать. Номера ставятся в середине нижнего поля страницы. Разделы, рисунки, таблицы и страницы нумеруются арабскими цифрами. Нумерацию рисунков, таблиц и формул рекомендуется делать сквозной по всей работе. На все рисунки и таблицы должны быть ссылки.

Все листы должны быть скреплены между собой и сброшюрованы в обложке из плотной бумаги. На обложке стандартным шрифтом пишется содержание титульного листа.

После проверки работы преподавателем со студентом проводится собеседование по содержанию работы. Оценка работы определяется качеством выполнения работы и результатами собеседования.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном пособии студент должен выполнить курсовую работу в виде комплекса расчетов линейной системы управления, работающей при различных входных воздействиях.

После оценки точности в установившемся режиме (раздел 1 курсовой работы) может оказаться, что автоматическая система при оценке ее устойчивости (раздел 2 курсовой работы) будет неустойчивой как при заданном значении передаточного коэффициента управляющего устройства $k_y$, так и при новом, выбранном по условию точности, большем значении $k_y$. А может случиться, что при заданном значении $k_y$ система является устойчивой, а при новом – неустойчивой. В обоих случаях в разделе 3 курсовой работы будут одновременно выполнены 2 задачи: задача стабилизации (приведение системы из неустойчивого состояния в устойчивое) и задача коррекции (придание системе нового качества).

При оценке запасов устойчивости замкнутой системы по фазе и амплитуде (раздел 3 курсовой работы) может случиться, что полученные результаты не соответствуют рекомендуемым (см. с. 311-312 [1]). В этом случае необходимо по согласованию с преподавателем изменить заданные показатели качества или сделать правильные выводы о причинах несоответствия.

При построении области устойчивости в плоскости двух параметров заданные значения параметров **обязательно** должны попасть в область устойчивости, в противном случае следует искать математические ошибки. «Вырождение» области устойчивости в плоскости двух параметров в область устойчивости в плоскости одного параметра возможно (в рамках рассматриваемого курсовой работы) только для системы третьего порядка с интегрирующим исполнительным устройством.

При сравнении полученных показателей качества переходного процесса с заданными показателями при выполнении раздела 5 курсовой работы следует сделать выводы о причинах несоответствия.

При вычислении оптимального передаточного коэффициента управляющего устройства $k_y$ в разделе 6 курсовой работы следует

понимать, что одинаковые численные значения коэффициента $k_y$ в этом разделе и в разделе 1 курсовой работы могут быть только случайными, так как критерии оптимальности в разделах разные. В первом разделе коэффициент $k_y$ выбирают из условия заданной точности в установившемся режиме, в шестом – из условия минимума квадратичной интегральной оценки по заданному каналу воздействия.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукас В. А.* Теория автоматического управления: учебное пособие / В. А. Лукас. 4-е издание, исправленное. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2005. 677 с.

2. *Леонов Р. Е.* Решение типовых линейных задач в системе МАТЛАБ: учебное пособие / Р. Е. Леонов. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012. 168 с.

3. *Лукас В. А., Барановский В. П.* Теория автоматического управления. Часть 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества линейных непрерывных систем управления: курс лекций / В. А. Лукас, В. П. Барановский. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. 226 с.

4. *Лукас В. А., Барановский В. П.* Основы теории автоматического управления: учебное пособие / В. А. Лукас, В. П. Барановский. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. 190 с.

Приложение 1

**Титульный лист курсовой работы**

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра автоматики и компьютерных технологий

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине
**«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»**

Тема: Комплекс расчётов линейной
системы управления

Группа_____

Студент_____

Номер задания_____

Руководитель_____

Екатеринбург, 20__

Приложение 2

## Задание на выполнение курсовой работы

ЗАДАНИЕ №

Для автоматической системы, алгоритмическая схема которой приведена на рис. В.1 (или В.2), выполнить следующие расчёты:

1. При заданных параметрах линейной системы (см. табл. 1.2, *а, б*) $k_о$= ; $k_{oz}$= ; $T_о$=$T_{oz}$= ,с; $k_и$= ; $T_и$= ,с; $k_у$= ; $T_у$= ,с; $k_{уэ}$= ; $T_{уэ}$= ,с; $k_п$= оценить точность в установившемся режиме по каналу _____(см. табл. 1.4) при типовом воздействии _____(см. табл. 1.3, *а, б*).

При неудовлетворительной точности выбрать значение передаточного коэффициента $k_у$, обеспечивающее требуемое значение сигнала ошибки $\varepsilon_з(\varepsilon_z) \leq$ _____(см. табл. 1.3, *а, б*).

2. С помощью критерия _____(см. табл. 1.4) проверить устойчивость линейной системы при заданных и выбранных параметрах.

3. По требуемым показателям качества в переходном режиме σ = ,%; $t_п$ = , с; $M$ = (см. табл. 1.3, *а, б*) определить структуру и параметры корректирующего устройства (см. рис. В.1 или В.2).

4. Методом $D$-разбиения построить область устойчивости по параметрам _____(см. табл. 1.4) для скорректированной системы.

5. На ЦВМ получить график переходного процесса по каналу _____(см. табл. 1.4) и сравнить полученные показатели качества с требуемыми.

6. Для замкнутой скорректированной системы вычислить квадратичную интегральную оценку по каналу _____(см. табл. 1.4) и определить оптимальное значение коэффициента $k_у$.

Дата выдачи задания Подпись руководителя

Приложение 3

# ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

### П.3.1. Оценка точности в установившемся режиме

Оценим точность **статического** варианта системы в установившемся режиме по каналу «$x_з$-ε» при **ступенчатом** воздействии $x_з(t)=a_о$ для алгоритмической схемы, представленной на рис. В.1. Подставим в формулу (3.1) передаточные функции элементов системы

$$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_з(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{k_п k_у k_и k_о}{(T_у p+1)(T_и p+1)(T_о p+1)}}= \tag{П.3.1}$$

$$=\frac{(T_у p+1)(T_и p+1)(T_о p+1)}{(T_у p+1)(T_и p+1)(T_о p+1)+k_п k_у k_и k_о}.$$

Запишем теорему Лапласа о конечном значении оригинала для сигнала ошибки (см. формулу 3.2) с учётом формулы (П.3.1) и изображения ступенчатого воздействия $X_з(p)=a_о/p$

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\frac{(T_у p+1)(T_и p+1)(T_о p+1)}{(T_у p+1)(T_и p+1)(T_о p+1)+k_п k_у k_и k_о}\cdot\frac{a_о}{p}. \tag{П.3.2}$$

После упрощения выражения (П.3.2) и взятия предела получим

$$\varepsilon_з(\infty)=\frac{a_о}{1+k_п k_у k_и k_о}. \tag{П.3.3}$$

С учётом заданных численных значений передаточных коэффициентов элементов системы ($k_п$=1,0; $k_у$=20; $k_и$=5,0; $k_о$=0,2) и величины входного сигнала ($a_о$=3,0) получим

$$\varepsilon_з(\infty)=\frac{3{,}0}{1+1{,}0\cdot 2{,}0\cdot 5{,}0\cdot 0{,}2}\approx 0{,}14. \tag{П.3.4}$$

Исходя из решения (П.3.4) и условия точности системы в установившемся режиме по рассматриваемому каналу воздействия (например, $\varepsilon_з\le 0{,}2$) видно, что передаточный коэффициент управ-

ляющего устройства ($k_у = 20$) обеспечивает значение сигнала ошибки ниже требуемого, следовательно, точность системы при заданных условиях удовлетворительная.

Предположим, требуемая точность по заданному каналу воздействия должна быть $\varepsilon_з \le 0{,}1$. В этом случае новое большее значение передаточного коэффициента управляющего устройства $k_у$ следует определить из условия

$$0{,}10 = \frac{3{,}0}{1 + 1{,}0 \cdot k_у \cdot 5{,}0 \cdot 0{,}2}, \qquad \text{(П.3.5)}$$

откуда $k_у \approx 29$.

Оценим точность **астатического** варианта системы (системы с интегрирующим исполнительным устройством) в установившемся режиме по каналу «$x_з$-ε» при линейном воздействии $x_з(t)=a_1 t$ для алгоритмической схемы, представленной на рис. В.2. Перепишем формулу (3.1) с учётом дополнительного элемента $W_{уэ}(p)$, введённого в контур системы,

$$\Phi(p) = \frac{\varepsilon(p)}{X_з(p)} = \frac{1}{1 + W_п(p)W_{уэ}(p)W_у(p)W_и(p)W_о(p)}. \qquad \text{(П.3.6)}$$

Подставим в формулу (П.3.6) передаточные функции элементов системы

$$\Phi(p) = \frac{\varepsilon(p)}{X_з(p)} = \frac{1}{1 + \dfrac{k_п k_{уэ} k_у k_и k_о}{p(T_{уэ}p+1)(T_у p+1)(T_о p+1)}} =$$

$$= \frac{p(T_{уэ}p+1)(T_у p+1)(T_о p+1)}{p(T_{уэ}p+1)(T_у p+1)(T_о p+1) + k_п k_{уэ} k_у k_и k_о}. \qquad \text{(П.3.7)}$$

Запишем теорему Лапласа о конечном значении оригинала для сигнала ошибки (см. формулу 3.2) с учётом формулы (П.3.7) и изображения линейного воздействия $X_з(p)=a_1/p^2$

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\frac{p(T_{\text{уэ}}p+1)(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)}{p(T_{\text{уэ}}p+1)(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)+k_{\text{п}}k_{\text{уэ}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}\cdot\frac{a_1}{p^2}. \quad \text{(П.3.8)}$$

После упрощения выражения (П.3.8) и взятия предела получим

$$\varepsilon_{\text{з}}(\infty)=\frac{a_1}{k_{\text{п}}k_{\text{уэ}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}. \quad \text{(П.3.9)}$$

С учётом заданных численных значений передаточных коэффициентов элементов системы ($k_{\text{п}}$=1,1; $k_{\text{уэ}}$=2,0; $k_{\text{у}}$=5,0; $k_{\text{и}}$=2,0; $k_{\text{о}}$=2,5) и величины входного сигнала ($a_1$=5,0) получим

$$\varepsilon_{\text{з}}(\infty)=\frac{5,0}{1,1\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2,5}\approx 0,09. \quad \text{(П.3.10)}$$

Исходя из решения (П.3.10) и условия точности системы в установившемся режиме по рассматриваемому каналу воздействия (например, $\varepsilon_{\text{з}}\le 0,05$) видно, что передаточный коэффициент управляющего устройства $k_{\text{у}}$=5,0 не обеспечивает требуемой точности. Новое, бóльшее значение передаточного коэффициента $k_{\text{у}}$ найдём из условия

$$0,05=\frac{5,0}{1,1\cdot 2\cdot k_{\text{у}}\cdot 2\cdot 2,5}, \quad \text{(П.3.11)}$$

откуда $k_{\text{у}}\approx 9,1$.

Оценим точность системы в установившемся режиме по каналу «z-ε», предварительно записав передаточную функцию замкнутой системы по этому каналу (для рис. В.2)

$$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{Z(p)}=\frac{W_{\text{оz}}(p)}{1+W_{\text{п}}(p)W_{\text{уэ}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p)}, \quad \text{(П.3.12)}$$

Запишем теорему Лапласа о конечном значении оригинала для сигнала ошибки по каналу «z-ε»

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0}p\Phi(p)Z(p), \quad \text{(П.3.13)}$$

где $Z(p)$ – изображение по Лапласу возмущающего воздействия: для $z(t)=a_0$ $Z(p)=a_0/p$, а для $z(t)=a_1 t$ $Z(p)=a_1/p^2$.

Подставив в формулу (П.3.12) передаточные функции элементов системы, с учётом формулы (П.3.13) получим следующие выражения в общем виде для сигнала ошибки:

- для статической системы

$$\varepsilon_z(\infty)=\frac{a_{\text{о}}k_{oz}}{1+k_{\text{п}}k_{\text{уэ}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}, \qquad \text{(П.3.14)}$$

- для астатической системы

$$\varepsilon_z(\infty)=\frac{a_1 k_{oz}}{k_{\text{п}}k_{\text{уэ}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}. \qquad \text{(П.3.15)}$$

Если после подстановки в формулы (П.3.14) или (П.3.15) численных значений передаточных коэффициентов элементов системы и величин входного сигнала точность системы удовлетворяет заданной, то расчёт точности закончен; если не удовлетворяет, то новое, бóльшее значение передаточного коэффициента управляющего устройства $k_{\text{у}}$ следует найти, подставив в формулы (П.3.14) или (П.3.15) требуемые по условию точности численные значения сигнала ошибки $\varepsilon_z$ из табл. 1.3, *а* или табл. 1.3, *б*.

Для оценки точности системы по каналу «*z*-*x*» запишем передаточную функцию замкнутой системы по этому каналу (для рис. В.2)

$$\Phi(p)=\frac{X(p)}{Z(p)}=\frac{-W_{\text{oz}}(p)}{1+W_{\text{п}}(p)W_{\text{уэ}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p)}. \qquad \text{(П.3.16)}$$

Сравнивая формулы (П.3.12) и (П.3.16), можно отметить, что они отличаются только знаками числителя передаточных функций. Таким образом, при оценке точности по каналу «*z*-*x*» можно считать, что он идентичен каналу «*z*-ε». В дальнейшем знак минус в числителе формулы (П.3.16) следует опустить и точность рассматривать по формулам (П.3.14) или (П.3.15).

## П.3.2. Проверка устойчивости исходной системы

### *П.3.2.1. Критерий устойчивости Гурвица*

Исходным выражением для определения устойчивости по критерию Гурвица является характеристическое уравнение **замкнутого** контура системы (см. формулу (3.3)). Подставим в формулу (3.3) передаточные функции элементов системы для алгоритмической схемы, представленной на рис. В.1,

$$1 + W_{\text{п}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p) = 0. \qquad \text{(П.3.17)}$$

Подставим в формулу (П.3.17) содержание передаточных функций элементов для **статического** варианта системы

$$1 + \frac{k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}{(T_{\text{у}}p + 1)(T_{\text{и}}p + 1)(T_{\text{о}}p + 1)} = 0. \qquad \text{(П.3.18)}$$

Преобразуем выражение (П.3.18)

$$T_{\text{у}}T_{\text{и}}T_{\text{о}}p^3 + (T_{\text{у}}T_{\text{и}} + T_{\text{и}}T_{\text{о}} + T_{\text{у}}T_{\text{о}})p^2 + \\ + (T_{\text{у}} + T_{\text{и}} + T_{\text{о}})p + 1 + k_{\text{рк}} = 0, \qquad \text{(П.3.19)}$$

где $k_{\text{рк}}=k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура системы.

Подставим в уравнение (П.3.19) численные значения постоянных времени и передаточных коэффициентов элементов системы для одного из вариантов задания

$$0{,}18\,p^3 + 1{,}17\,p^2 + 2{,}05\,p + 21 = 0. \qquad \text{(П.3.20)}$$

Перепишем уравнение (П.3.20) в общем виде

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \qquad \text{(П.3.21)}$$

где $a_0$=0,18; $a_1$=1,17; $a_2$=2,05; $a_3$=21.

В соответствии с формулировкой критерия устойчивости Гурвица [1] помимо условия положительности всех коэффициентов характеристического уравнения в системе любого порядка для устойчивости исследуемой системы **третьего** порядка должно выполняться условие

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \qquad \text{(П.3.22)}$$

Подставив в формулу (П.3.22) численные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, получим $\Delta_2 = -1{,}38 < 0$. Из этого следует, что при заданном передаточном коэффициенте разомкнутого контура ($k_{рк} = 20$) замкнутая система является **неустойчивой**. Вследствие этого, при выполнении третьего раздела курсового проекта, помимо задания системе конкретного качества, систему одновременно стабилизируют, то есть приводят в устойчивое состояние.

Определим устойчивость замкнутой системы, представленной на рис. В.2. В соответствии с формулой (3.3) запишем характеристическое уравнение замкнутого контура

$$1 + W_{\text{п}}(p) W_{\text{уэ}}(p) W_{\text{у}}(p) W_{\text{и}}(p) W_{\text{о}}(p) = 0. \qquad \text{(П.3.23)}$$

Подставим в формулу (П.3.23) содержание передаточных функций элементов для **астатического** варианта системы

$$1 + \frac{k_{\text{п}} k_{\text{уэ}} k_{\text{у}} k_{\text{и}} k_{\text{о}}}{p(T_{\text{уэ}} p + 1)(T_{\text{у}} p + 1)(T_{\text{о}} p + 1)} = 0. \qquad \text{(П.3.24)}$$

Преобразуем выражение (П.3.24)

$$T_{\text{уэ}} T_{\text{у}} T_{\text{о}} p^4 + (T_{\text{уэ}} T_{\text{у}} + T_{\text{уэ}} T_{\text{о}} + T_{\text{у}} T_{\text{о}}) p^3 + (T_{\text{уэ}} + T_{\text{о}} + T_{\text{у}}) p^2 + p + k_{\text{рк}} = 0, \qquad \text{(П.3.25)}$$

где $k_{\text{рк}} = k_{\text{п}} k_{\text{уэ}} k_{\text{у}} k_{\text{и}} k_{\text{о}}$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура системы.

Подставим в уравнение (П.3.25) численные значения постоянных времени и передаточных коэффициентов элементов системы для одного из вариантов задания

$$6p^4+11p^3+6p^2+p+0{,}45=0. \qquad (П.3.26)$$

Перепишем уравнение (П.3.26) в общем виде

$$a_0p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4=0, \qquad (П.3.27)$$

где $a_0$=6; $a_1$=11; $a_2$=6; $a_3$=1; $a_4$=0,45.

В соответствии с формулировкой критерия устойчивости Гурвица [1], помимо условия положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, в системе любого порядка для устойчивости исследуемой системы **четвертого** порядка должно выполняться условие:

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0. \qquad (П.3.28)$$

Подставив в формулу (П.3.28) численные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, получим $\Delta_3$ = 5,55 > 0. Следовательно, рассматриваемая замкнутая система устойчива.

### *П.3.2.2. Критерий устойчивости Михайлова*

Исходным выражением для определения устойчивости является характеристическое уравнение **замкнутой** системы (см. формулу (3.3)). Запишем характеристическое уравнение системы для алгоритмической схемы, представленной на рис. В.1,

$$1+W_{\text{п}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p)=0. \qquad (П.3.29)$$

Подставим в формулу (П.3.29) содержание передаточных функций элементов для **астатического** варианта системы

$$1+\frac{k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}{p(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)}=0. \qquad (П.3.30)$$

Преобразуем выражение (П.3.30) и представим его в виде полинома

$$T_{\text{у}}T_{\text{о}}p^3+(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})p^2+p+k_{\text{рк}}= F(p), \qquad (П.3.31)$$

где $k_{рк}=k_п k_у k_и k_о$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура системы.

Подставим в формулу (П.3.31) численные значения постоянных времени и передаточных коэффициентов элементов системы для одного из вариантов задания и сделаем подстановку $p = j\omega$

$$-0{,}385j\omega^3 - 1{,}45\omega^2 + j\omega + 2{,}7 = F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \qquad (П.3.32)$$

Разложим выражение (П.3.32) на действительную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ составляющие

$$P(\omega) = 2{,}7 - 1{,}45\omega^2, \qquad Q(\omega) = \omega - 0{,}385\omega^3. \qquad (П.3.33)$$

Вычислим значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ при изменении частоты $\omega$ от 0 до $\infty$ и результаты сведем в таблицу.

Таблица П.3.1

**Годограф Михайлова**

| $\omega$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,3 | 1,5 | 1,61 | 1,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 2,7 | 2,64 | 2,46 | 2,17 | 1,77 | 1,25 | 0,24 | -0,56 | -1,05 | -1,49 |
| $Q(\omega)$ | 0 | 0,2 | 0,37 | 0,51 | 0,6 | 0,615 | 0,45 | 0,2 | 0 | -0,19 |

По данным табл. П.3.1 строим график.

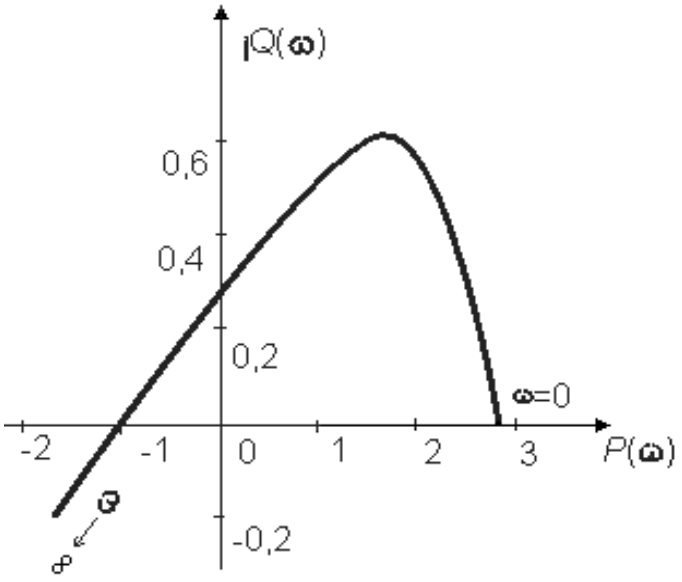



Рис. П.3.1. Годограф Михайлова нескорректированной системы

Проанализировав график на рис. П.3.1, можно на основании формулировки критерия Михайлова* (с. 266-272 [1]) сделать вывод, что исследуемая замкнутая система управления устойчивая.

Правильность вывода об устойчивости (неустойчивости) системы по виду годографа Михайлова можно проверить, используя следствие из критерия. Для этого следует найти корни уравнения $P(\omega) = 0$ и $Q(\omega) = 0$. Для рассматриваемого примера (формула (П.3.33)) корни уравнений будут следующие: $\omega_{м1} = 0$; $\omega_{g1} = 1{,}36$; $\omega_{м2} = 1{,}61$.

Так как корни уравнений чередуются (численные значения корней $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ следуют друг за другом: 0→1,36→1,61), то (в соответствии с формулировкой следствия из критерия Михайлова) исследуемая система управления будет устойчивой.

При определении устойчивости системы для алгоритмической системы на рис. В.2 полином (3.5) будет не третьего порядка, а четвертого за счет введения в контур элемента с передаточной функцией $W_{уэ}(p)$. В остальном последовательность определения факта устойчивости (неустойчивости) системы та же, что и для системы третьего порядка, с той лишь разницей, что годограф Михайлова устойчивой системы четвертого порядка должен последовательно, не обращаясь в ноль, обойти четыре квадранта.

### *П.3.2.3. Критерий устойчивости Найквиста*

Исходным выражением для определения устойчивости является передаточная функция **разомкнутого** контура системы $W_{рк}(p)$. Запишем передаточную функцию для **статического** варианта системы, представленной на рис. В.2,

$$W_{рк}(p) = W_{п}(p)W_{уэ}(p)W_{у}(p)W_{и}(p)W_{о}(p) = \\ = \frac{k_{п}k_{уэ}k_{у}k_{и}k_{о}}{(T_{уэ}p+1)(T_{у}p+1)(T_{и}p+1)(T_{о}p+1)}. \qquad (П.3.34)$$

---

* Формулировку критерия устойчивости Михайлова следует привести при оформлении курсовой работы.

Сделаем в формуле (П.3.34) подстановку $p = j\omega$

$$W_{\text{рк}}(j\omega) = \frac{k_{\text{рк}}}{(T_{\text{уэ}} j\omega + 1)(T_{\text{у}} j\omega + 1)(T_{\text{и}} j\omega + 1)(T_{\text{о}} j\omega + 1)}, \quad \text{(П.3.35)}$$

где $k_{\text{рк}}$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура системы.

Представим $W_{\text{рк}}(j\omega)$ в соответствии с формулой (3.8) через амплитудно-частотную $A(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$ функции

$$A(\omega) = \left|W_{\text{рк}}(j\omega)\right| = \frac{k_{\text{рк}}}{\sqrt{T_{\text{уэ}}^2\omega^2 + 1}\sqrt{T_{\text{у}}^2\omega^2 + 1}\sqrt{T_{\text{и}}^2\omega^2 + 1}\sqrt{T_{\text{о}}^2\omega^2 + 1}}; \quad \text{(П.3.36)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W_{\text{рк}}(j\omega) = -\operatorname{arctg} T_{\text{уэ}}\omega - \operatorname{arctg} T_{\text{у}}\omega - \\ - \operatorname{arctg} T_{\text{и}}\omega - \operatorname{arctg} T_{\text{о}}\omega \quad \text{(П.3.37)}$$

Подставим в формулы (П.3.36) и (П.3.37) численные значения передаточных коэффициентов и постоянных времени для одного из вариантов задания

$$A(\omega) = \frac{19}{\sqrt{0{,}64\omega^2 + 1}\sqrt{1{,}44\omega^2 + 1}\sqrt{0{,}16\omega^2 + 1}\sqrt{4{,}84\omega^2 + 1}}; \quad \text{(П.3.38)}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} 0{,}8\omega - \operatorname{arctg} 1{,}2\omega - \operatorname{arctg} 0{,}4\omega - \operatorname{arctg} 2{,}2\omega. \quad \text{(П.3.39)}$$

Для построения графика амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) составим таблицу изменения функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при вариации частоты $\omega$.

Таблица П.3.2

**АФЧХ разомкнутого контура**

| $\omega$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(\omega)$ | 19 | 18,4 | 16,7 | 14,4 | 9,9 | 3,65 | 1,5 | 0,67 | 0,03 |
| $\varphi(\omega)$, град | 0 | -26 | -51 | -74 | -112 | -176 | -215 | -241 | -305 |

По данным табл. П.3.2 строим график АФЧХ.

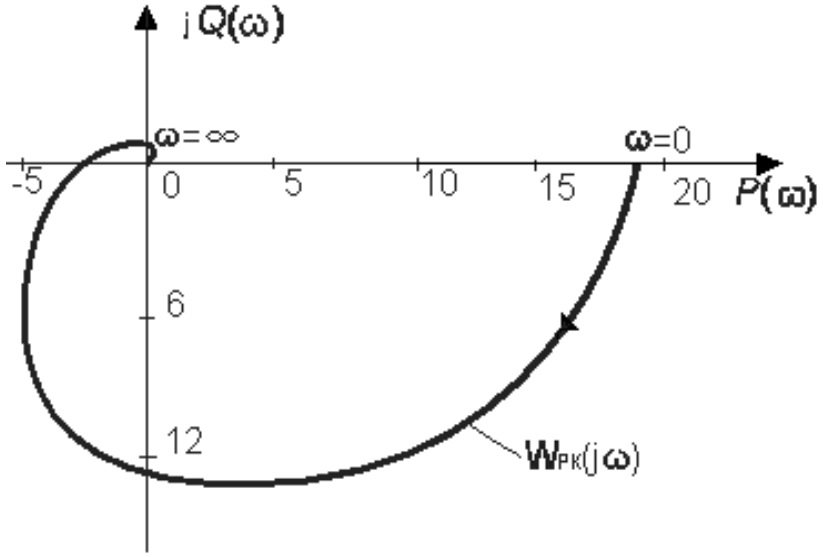



Рис. П.3.2. Амлитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутого контура нескорректированной системы

Анализируя график на рис. П.3.2, отмечаем, что на основании основной формулировки критерия устойчивости Найквиста† (с. 272-280 [1]) исследуемая замкнутая система неустойчивая.

Определим устойчивость для **астатического** варианта системы, представленной на рис. В.1. Запишем передаточную функцию разомкнутого контура системы $W_{\text{рк}}(p)$

$$W_{\text{рк}}(p) = W_{\text{п}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p) = \\ = \frac{k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}}{p(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)}. \qquad \text{(П.3.40)}$$

Сделаем в формуле (П.3.40) подстановку $p=j\omega$

$$W_{\text{рк}}(j\omega) = \frac{k_{\text{рк}}}{j\omega(T_{\text{у}}j\omega+1)(T_{\text{о}}j\omega+1)}, \qquad \text{(П.3.41)}$$

† Основную формулировку критерия устойчивости Найквиста следует привести при оформлении курсовой работы.

где $k_{рк}=k_п k_у k_и k_о$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура системы.

Представим $W_{рк}(j\omega)$ в соответствии с формулой (3.8) через амплитудно-частотную $A(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$ функции

$$A(\omega) = \left|W_{рк}(j\omega)\right| = \frac{k_{рк}}{\omega\sqrt{T_у^2\omega^2+1}\sqrt{T_о^2\omega^2+1}}; \qquad (П.3.42)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W_{рк}(j\omega) = -90° - \operatorname{arctg} T_у\omega - \operatorname{arctg} T_о\omega. \qquad (П.3.43)$$

Подставим в формулы (П.3.36) и (П.3.37) численные значения передаточных коэффициентов и постоянных времени для одного из вариантов задания

$$A(\omega) = \left|W_{рк}(j\omega)\right| = \frac{1{,}2}{\omega\sqrt{2{,}25\omega^2+1}\sqrt{2{,}25\omega^2+1}}; \qquad (П.3.44)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W_{рк}(j\omega) = -90° - \operatorname{arctg}1{,}5\omega - \operatorname{arctg}1{,}5\omega. \qquad (П.3.45)$$

Для построения графика амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) составим таблицу изменения функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при вариации частоты $\omega$.

Таблица П.3.3

**АФЧХ разомкнутого контура**

| $\omega$ | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(\omega)$ | 8,3 | 4,7 | 2,5 | 1,0 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,19 |
| $\varphi(\omega)$, град | -134 | -154 | -164 | -172 | -180 | -187 | -193 | -198 | -203 | -207 |

По данным таблицы П.3.3 строим график АФЧХ.

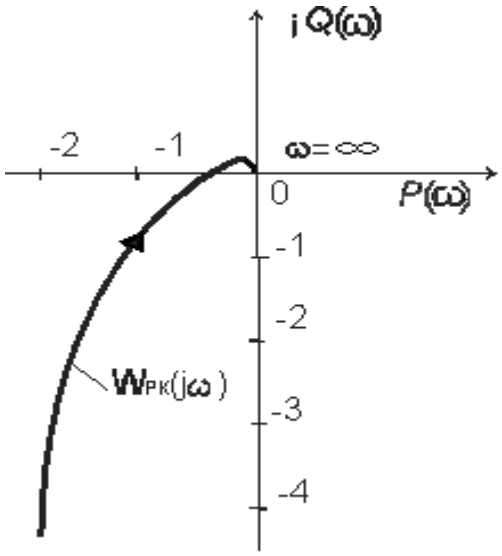



Рис. П.3.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутого контура нескорректированной системы

Анализируя график на рис. П.3.3, отмечаем, что на основании основной формулировки критерия устойчивости Найквиста (с. 272-280 [1]) исследуемая замкнутая система является устойчивой.

График функции $W_{рк}(j\omega)$ можно построить и другим способом, разложив эту функцию на действительную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ составляющие в соответствии с формулой (3.9). Для этого в знаменателях функций $W_{рк}(j\omega)$ (см. формулы (П.3.35) и (П.3.41)) перемножают скобки, приводят подобные члены, отделяют действительную часть от мнимой и умножают числитель и знаменатель функций на выражение, сопряженное знаменателю. Затем составляют таблицу изменения функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ при вариации частоты $\omega$ и стоят график АФЧХ.

### *П.3.2.4. Логарифмический критерий устойчивости*

Для определения устойчивости **замкнутой** системы строят два графика – логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) и фазо-частотную характеристику (ФЧХ) разомкнутой системы. Исходным выражением для построения является передаточная функция разомкнутой нескорректированной системы $W_{нс}(p)$.

Построим приближенную ЛАЧХ для **статического** варианта системы, представленной на рис. В.1. Запишем передаточную функцию этой системы

$$W_{\text{нс}}(p) = W_{\text{п}}(p)W_{\text{у}}(p)W_{\text{и}}(p)W_{\text{о}}(p) = \\ = \frac{k_{\text{рк}}}{(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{и}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)}, \qquad \text{(П.3.46)}$$

где $k_{\text{рк}}=k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{и}}k_{\text{о}}$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура.

Произведем необходимые вспомогательные операции для построения ЛАЧХ, для чего найдем значения $20\lg k_{\text{рк}}$, значения сопрягающих частот и их логарифмов в порядке возрастания, например, $\omega_{\text{с1}}=1/T_{\text{о}}$, $\omega_{\text{с2}}=1/T_{\text{у}}$, $\omega_{\text{с3}}=1/T_{\text{и}}$, $\lg\omega_{\text{ci}}$. ЛАЧХ трех последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка $L_{\text{нс}}(\omega)$ строим на основании **правила** построения ЛАЧХ одного инерционного звена первого порядка (с. 168-169 [1]) и с учетом того, что

$$L_{\text{нс}}(\omega) = L_{\text{у}}(\omega) + L_{\text{и}}(\omega) + L_{\text{о}}(\omega), \qquad \text{(П.3.47)}$$

где $L_{\text{у}}(\omega)$, $L_{\text{и}}(\omega)$, $L_{\text{о}}(\omega)$ – ЛАЧХ соответственно управляющего устройства, исполнительного устройства и объекта управления.

Выполним вспомогательные вычисления по построению ЛАЧХ для одного из вариантов задания: $20\lg k_{\text{рк}} \approx 18$ дБ; $\omega_{\text{с1}} \approx 0{,}83$ с$^{-1}$; $\omega_{\text{с2}} \approx 1{,}69$ с$^{-1}$; $\omega_{\text{с3}} \approx 4$ с$^{-1}$; $\lg\omega_{\text{с1}} \approx -0{,}08$; $\lg\omega_{\text{с2}} \approx 0{,}22$; $\lg\omega_{\text{с3}} \approx 0{,}6$.

Запишем формулу для построения ФЧХ системы

$$\varphi_{\text{нс}}(\omega) = \arg W_{\text{рк}}(j\omega) = -\text{arctg}T_{\text{у}}\omega - \text{arctg}T_{\text{и}}\omega - \text{arctg}T_{\text{о}}\omega \qquad \text{(П.3.48)}$$

и для вышеприведенного варианта задания составим таблицу изменения $\varphi_{\text{нс}}(\omega)$ при вариации частоты $\omega$ от нуля до $\infty$.

Таблица П.3.4

**Фазовая частотная характеристика разомкнутого контура**

| $\omega$ | 0,1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(\omega)$, град | -11,7 | -95,1 | -144,1 | -172,3 | -190,6 | -203,3 |

На рис. П.3.4 представлены ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы.

На основании анализа рис. П.3.4 делаем вывод, что $\left|\varphi_{нс}(\omega_{ср})\right| < 180^{o}$ и $L_{нс}(\omega_{\pi}) < 0$. Поэтому в соответствии с формулировкой логарифмического критерия устойчивости (с. 280 [1]) рассматриваемая замкнутая система устойчива.‡

Построим приближенную ЛАЧХ (рис. П.3.4) для **астатического** варианта системы, представленной на рис. В.2.

Запишем передаточную функцию этой системы

$$W_{нс}(p) = W_{п}(p)W_{уэ}(p)W_{у}(p)W_{и}(p)W_{о}(p) = \\ = \frac{k_{рк}}{p(T_{уэ}p+1)(T_{у}p+1)(T_{о}p+1)}, \qquad (П.3.49)$$

где $k_{рк} = k_{п}k_{уэ}k_{у}k_{и}k_{о}$ – передаточный коэффициент разомкнутого контура.

Произведем необходимые вспомогательные операции для построения ЛАЧХ, для чего найдем значения $20\lg k_{рк}$, значения сопрягающих частот и их логарифмов в порядке возрастания, например, $\omega_{с1} = 1/T_{о}$, $\omega_{с2} = 1/T_{у}$, $\omega_{с3} = 1/T_{уэ}$, $\lg\omega_{ci}$. ЛАЧХ трех последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка и идеального интегрирующего звена $L_{нс}(\omega)$ строим на основании **правил** построения ЛАЧХ инерционного звена первого порядка и интегрирующего звена (с. 168-169, 185 [1]) и с учетом того, что

$$L_{нс}(\omega) = L_{уэ}(\omega) + L_{у}(\omega) + L_{и}(\omega) + L_{о}(\omega), \qquad (П.3.50)$$

где $L_{уэ}(\omega)$, $L_{у}(\omega)$, $L_{и}(\omega)$, $L_{о}(\omega)$ – ЛАЧХ соответственно усилительного элемента, управляющего устройства, исполнительного устройства и объекта управления.

---

‡ При оформлении курсовой работы следует привести полную формулировку критерия устойчивости.

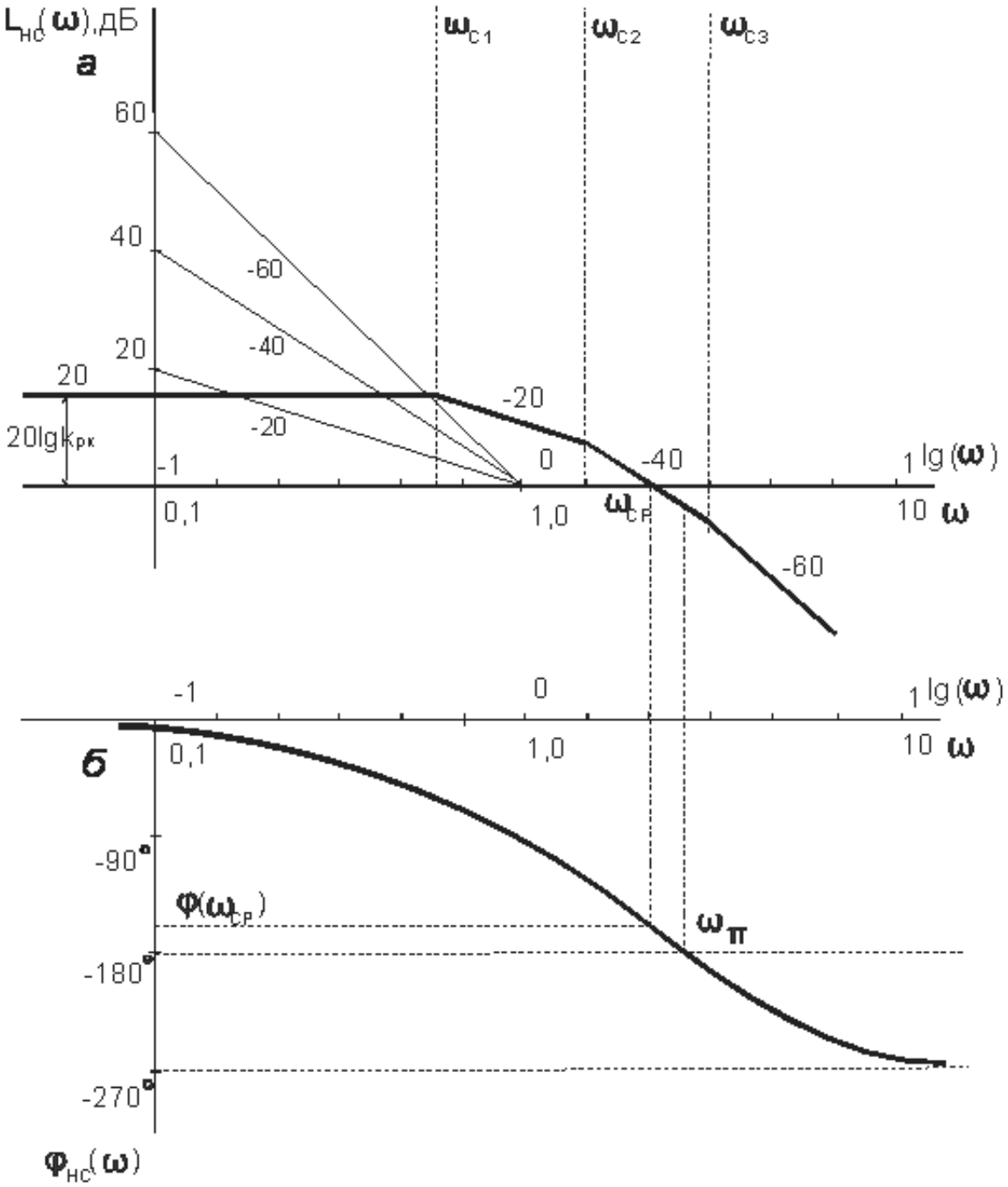



Рис. П.3.4. Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура нескорректированной статической системы:
*а* - ЛАЧХ, *б* - ФЧХ

При построении ЛАЧХ системы с астатизмом первого порядка сначала на частоте $\omega = 1\text{с}^{-1}$ откладывают $20\lg k_{\text{рк}}$, затем через эту точку проводят прямую с наклоном –20 дБ/декаду и изламывают ее на соответствующих сопрягающих частотах. Возможен другой способ построения: на оси частот откладывают частоту $\omega = k_{\text{рк}}$, через эту точку проводят прямую с наклоном –20дБ/декаду и изламывают ее на сопрягающих частотах.

При построении ЛАЧХ системы с астатизмом второго порядка на оси частот откладывают частоту $\omega = +\sqrt{k_{\text{рк}}}$, через эту точку проводят прямую с наклоном -40 дБ/декаду и изламывают её на сопрягающих частотах.

Выполним вспомогательные вычисления по построения ЛАЧХ астатической системы для одного из вариантов задания: $20\lg k_{\text{рк}} \approx 25$ дБ; $\omega_{\text{с1}} \approx 0{,}83\ \text{с}^{-1}$; $\omega_{\text{с2}} \approx 1{,}67\ \text{с}^{-1}$; $\omega_{\text{с3}} \approx 4\ \text{с}^{-1}$; $\lg\omega_{\text{с1}} \approx -0{,}08$; $\lg\omega_{\text{с2}} \approx 0{,}22$; $\lg\omega_{\text{с3}} \approx 0{,}6$.

Запишем формулу для построения ФЧХ системы

$$\varphi_{\text{нс}}(\omega) = -90^{o} - \text{arctg}(T_{\text{о}}\omega) - \text{arctg}(T_{\text{у}}\omega) - \text{arctg}(T_{\text{уэ}}\omega) \qquad \text{(П.3.51)}$$

и для вышеприведенного варианта задания составим таблицу изменения $\varphi_{\text{нс}}(\omega)$ при вариации частоты $\omega$ от нуля до $\infty$.

Таблица П.3.5

**Фазовая частотная характеристика разомкнутого контура**

| $\omega$ | 0,1 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi(\omega)$, град | -101,7 | -144,8 | -185,1 | -234,1 |

На рис. П.3.5 представлены ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы.

На основании анализа рис. П.3.5 делаем вывод, что $\left|\varphi_{\text{нс}}(\omega_{\text{ср}})\right| > 180^{\text{o}}$ и $L_{\text{нс}}(\omega_{\pi}) > 0$. Поэтому в соответствии с формулировкой логарифмического критерия устойчивости (с. 280 [1]) рассматриваемая замкнутая система неустойчива.

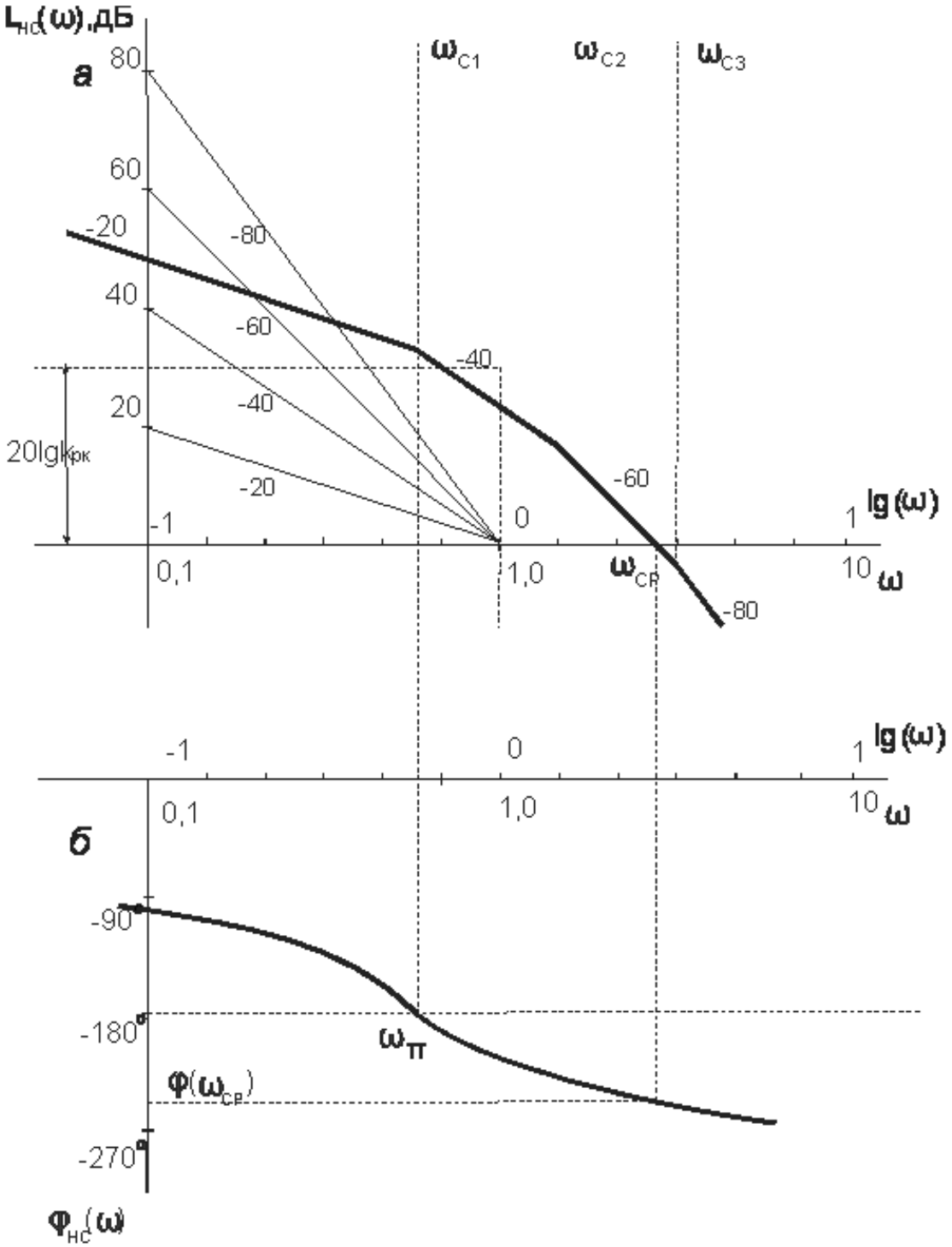



Рис. П.3.5. Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура нескорректированной астатической системы:
*а* – ЛАЧХ; *б* – ФЧХ

## П.3.3. Расчет корректирующего устройства

### *П.3.3.1. Расчет последовательного корректирующего устройства*

Рассчитаем последовательное корректирующее устройство для **статического** варианта системы управления, представленной на рис. В.1.

Решение задачи коррекции осуществляем для одного из вариантов задания в соответствии с методикой, изложенной на с. 392-396 [1], и в соответствии с последовательностью, изложенной в разд. 3.3.1 данного пособия.

Произведем вспомогательные вычисления, необходимые для построения ЛАЧХ нескорректированной системы $L_{нс}(\omega)$, описываемой передаточной функцией (П.3.46)

$$
\begin{aligned}
&20\lg k_{рк} = 20\lg 20 = 26 \text{ дБ};\\
&\omega_{с1} = \frac{1}{T_{о}} = \frac{1}{1,2} \approx 0,83 \text{ с}^{-1}; \qquad \lg \omega_{с1} \approx -0,08;\\
&\omega_{с2} = \frac{1}{T_{у}} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67 \text{ с}^{-1}; \qquad \lg \omega_{с2} \approx 0,22;\\
&\omega_{с3} = \frac{1}{T_{и}} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ с}^{-1}; \qquad \lg \omega_{с3} \approx 0,6.
\end{aligned}
\qquad \text{(П.3.52)}
$$

ЛАЧХ нескорректированной (исходной) системы $L_{нс}(\omega)$ представлена на рис. П.3.6.

Построим ЛАЧХ скорректированой (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$ по заданным показателям качества замкнутой системы в переходном режиме ($\sigma$, $t_{п}$, $M$), предварительно рассчитав параметры среднечастотного участка ЛАЧХ желаемой системы в соответствии с формулами (3.10):

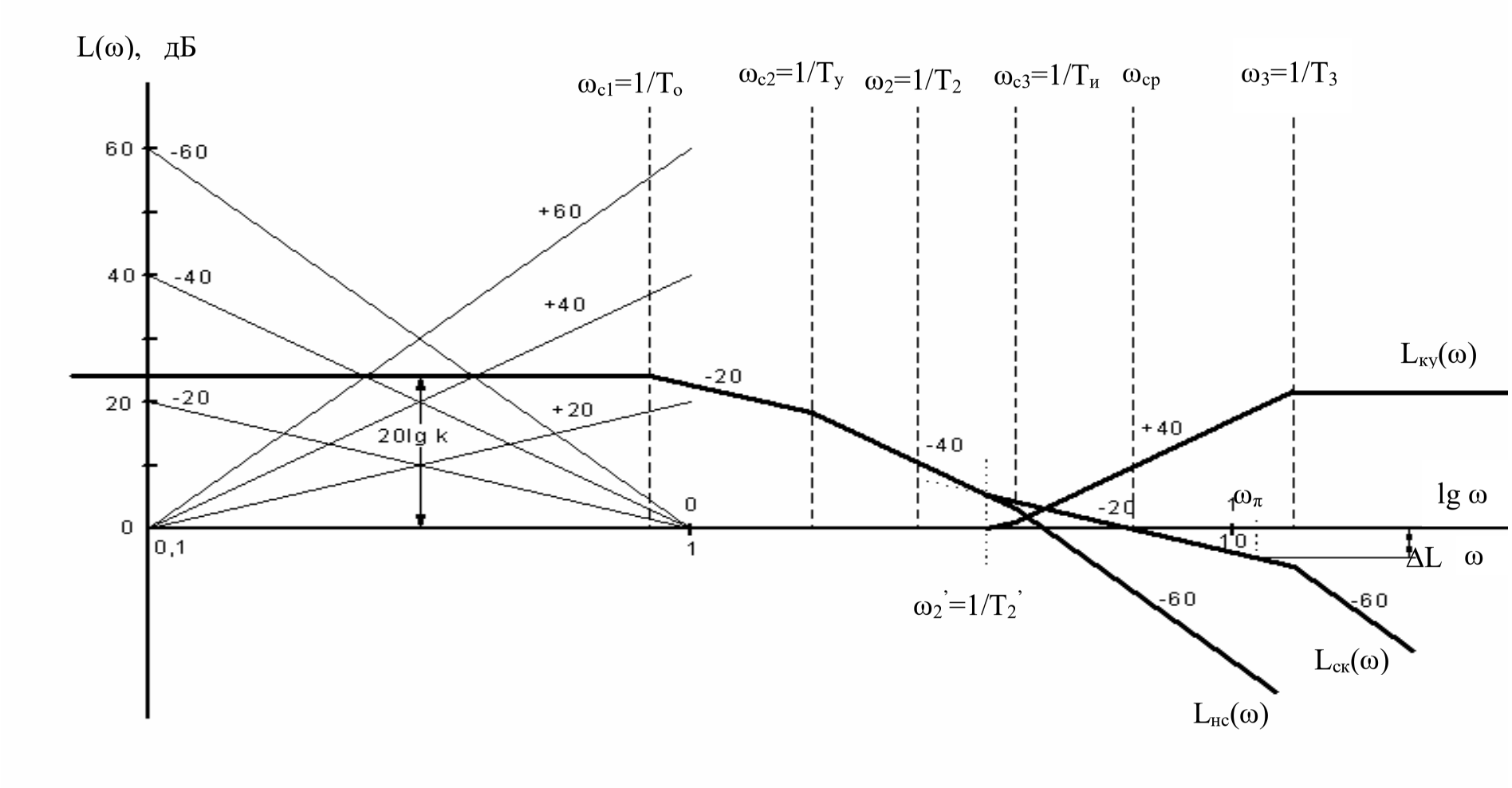



Рис. П.3.6. К расчёту последовательного корректирующего устройства

$$\omega_{ср} = \frac{0{,}12\pi\sigma}{t_{П}} = \frac{0{,}12\pi 30}{1{,}5} \approx 7{,}54 \ \text{с}^{-1}; \lg\omega_{ср} \approx 0{,}88;$$

$$\omega_2 = \frac{M-1}{M}\omega_{ср} = \frac{1{,}5-1}{1{,}5}7{,}54 \approx 2{,}51 \ \text{с}^{-1}; \lg\omega_2 \approx 0.39; \qquad \text{(П.3.53)}$$

$$\omega_3 = \frac{M+1}{M}\omega_{ср} = \frac{1{,}5+1}{1{,}5}7{,}54 = 12{,}57 \ \text{с}^{-1}; \lg\omega_3 \approx 1{,}1.$$

При построении ЛАЧХ скорректированной системы и ориентировании ее относительно ЛАЧХ нескорректированной системы рекомендуется при необходимости воспользоваться следующими рекомендациями:

1. Если среднечастотный участок ЛАЧХ желаемой системы не доходит до ЛАЧХ исходной системы, то его (участок) следует продолжить до встречи с ЛАЧХ исходной системы, при этом с графика следует снять новое численное значение частоты $\omega_2$.

2. Если среднечастотный участок ЛАЧХ желаемой системы пересекает ЛАЧХ исходной системы, то его (участок) следует «обрезать» до встречи с ЛАЧХ исходной системы, при этом с графика следует снять новое численное значение частоты $\omega_2$.

3. Если среднечастотный участок ЛАЧХ желаемой системы проходит выше ЛАЧХ исходной системы, то последнюю надо приподнять до пересечения или сопряжения с ЛАЧХ желаемой системы, при этом с графика следует снять новое, бóльшее значение передаточного коэффициента разомкнутого контура $k_{рк}$ и новое численное значение частоты $\omega_2$.

4. Разрешается при необходимости изменять частоту среза $\omega_{ср}$ на ±10 % от расчетного значения с одновременным пересчетом значений частот $\omega_2$ и $\omega_3$.

5. Если частоты среза ЛАЧХ желаемой и исходной систем расположены близко друг от друга, то следует обратиться к преподавателю для корректировки заданных показателей качества в переходном режиме ($\sigma$ и $t_{п}$).

ЛАЧХ скорректированной (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$ приведена на рис. П.3.6. Для рассматриваемого варианта задания

среднечастотный участок ЛАЧХ исходной системы пересёк ЛАЧХ исходной системы и, вследствие этого, был «обрезан» до встречи с ЛАЧХ исходной системы.

Вычтем из ЛАЧХ скорректированной системы ЛАЧХ нескорректированной системы и получим ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства (см. рис. П.3.6.):

$$L_{\text{ку}}(\omega) = L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{нс}}(\omega). \qquad \text{(П.3.54)}$$

По виду ЛАЧХ корректирующего устройства выбираем его принципиальную схему. Так как ЛАЧХ корректирующего устройства с увеличением частоты ω имеет тенденцию к увеличению амплитуды до частоты $\omega_3$, то для его технической реализации выбираем две последовательно включённые интегро-дифференцирующие *rC*-цепи с преобладанием дифференцирования, разделённые усилителем (рис. П.3.7).

Запишем передаточную функцию корректирующего устройства

$$W_{\text{ку}}(p) = \left(k_1 \frac{T_2' p + 1}{T_{\text{з}} p + 1}\right) \cdot k_{\text{доп}} \cdot \left(k_2 \frac{T_{\text{и}} p + 1}{T_{\text{з}} p + 1}\right), \qquad \text{(П.3.55)}$$

где $T'_2 = 1/\omega'_2 = 1/3{,}21 \approx 0{,}31$ с (значение частоты $\omega'_2$ снимаем с ЛАЧХ); $T_{\text{з}} = 1/\omega_3 = 1/12{,}57 \approx 0{,}08$ с.

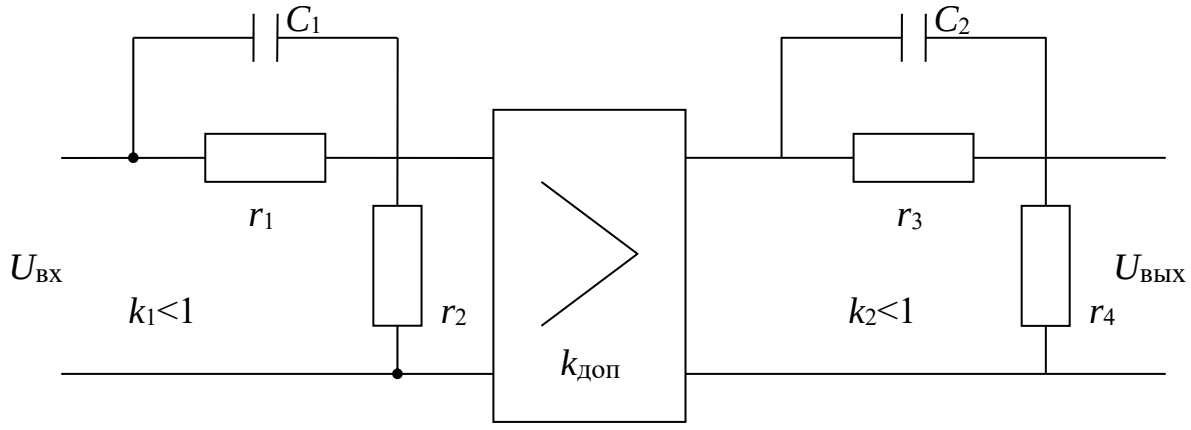



Рис. П.3.7. Принципиальная схема последовательного корректирующего устройства

*Примечание*. Усилитель в схеме (рис. П.3.7) выполняет роль усиления сигнала и разделения цепей.

Для того, чтобы передаточный коэффициент системы $k_{рк}$ не изменился, передаточный коэффициент корректирующего устройства должен быть равен единице. Для этого надо выполнить условие $k_{доп} = 1/k_1k_2$.

Рассчитаем передаточные коэффициенты $k_1$, $k_2$, $k_{доп}$ корректирующего устройства:

$$T_з = k_1 T'_2; \quad 0{,}08 = k_1 \cdot 0{,}31 \rightarrow k_1 \approx 0{,}26;$$

$$T_з = k_2 T_и; \quad 0{,}08 = k_2 \cdot 0{,}25 \rightarrow k_2 \approx 0{,}32; \qquad \text{(П.3.56)}$$

$$k_{доп} = \frac{1}{k_1 k_2} = \frac{1}{0{,}26 \cdot 0{,}32} \approx 12{,}02.$$

Для расчёта параметров элементов корректирующего устройства зададим численные значения следующим параметрам: для первой цепи $r_1 = 1$ МОм, для второй цепи $r_3 = 1$ МОм. Рассчитаем остальные параметры по формулам:

- для первой цепи

$$T'_2 = r_1 C_1,\ k_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}; \qquad \text{(П.3.57)}$$

- для второй цепи

$$T_и = r_3 C_2,\ k_2 = \frac{r_4}{r_3 + r_4}. \qquad \text{(П.3.58)}$$

С учётом формул (П.3.57) и (П.3.58) получим $C_1 = 0{,}31$ мкФ; $r_2 \approx 0{,}35$ МОм; $C_2 = 0{,}25$ мкФ; $r_4 \approx 0{,}47$ МОм.

Запишем передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы, учитывая, что $k_1 k_{доп} k_2 = 1$

$$W_{\text{ск}}(p) = W_{\text{ку}}(p)W_{\text{нс}}(p) = \frac{(T_2' p + 1)(T_{\text{и}} p + 1)}{(T_{\text{з}} p + 1)^2} \cdot \frac{k_{\text{рк}}}{(T_{\text{у}} p + 1)(T_{\text{и}} p + 1)(T_{\text{о}} p + 1)} =$$

$$= \frac{k_{\text{рк}}(T_2' p + 1)}{(T_{\text{у}} p + 1)(T_{\text{о}} p + 1)(T_{\text{з}} p + 1)^2}. \qquad \text{(П.3.59)}$$

Вычислим фазовый сдвиг скорректированной системы на частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ (см. формулу (3.11))

$$\varphi(\omega_{\text{ср}}) = \arg W_{\text{ск}}(j\omega)\Big|_{\omega = \omega_{\text{ср}}} =$$

$$= \text{arctg}(\omega_{\text{ср}} T_2') - \text{arctg}(\omega_{\text{ср}} T_{\text{у}}) - \text{arctg}(\omega_{\text{ср}} T_{\text{о}}) - 2\,\text{arctg}(\omega_{\text{ср}} T_{\text{з}}) =$$

$$= \text{arctg}(7{,}54 \cdot 0{,}31) - \text{arctg}(7{,}54 \cdot 0{,}6) - \text{arctg}(7{,}54 \cdot 1{,}2) - 2\,\text{arctg}(7{,}54 \cdot 0{,}08) =$$

$$= \text{arctg}\,2{,}34 - \text{arctg}\,4{,}52 - \text{arctg}\,9{,}05 - 2\,\text{arctg}\,0{,}6 =$$

$$= 66{,}86° - 77{,}55° - 83{,}69° - 61{,}92° \approx -156{,}3°. \qquad \text{(П.3.60)}$$

Вычислим запас по фазе $\Delta\varphi$ замкнутой скорректированной системы, применив формулу (3.12)

$$\Delta\varphi = 180° - \left|\varphi(\omega_{\text{ср}})\right| = 180° - 156{,}3° = 23{,}7°. \qquad \text{(П.3.61)}$$

Для определения запаса устойчивости замкнутой системы по амплитуде $\Delta L$ следует сначала найти частоту $\omega_\pi$, при которой фазовый сдвиг системы будет равен -(180±1)º (см. формулу (3.13)),

$$\varphi(\omega_\pi) = \arg W_{\text{ск}}(j\omega)\Big|_{\omega = \omega_\pi} =$$

$$= \text{arctg}(\omega_\pi T_2') - \text{arctg}(\omega_\pi T_{\text{у}}) - \text{arctg}(\omega_\pi T_{\text{о}}) - 2\,\text{arctg}(\omega_\pi T_{\text{з}}) =$$

$$= -180°(\pm 1°). \qquad \text{(П.3.62)}$$

Частоту $\omega_\pi$ из выражения (П.3.62) находим подбором, учитывая, что $\omega_\pi > \omega_{\text{ср}}$. Найденное таким образом численное значение ча-

стоты $\omega_\pi \approx 11{,}8$ с$^{-1}$. Отложив вычисленное значение частоты $\omega_\pi$ на графике ЛАЧХ скорректированной системы $L_{ск}(\omega)$, найдём запас устойчивости замкнутой скорректированной системы по амплитуде $\Delta L \approx 3{,}75$ дБ.

### *П.3.3.2. Расчёт встречно-параллельного корректирующего устройства*

Рассчитаем встречно-параллельное корректирующее устройство для **астатического** варианта системы управления, представленной на рис. В.2.

Решение задачи коррекции осуществляем для одного из вариантов задания в соответствии с методикой, изложенной на с. 392-396 [1], и в соответствии с последовательностью, изложенной в разд. 3.3.2 данного пособия.

Запишем передаточную функцию звеньев $W_{но}(p)$, не охваченных внутренней корректирующей обратной связью,

$$W_{но}(p) = W_{п}(p)W_{уэ}(p)W_{и}(p)W_{о}(p) = \frac{k_{рк}}{p(T_{уэ}p+1)(T_{о}p+1)}. \quad (П.3.63)$$

Произведём вспомогательные вычисления, необходимые для построения ЛАЧХ звеньев, не охваченных внутренней обратной связью,

$$20\lg k_{рк} = 20\lg 20 \approx 26 \text{ дБ};$$

$$\omega_{с1} = \frac{1}{T_{о}} = \frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67 \text{ с}^{-1}; \quad \lg\omega_{с1} \approx 0{,}22; \quad (П.3.64)$$

$$\omega_{с2} = \frac{1}{T_{уэ}} = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ с}^{-1}; \quad \lg\omega_{с2} \approx 0{,}6.$$

ЛАЧХ звеньев, не охваченных внутренней обратной связью $L_{но}(\omega)$, представлена на рис. П.3.8.

Построим ЛАЧХ скорректированной (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$ по заданным показателям качества замкнутой системы в пе-

реходном режиме (σ, $t_п$, $M$), предварительно рассчитав параметры среднечастотного участка ЛАЧХ желаемой системы в соответствии с формулами (3.10):

$$\omega_{ср} = \frac{0{,}12\pi\sigma}{t_п} = \frac{0{,}12\pi \cdot 40}{0{,}75} \approx 20 \ \ c^{-1};\ \lg\omega_{ср} \approx 1{,}3;$$

$$\omega_2 = \frac{M-1}{M}\omega_{ср} = \frac{1{,}5-1}{1{,}5} \cdot 20 \approx 6{,}67 \ \ c^{-1};\ \lg\omega_2 \approx 0{,}82; \qquad (П.3.65)$$

$$\omega_3 = \frac{M+1}{M}\omega_{ср} = \frac{1{,}5+1}{1{,}5} \cdot 20 \approx 33{,}3 \ \ c^{-1};\ \lg\omega_3 \approx 1{,}52.$$

При построении ЛАЧХ желаемой системы следует воспользоваться рекомендациями, приведёнными в разделе П.3.3.1.

ЛАЧХ скорректированной (желаемой) системы $L_{ск}(\omega)$ приведена на рис. П.3.8. Среднечастотный участок ЛАЧХ желаемой системы не дошёл до ЛАЧХ исходной системы и поэтому прямую с наклоном -20 дБ/декаду продлили от частоты $\omega_2$ до частоты $\omega_{с1}$.

Вычтем из ЛАЧХ звеньев, не охваченных внутренней обратной связью, ЛАЧХ скорректированной системы и получим ЛАЧХ звена обратной связи $L_{ос}(\omega)$

$$L_{ос}(\omega) = L_{но}(\omega) - L_{ск}(\omega). \qquad (П.3.66)$$

По виду ЛАЧХ звена обратной связи выбираем его принципиальную схему. Так как ЛАЧХ корректирующего устройства с увеличением частоты ω имеет тенденцию к уменьшению амплитуды до частоты $\omega_3$, то для его технической реализации выбираем две последовательно включённые пассивные интегро-дифференцирующие *rC*-цепи с преобладанием интегрирования, разделённые усилителем (рис. П.3.9).

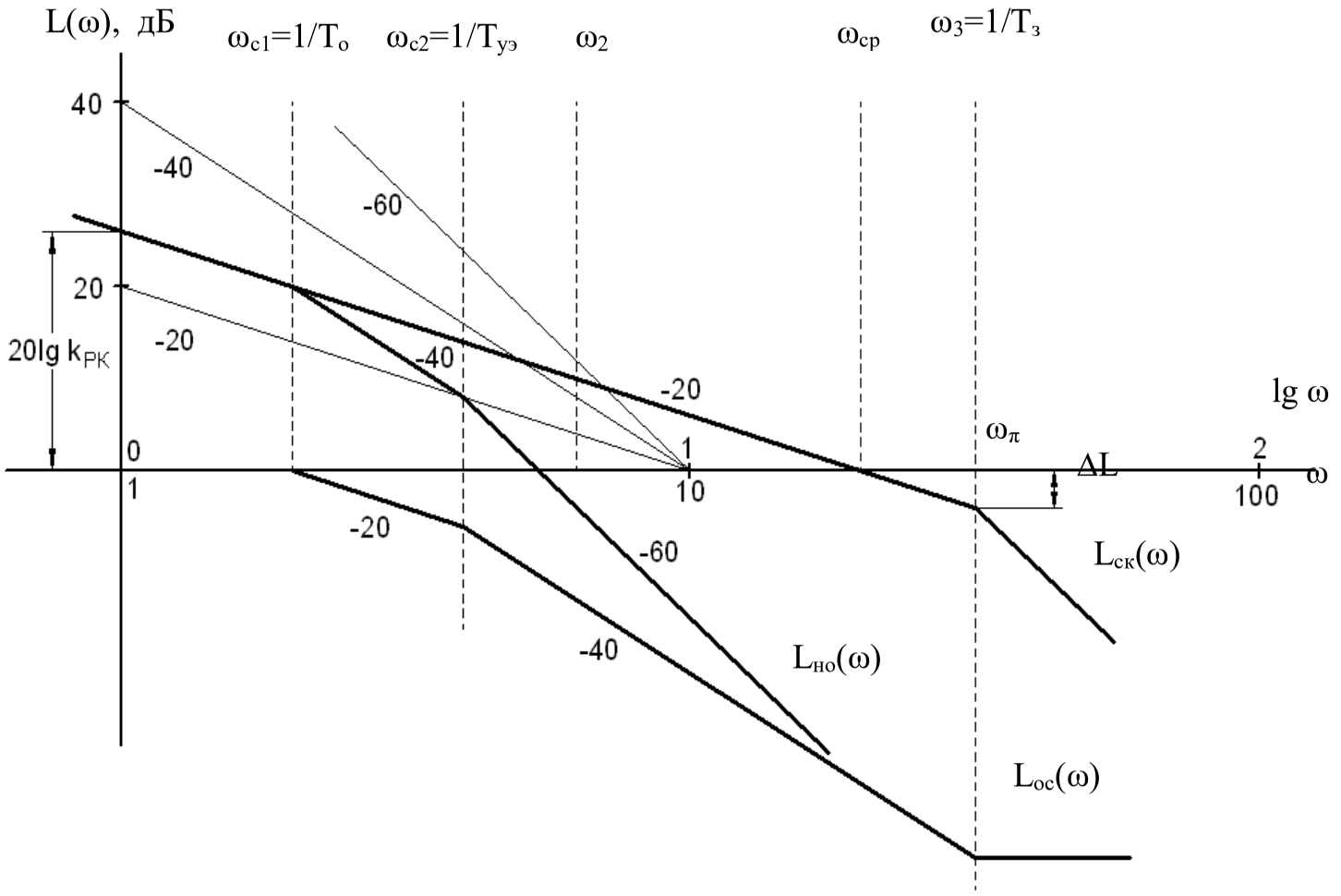



Рис. П.3.8. К расчёту встречно-параллельного корректирующего устройства

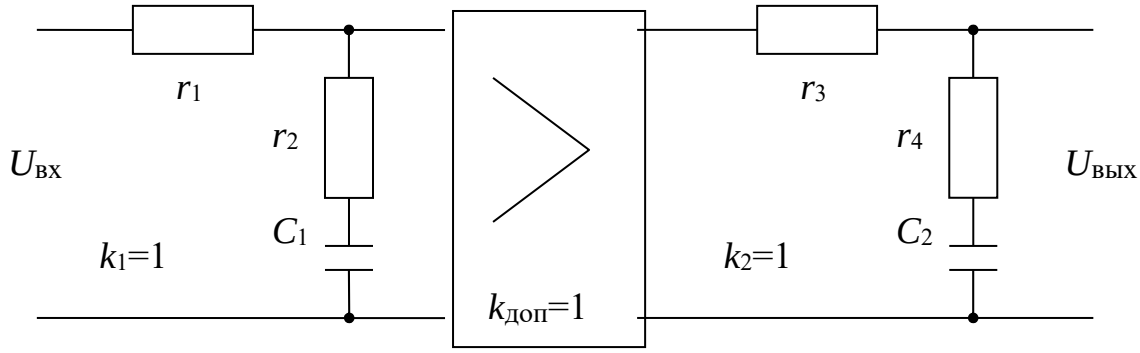



Рис. П.3.9. Принципиальная схема встречно-параллельного корректирующего устройства

*Примечание*. Усилитель в данной схеме выполняет роль разделения цепей.

Запишем передаточную функцию звена внутренней обратной связи

$$W_{ос}(p) = \frac{(T_з p + 1)^2}{(T_о p + 1)(T_{уэ} p + 1)}, \qquad (П.3.67)$$

где $T_з = 1/\omega_з = 1/33{,}3 \approx 0{,}03$ с.

Для расчёта параметров элементов корректирующего устройства зададим численные значения следующим параметрам: для первой цепи $r_2 = 1$ МОм, для второй цепи $r_4 = 1$ МОм. Рассчитаем остальные параметры по формулам:

- для первой цепи

$$T_з = r_2 C_1; \qquad T_о = (r_1 + r_2) C_1; \qquad (П.3.68)$$

- для второй цепи

$$T_з = r_4 C_2; \qquad T_{уэ} = (r_3 + r_4) C_2. \qquad (П.3.69)$$

С учётом формул (П.3.68) и (П.3.69) получим: $C_1 = 0{,}03$ мкФ; $r_1 = 19$ МОм; $C_2 = 0{,}03$ мкФ; $r_3 = 7{,}33$ МОм.

Запишем передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы

$$W_{\text{ск}}(p)=\frac{W_{\text{но}}(p)}{W_{\text{ос}}(p)}=\frac{k_{\text{рк}}}{p(T_{\text{уэ}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)}\cdot\frac{(T_{\text{о}}p+1)(T_{\text{уэ}}p+1)}{(T_{\text{з}}p+1)^2}=$$

$$=\frac{k_{\text{рк}}}{p(T_{\text{з}}p+1)^2}. \qquad \text{(П.3.70)}$$

Вычислим фазовый сдвиг скорректированной системы на частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ (см. формулу (3.11))

$$\varphi(\omega_{\text{ср}})=\arg W_{\text{ск}}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_{ср}}=$$

$$=-90^0-2\operatorname{arctg}(\omega_{\text{ср}}T_{\text{З}})=-90^\circ-2\operatorname{arctg}(20\cdot 0{,}03)= \qquad \text{(П.3.71)}$$

$$=-90^\circ-2\operatorname{arctg}0{,}6=-90^\circ-61{,}9^\circ=-151{,}9^\circ.$$

Вычислим запас по фазе $\Delta\varphi$ замкнутой скорректированной системы по формуле (3.12)

$$\Delta\varphi=180^\circ-\left|\varphi(\omega_{\text{ср}})\right|=180^\circ-151{,}9^\circ=28{,}1^\circ. \qquad \text{(П.3.72)}$$

Для определения запаса устойчивости замкнутой системы по амплитуде $\Delta L$ следует сначала найти частоту $\omega_\pi$, при которой фазовый сдвиг системы будет равен -(180±1)º (см. формулу (3.13)),

$$\varphi(\omega_\pi)=\arg W_{\text{ск}}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_\pi}=$$

$$=-90^\circ-2\operatorname{arctg}(\omega_\pi T_{\text{з}})=-180^\circ(\pm 1^\circ). \qquad \text{(П.3.73)}$$

Частоту $\omega_\pi$ из выражения (П.3.73) находим подбором, учитывая, что $\omega_\pi > \omega_{\text{ср}}$. Найденное таким образом численное значение частоты $\omega_\pi \approx 33{,}3$ с$^{-1}$. Отложив вычисленное значение частоты $\omega_\pi$ на графике ЛАЧХ скорректированной системы $L_{\text{ск}}(\omega)$, найдём запас устойчивости замкнутой скорректированной системы по амплитуде $\Delta L \approx 4$ дБ.

## П.3.4. Построение области устойчивости скорректированной системы

### *П.3.4.1. Построение области устойчивости в плоскости одного параметра*

Исходным выражением для построения является характеристическое уравнение **замкнутого** контура **скорректированной** системы (см. формулу (3.14)).

Построим область устойчивости в плоскости параметра $k_{\text{и}}$ для **астатического** варианта системы, представленной на рис. В.1 или рис. В.2. Запишем характеристическое уравнение для одной из возможных передаточных функций скорректированной системы

$$1+\frac{k_{\text{рк}}(T_2 p+1)}{p(T_o p+1)(T_{\text{з}} p+1)^2}=0. \qquad \text{(П.3.74)}$$

Преобразуем выражение (П.3.74) и сгруппируем подобные члены

$$p(T_{\text{о}} p+1)(T_{\text{з}} p+1)^2+k_{\text{рк}}(T_2 p+1)= \qquad \text{(П.3.75)}$$
$$=T_{\text{о}}T_{\text{з}}{}^2 p^4+(2T_{\text{з}}T_{\text{о}}+T_{\text{з}}{}^2)p^3+(T_{\text{о}}+2T_{\text{з}})p^2+p+k_{\text{рк}}(T_2 p+1)=0.$$

Решим уравнение (П.3.75) относительно $k_{\text{рк}}$ и подставим в него численные значения постоянных времени для одного из вариантов задания

$$k_{\text{рк}}=-\frac{T_{\text{о}}T_{\text{з}}{}^2 p^4+(2T_{\text{з}}T_{\text{о}}+T_{\text{з}}{}^2)p^3+(T_{\text{о}}+2T_{\text{з}})p^2+p}{T_2 p+1}=$$
$$=-\frac{0{,}27p^4+1{,}64p^3+2{,}82p^2+p}{1{,}89p+1}. \qquad \text{(П.3.76)}$$

Произведём в уравнении (П.3.76) подстановку $p=j\omega$ и выделим действительную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ составляющие характеристического уравнения, умножив для этого числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю

$$k_{\text{рк}} = -\frac{0{,}27(j\omega)^4 + 1{,}64(j\omega)^3 + 2{,}82(j\omega)^2 + j\omega}{1 + 1{,}89\,j\omega} =$$

$$= \frac{\left[(-0{,}27\omega^4 + 2{,}8\omega^2) + j(1{,}64\omega^3 - \omega)\right](1 - j1{,}89\omega)}{(1 + j1{,}89\omega)(1 - j1{,}89)}. \qquad \text{(П.3.77)}$$

Так как по заданию область устойчивости надо построить в плоскости параметра $k_{\text{и}}$, а $k_{\text{и}}$ для рассматриваемого примера равно $k_{\text{рк}}/2$ ($k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{о}} = 2$), то после преобразования выражения (П.3.77) запишем его относительно $k_{\text{и}}$,

$$k_{\text{и}} = \frac{k_{\text{рк}}}{2} = \underbrace{\frac{2{,}83\omega^4 + 0{,}93\omega^2}{2(1 + 3{,}57\omega^2)}}_{P(\omega)} + j\underbrace{\frac{0{,}51\omega^5 - 3{,}69\omega^3 - \omega}{2(1 + 3{,}57\omega^2)}}_{Q(\omega)}. \qquad \text{(П.3.78)}$$

Вычислим $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ при изменении частоты $\omega$ от нуля до $\infty$ и результат сведём в табл. П.3.6.

Таблица П.3.6

**Граница области устойчивости системы в плоскости параметра $k_{\text{и}}$**

| $\omega$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 2,74 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0 | 0,11 | 0,41 | 0,91 | 1,6 | 2,5 | 2,99 | 3,59 |
| $Q(\omega)$ | 0 | -0,25 | -0,46 | -0,56 | -0,5 | -0,22 | 0 | 0,32 |

На рис. П.3.10 представлена область устойчивости, построенная по данным табл. П.3.6. Так как действительная составляющая $P(\omega)$ всегда чётная функция частоты, а мнимая составляющая $Q(\omega)$ – нечётная функция, то кривая $D$-разбиения всегда симметрична относительно действительной оси $P(\omega)$.

Поэтому при построении кривой находим лишь одну ветвь, соответствующую положительным значениям $\omega$, а вторую ветвь наносим как зеркальное отражение первой. Штриховку кривой наносят слева при движении вдоль кривой от $-\infty$ до $+\infty$.

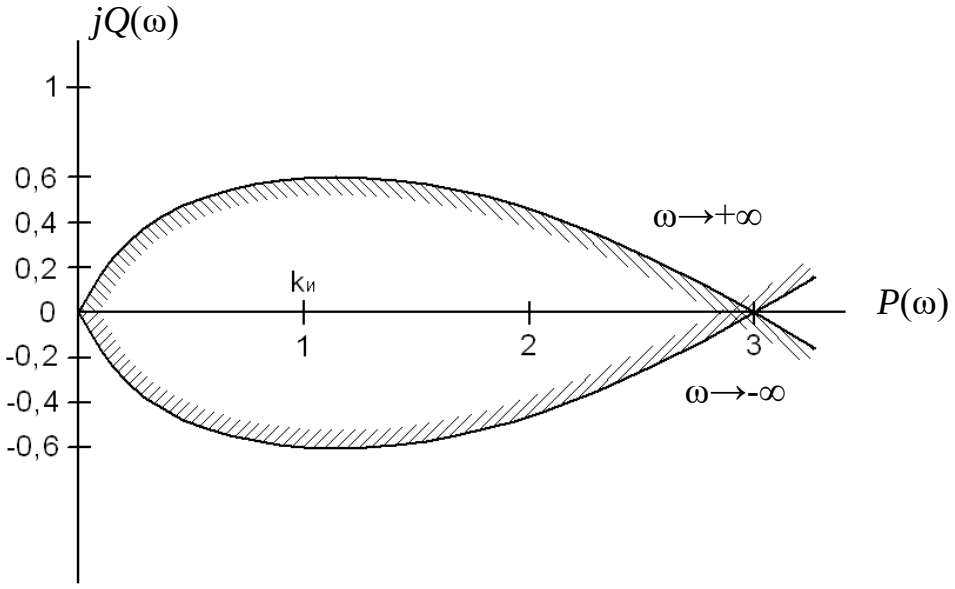



Рис. П.3.10. Область устойчивости скорректированной системы в плоскости параметра $k_и$

По рис. П.3.10 определяем допустимый диапазон изменения параметра $k_и$: $0 < k_и < 2{,}99$. Заданное в рассматриваемом варианте численное значение $k_и = 1$ принадлежит области устойчивости.

Методика построения области устойчивости по одному параметру для **статического** варианта системы такая же, как и для астатического варианта. Разница лишь в том, что начало кривой *D*-разбиения при частоте $\omega = 0$ будет находиться слева от мнимой оси и ограничение исследуемого параметра слева будет равно не нулю, а конкретному числу, например; $-1 < k_{рк} < 10$.

### *П.3.4.2. Построение области устойчивости в плоскости двух параметров*

Исходным выражением для построения является характеристи-ческое уравнение **замкнутого** контура **скорректированной** системы (см. формулу (3.14)).

Построим область устойчивости в плоскости параметров $k_п$ и $T_о$ для **статического** варианта системы, представленной на рис. В.1 или рис. В.2. Запишем характеристическое уравнение для одной из возможных передаточных функций скорректированной системы

$$1+\frac{k_{\text{рк}}(T_2\ p+1)}{(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)(T_{\text{з}}p+1)^2}=0. \qquad \text{(П.3.79)}$$

Преобразуем выражение (П.3.79) и сгруппируем подобные члены

$$(T_{\text{у}}p+1)(T_{\text{о}}p+1)(T_{\text{з}}p+1)^2+k_{\text{рк}}(T_2p+1)=$$

$$=T_{\text{з}}^{\,2}T_{\text{у}}T_{\text{о}}p^4+\left[T_{\text{з}}^{\,2}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+2T_{\text{з}}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]p^3+\left[T_{\text{з}}^{\,2}+2T_{\text{з}}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+T_{\text{о}}T_{\text{у}}\right]p^2+$$

$$+(2T_{\text{з}}+T_{\text{у}}+T_{\text{о}}+k_{\text{рк}}T_2)p+1+k_{\text{рк}}=0. \qquad \text{(П.3.80)}$$

Произведём в уравнении (П.3.76) подстановку $p=j\omega$ и получим тождество

$$T_{\text{з}}^{\,2}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\omega^4-j\left[T_{\text{з}}^{\,2}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+2T_{\text{з}}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^3-\left[T_{\text{з}}^{\,2}+2T_{\text{з}}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^2+$$

$$+j(2T_{\text{з}}+T_{\text{у}}+T_{\text{о}}+k_{\text{рк}}T_2)\omega+1+k_{\text{рк}}=0. \qquad \text{(П.3.81)}$$

В выражении (П.3.81) сгруппируем действительную и мнимую части

$$\underbrace{\left\{T_{\text{з}}^{\,2}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\omega^4-\left[T_{\text{з}}^{\,2}+2T_{\text{з}}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^2+1+k_{\text{рк}}\right\}+}_{a} \qquad \text{(П.3.82)}$$

$$+j\underbrace{\left\{(2T_{\text{з}}+T_{\text{у}}+T_{\text{о}}+k_{\text{рк}}T_2)\omega-\left[T_{\text{з}}^{\,2}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+2T_{\text{з}}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^3\right\}}_{b}\equiv 0.$$

Так как комплексная величина $a+jb$ равна нулю только в том случае, если одновременно равны нулю её действительная и мнимая части, то тождество (П.3.82) эквивалентно двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&T_{\text{з}}^{\,2}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\omega^4-\left[T_{\text{з}}^{\,2}+2T_{\text{з}}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^2+1+k_{\text{рк}}=0;\\&(2T_{\text{з}}+T_{\text{у}}+T_{\text{о}}+k_{\text{рк}}T_2)\omega-\left[T_{\text{з}}^{\,2}(T_{\text{у}}+T_{\text{о}})+2T_{\text{з}}T_{\text{у}}T_{\text{о}}\right]\omega^3=0.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(П.3.83)}$$

Упорядочим систему уравнений (П.3.83) с учётом того, что параметр, стоящий в обоих уравнениях на первом месте, будем откладывать по оси абсцисс, а параметр, стоящий на втором месте, – по оси ординат. Для этого в обоих уравнениях сгруппируем отдельно члены, зависящие и не зависящие от параметров $k_{рк}$ и $T_о$,

$$\left.\begin{aligned} k_{рк}\cdot 1+T_о\cdot\left[T_з^{\,2}T_у\omega^4-(2T_з+T_у)\omega^2\right]+\left[1-(T_з^{\,2}+2T_зT_у)\omega^2\right]=0;\\ k_{рк}T_2\omega+T_о\left[\omega-(T_з^{\,2}+2T_зT_у)\omega^3\right]+\left[(2T_з+T_у)\omega-T_з^{\,2}T_у\omega^3\right]=0. \end{aligned}\right\} \quad (П.3.84)$$

Подставим в систему уравнений (П.3.84) численные значения постоянных времени для одного из вариантов задания с учётом того, что для этого варианта $k_{рк}=20k_п$,

$$\left.\begin{aligned} \overbrace{k_п 20}^{A_1}+T_о\overbrace{\left(0,00384\omega^4-0,76\omega^2\right)}^{B_1}+\overbrace{\left(-0,1024\omega^2+1\right)}^{C_1}=0;\\ \underbrace{k_п 6,2\omega}_{A_2}+T_о\underbrace{(-0,1024\omega^3+\omega)}_{B_2}+\underbrace{\left(-0,00384\omega^3+0,76\omega\right)}_{C_2}=0. \end{aligned}\right\} \quad (П.3.85)$$

Решим систему (П.3.85) методом определителей:

$$k_п=\frac{\Delta_1}{\Delta}=f_1(\omega); \quad (П.3.86)$$

$$T_о=\frac{\Delta_2}{\Delta}=f_2(\omega), \quad (П.3.87)$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1(\omega) & B_1(\omega)\\ A_2(\omega) & B_2(\omega)\end{vmatrix}=A_1(\omega)\cdot B_2(\omega)-A_2(\omega)\cdot B_1(\omega)=$$

$$=-0,02381\omega^5+2,664\omega^3+20\omega; \quad (П.3.88)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1(\omega) & B_1(\omega) \\ -C_2(\omega) & B_2(\omega) \end{vmatrix} = -C_1(\omega)\cdot B_2(\omega) + C_2(\omega)\cdot B_1(\omega) =$$

$$= -0,00001\omega^7 - 0,00465\omega^5 - 0,3728\omega^3 - \omega; \qquad \text{(П.3.89)}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1(\omega) & -C_1(\omega) \\ A_2(\omega) & -C_2(\omega) \end{vmatrix} = -A_1(\omega)\cdot C_2(\omega) + A_2(\omega)\cdot C_1(\omega) =$$

$$= -0,55808\omega^3 - 9\omega. \qquad \text{(П.3.90)}$$

Подставив выражения (П.3.88)-(П.3.90) в формулы (П.3.86) и (П.3.87), получим

$$k_{\text{п}} = \frac{0,00001\cdot\omega^6 + 0,00465\cdot\omega^4 + 0,3728\cdot\omega^2 + 1}{0,02381\cdot\omega^4 - 2,664\cdot\omega^2 - 20} = f_1(\omega); \qquad \text{(П.3.91)}$$

$$T_{\text{о}} = \frac{0,55808\cdot\omega^2 + 9}{0,02381\cdot\omega^4 - 2,664\cdot\omega^2 - 20} = f_2(\omega). \qquad \text{(П.3.92)}$$

Вычислим значения функций $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ при изменении частоты $\omega$ от нуля до $\infty$ и результаты сведём в табл. П.3.7. Так как функции $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ являются чётными, то кривая *D*-разбиения дважды проходит через одни и те же точки (при изменении частоты $\omega$ от $-\infty$ до нуля и от нуля до $+\infty$).

На рис. П.3.11 изображена кривая *D*-разбиения, построенная по данным табл. П.3.7. В некоторых случаях (сложных) рекомендуется сначала отдельно построить графики функций $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$, а потом свести их в совместный график. Кривую *D*-разбиения штрихуют по правилам, изложенным на с. 290 [1].

Таблица П.3.7

**Граница устойчивости системы в плоскости параметров $k_п$ и $T_о$**

| ω | $k_п$ | $T_о$ |
|---|---|---|
| 0 | -0,0500 | -0,45000 |
| 1 | -0,06084 | -0,42217 |
| 2 | -0,08476 | -0,37101 |
| 3 | -0,11271 | -0,33350 |
| 4 | -0,14499 | -0,31717 |
| 5 | -0,18660 | -0,32003 |
| 6 | -0,24591 | -0,34206 |
| 7 | -0,33853 | -0,38928 |
| 8 | -0,50045 | -0,48098 |
| 9 | -0,84231 | -0,68125 |
| 10 | -1,96232 | -1,34178 |
| 12 | 2,00831 | 0,99174 |
| 13 | 1,16804 | 0,49240 |
| 14 | 0,88044 | 0,31777 |
| 15 | 0,74097 | 0,22965 |
| 20 | 0,56319 | 0,08525 |
| 25 | 0,58980 | 0,04698 |
| 30 | 0,67540 | 0,03031 |
| 35 | 0,79572 | 0,02135 |
| 40 | 0,94336 | 0,01592 |
| 45 | 1,11538 | 0,01235 |
| 50 | 1,31037 | 0,00988 |
| 55 | 1,52759 | 0,00809 |
| 60 | 1,76664 | 0,00675 |

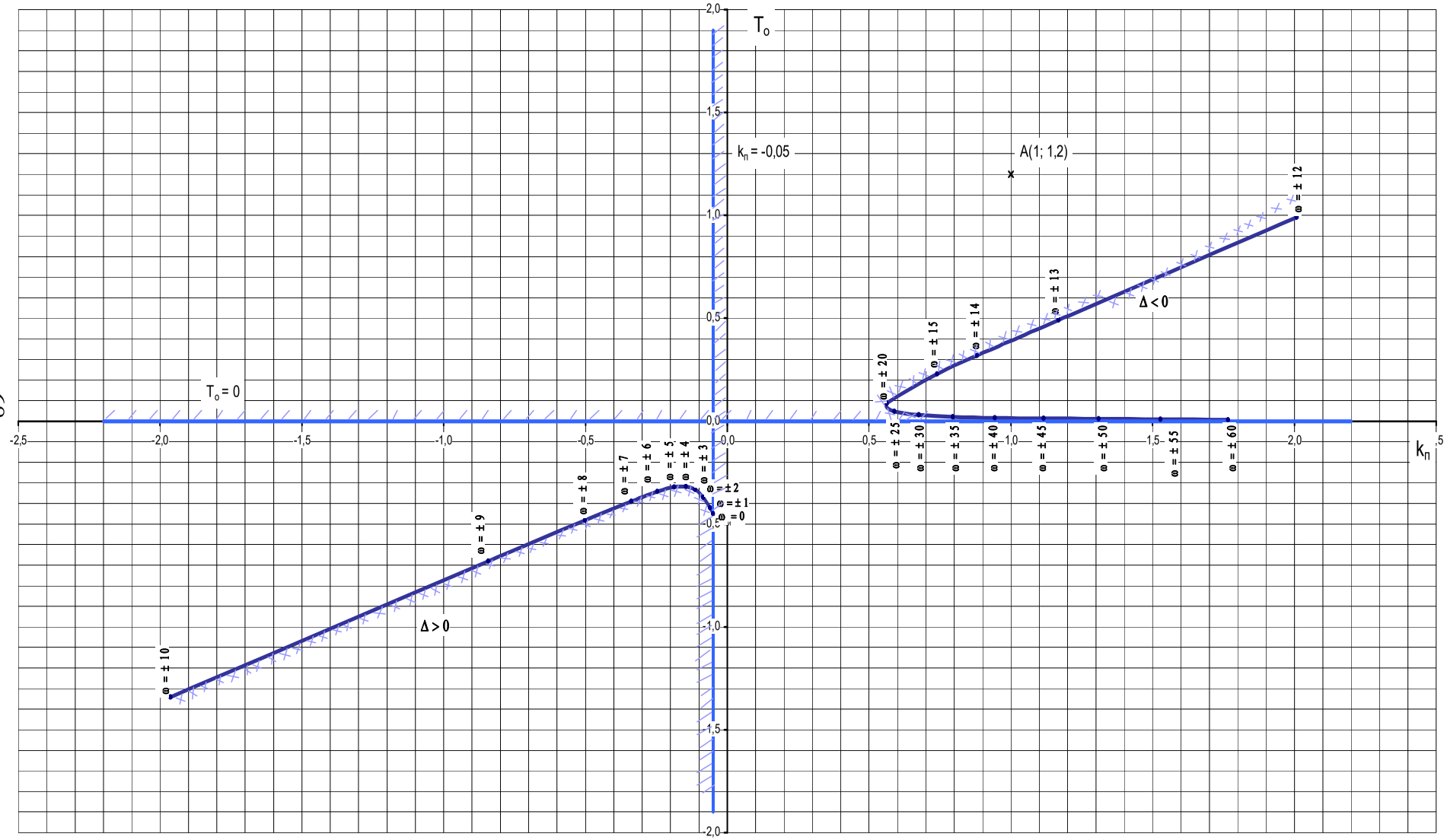



Рис. П.3.11, Область устойчивости скорректированной системы в плоскости параметров $k_п$ и $T_o$

Дополним кривую *D*-разбиения **особыми прямыми**, уравнения которых имеют следующий вид: $a_0 = 0$, отсюда $T_о = 0$; $a_п = 0$, отсюда $1 + 20k_п = 0$ и $k_п = -0{,}05$. Особые прямые штрихуют по правилам, изложенным на с. 291 [1]. На рис. П.3.11 откладываем точку А с заданными координатами $k_п$ и $T_о$ ($k_п = 1$; $T_о = 1{,}2$).

## П.3.5. Построение графика переходного процесса и оценка качества скорректированной системы

Исходным выражением для моделирования является передаточная функция **замкнутой** скорректированной системы Ф(*p*) по заданному каналу воздействия. Запишем передаточную функцию по каналу «$x_з$-$x$» для одного из примеров скорректированной системы:

$$\Phi_{x_з - x}(p) = \frac{X(p)}{X_з(p)} = \frac{W_{ск}(p)}{1 + W_{ск}(p)} = \frac{\dfrac{k_{рк}(T_2 p + 1)}{(T_у p + 1)(T_о p + 1)(T_з p + 1)^2}}{1 + \dfrac{k_{рк}(T_2 p + 1)}{(T_у p + 1)(T_о p + 1)(T_з p + 1)^2}} =$$

$$= \frac{k_{рк}(T_2 p + 1)}{(T_у p + 1)(T_о p + 1)(T_3 p + 1)^2 + k_{рк}(T_2 p + 1)}. \qquad \text{(П.3.93)}$$

В выражении (П.3.93) раскроем скобки, приведем подобные члены, подставим численные значения заданных параметров и запишем его в соответствии с формулой (3.16)

$$\Phi_{x_з - x}(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4} =$$

$$= \frac{6{,}2 p + 20}{0{,}00461 p^4 + 0{,}12672 p^3 + 1{,}0144 p^2 + 8{,}16 p + 21}. \qquad \text{(П.3.94)}$$

Составим таблицу исходных данных для цифрового моделирования, куда входят округленные коэффициенты $b_i$ и $a_i$ из формулы

(П.3.94), а также параметры моделирования: «шаг интегрирования» – $\Delta t$, «шаг печати» – $t_{печ}$ и «длительность выполнения расчетов» – $t_к$. Параметры $\Delta t$, $t_{печ}$ и $t_к$ рассчитываем в соответствии с рекомендациями разд. 3.5.2 для конкретного варианта задания.

Таблица П.3.8

**Исходные данные для цифрового моделирования**

| $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\Delta t$ | $t_{печ}$ | $t_к$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 6,2 | 20 | 0,005 | 0,127 | 0,014 | 8,16 | 21 | 0,002 | 0,09 | 1,8 |

Таблица П.3.9

**Результаты цифрового моделирования**

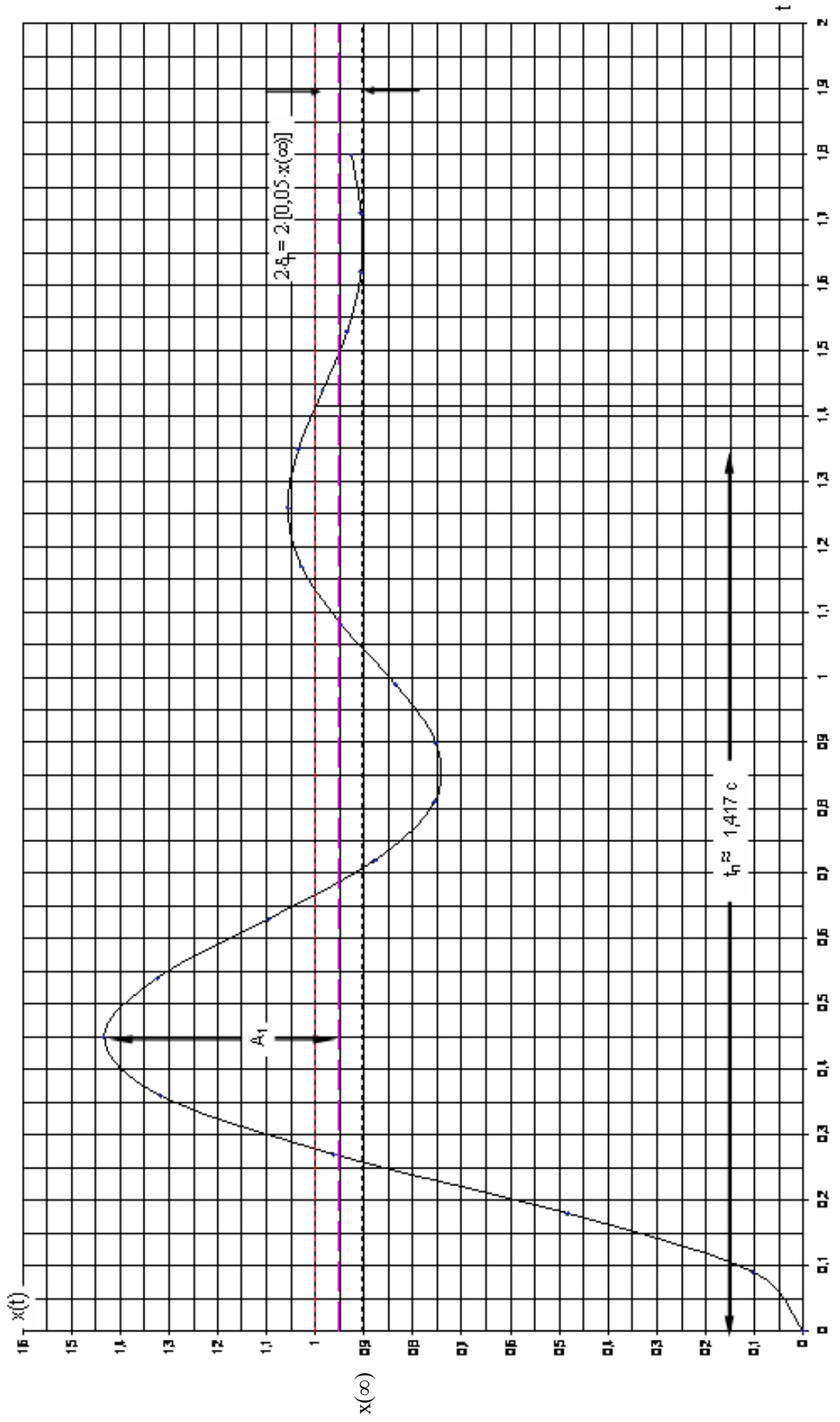
| Input data | | Calculate result | |
|---|---|---|---|
| Parameter | Value | T | Y |
| B0 | 0,000 | 0,090 | 0,103 |
| B1 | 0,000 | 0,180 | 0,482 |
| B2 | 0,000 | 0,270 | 0,962 |
| B3 | 6,200 | 0,360 | 1,318 |
| B4 | 20,000 | 0,450 | 1,432 |
| A0 | 0,005 | 0,540 | 1,323 |
| A1 | 0,127 | 0,630 | 1,096 |
| A2 | 1,014 | 0,720 | 0,878 |
| A3 | 8,160 | 0,810 | 0,756 |
| A4 | 21,000 | 0,900 | 0,753 |
| dt | 0,002 | 0,990 | 0,836 |
| pt | 0,090 | 1,080 | 0,946 |
| mt | 1,800 | 1,170 | 1,028 |
| | | 1,260 | 1,057 |
| | | 1,350 | 1,034 |
| | | 1,440 | 0,984 |
| | | 1,530 | 0,935 |
| | | 1,620 | 0,907 |
| | | 1,710 | 0,907 |
| | | 1,800 | 0,925 |

На основании данных табл. П.3.9 построим график переходного процесса (рис. П.3.13) и определим основные показатели качества – перерегулирование σ и длительность переходного процесса $t_{\text{п}}$:

$$\sigma = \frac{x_m - x(\infty)}{x(\infty)} 100\ \% = \frac{A_1}{x(\infty)} 100\ \% = \frac{0{,}47}{0{,}95} 100\ \% \approx 49\%; \qquad (\text{П.3.95})$$

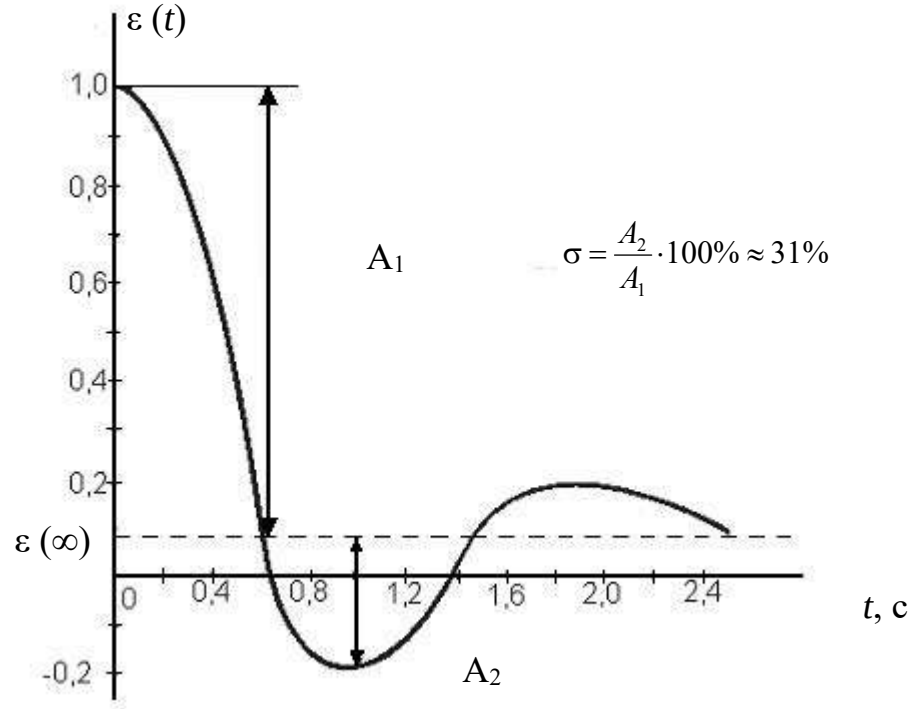
$$t_{\text{п}} \approx 1{,}42\ \text{с}.$$

На рис. П.3.14 приведены примеры переходных характеристик **статического** варианта двух систем по разным каналам воздействий.




*а*

Рис. П.3.13. Переходная характеристика замкнутой скорректированной системы по каналу "$x_з$ - $x$"




*б*

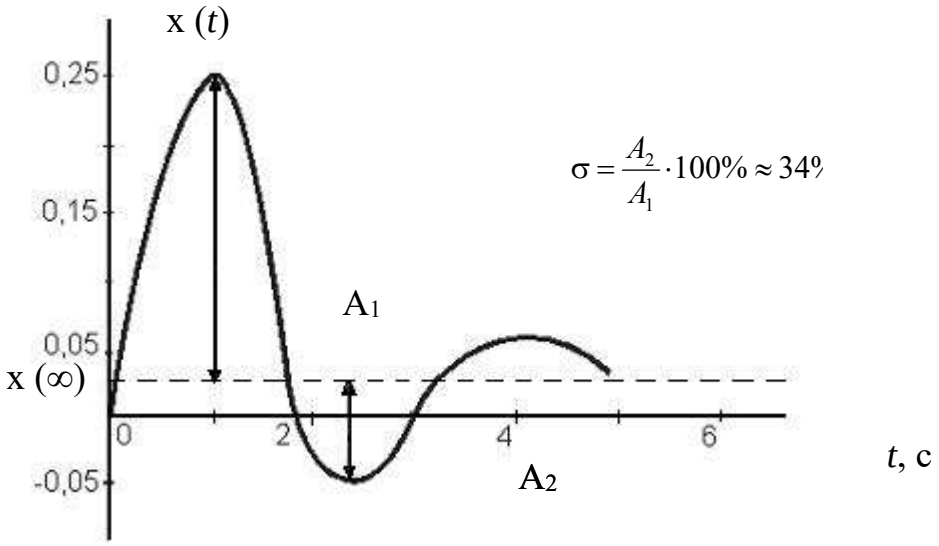



Рис. П.3.14. Переходные характеристики замкнутой скорректированной системы:
*а* – по каналу «$x_з$-ε»; *б* – по каналу «z-*x*» («z-ε»)

## П.3.6. Вычисление и минимизация интегральной оценки при типовом воздействии

Квадратичная интегральная оценка вычисляется при **единичном ступенчатом воздействии** по заданному каналу.

Запишем одну из возможных передаточных функций замкнутой **статической** скорректированной системы по каналу «$x_з$-$x$» (см. формулу (П.3.93)) и после преобразований и подстановки численных значений постоянных времени для одного из вариантов задания представим ее в соответствии с формулой (3.18)

$$\Phi(p)=\frac{X(p)}{X_з(p)}=\frac{W_{ск}(p)}{1+W_{ск}(p)}=\frac{k_{рк}(T_2p+1)}{(T_у p+1)(T_о p+1)(T_3 p+1)^2+k_{рк}(T_2p+1)}=$$

$$=\frac{0{,}31k_{рк}p+k_{рк}}{0{,}005p^4+0{,}127p^3+1{,}014p^2+(0{,}31k_{рк}+1{,}96)p+k_{рк}+1}. \qquad (П.3.96)$$

На основаниии формулы (3.20) запишем выражение для изображения переходной составляющей управляемой величины

$$X_п(p)=[\Phi(p) \ - \ \Phi(0)]X_з(p), \qquad (П.3.97)$$

где $X_з(p)=\frac{1}{p}$ – изображение ступенчатого воздействия.

Подставим в формулу (П.3.97) выражение (П.3.96)

$$X_п(p)=\left[\frac{0{,}31k_{рк}p+k_{рк}}{0{,}005p^4+0{,}127p^3+1{,}014p^2+(0{,}31k_{рк}+1{,}96)p+k_{рк}+1}-\frac{k_{рк}}{1+k_{рк}}\right].\frac{1}{p}.$$

(П.3.98)

Преобразуем выражение (П.3.98), применив упрощение в соответствии с формулой (3.21), и запишем его в соответствии с формулой (3.22) в виде

$$X_{\text{п}}(p)=\frac{-0{,}005p^3-0{,}127p^2-1{,}014p-1{,}96}{0{,}005p^4+0{,}127p^3+1{,}014p^2+(0{,}31k_{\text{рк}}+1{,}96)p+k_{\text{рк}}}=$$
$$\frac{c_0p^3+c_1p^2+c_2p+c_3}{d_0p^4+d_1p^3+d_3p^2+d_3p+d_4}=\frac{C(p)}{D(p)}, \qquad \text{(П.3.99)}$$

где $d_0=0{,}005$; $d_1=0{,}127$; $d_2=1{,}014$; $d_3=0{,}13k_{\text{рк}}+1{,}96$; $d_4=k_{\text{рк}}$.

Для вычисления квадратичной оценки по изображению (П.3.99) используем равенство Парсеваля (см. формулы (6.73) и (6.74) [1]), которое для рассматриваемого примера имеет вид

$$Q_{\text{кв}}=\int_0^\infty x_{\text{п}}^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x_{\text{п}}(j\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{C(j\omega)}{D(j\omega)}\right|^2d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(j\omega)}{\left|D(j\omega)\right|^2}d\omega=(-1)^{n+1}\frac{\Delta_v}{2d_0\Delta}, \qquad \text{(П.3.100)}$$

где $n$ – степень знаменателя выражения (П.3.99), $n$=4;

$$D(j\omega)=d_0(j\omega)^4+d_1(j\omega)^3+d_2(j\omega)^2+d_3(j\omega)+d_4; \qquad \text{(П.3.101)}$$

$$V(j\omega)=\left|C(j\omega)\right|^2=v_0(j\omega)^{2(n-1)}+v_1(j\omega)^{2(n-2)}+v_2(j\omega)^{2(n-3)}+v_3; \qquad \text{(П.3.102)}$$

$\Delta$ – определитель, составленный из коэффициентов $d_i$ по правилу составления определителя Гурвица; $\Delta_v$ – определитель, получаемый из определителя $\Delta$ путем замены верхней строки коэффициентов на строку с коэффициентами $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$.

Для получения коэффициентов полинома $V(j\omega)$ найдем квадрат модуля полинома $C(j\omega)$, а затем все слагаемые с четными степенями $\omega$ приведем к виду с четными степенями $(j\omega)$,

$$V(j\omega)=\left|C(j\omega)\right|^2=\left|-0{,}005(j\omega)^3-0{,}127(j\omega)^2-1{,}014(j\omega)-1{,}96\right|^2=$$
$$=\left|(0{,}127\omega^2-1{,}96)+j(0{,}005\omega^3-1{,}014\omega)\right|^2=$$
$$=(0{,}127\omega^2-1{,}96)^2+(0{,}005\omega^3-1{,}014\omega)^2=$$
$$=0{,}00002\omega^6+0{,}0067\omega^4+0{,}5323\omega^2+3{,}842=$$
$$=-0{,}00002(j\omega)^6+0{,}0067(j\omega)^4-0{,}5323(j\omega)^2+3{,}842, \qquad (П.3.103)$$

откуда $v_0$=-0,00002, $v_1$=0,0067, $v_2$=-0,5323, $v_3$=3,842.

Составим определитель $\Delta$ и подставим в него численные значения коэффициентов $d_i$ из формулы (П.3.99)

$$\Delta=\begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}=d_1d_2d_3d_4-d_0d_3^2d_4-d_1^2d_4^2= \qquad (П.3.104)$$
$$=-0{,}00044k_{\text{рк}}^3+0{,}01819k_{\text{рк}}^2+0{,}23423k_{\text{рк}}.$$

Составим определитель $\Delta_v$ и подставим в него численные значения коэффициентов $v_i$ из формулы (П.3.103)

$$\Delta_v=\begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}=v_0d_2d_3d_4-v_0d_1d_4^2-v_3d_0d_1d_2+$$
$$+v_3d_0^2d_3-v_1d_0d_3d_4+v_2d_0d_1d_4= \qquad (П.3.105)$$
$$=-0{,}000013k_{\text{рк}}^2-0{,}000386k_{\text{рк}}-0.002115.$$

Подставив выражение (П.3.104) и (П.3.105) в формулу (П.3.100), получим

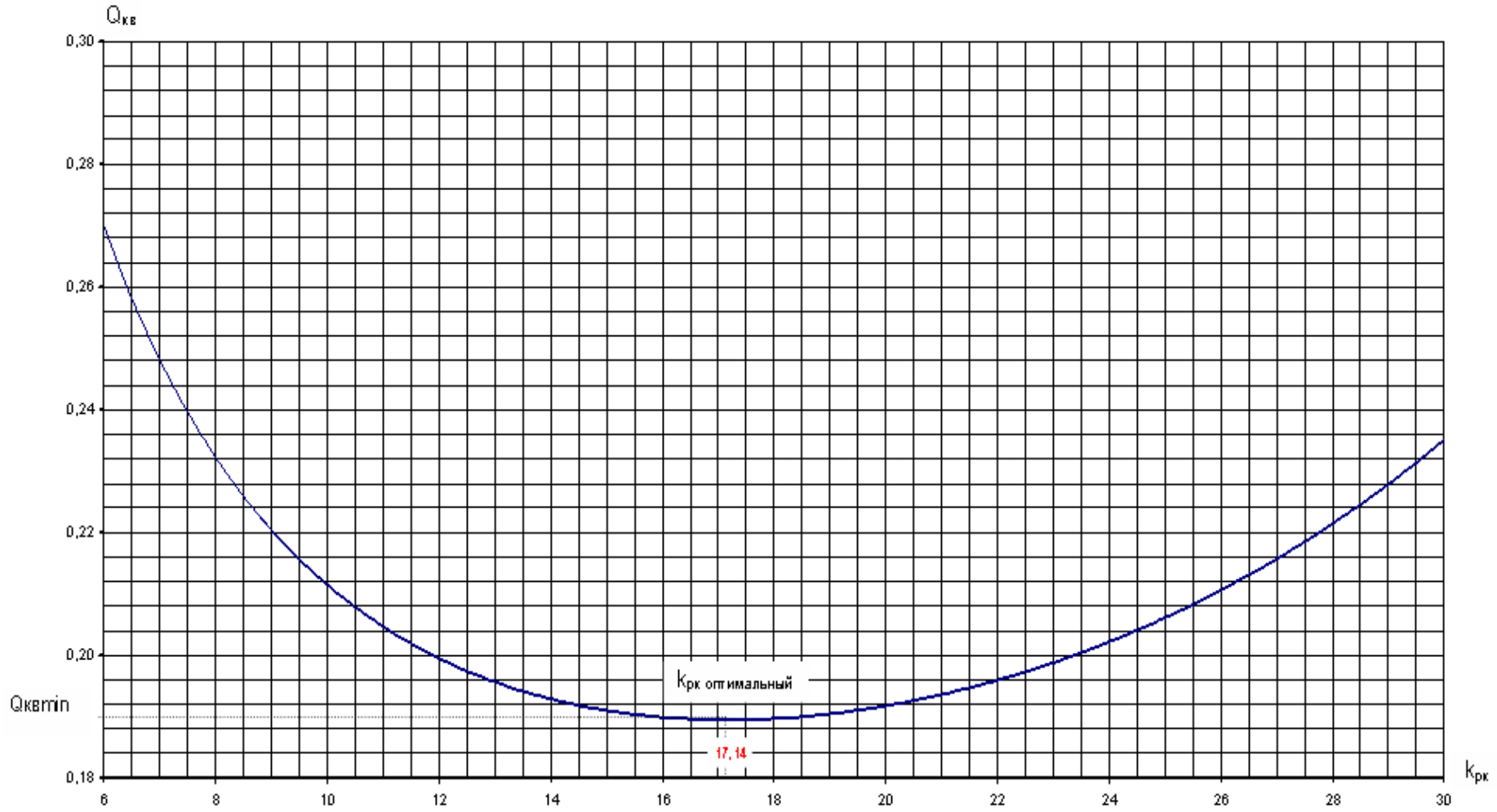



Рис. П.3.15. Зависимость квадратичной интегральной оценки скорректированной системы от коэффициента $k_{рк}$

$$Q_{\text{кв}} = (-1)^{n+1}\frac{\Delta_v}{2d_0\Delta} = (-1)^{4+1}\frac{-0{,}000013k_{рк}^2 - 0{,}000386k_{\text{рк}} - 0{,}002115}{2\cdot 0{,}005(-0{,}0004k_{\text{рк}}^3 + 0{,}01819k_{\text{рк}}^2 + 0{,}23423k_{\text{рк}})} =$$

$$= \frac{0{,}000013k_{рк}^2 + 0{,}000386k_{\text{рк}} + 0{,}002115}{0{,}01(-0{,}0004k_{рк}^3 + 0{,}01819k_{рк}^2 + 0{,}23423k_{\text{рк}})}. \qquad \text{(П.3.106)}$$

Подставив в формулу (П.3.106) различные численные значения $k_{\text{рк}}$, составим таблицу $Q_{\text{кв}} = f(k_{\text{рк}})$.

Таблица П.3.10

**Зависимость квадратичной интегральной оценки от коэффициента $k_{\text{рк}}$**

| $k_{\text{рк}}$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{\text{кв}}$ | 0,27 | 0,232 | 0,211 | 0,2 | 0,192 | 0,189 | 0,189 | 0,191 | 0,195 | 0,202 | 0,221 | 0,221 |

На основании данных табл. П.3.10 построим график функции $Q_{\text{кв}} = f(k_{\text{рк}})$ (рис. П.3.16), откуда определим оптимальное численное значение коэффициента $k_{\text{рк}}$, равное 17,14.

Так как по заданию курсовой работы следовало найти оптимальное значение передаточного коэффициента управляющего устройства $k_{\text{у}}$, то переход от коэффициента $k_{\text{рк}}$ к коэффициенту $k_{\text{у}}$ осуществим по формуле

$$k_{\text{у.опт}} = \frac{k_{\text{рк.опт}}}{\text{k}_{\text{п}}\text{k}_{\text{и}}\text{k}_{\text{о}}} = \frac{17{,}4}{2} = 8{,}57. \qquad \text{(П.3.107)}$$

Вычисление квадратичной интегральной оценки $Q_{\text{кв}}$ для **астатической** системы по каналам «*z*-*x*» и «*z*-ε» упрощается, так как вычитаемое Ф(0) в формуле (П.3.97) равно нулю.

При вычислении $Q_{\text{кв}}$ для **статической** системы по каналу «*z*-*x*» из-за возможных сложностей математического характера можно (по согласованию с преподавателем) изменить канал воздействия.

Приложение 4

Таблица П.4

**Изображения простейших функций времени по Лапласу**

| Наименование функций | $x(t)$ | $X(p)$ |
|---|---|---|
| Дельта-функция | $\delta(t)$ | $1$ |
| Ступенчатая функция | $a1(t)$ | $\frac{a}{p}$ |
| Линейная функция | $at1(t)$ | $\frac{a}{p^2}$ |
| Степенная функция | $at^n1(t)$ | $\frac{an!}{p^{n+1}}$ |
| Экспонента | $ae^{-\alpha t}1(t)$ | $\frac{a}{p+\alpha}$ |
| Синусоида | $a\sin\omega t1(t)$ | $\frac{a\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| Косинусоида | $a\cos\omega t1(t)$ | $\frac{ap}{p^2+\omega^2}$ |

**Министерство образования и науки РФ**

**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный университет»**

**ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ УГГУ**

В.П. Барановский

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сборник тестовых заданий и вопросов
для студентов всех форм обучения направлений бакалавриата 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» (специализация «Электрификация и автоматизация горного производства»)

**Екатеринбург**
**2018**

Министерство образования и науки РФ

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета
«___» _____ 2018г.
Председатель комиссии
_____ В. П. Барановский

**ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ УГГУ**



В. П. Барановский

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сборник тестовых заданий и вопросов
для студентов всех форм обучения направлений бакалавриата 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» (специализация «Электрификация и автоматизация горного производства»)

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

Электронное издание УГГУ
УДК 681.5.011.(075.8)

**№ ЭЛЕКТРОННОГО ИЗДАНИЯ _____**

РЕЦЕНЗЕНТ: *Матвеев В.В.,* доцент кафедры автоматики и компьютерных технологий Уральского государственного горного университета, канд. техн. наук.

Работа рассмотрена на заседании кафедры автоматики и компьютерных технологий 15 декабря 2017 г. (протокол № 4) и рекомендована в качестве электронной версии печатного издания в УГГУ.

**В. П. Барановский**

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

: сборник тестовых заданий и вопросов/ В. П. Барановский; Урал. гос. горный ун-т. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. 122 с.

АННОТАЦИЯ

Приведены 250 заданий и вопросов по основным разделам дисциплины (с возможными вариантами ответов), которые преподаватель может использовать для проверки усвоения и текущего контроля знаний студентов, а студенты – для самопроверки при изучении дисциплины «Теория автоматического управления»

Для студентов всех форм обучения направлений подготовки бакалавров 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» (специализация «Электрификация и автоматизация горного производства»)

УДК 681.5.011.(075.8)

©Уральский государственный
горный университет, 2018
© Барановский В. П., 2018

# ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления (ТАУ) – одна из базовых учебных дисциплин направлений подготовки бакалавров 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 21.05.04 «Горное дело» (специализация «Электрификация и автоматизация горного производства»), преподаваемая студентам в течение двух семестров в рамках основной образовательной программы в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО).

Предметом изучения ТАУ являются информационные процессы, протекающие в системах управления техническими и технологическими объектами.

Основными целями и задачами дисциплины являются формирование у студентов прочных знаний об общих принципах построения и законах функционирования автоматических систем управления, основных методах анализа и синтеза непрерывных и дискретных систем при детерминированных и случайных внешних воздействиях.

Для достижения поставленных целей необходимо помимо итогового контроля знаний – экзамена – применять и другие способы проверки знаний и умений студентов, в том числе выполнение расчетных и контрольных работ, а также разные способы тестового контроля. Предлагаемый сборник тестовых заданий и вопросов позволяет проводить тестовый контроль как в темпе чтения лекций по разделам дисциплины, что дает возможность преподавателю поэтапно проверять знания студентов, так и в конце каждого семестра вместо традиционного экзамена для итогового контроля знаний студентов.

# 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Основные понятия и определения

***1.1.1. Алгоритм функционирования устройства (системы) – это:***

1) порядок выполнения каких-либо процедур;
2) совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению технического процесса в каком-либо устройстве или в совокупности устройств (системе);
3) совокупность условий для выполнения технического процесса;
4) совокупность каких-либо действий для выполнения технического процесса;
5) совокупность мероприятий для выполнения технического процесса в каком-либо устройстве.

***1.1.2. Объектом управления называют:***

1) устройство, которым надлежит управлять;
2) совокупность устройств, подвергающихся управлению извне специальными воздействиями;
3) устройство (или совокупность устройств), осуществляющее технический процесс и нуждающееся в специально организованных воздействиях извне для осуществления его алгоритма функционирования;
4) техническое устройство, управляемое специальными воздействиями;
5) совокупность устройств, для управления которыми надо каким-то образом организовать извне специальные воздействия.

***1.1.3. Алгоритмом управления называют:***

1) правила, в соответствии с которыми осуществляется процесс управления;
2) совокупность правил для организации воздействий извне с целью управления техническим устройством;
3) свод предписаний для воздействия на объект управления;
4) совокупность предписаний, определяющая характер воздействия извне на объект управления с целью осуществления его алгоритма функционирования;
5) перечень правил для организации процесса управления.

***1.1.4. Автоматическое управляющее устройство – это:***

1) устройство для управления каким-либо другим техническим устройством;
2) техническое устройство, при помощи которого воздействуют на объект управления;
3) специальное устройство для организации воздействий на объект управления;
4) устройство, которое работает по специальному алгоритму;
5) устройство, осуществляющее в соответствии с алгоритмом управления воздействие на объект управления.

***1.1.5. Автоматической системой управления называют:***

1) совокупность объекта управления и автоматического управляющего устройства, взаимодействующих между собой;
2) совокупность объекта управления и управляющего устройства;
3) совокупность объекта управления и какого-нибудь измерительного устройства;
4) совокупность управляющего устройства и какого-нибудь измерительного устройства;
5) совокупность объекта управления, управляющего и измерительного устройств.

## 1.2. Функциональная и алгоритмическая структуры систем управления

***1.2.1. Функциональная структура системы управления***

1) состоит из элементов (блоков) различного назначения;
2) отражает функции (целевые назначения), выполняемые отдельными частями автоматической системы;
3) состоит из различных частей, каждая из которых выполняет самостоятельную функцию;
4) состоит из типовых элементов с различными функциями;
5) отражает операции, выполняемые отдельными частями автоматической системы.

***1.2.2. Алгоритмическая структура системы управления характеризует:***

1) алгоритмы преобразования информации в объекте управления и управляющем устройстве;
2) взаимодействие управляющего устройства и объекта управления;
3) алгоритмы преобразования информации в автоматической системе и представляет собой совокупность элементарных звеньев и связей между ними;
4) математическое описание каждого элемента системы;
5) математическое описание всех блоков системы.

***1.2.3. Элементарное алгоритмическое звено – это:***

1) часть алгоритмической структуры автоматической системы, соответствующая элементарному алгоритму преобразования сигнала;
2) часть алгоритмической структуры автоматической системы, которая не связана с остальными частями системы;
3) часть алгоритмической структуры автоматической системы, выполняющая какие-то математические операции;
4) часть алгоритмической структуры системы, выполняющая операции интегрирования или дифференцирования;
5) часть алгоритмической структуры системы, выполняющая операцию суммирования.

***1.2.4. Элементарное алгоритмическое* статическое *звено – это звено, у которого мгновенное значение выходного сигнала зависит:***

1) от характера изменения входного сигнала во времени;
2) от результата выполнения какой-либо арифметической операции;
3) от результата интегрирования входного сигнала во времени;
4) от результата дифференцирования входного сигнала во времени;
5) только от значения входного сигнала в данный момент и не зависит от характера изменения входного сигнала во времени.

***1.2.5. Элементарное алгоритмическое* динамическое *звено – это звено, у которого мгновенное значение выходного сигнала зависит:***

1) только от значения входного сигнала в данный момент и не зависит от характера изменения входного сигнала во времени;
2) от результата выполнения звеном какой-либо логической операции;
3) от результата выполнения звеном какой-либо арифметической операции;
4) не только от текущего значения входного сигнала, но и от характера изменения входного сигнала во времени;
5) только от текущего значения входного сигнала.

## 1.3. Классификация систем управления

***1.3.1. Системой стабилизации называют систему, у которой задающее воздействие***

1) изменяется во времени по заранее заданному закону;
2) изменяется во времени по заранее неизвестному закону;
3) не изменяется во времени;
4) зависит от характера изменения возмущающего воздействия;
5) зависит от характера изменения управляющего воздействия.

***1.3.2. Следящей системой управления называют систему, у которой задающее воздействие***

1) зависит от характера изменения управляющего воздействия;
2) изменяется во времени по заранее неизвестному закону;
3) изменяется во времени по заранее заданному закону;
4) не изменяется во времени;
5) зависит от характера изменения возмущающего воздействия.

***1.3.3. Замкнутой системой управления (системой с обратной связью) называют систему, у которой управляющее воздействие формируется***

1) в соответствии с законом изменения задающего воздействия;
2) в соответствии с законом изменения возмущающего воздействия;
3) в результате сравнения задающего воздействия и сигнала обратной связи;
4) в соответствии с законами изменения задающего и возмущающего воздействий;
5) в результате сравнения задающего воздействия, возмущающего воздействия и сигнала обратной связи.

***1.3.4. Система управления называется* статической, *если управляемая величина системы в установившемся режиме***

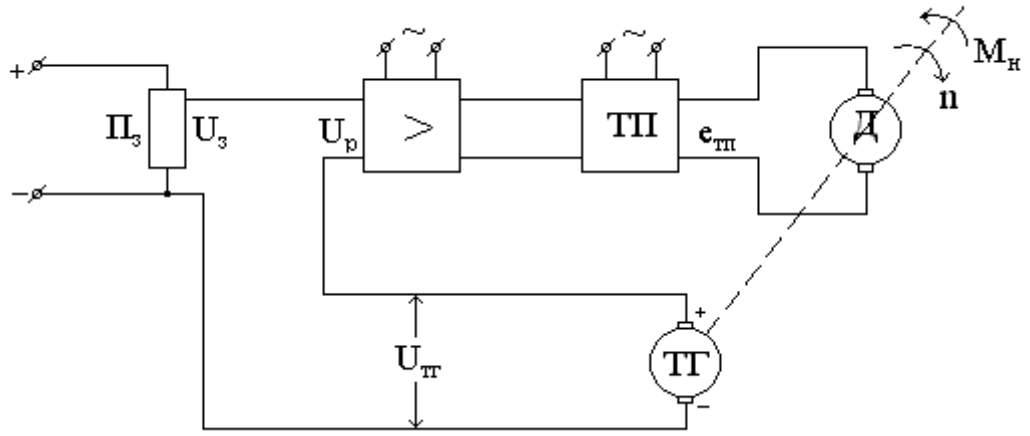
1) зависит от величины возмущающего воздействия и от изменения задающего воздействия;
2) не зависит от величины возмущающего воздействия и зависит от изменения задающего воздействия;
3) не зависит ни от величины возмущающего воздействия, ни от изменения задающего воздействия;
4) зависит от величины возмущающего воздействия;
5) не зависит от величины возмущающего воздействия.

***1.3.5. Система управления называется* астатической, *если управляемая величина системы в установившемся режиме***

1) зависит от места приложения и величины возмущающего воздействия;
2) зависит от величины возмущающего воздействия;
3) зависит от величины возмущающего воздействия и от изменения задающего воздействия;
4) зависит от изменения задающего воздействия;
5) не зависит от величины возмущающего воздействия.

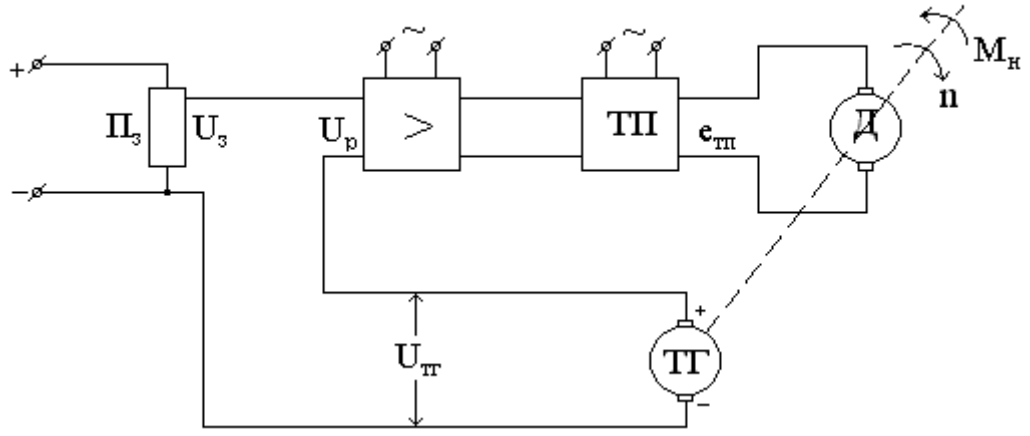
## 1.4. Примеры автоматических систем управления

***1.4.1. Укажите на принципиальной схеме системы управления физическую переменную, которая в данной системе выполняет функцию управляющего воздействия:***



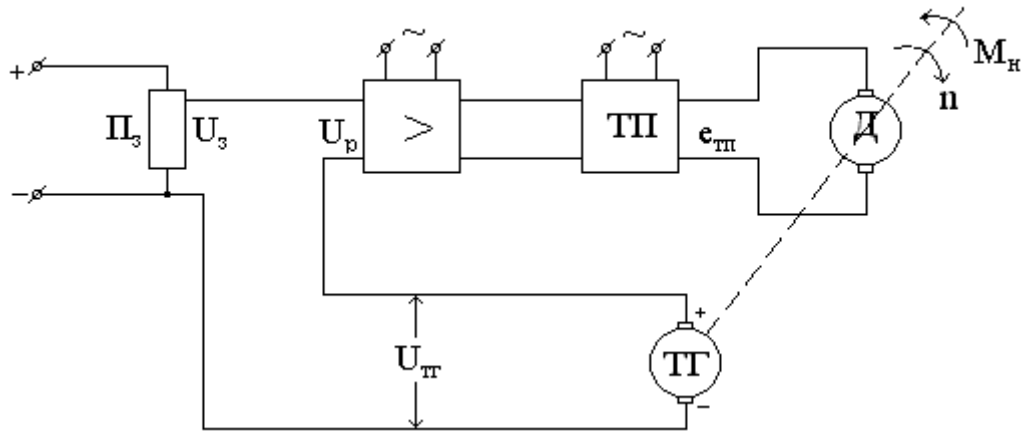

1) $U_з$ – напряжение задания, В;
2) $U_{тг}$ – напряжение тахогенератора, В;
3) $n$ – частота вращения вала двигателя, об/с;
4) $e_{тп}$ – э.д.с. тиристорного преобразователя , В;
5) $M_н$ – момент нагрузки на валу двигателя , Н·м.

***1.4.2. Укажите на принципиальной схеме системы управления физическую переменную, которая в данной системе выполняет функцию возмущающего воздействия:***



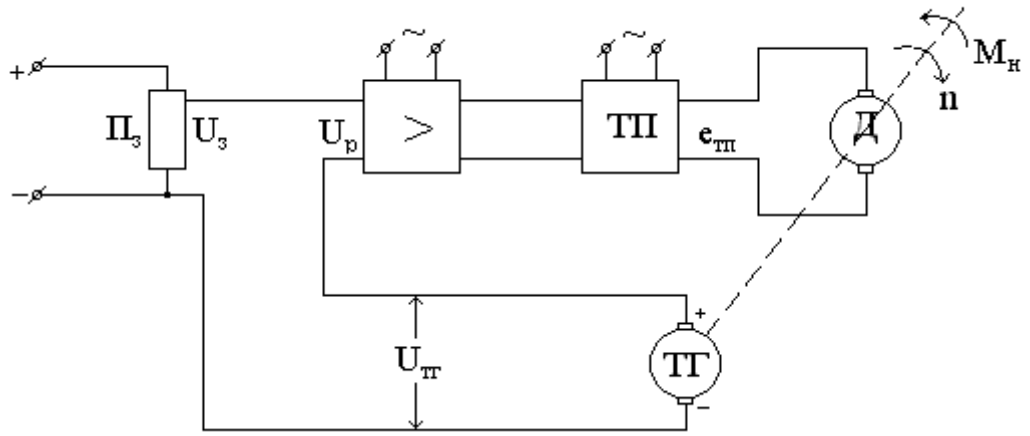

1) $U_з$ – напряжение задания, В;
2) $U_{тг}$ – напряжение тахогенератора, В;
3) $n$ – частота вращения вала двигателя, об/с;
4) $e_{тп}$ – э.д.с. тиристорного преобразователя , В;
5) $M_н$ – момент нагрузки на валу двигателя , Н·м.

***1.4.3. Укажите на принципиальной схеме системы управления физическую переменную, которая в данной системе выполняет функцию контрольного воздействия:***



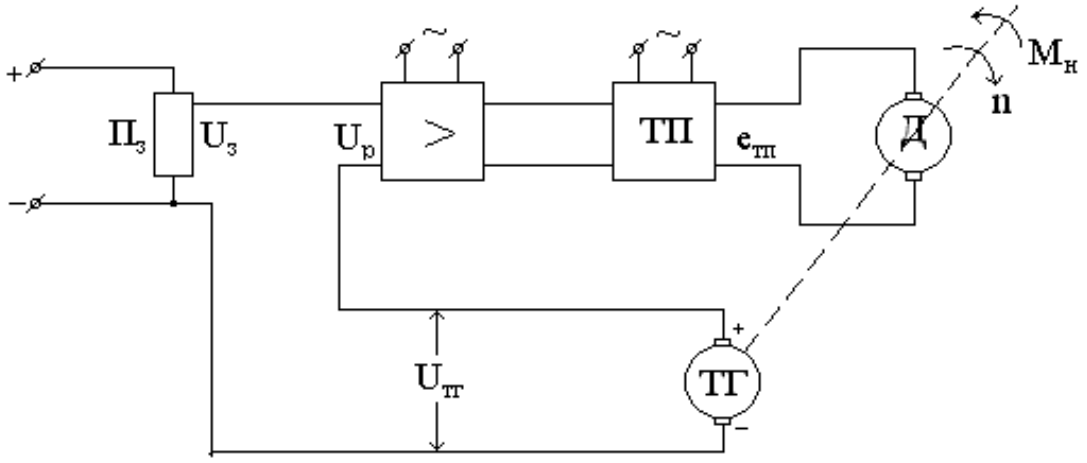

1) $U_з$ – напряжение задания, В;
2) $U_{тг}$ – напряжение тахогенератора, В;
3) $n$ – частота вращения вала двигателя, об/с;
4) $e_{тп}$ – э.д.с. тиристорного преобразователя , В;
5) $M_н$ – момент нагрузки на валу двигателя , Н·м.

***1.4.4. Укажите на принципиальной схеме системы управления физическую переменную, которая в данной системе выполняет функцию управляемой величины:***




1) $U_з$ – напряжение задания, В;
2) $U_{тг}$ – напряжение тахогенератора, В;
3) $n$ – частота вращения вала двигателя, об/с;
4) $e_{тп}$ – э.д.с. тиристорного преобразователя , В;
5) $M_н$ – момент нагрузки на валу двигателя , Н·м.

***1.4.5. Укажите на принципиальной схеме системы управления физическую переменную, которая в данной системе выполняет функцию сигнала ошибки:***




1) $U_з$ – напряжение задания, В;
2) $U_{тг}$ – напряжение тахогенератора, В;
3) $n$ – частота вращения вала двигателя, об/с;
4) $U_р$ – напряжение рассогласования, В;
5) $e_{тп}$ – э.д.с. тиристорного преобразователя , В.

## 2. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Общие понятия о передаточных свойствах элементов систем. Виды воздействий и сигналов

***2.1.1. За счет какого фактора (факторов) в автоматической системе управления обеспечивается направленность передачи воздействий?***

1) за счет того, что все элементы системы должны быть правильно соединены между собой;
2) за счет правильного подключения в замкнутом контуре положительной или отрицательной обратной связи;
3) за счет наличия у одного или нескольких элементов системы детектирующего свойства;
4) за счет обязательного наличия в системе управления управляющего устройства;
5) за счет правильно выбранного алгоритма управления управляющего устройства.

***2.1.2. В чем заключается детектирующее свойство некоторых элементов системы управления?***

1) детектирующее свойство заключается в том, что выходная величина элемента влияет на свою входную;

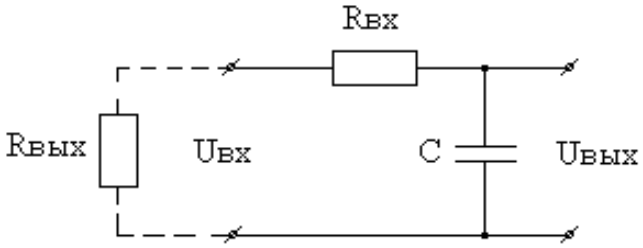
2) детектирующее свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент оказывает обратное действие на предыдущий элемент;

3) детектирующее свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент не оказывает обратного действия на предыдущий элемент;

4) детектирующее свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент не оказывает обратного действия на предыдущий элемент, а его выходная величина не влияет на свою входную;

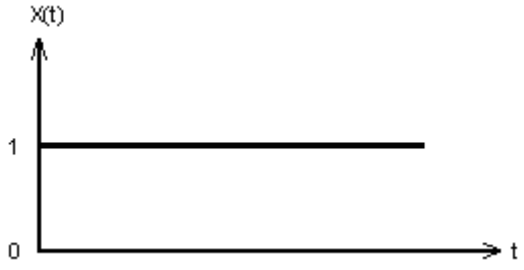
5) детектирующее свойство заключается в том, что выходная величина элемента не влияет на свою входную.

***2.1.3. При каких условиях электрический четырехполюсник обладает свойством однонаправленности воздействия?***



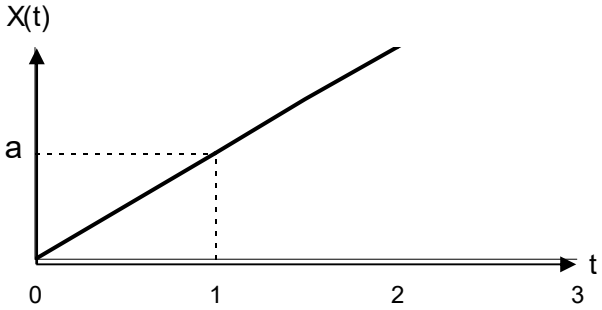

1) $R_{вх} < R_{вых}$;
2) $R_{вх} > R_{вых}$;
3) $R_{вх} = R_{вых}$;
4) $R_{вх} << R_{вых}$;
5) $R_{вх} >> R_{вых}$.

***2.1.4. Какое типовое воздействие изображено на рисунке?***




1) импульсное;
2) единичное импульсное;
3) единичное ступенчатое;
4) ступенчатое;
5) линейное.

***2.1.5. Какое типовое воздействие изображено на рисунке?***



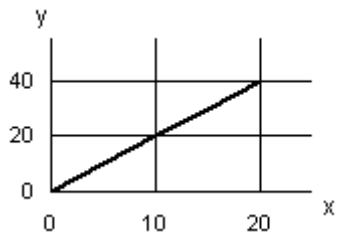

1) единичное ступенчатое;
2) линейное;
3) ступенчатое;
4) единичное импульсное;
5) импульсное.

## 2.2. Статические характеристики элементов. Линеаризация

***2.2.1. Статической характеристикой элемента называют:***

1) зависимость его выходной величины от входной при подаче на вход элемента единичного ступенчатого воздействия;
2) зависимость его выходной величины от входной в установившемся режиме;
3) зависимость его выходной величины от входной в установившемся статическом режиме;
4) зависимость его выходной величины от входной в установившемся динамическом режиме;
5) зависимость его выходной величины от входной при подаче на вход элемента единичного импульсного воздействия.

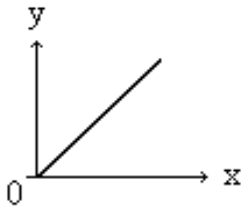
***2.2.2. Чему равен передаточный коэффициент элемента "к" со статической характеристикой, приведенной на рисунке?***



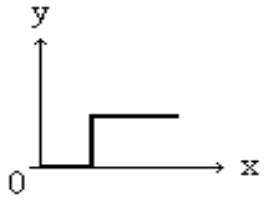

1) 0,5;
2) 2;
3) 4;
4) 0,25;
5) 3.

***2.2.3. Какая из приведенных на рисунке статических характеристик элементов является несущественно нелинейной и подлежит линеаризации по методу касательной или методу секущей?***

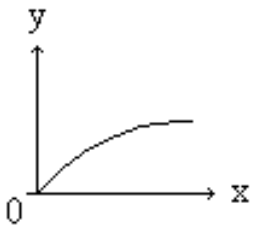
1



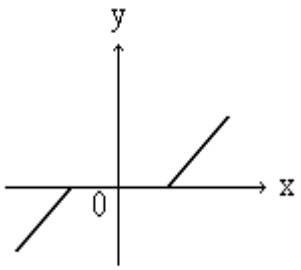

2



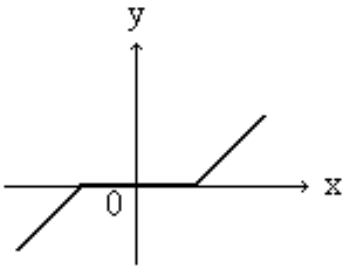

3




4



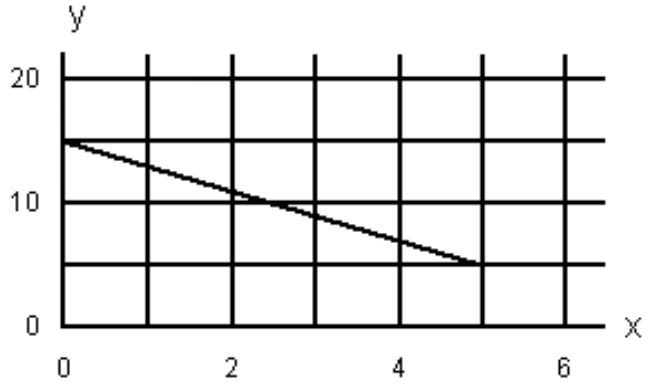

5




***2.2.4. Чему равен передаточный коэффициент элемента "к" со статической характеристикой $Y=2X^2+3$ в рабочей точке $X=X_0=2$?***
***Примечание. Следует использовать разложение функции в ряд Тейлора.***

1) 3;
2) 4;
3) 2;
4) 5;
5) 8.

***2.2.5. Чему равен передаточный коэффициент элемента "к" со статической характеристикой, приведенной на рисунке?***




1) 5;
2) 1;
3) 2;
4) –2;
5) –1.

## 2.3 Линейные дифференциальные уравнения

***2.3.1. Представить нижеприведенное дифференциальное уравнение линейной системы управления в символической (операторной) форме***

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + ... + b_m x(t)$$

1) $(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)Y(P) = (b_0p^m+\ldots+b_m)X(P)$;
2) $(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)y(t) = (b_0p^m+\ldots+b_m)x(t)$;
3) $(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0)Y(P) = (b_mp^m+\ldots+b_0)X(P)$;
4) $(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0)y(t) = (b_mp^m+\ldots+b_0)x(t)$;
5) $(a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_n)x(t) = (b_0p^m+\ldots+b_m)y(P)$.

***2.3.2. Какое условие справедливо для физической реализации системы, описываемой дифференциальным уравнением:***

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + ... + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + ... + b_m x(t) ?$$

1) $n < m$;
2) $n << m$;
3) $m \le n$;
4) $n \le m$;
5) $n >> m$.

***2.3.3. Для каких систем автоматического управления справедлив принцип суперпозиции или наложения сигналов?***

1) для дискретных;
2) для комбинированных;
3) для нелинейных;
4) для линейных;
5) для адаптивных.

***2.3.4. Чему равен передаточный коэффициент системы "к", описываемой дифференциальным уравнением***

$$5\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)\,?$$

1) 2,5;
2) 5,0;
3) 0,8;
4) 4,0;
5) 0,4.

***2.3.5. Чему равен передаточный коэффициент элемента системы "к", описываемого уравнением в операторной форме***

$$(0{,}2p+0{,}4)y(t)=(5p+10)x(t)\ ?$$

1) 0,4;
2) 10,0;
3) 25;
4) 0,2;
5) 5,0.

## 2.4. Временные (переходные) характеристики

***2.4.1. Переходной функцией элемента (системы) h(t) называют изменение выходной величины y(t) во времени,***

1) возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия;
2) возникающее после подачи на вход дельта-функции $\delta(t)$;
3) возникающее после подачи на вход линейной функции;
4) возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия, при нулевых начальных условиях;
5) возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия, при ненулевых начальных условиях.

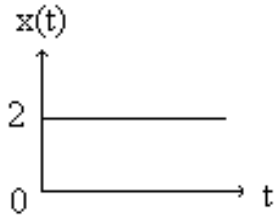
***2.4.2. Импульсной переходной функцией элемента (системы) w(t) называют изменение выходной величины y(t) во времени,***

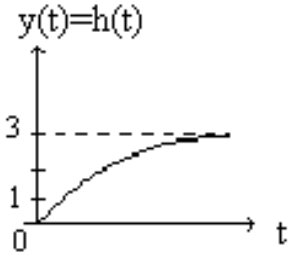
1) возникающее после подачи на вход дельта-функции;
2) возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия;
3) возникающее после подачи на вход линейного воздействия;
4) возникающее после подачи на вход дельта-функции δ(*t*), при ненулевых начальных условиях;
5) возникающее после подачи на вход дельта-функции δ(*t*), при нулевых начальных условиях.

***2.4.3. Какова связь между импульсной переходной (весовой) функцией w(t) и переходной функцией h(t) элемента (системы)?***

1) $h(t)=\frac{dw(t)}{dt}$;
2) $w(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau$;
3) $w(t)=\frac{dh(t)}{dt}$;
4) $h(t)=\frac{d^2w(t)}{dt^2}$;
5) $h(t)=w(t)\cdot 1(t)$

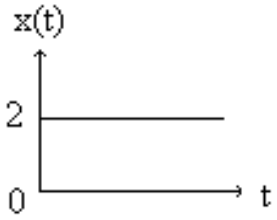
***2.4.4. Чему равен передаточный коэффициент "к" элемента со следующей переходной характеристикой y(t)***

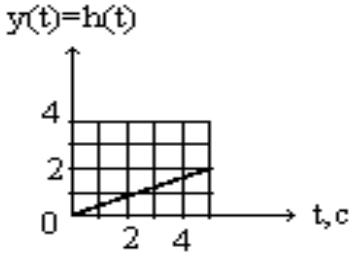



1) 3,0;
2) 0,5;
3) 0,66;
4) 1,5;
5) 2,0.

***2.4.5. Чему равен передаточный коэффициент “к” элемента со следующей переходной характеристикой y(t)?***




1) 2,0;
2) 0,5;
3) 5,0;
4) 1,0;
5) 0,2.

## 2.5. Передаточные функции

***2.5.1. Передаточной функцией W(P) элемента (системы) называют отношение изображения по Лапласу***

1) входной величины к изображению выходной величины;
2) выходной величины к изображению входной величины;
3) выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях;
4) входной величины к изображению выходной величины при нулевых начальных условиях;
5) выходной величины ко входной величине.

***2.5.2. Элементу системы, описываемому дифференциальным уравнением***

$$5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3x(t)$$

***соответствует передаточная функция:***

1) $W(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{6p+5}{3}$;
2) $W(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{3}{6p+5}$;
3) $W(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{5p+6}{3}$;
4) $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{3}{5p+6}$;
5) $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0,5}{5p+6}$

***2.5.3. Передаточный коэффициент “к” системы, описываемой передаточной функцией***

$$W(p) = \frac{5p^2 + 6p + 12}{6p^3 + 10p^2 + 4p},$$

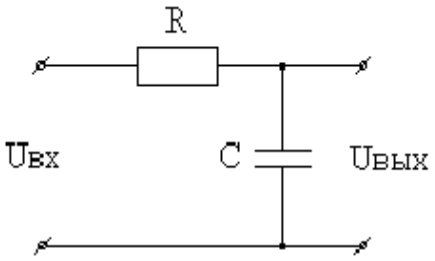
***равен:***

1) 0,25;
2) 3,0;
3) 0,083;
4) 1,2;
5) 0,5.

***2.5.4. Передаточная функция W(p) элемента связана с его переходной функцией h(t) при t→∞ следующим соотношением:***

1) $W(0) > h(\infty)$;
2) $W(0) < h(\infty)$;
3) $W(\infty) = h(0)$;
4) $W(\infty) > h(0)$;
5) $W(0) = h(\infty)$.

***2.5.5. Данный четырехполюсник***




***описывается следующей передаточной функцией:***

1) $W(p) = \frac{p}{Tp+1}$;
2) $W(p) = kp$;
3) $W(p) = \frac{1}{p}$;
4) $W(p) = \frac{1}{Tp+1}$;
5) $W(p) = \frac{1}{p(Tp+1)}$.

## 2.6. Частотные характеристики

***2.6.1. Амплитудно-фазовая частотная функция W(jω) элемента связана с его передаточной функцией W(p) следующим соотношением:***

1) $W(j\omega) = W(p)\big|_{p=\infty}$;

2) $W(j\omega) = W(p)\big|_{p=-\infty}$;

3) $W(j\omega) = W(p)\big|_{p=0}$;

4) $W(j\omega) = W(p)\big|_{p=j\omega}$;

5) $W(j\omega) = \left.\dfrac{1}{W(p)}\right|_{p=\infty}$.

***2.6.2. Амплитудно-частотную функцию A(ω) элемента можно получить из его аплитудно-фазовой частотной функции W(jω) следующим способом:***

1) $A(\omega) = |W(j\omega)|\big|_{\omega=0}$;

2) $A(\omega) = |W(j\omega)|\big|_{\omega=\infty}$;

3) $A(\omega) = |W(j\omega)|$;

4) $A(\omega) = W(j\omega)\big|_{\omega=0}$;

5) $A(\omega) = W(j\omega)\big|_{\omega=\infty}$

***2.6.3. Элементу с передаточной функцией*** $\boldsymbol{W(p) = \dfrac{k}{Tp+1}}$ ***соответствует амплитудно-частотная функция A(ω)***

1) $A(\omega) = \dfrac{k^2}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$;

2) $A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2+1}$;

3) $A(\omega) = 20\lg\dfrac{k}{Tj\omega+1}$;

4) $A(\omega) = \lg\dfrac{k}{Tj\omega+1}$;

5) $A(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$.

***2.6.4. Фазо-частотную функцию φ(ω) элемента можно получить из его амплитудно-фазовой частотной функции*** $W(j\omega)=\dfrac{K(j\omega)}{D(j\omega)}$ ***следующим способом***

1) $\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=\arg K(j\omega)+\arg D(j\omega)$;

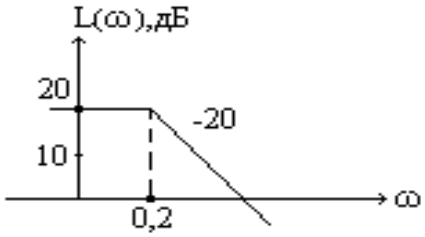
2) $\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=\arg K(j\omega)-\arg D(j\omega)$;

3) $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{K(j\omega)}{D(j\omega)}$;

4) $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}K(j\omega)+\operatorname{arctg}D(j\omega)$;

5) $\varphi(\omega)=\dfrac{\arg K(j\omega)}{\arg D(j\omega)}$.

***2.6.5. По виду логарифмической амплитудно-частотной характеристики L(ω) элемента***




***определить его передаточную функцию***

1) $W(p)=\dfrac{20}{5p+1}$;

2) $W(p)=\dfrac{10}{0{,}2p+1}$;

3) $W(p)=\dfrac{20}{0{,}2p+1}$;

4) $W(p)=\dfrac{10}{5p+1}$;

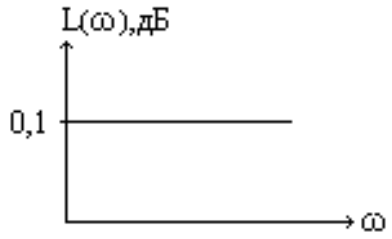
5) $W(p)=\dfrac{0{,}2}{10p+1}$.

# 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

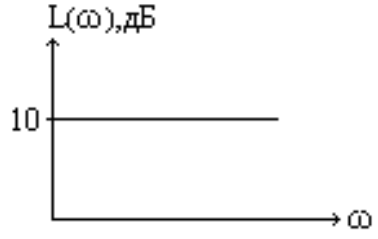
## 3.1. Безынерционные и инерционные статические звенья

***3.1.1. Безынерционному звену с передаточной функцией W(p)=к, где к=0,1, соответствует логарифмическая амплитудно-частотная характеристика***

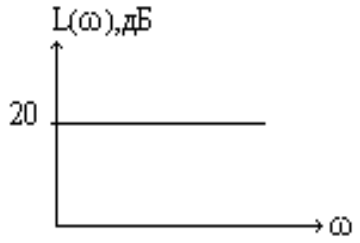
1.



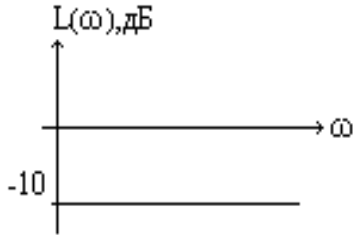

2.



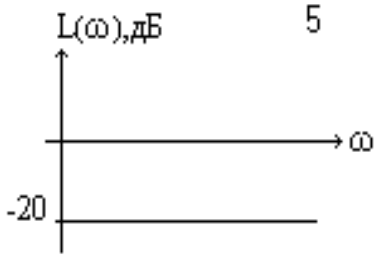

3.




4.

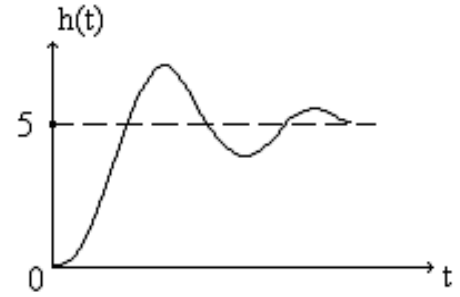



5

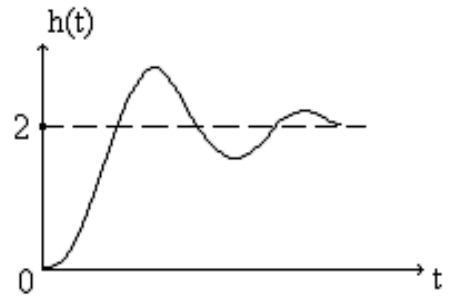


***3.1.2. Инерционному статическому звену второго порядка с передаточной функцией*** $W(p) = \dfrac{5}{9p^2 + 7p + 1}$ ***соответствует примерная переходная характеристика h(t):***

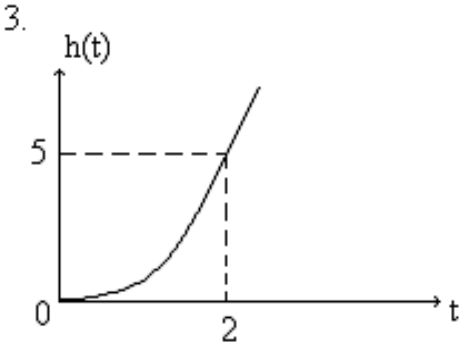
1.



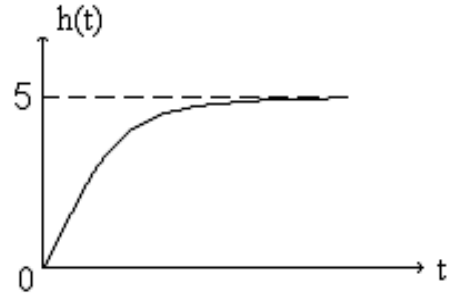

2.



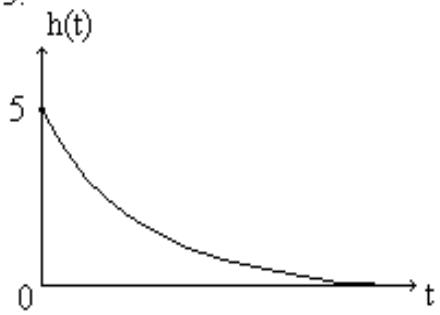

3.



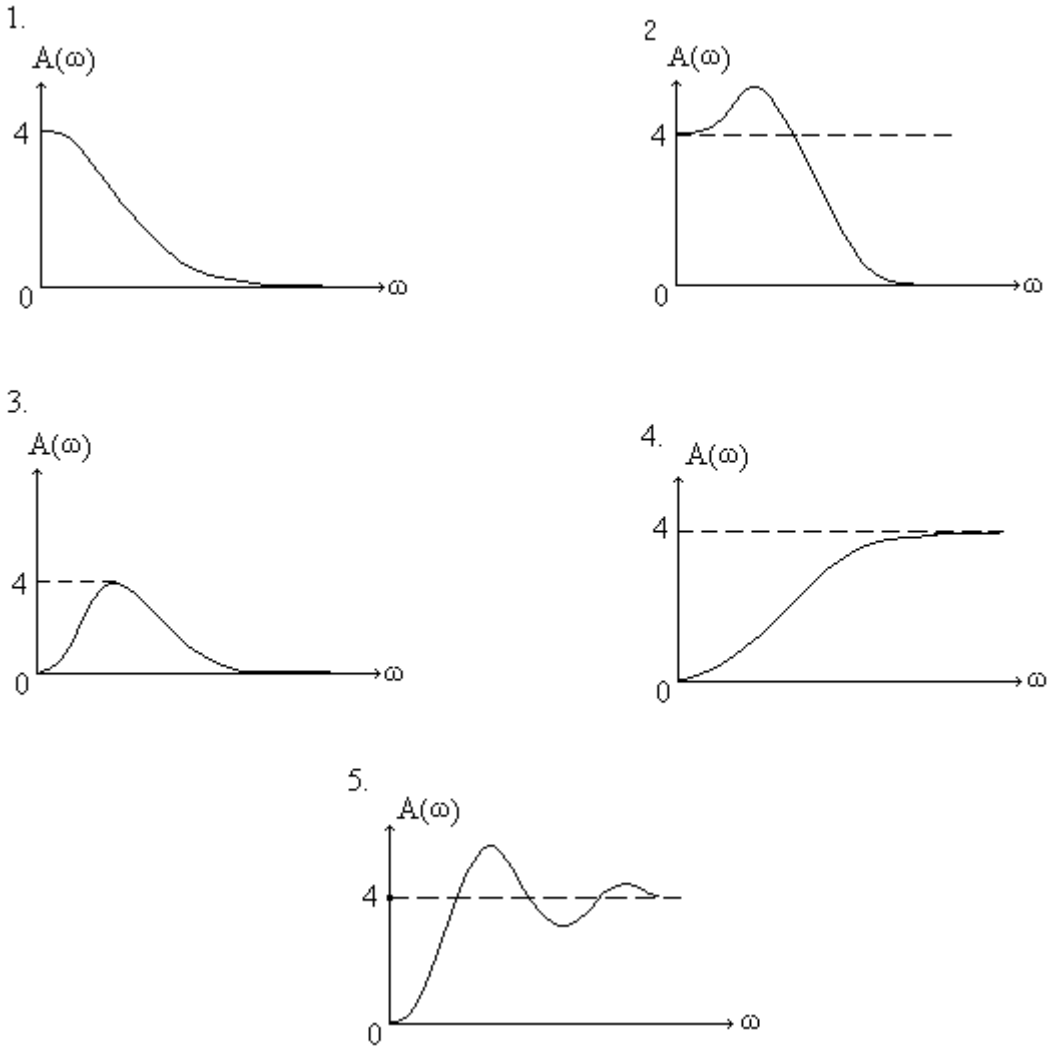

4




5.



***3.1.3. Инерционному статическому звену второго порядка с передаточной функцией*** $W(p)=\dfrac{4}{9p^2+4p+1}$ ***соответствует примерная амплитудно-частотная характеристика*** $A(\omega)$***:***




***3.1.4. Передаточная функция*** $W(p)$ ***инерционного статического звена первого порядка имеет вид:***

1) $W(p)=k$;

2) $W(p)=\dfrac{k}{p}$;

3) $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$;

4) $W(p)=\dfrac{kp}{Tp+1}$;

5) $W(p)=кp$.

***3.1.5. Выражение для фазо-частотной функции φ(ω) инерционного статического звена второго порядка с передаточной функцией*** $W(p) = \dfrac{k}{(5p+1)(10p+1)}$ ***записывается в виде***

1) $\varphi(\omega) = -\text{arctg}5\omega - \text{arctg}10\omega$;

2) $\varphi(\omega) = \text{arctg}5\omega + \text{arctg}10\omega$;

3) $\varphi(\omega) = \text{arctg}5\omega / \text{arctg}10\omega$;

4) $\varphi(\omega) = \text{arctg}5\omega \cdot \text{arctg}10\omega$;

5) $\varphi(\omega) = -\text{arctg}5\omega + \text{arctg}10\omega$.

## 3.2. Интегрирующие звенья

***3.2.1. Передаточную функцию W(p) идеального интегрирующего звена записывают в виде:***

1) $W(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$;

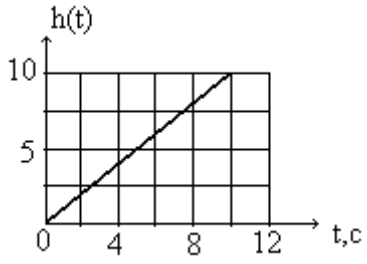
2) $W(p) = \dfrac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$;

3) $W(p) = \dfrac{k}{p}$;

4) $W(p) = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$;

5) $W(p) = \dfrac{kp}{Tp+1}$.

***3.2.2. Определить по переходной характеристике h(t) идеального интегрирующего звена его передаточный коэффициент "к", если входной сигнал x(t) = 5·1(t).***




1) $\kappa = 5$;
2) $\kappa = 10$;
3) $\kappa = 1$;
4) $\kappa = 0{,}2$;
5) $\kappa = 8$.

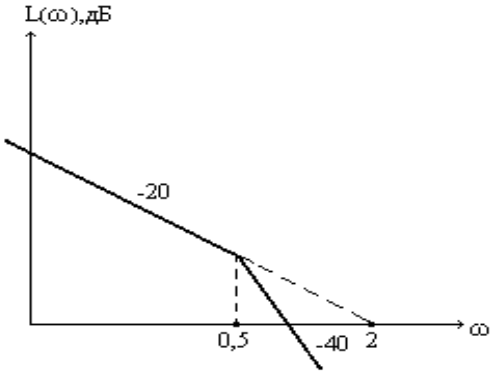
***3.2.3. Передаточную функцию W(p) реального интегрирующего звена записывают в виде:***

1) $W(p) = \dfrac{k}{p}$;
2) $W(p) = \kappa p$;
3) $W(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$;
4) $W(p) = \dfrac{kp}{Tp+1}$;
5) $W(p) = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$.

***3.2.4. Выражение для амплитудно-частотной функции A(ω) реального интегрирующего звена с передаточной функцией*** $\boldsymbol{W(p) = \dfrac{10}{p(5p+1)}}$ ***записывают в виде:***

1) $A(\omega) = \dfrac{100}{\omega\sqrt{5\omega^2+1}}$;
2) $A(\omega) = \dfrac{10}{\omega\sqrt{25\omega^2+1}}$;
3) $A(\omega) = \dfrac{10}{\omega\sqrt{5\omega^2+1}}$;
4) $A(\omega) = \dfrac{10}{\omega^2\sqrt{5\omega^2+1}}$;
5) $A(\omega) = \dfrac{10}{\omega^2\sqrt{25\omega^2+1}}$.

***3.2.5. Передаточную функцию W(p) реального интегрирующего звена можно записать по его логарифмической амплитудно-частотной характеристике L(ω)***




***в следующем виде***

1) $W(p)=\dfrac{2}{p(0{,}5p+1)}$;

2) $W(p)=\dfrac{0{,}5}{p(2p+1)}$;

3) $W(p)=\dfrac{2}{p(5p+1)}$;

4) $W(p)=\dfrac{0{,}5}{p(0{,}5p+1)}$;

5) $W(p)=\dfrac{2}{p(2p+1)}$.

## 3.3. Дифференцирующие звенья

***3.3.1. Передаточную функцию W(p) идеального дифференцирующего звена записывают в виде:***

1) $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$;

2) $W(p)=\dfrac{T_1p+1}{T_2p+1}$;

3) $W(p)=\dfrac{k}{p}$;

4) $W(p)=kp$;

5) $W(p)=\dfrac{kp}{Tp+1}$.

***3.3.2. Передаточную функцию W(p) реального дифференцирующего звена записывают в виде:***

1) $W(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$;

2) $W(p) = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$;

3) $W(p) = kp$;

4) $W(p) = \dfrac{kp}{Tp+1}$;

5) $W(p) = \dfrac{k}{p}$.

***3.3.3. Выражение для фазо-частотной функции φ(ω) реального дифференцирующего звена с передаточной функцией*** $\mathbf{W(p) = \dfrac{5p}{10p+1}}$ ***записывают в виде:***

1) $\varphi(\omega) = -90^0 - \text{arctg}10\omega$;

2) $\varphi(\omega) = 90^0 + \text{arctg}10\omega$;

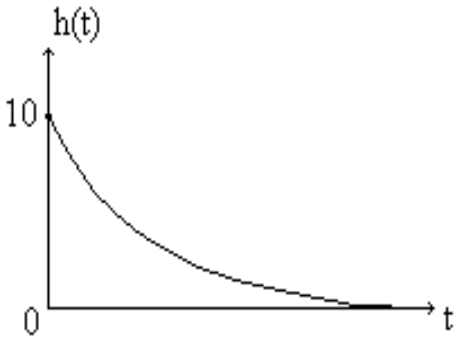
3) $\varphi(\omega) = 90^0 - \text{arctg}10\omega$;

4) $\varphi(\omega) = \text{arctg}5\omega + \text{arctg}10\omega$;

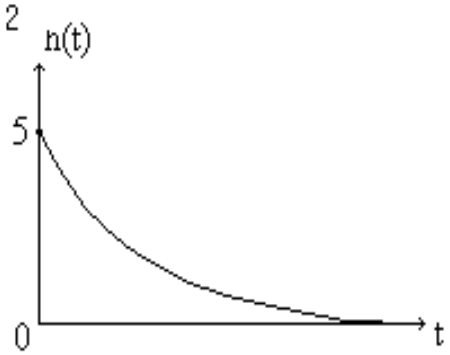
5) $\varphi(\omega) = \text{arctg}5\omega - \text{arctg}10\omega$.

***3.3.4. Реальному дифференцирующему звену с передаточной функцией*** $W(p) = \frac{10p}{2p+1}$ ***соответствует следующая примерная переходная характеристика h(t):***

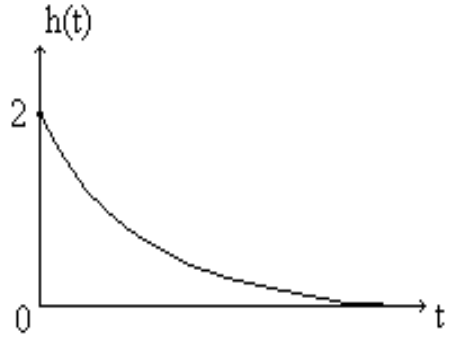
1.



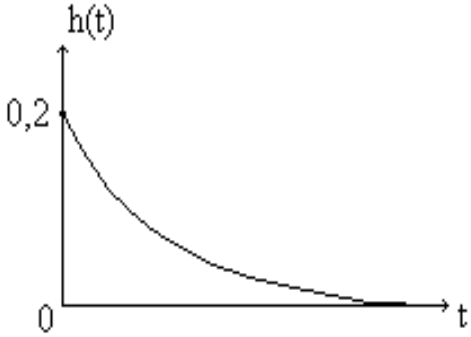

2



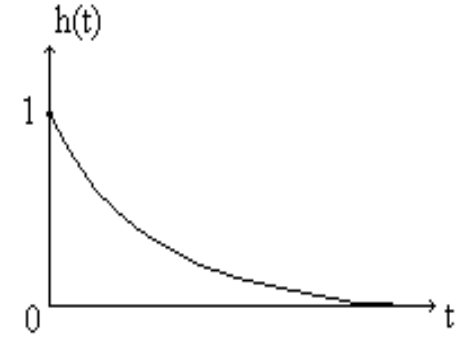

3.



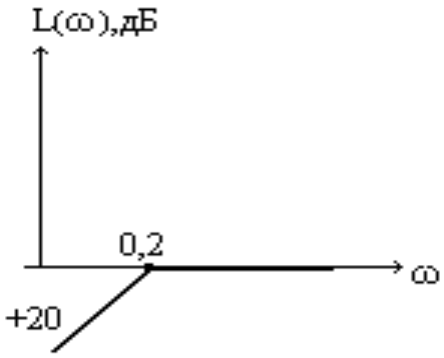

4.




5.



***3.3.5. Передаточную функцию W(p) реального дифференцирующего звена можно записать по его логарифмической амплитудно-частотной характеристике L(ω)***




***в следующем виде:***

1) $W(p)=\dfrac{5p}{0{,}2p+1}$;

2) $W(p)=\dfrac{0{,}2p}{0{,}2p+1}$;

3) $W(p)=\dfrac{0{,}2p}{5p+1}$;

4) $W(p)=\dfrac{p}{5p+1}$;

5) $W(p)=\dfrac{5p}{5p+1}$.

## 3.4. Звено запаздывания

***3.4.1. Передаточную функцию W(p) звена запаздывания записывают в виде:***

1) $W(p)=\dfrac{k}{p}$;

2) $W(p)=kp$;

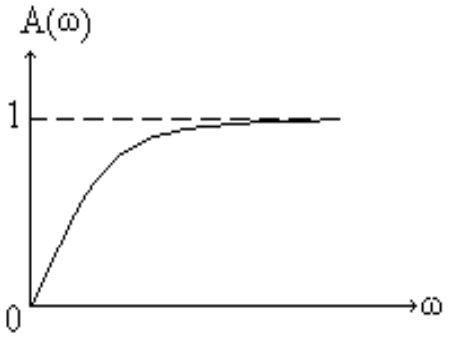
3) $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$;

4) $W(p)=e^{-p\tau}$;

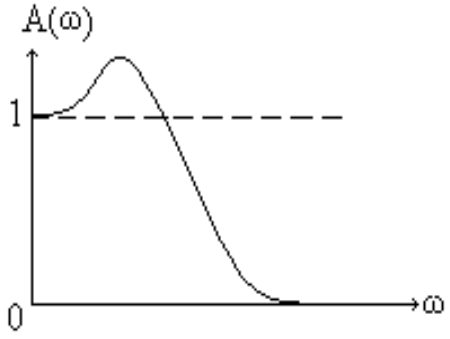
5) $W(p)=\dfrac{kp}{Tp+1}$.

***3.4.2. Амплитудно-частотная характеристика звена запаздывания*** $A(\omega)=|W(j\omega)|=|e^{-j\omega\tau}|$ ***имеет вид:***

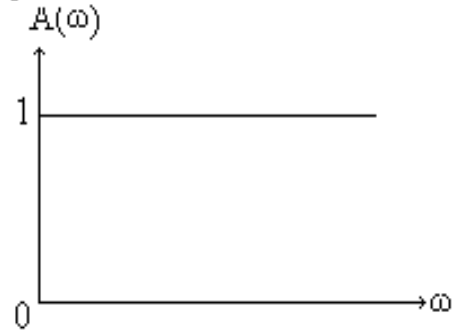
1.



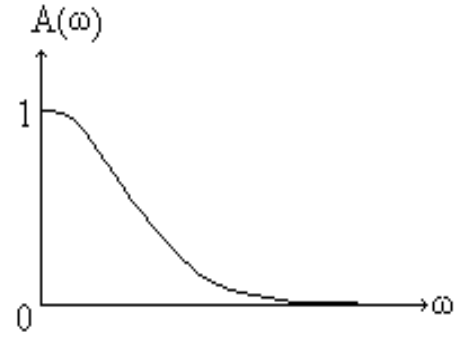

2.



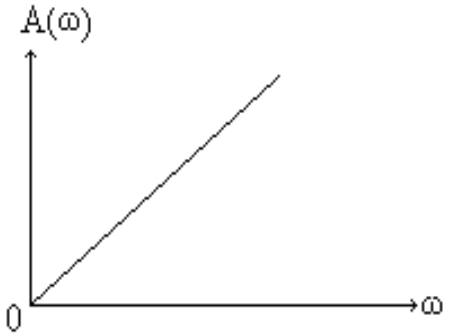

3



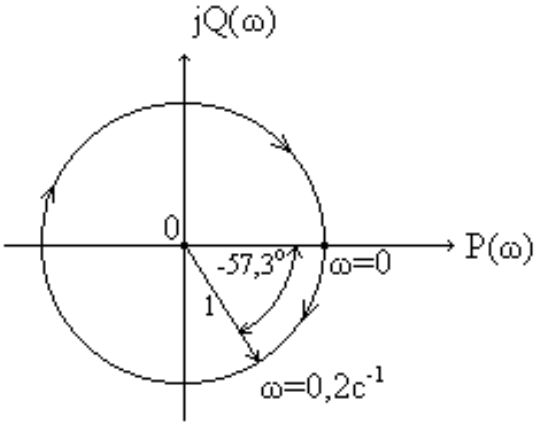

4.




5.

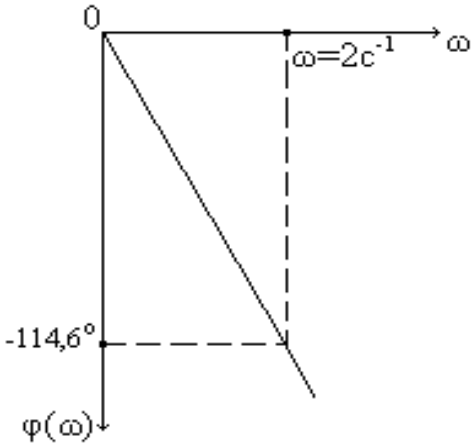


***3.4.3. Учитывая, что фазо-частотная функция звена запаздывания записывается в виде φ(ω) = -ωτ, рад, определить по амплитудно-фазовой частотной характеристике звена (АФЧХ) время запаздывания τ, с.***




1) $\tau$ = 4с;
2) $\tau$ = 2с;
3) τ = 0,2с;
4) τ = 10с;
5) τ = 5с.

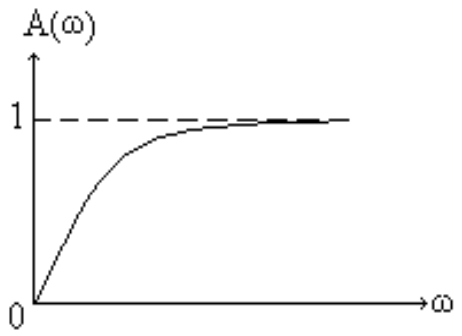
***3.4.4. Учитывая, что фазо-частотная функция звена запаздывания записывается в виде φ(ω) = -ωτ, рад, определить по фазо-частотной характеристике звена (ФЧХ) время запаздывания τ, с.***



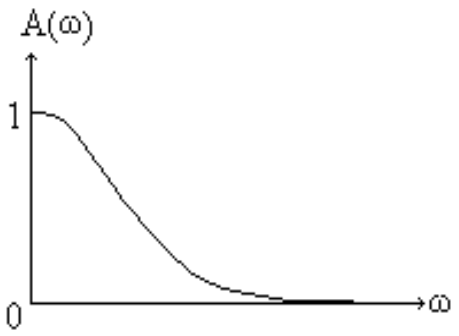

1) τ = 1с;
2) τ = 2с;
3) τ = 3с;
4) τ = 4с;
5) τ = 5с.

***3.4.5. Какую амплитудно-частотную характеристику A(ω) имеет звено, аппроксимирующее звено запаздывания рядом Пада второго порядка с передаточной функцией*** $W(p) = e^{-p\tau} \approx \dfrac{\tau^2 p^2 - 6\tau p + 12}{\tau^2 p^2 + 6\tau p + 12}$***?***

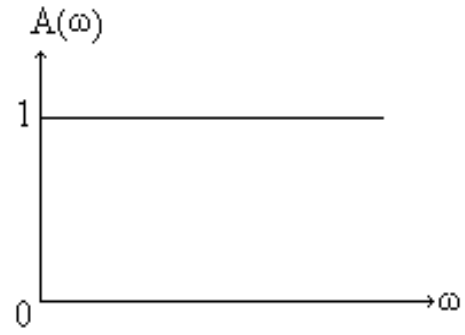
1.



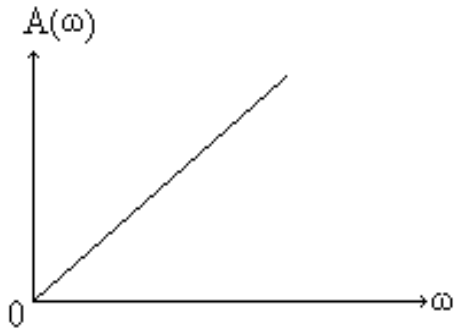

2.



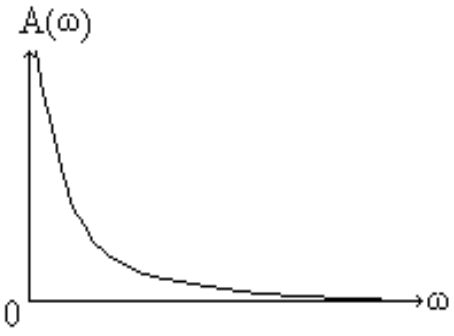

3




4.

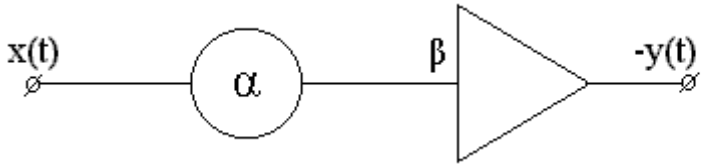



5.



## 3.5. Модели типовых звеньев

***3.5.1. Звену с какой передаточной функцией W(p) соответствует нижеприведенная аналоговая модель звена?***




αβ=К

1) $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$;

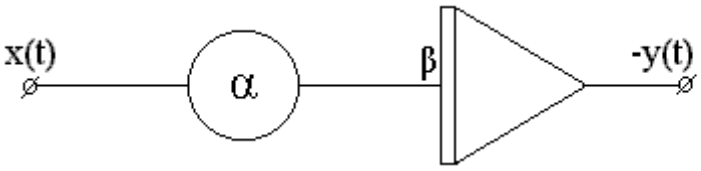
2) $W(p)=\dfrac{k}{p}$;

3) $W(p)=-k$;

4) $W(p)=kp$;

5) $W(p)=\dfrac{kp}{Tp+1}$.

***3.5.2. Звену с какой передаточной функцией W(p) соответствует нижеприведенная аналоговая модель звена?***




αβ=К

1) $W(p)=-k$;

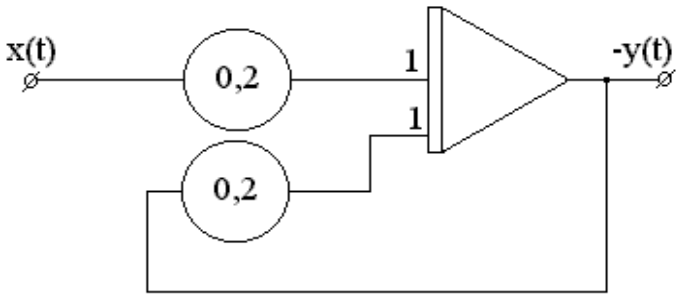
2) $W(p)=-\dfrac{k}{Tp+1}$;

3) $W(p)=kp$;

4) $W(p)=-\dfrac{k}{p}$;

5) $W(p)=\dfrac{kp}{Tp+1}$.

***3.5.3. Определить коэффициенты передаточной функции инерционного статического звена первого порядка*** $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$ ***по его аналоговой модели***




1) $к = 5$, $T = 1$с;

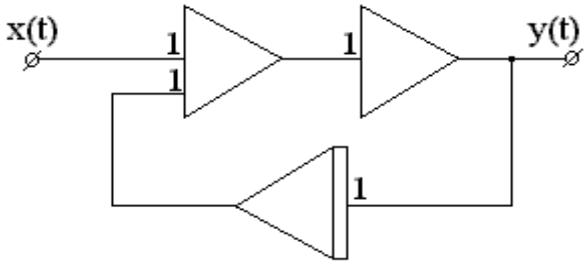
2) $к = 1$, $T = 5$с;

3) $к = 0{,}2$, $T = 0{,}2$с;

4) $к = 0{,}2$, $T = 5$с;

5) $к = 5$, $T = 0{,}2$с.

***3.5.4. Какая передаточная функция W(p) соответствует нижеприведенной аналоговой модели реального дифференцирующего звена?***




1) $W(p)=\dfrac{2p}{2p+1}$;

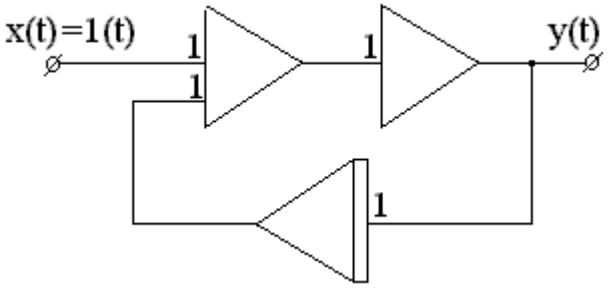
2) $W(p)=\dfrac{3p}{3p+1}$;

3) $W(p)=\dfrac{p}{2p+1}$;

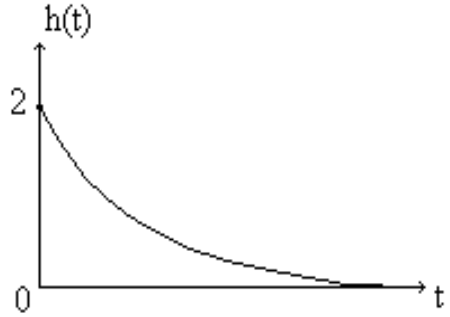
4) $W(p)=\dfrac{2p}{p+1}$;

5) $W(p)=\dfrac{p}{p+1}$.

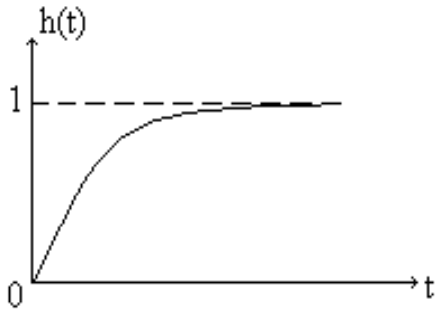
***3.5.5. Какой примерный график переходного процесса h(t) соответствует аналоговой модели звена?***



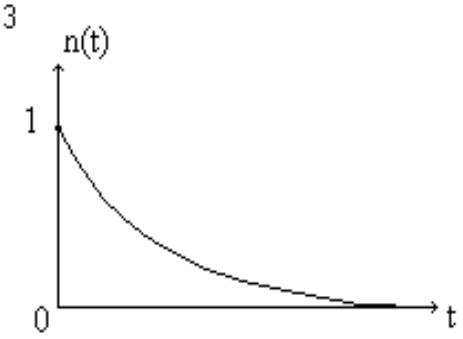

1.



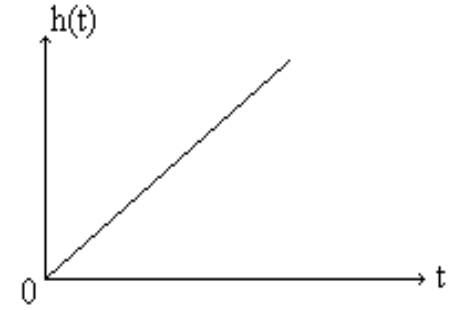

2.



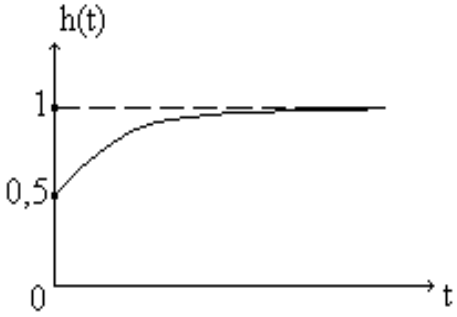

3




4.



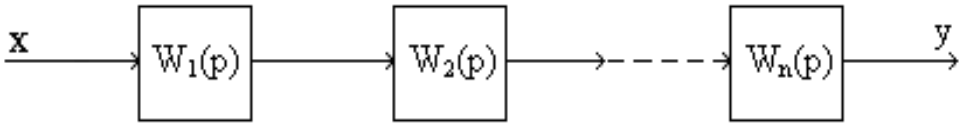

5.



# 4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 4.1. Основные и дополнительные правила структурных преобразований

### *4.1.1. Эквивалентную передаточную функцию $W_Э(p)$ нижеприведенного соединения звеньев*




***записывают в виде***

1) $W_Э(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p)$;

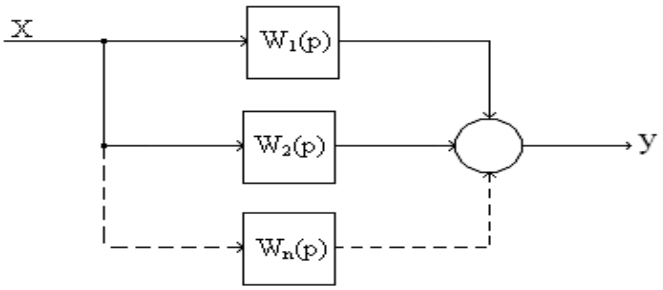
2) $W_Э(p) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} W_i(p)}{\prod_{i=1}^{n} W_i(p)}$;

3) $W_Э(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)$;

4) $W_Э(p) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} W_i(p)}{1 + \prod_{i=1}^{n} W_i(p)}$;

5) $W_Э(p) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} W_i(p)}{1 + \sum_{i=1}^{n} W_i(p)}$.

***4.1.2. Эквивалентную передаточную функцию $W_Э(p)$ нижеприведенного соединения звеньев***




***записывают в виде***

1) $W_Э(p)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}{\prod\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}$;

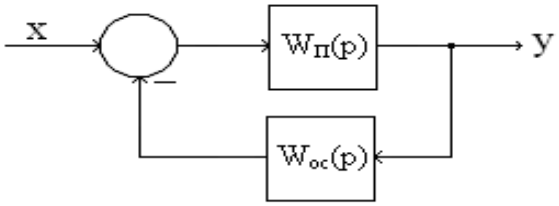
2) $W_Э(p)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}{1+\prod\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}$;

3) $W_Э(p)=\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}W_i(p)}$;

4) $W_Э(p)=\sum\limits_{i=1}^{n}W_i(p)$;

5) $W_Э(p)=\prod\limits_{i=1}^{n}W_i(p)$.

***4.1.3. Эквивалентную передаточную функцию $W_Э(p)$ нижеприведенного соединения звеньев***




***записывают в виде***

1) $W_Э(p)=\dfrac{W_П(p)}{1-W_П(p)\cdot W_{ОС}(p)}$;

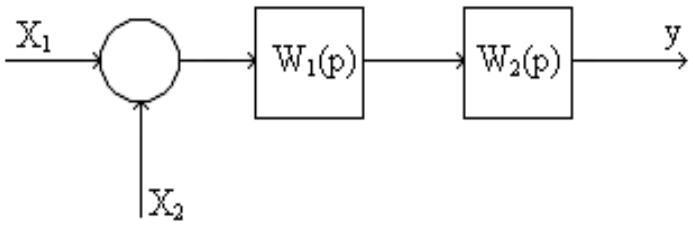
2) $W_Э(p)=\dfrac{W_П(p)}{1+W_П(p)\cdot W_{ОС}(p)}$;

3) $W_Э(p)=\dfrac{W_П(p)}{1+W_{ОС}(p)}$;

4) $W_Э(p)=\dfrac{W_П(p)}{1-W_{ОС}(p)}$;

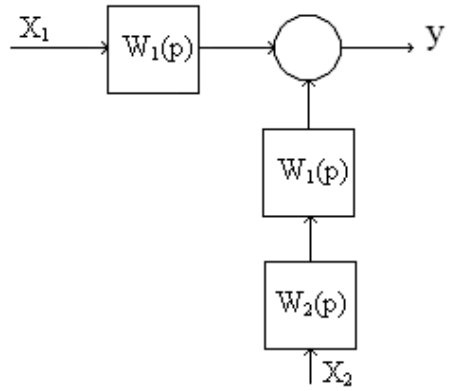
5) $W_Э(p)=\dfrac{W_П(p)\cdot W_{ОС}(p)}{1+W_П(p)\cdot W_{ОС}(p)}$.

***4.1.4. Для переноса сумматора через одно звено вперед нижеприведенную исходную схему***

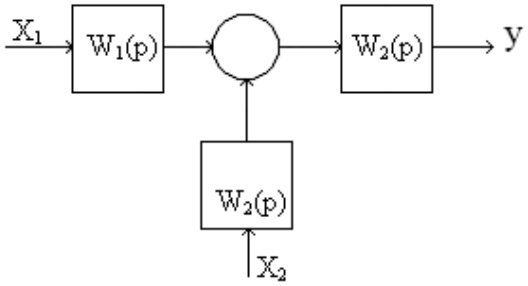



***необходимо преобразовать следующим образом***

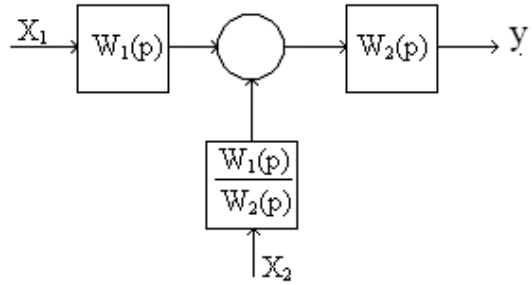
1.



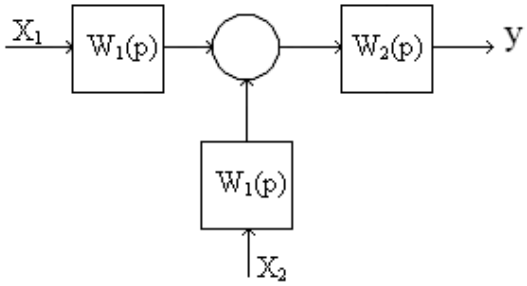

2.



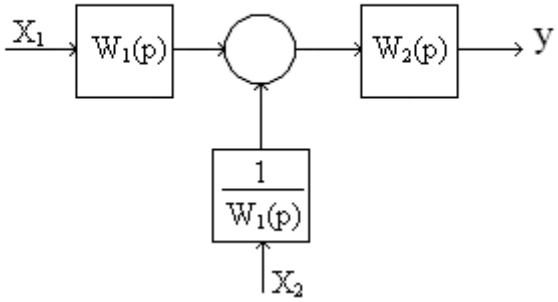

3.



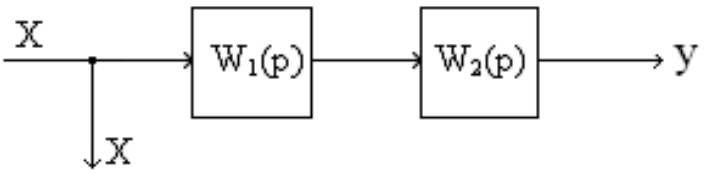

4




5.

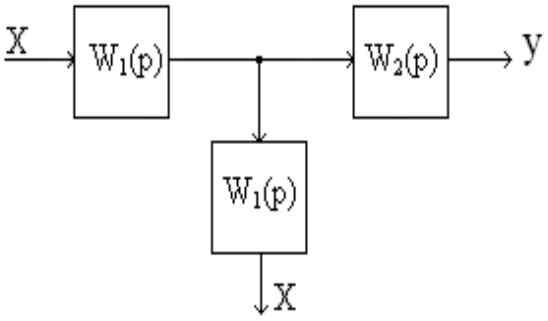


***4.1.5. Для переноса узла разветвления через одно звено вперед нижеприведенную исходную схему***

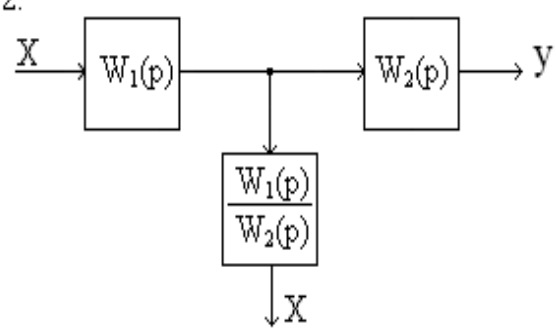



***необходимо преобразовать следующим образом***

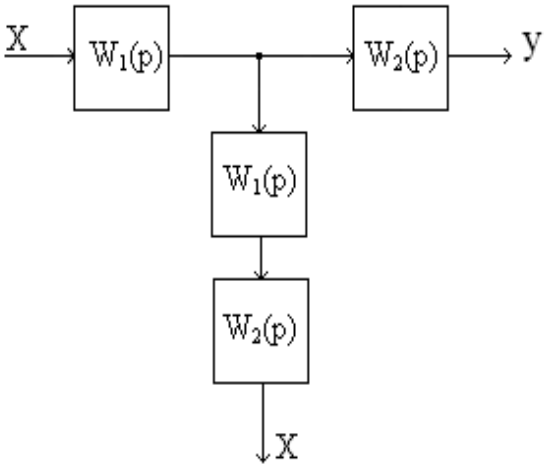
1.



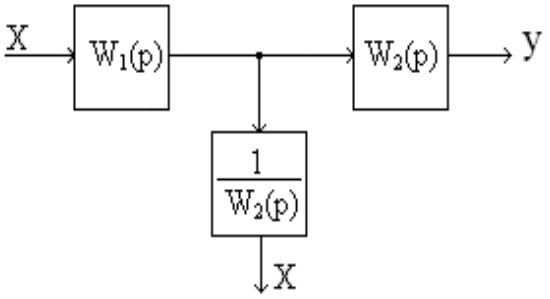

2.



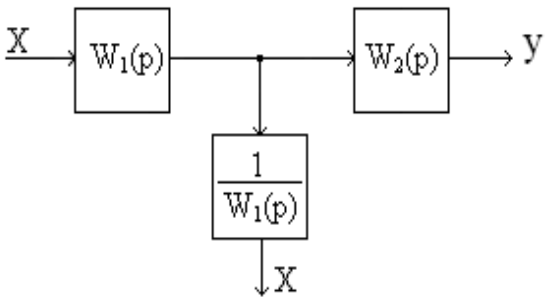

3.




4.

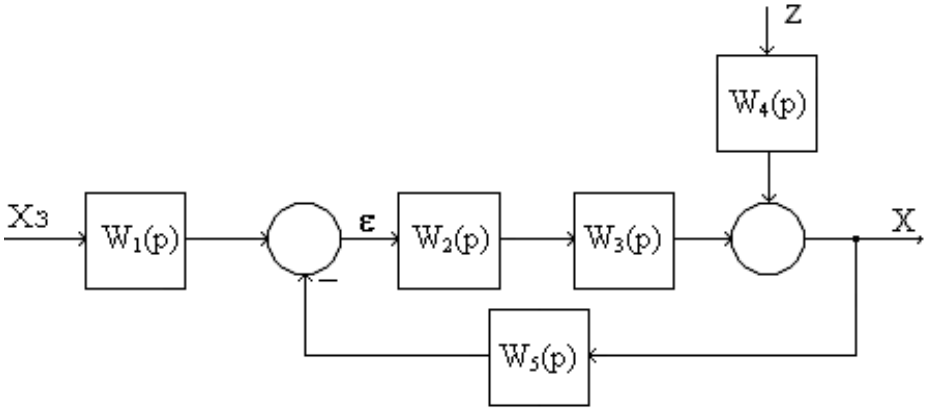



5



## 4.2. Передаточные функции разомкнутых и замкнутых систем управления

### *4.2.1. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы*




***записать передаточную функцию разомкнутого контура $W_{рк}(p)$:***

1) $W_{рк}(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)$;

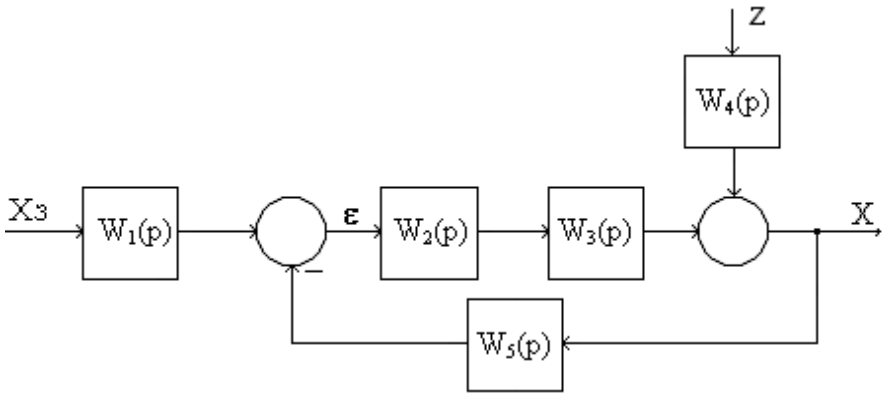
2) $W_{рк}(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)$;

3) $W_{рк}(p)=W_2(p)W_3(p)W_5(p)$;

4) $W_{рк}(p)=W_2(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)$;

5) $W_{рк}(p)=W_2(p)W_3(p)W_4(p)$.

### *4.2.2. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы*




***записать характеристическое уравнение замкнутого контура системы***

1) $1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p) = 0$;

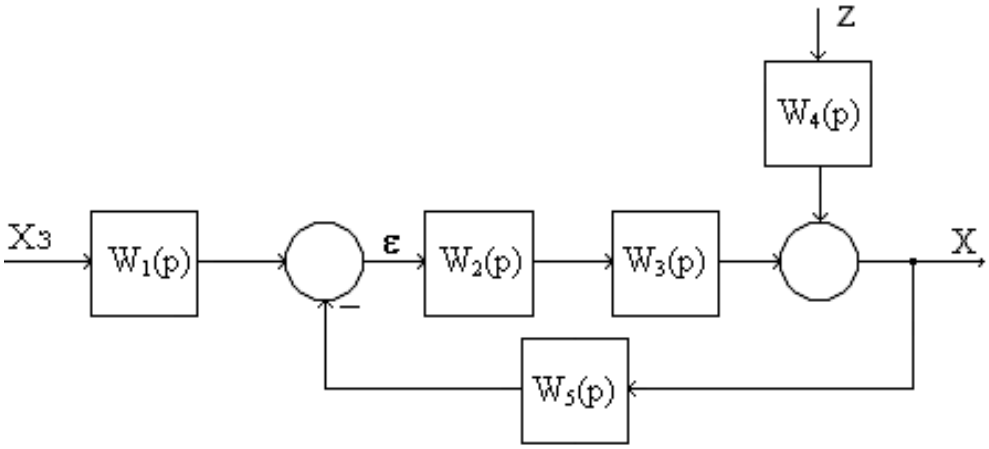
2) $1 - W_1(p)W_2(p)W_3(p) = 0$;

3) $1 - W_2(p)W_3(p)W_5(p) = 0$;

4) $1 + W_2(p)W_3(p)W_5(p) = 0$;

5) $1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p) = 0$.

***4.2.3. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы***




***передаточную функцию замкнутого контура Ф(p) по каналу "Xз - X" записывают в виде:***

1) $\Phi(p)=\dfrac{X(p)}{X_3(p)}=\dfrac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1-W_2(p)W_3(p)W_5(p)}$;

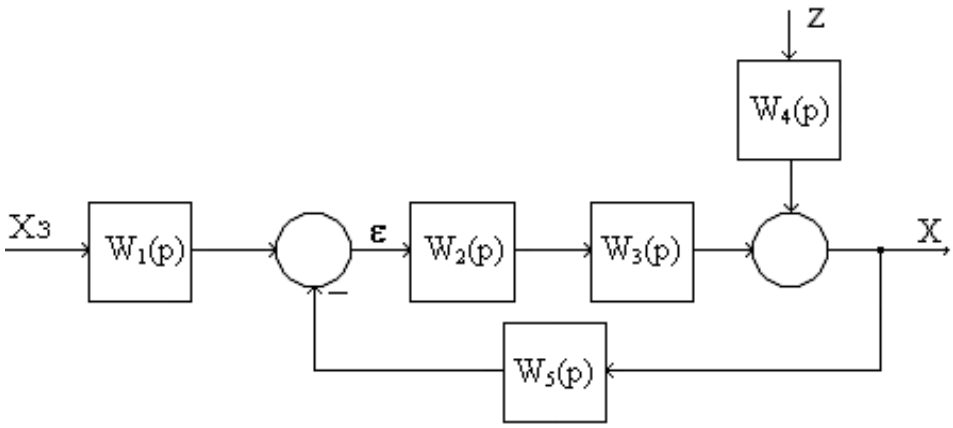
2) $\Phi(p)=\dfrac{X(p)}{X_3(p)}=\dfrac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1+W_2(p)W_3(p)W_5(p)}$;

3) $\Phi(p)=\dfrac{X(p)}{X_3(p)}=\dfrac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)}$;

4) $\Phi(p)=\dfrac{X(p)}{X_3(p)}=\dfrac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1-W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)}$;

5) $\Phi(p)=\dfrac{X(p)}{X_3(p)}=\dfrac{W_2(p)W_3(p)}{1+W_2(p)W_3(p)W_5(p)}$.

***4.2.4. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы***




***передаточную функцию замкнутого контура* Ф*(p)* *по каналу “$X_3$ - $\varepsilon$” записывают в виде***

1) $$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)}=\frac{1}{1+W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$$

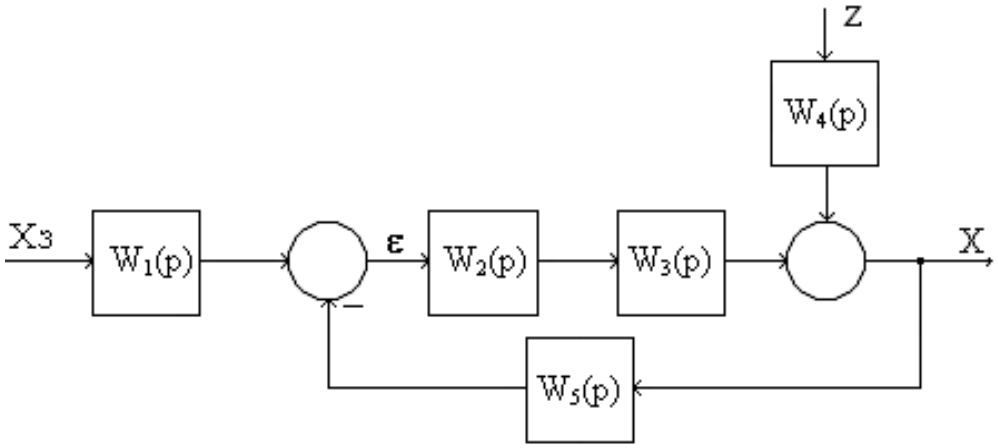
2) $$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)}=\frac{1}{1-W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$$

3) $$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)}=\frac{W_1(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$$

4) $$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)}=\frac{W_1(p)}{1-W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$$

5) $$\Phi(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)}=\frac{W_1(p)}{1+W_2(p)W_3(p)W_5(p)}.$$

***4.2.5. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы***




***передаточную функцию замкнутого контура Ф(p) по каналу "z - x" записывают в виде:***

1) $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{W_4(p)}{1 - W_4(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$

2) $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{W_4(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$

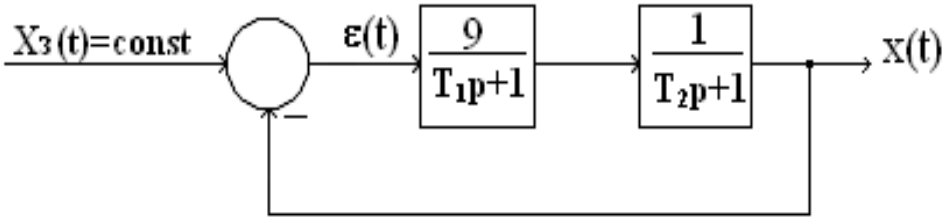
3) $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{W_4(p)}{1 - W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$

4) $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{W_4(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)};$

5) $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{W_4(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)}.$

## 4.3. Точность статических и астатических систем стабилизации

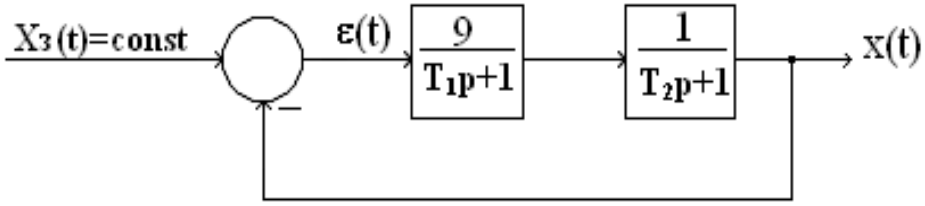
***4.3.1. Для нижеприведенной алгоритмической схемы* статической *системы стабилизации***




***коэффициент статизма системы S равен:***

1) 0,5;
2) 1/9;
3) 1,0;
4) 0,1;
5) 0,2.

***4.3.2. Для нижеприведенной алгоритмической схемы* статической *системы стабилизации***




***установившееся значение сигнала ошибки "ε" при $X_3$ (t) = 1(t) будет равно:***

1) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}2$;

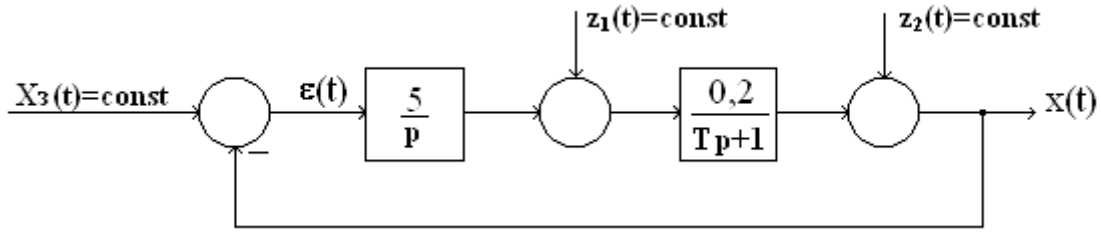
2) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = \frac{1}{9}$;

3) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}1$;

4) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}5$;

5) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$.

***4.3.3. Для нижеприведенной алгоритмической схемы* астатической *системы стабилизации***




***значение сигнала ошибки "ε" в установившемся режиме по каналу "$X_3$ - $\varepsilon$" будет равно:***

1) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$;

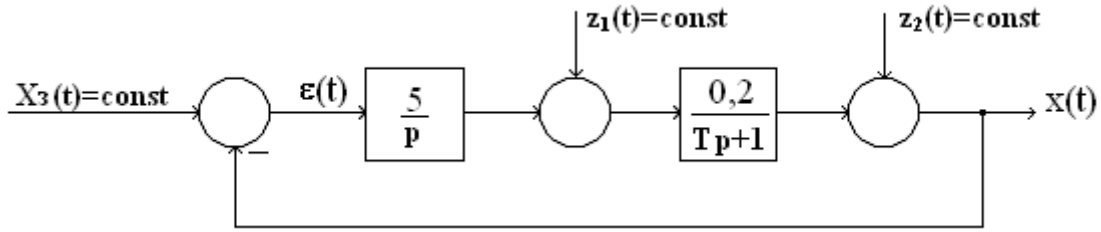
2) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0$;

3) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 5{,}0$;

4) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}2$;

5) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}1$.

***4.3.4. Для нижеприведенной алгоритмической схемы* астатической *системы стабилизации***




***значение сигнала ошибки "ε" в установившемся режиме по каналу "$z_1$ - $\varepsilon$" будет равно:***

1) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0$;

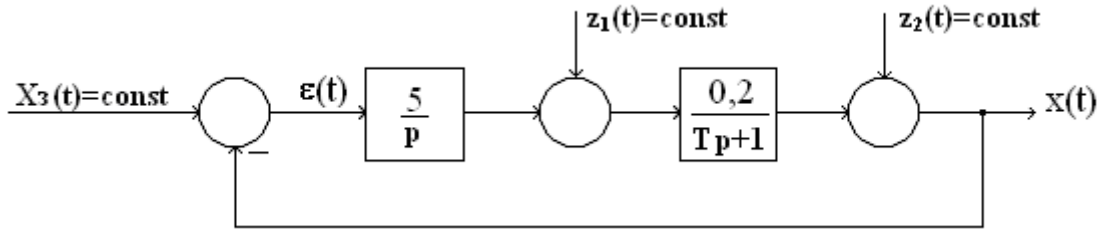
2) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$;

3) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}2$;

4) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}1$;

5) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 5{,}0$.

***4.3.5. Для нижеприведенной алгоритмической схемы* астатической *системы стабилизации***




***значение сигнала ошибки "ε" в установившемся режиме по каналу "$z_2$ - ε" будет равно:***

1) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}2$;

2) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$;

3) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0{,}1$;

4) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 5{,}0$;

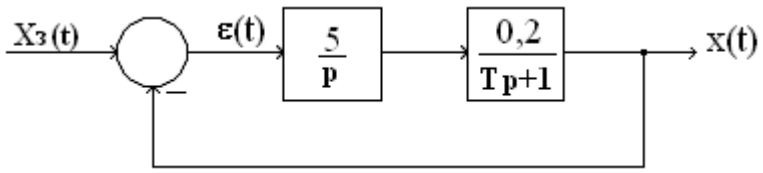
5) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty} = 0$.

## 4.4. Динамическая точность систем управления

***4.4.1. Динамическую точность замкнутых систем автоматического управления оценивают по величине сигнала ошибки***

1) в неустановившемся (переходном) режиме;
2) в динамическом режиме;
3) в установившемся динамическом режиме;
4) в статическом режиме;
5) в установившемся режиме.

***4.4.2. Для нижеприведенной алгоритмической схемы системы***




***можно показать с использованием теоремы Лапласа о конечном значении оригинала для сигнала ошибки*** $\left(\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)\right)$***, что при*** $X_З(t)=t\cdot 1(t)[X_З(p)=1/p^2]$ ***установившееся значение сигнала ошибки*** $\varepsilon(t)$ ***, будет равно***

1) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}=0{,}5$;

2) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}=0$;

3) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}=0{,}2$;

4) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}=1{,}0$;

5) $\varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}=0{,}25$.

***4.4.3. Если суммарный порядок астатизма “υ” типовой одноконтурной системы управления равен показателю “q” степенного задающего воздействия (υ=q), то система в установившемся режиме имеет ошибку воспроизведения***

1) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty}=0$;

2) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty}=\text{const}$;

3) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty}=\infty$;

4) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty}=$ мало данных;

5) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty}=1{,}0$.

***4.4.4. Если суммарный порядок астатизма “υ” типовой одноконтурной системы управления больше показателя “q” степенного задающего воздействия (υ > q), то система в установившемся режиме имеет ошибку воспроизведения***

1) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = 0$;

2) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = \text{const}$;

3) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = \infty$;

4) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$;

5) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} =$ мало данных.

***4.4.5. Если суммарный порядок астатизма “υ” типовой одноконтурной системы управления меньше показателя “q” степенного задающего воздействия (υ < q), то система в установившемся режиме имеет ошибку воспроизведения***

1) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = \text{const}$;

2) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = 0$;

3) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = 1{,}0$;

4) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} =$ мало данных;

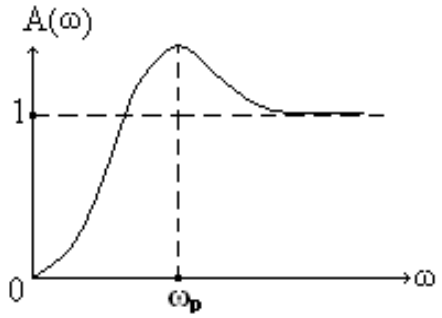
5) $\varepsilon_з(t)\big|_{t\to\infty} = \infty$.

## 4.5. Точность систем управления при гармонических воздействиях

***4.5.1. Точность замкнутой системы автоматического управления при гармоническом воздействии оценивают отношением амплитуды сигнала ошибки к амплитуде внешнего воздействия***

1) в динамическом режиме;
2) в установившемся динамическом режиме;
3) в неустановившемся (переходном) режиме;
4) в статическом режиме;
5) в колебательном режиме.

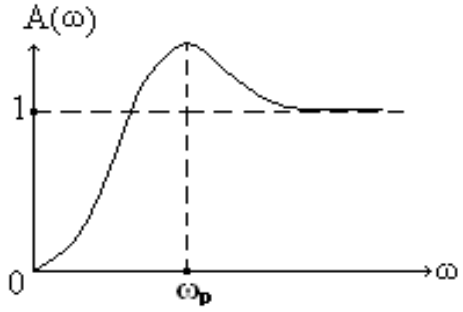
***4.5.2. Если частота “$\omega_В$” задающего воздействия “$X_З$” системы намного меньше резонансной частоты “$\omega_р$” ($\omega_В << \omega_р$) на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) замкнутой системы по каналу “$X_З - \varepsilon$”,***




***то система управления:***

1) вредна;
2) бесполезна;
3) хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия;
4) мало данных;
5) не очень хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия.

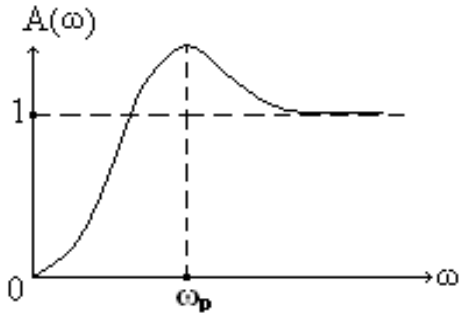
***4.5.3. Если частота “$\omega_В$” задающего воздействия “$X_З$” системы намного больше резонансной частоты “$\omega_р$” ($\omega_В >> \omega_р$) на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) замкнутой системы по каналу “$X_З - \varepsilon$”***




***то система управления:***

1) вредна;
2) бесполезна;
3) хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия;
4) плохо работает в переходном режиме;
5) не очень хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия.

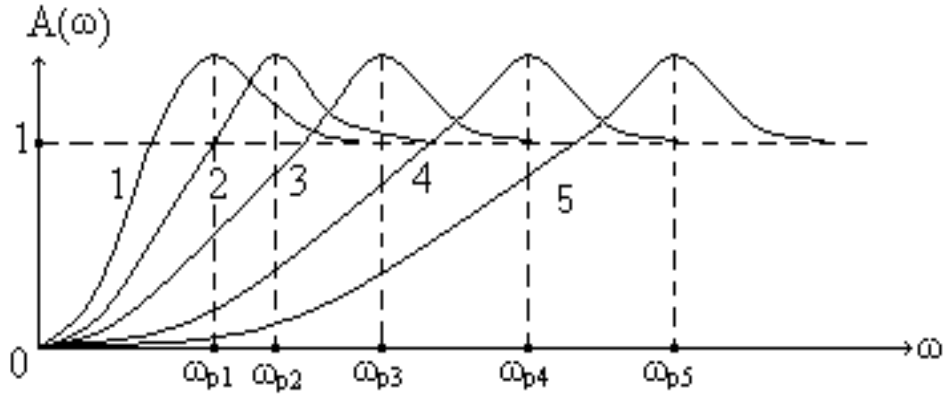
***4.5.4. Если частота “$\omega_В$” задающего воздействия “$X_З$” системы близка или равна резонансной частоте “$\omega_р$” ($\omega_В \approx \omega_р$) на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) замкнутой системы по каналу “$X_З$ - $\varepsilon$”,***




***то система управления:***

1) вредна;
2) бесполезна;
3) хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия;
4) плохо работает в переходном режиме;
5) не очень хорошо выполняет функцию воспроизведения задающего воздействия.

***4.5.5. Какая из систем управления имеет большие возможности (по частоте входного сигнала) по воспроизведению функции гармонического задающего воздействия (амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) одноконтурных систем по каналу “$X_З$ - $\varepsilon$” приведены на рисунке)?***



## 4.6. Типовые линейные алгоритмы управления (законы регулирования)

***4.6.1. Передаточную функцию W(p) пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора записывают в виде***

1) $W(p) = \frac{k_И}{p}$;

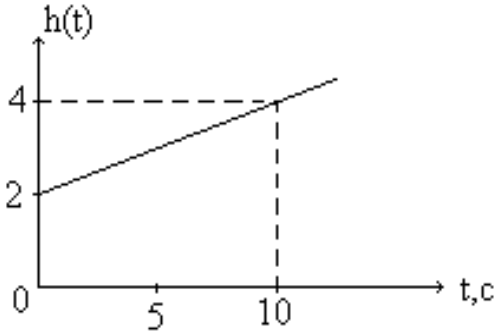
2) $W(p) = k_П + \frac{k_И}{p}$;

3) $W(p) = k_П + k_Д p$;

4) $W(p) = k_П$;

5) $W(p) = k_П + \frac{k_И}{p} + k_Д p$.

***4.6.2. Параметры передаточной функции пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора*** $[W_{ПИ}(p) = k_р(1 + \frac{1}{T_И p})]$, ***"снятые" с графика переходного процесса регулятора, будут следующие***




1) $k_Р = 4$, $T_И = 10$с;

2) $k_Р = 0{,}5$, $T_И = 0{,}1$с;

3) $k_Р = 2$, $T_И = 10$с;

4) $k_Р = 0{,}25$, $T_И = 0{,}1$с;

5) $k_Р = 2$, $T_И = 0{,}1$с.

***4.6.3. Передаточную функцию W(p) физически реализуемого пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора записывают в виде***

1) $W(p) = \frac{k_{И}}{p}$;

2) $W(p) = k_{р}(1 + \frac{1}{T_{И} p})$;

3) $W(p) = k_{р}$;

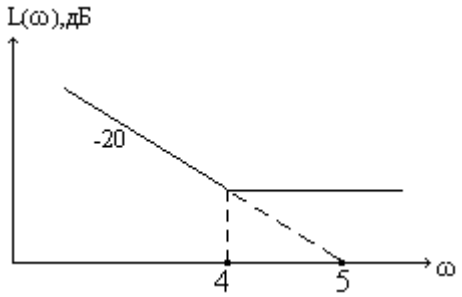
4) $W(p) = k_{р}(1 + T_{Д} p)$;

5) $W(p) = k_{р}(1 + \frac{T_{Д} p}{0{,}1 T_{Д} p + 1})$.

***4.6.4. При применении какого регулятора в системе управления достигается наилучшее быстродействие?***

1) пропорциональный регулятор;
2) интегральный регулятор;
3) пропорционально-интегральный регулятор;
4) пропорционально-дифференциальный регулятор;
5) пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор.

***4.6.5. Параметры передаточной функции пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора*** $[W_{ПИ}(p) = \frac{k_{р}(T_{И} p + 1)}{T_{И} p}]$, ***"снятые" с графика логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) регулятора, будут следующие***




1) $k_{Р} = 1{,}25$, $T_{И} = 0{,}25$с;
2) $k_{Р} = 5$, $T_{И} = 0{,}25$с;
3) $k_{Р} = 5$, $T_{И} = 4$с;
4) $k_{Р} = 0{,}2$, $T_{И} = 0{,}25$с;
5) $k_{Р} = 1{,}25$, $T_{И} = 4$с.

# 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

## 5.1. Понятие, виды и общее условие устойчивости

***5.1.1. Устойчивость автоматической системы управления – это свойство системы***

1) выравнивать управляемую величину системы;
2) не реагировать на внешние и внутренние возмущения;
3) отрабатывать внешние и внутренние возмущения;
4) возвращаться в исходное состояние равновесия после прекращения воздействия, выведшего ее из этого состояния;
5) возвращаться в исходное состояние равновесия в статическом режиме.

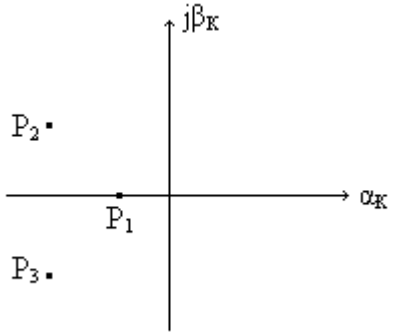
***5.1.2. Для устойчивости линейной системы управления необходимо и достаточно,***

1) чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были положительными;
2) чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными;
3) чтобы все корни характеристического уравнения системы были действительными положительными;
4) чтобы все корни характеристического уравнения системы были действительными отрицательными;
5) чтобы все корни характеристического уравнения системы были комплексными с отрицательной действительной частью.

***5.1.3. Система управления находится на колебательной границе устойчивости, если характеристическое уравнение системы имеет***

1) один нулевой корень;
2) два нулевых корня;
3) одну пару чисто мнимых корней;
4) две пары чисто мнимых корней;
5) один комплексный корень с отрицательной действительной частью и один нулевой корень.

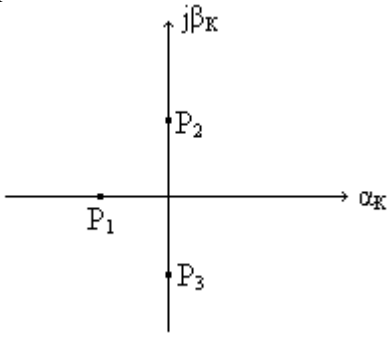
### *5.1.4. Система управления с нижеприведенным расположением корней характеристического уравнения системы*




***будет:***

1) неустойчивой;
2) находиться на колебательной границе устойчивости;
3) находиться на апериодической границе устойчивости;
4) мало данных;
5) устойчивой.

### *5.1.5. Система управления с нижеприведенным расположением корней характеристического уравнения системы*




***будет:***

1) неустойчивой;
2) находиться на колебательной границе устойчивости;
3) находиться на апериодической границе устойчивости;
4) мало данных;
5) устойчивой.

## 5.2. Алгебраические критерии устойчивости

***5.2.1. Система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением $2p^2+3p+4=0$ в соответствии с критерием устойчивости Гурвица***

1) является неустойчивой;
2) находится на колебательной границе устойчивости;
3) находится на апериодической границе устойчивости;
4) мало данных;
5) является устойчивой.

***5.2.2. Система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением $2p^3+3p^2+4p+6=0$ в соответствии с критерием устойчивости Гурвица***

1) является неустойчивой;
2) находится на колебательной границе устойчивости;
3) мало данных;
4) находится на апериодической границе устойчивости;
5) является устойчивой.

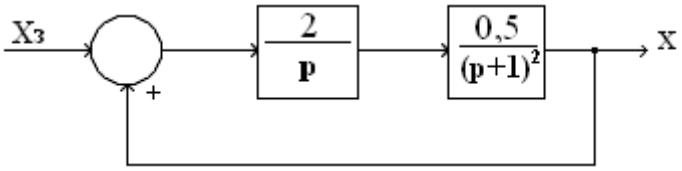
***5.2.3. Система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением $2p^3+3p^2+4p+8=0$ в соответствии с критерием устойчивости Гурвица***

1) является неустойчивой;
2) находится на колебательной границе устойчивости;
3) мало данных;
4) находится на апериодической границе устойчивости;
5) является устойчивой.

***5.2.4. Система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением $2p^3+3p^2-4p+5=0$ в соответствии с* необходимым *условием устойчивости критерия Гурвица***

1) находится на колебательной границе устойчивости;
2) является неустойчивой;
3) находится на апериодической границе устойчивости;
4) мало данных;
5) является устойчивой.

***5.2.5. Замкнутая система автоматического управления***




***в соответствии с* необходимым *условием устойчивости критерия Гурвица***

1) находится на колебательной границе устойчивости;
2) находится на апериодической границе устойчивости;
3) мало данных;
4) является неустойчивой;
5) является устойчивой.

## 5.3. Частотные критерии устойчивости

***5.3.1. Формулировка критерия устойчивости Михайлова такова: линейная система управления, описываемая уравнением n-го порядка, устойчива, если при изменении частоты ω от нуля до ∞ характеристический вектор системы F(jω) повернется***

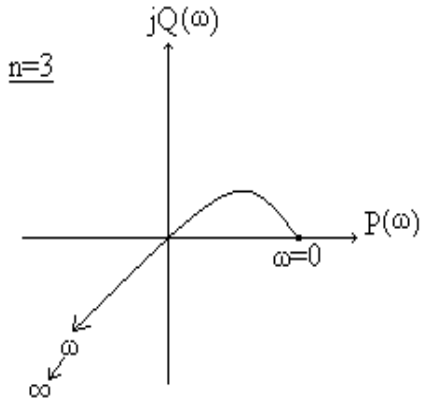
1) по часовой стрелке на угол $n\pi/2$, не обращаясь при этом в нуль;
2) по часовой стрелке на угол $n\pi$, не обращаясь при этом в нуль;
3) против часовой стрелки на угол $n\pi/2$, не обращаясь при этом в нуль;
4) против часовой стрелки на угол $n\pi$, не обращаясь при этом в нуль;
5) против часовой стрелки на угол $2n\pi$, не обращаясь при этом в нуль.

***5.3.2. Основная формулировка критерия устойчивости Найквиста такова:***
***замкнутая система управления устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика АФЧХ***

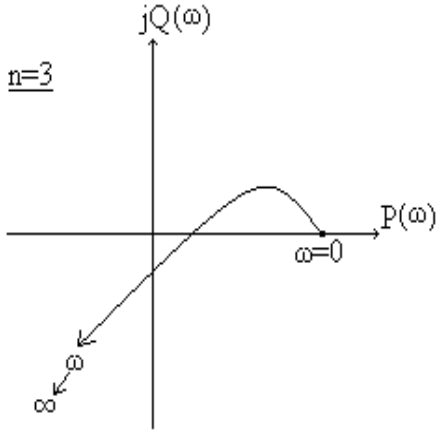
1) разомкнутого контура не охватывает точку с координатами (-1; $j0$);
2) устойчивого разомкнутого контура не охватывает точку с координатами (-1; $j0$);
3) неустойчивого разомкнутого контура не охватывает точку с координатами (-1; $j0$);
4) устойчивого разомкнутого контура проходит через точку с координатами (-1; $j0$);
5) устойчивого разомкнутого контура охватывает точку с координатами (-1; $j0$).

***5.3.3. Какая из систем управления, годографы Михайлова которых приведены ниже, устойчива?***

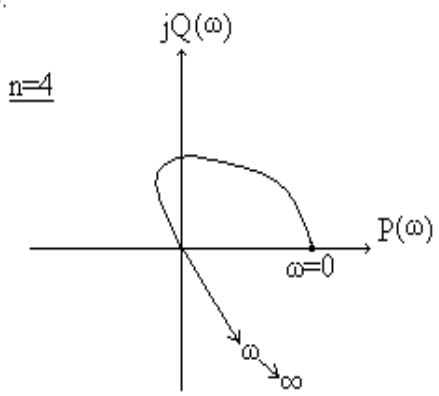
1.



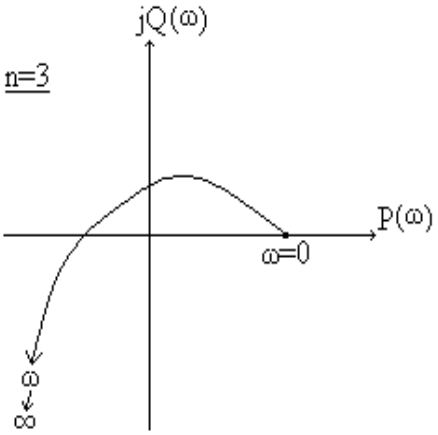

2.



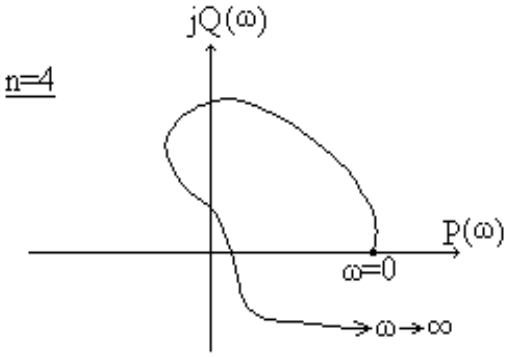

3.




4

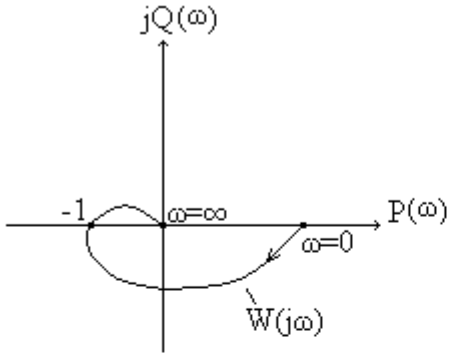



5.

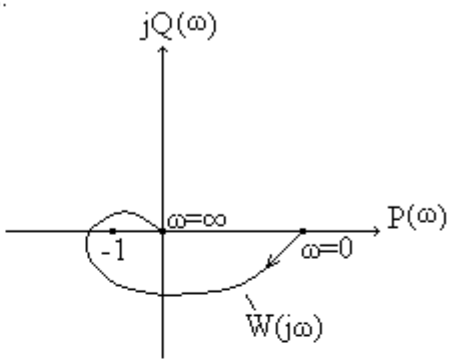


***5.3.4. Какая из замкнутых систем управления, амплитудно-фазовые частотные характеристики W(jω) которых для устойчивых разомкнутых систем приведены ниже, устойчива?***

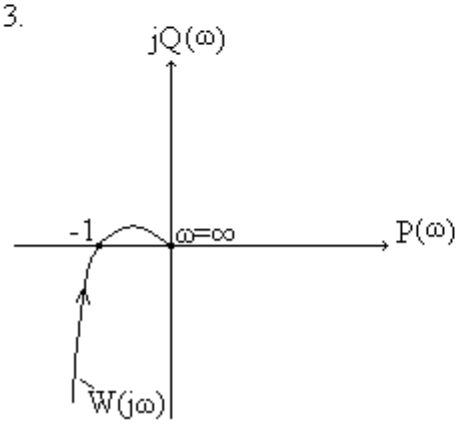
1.



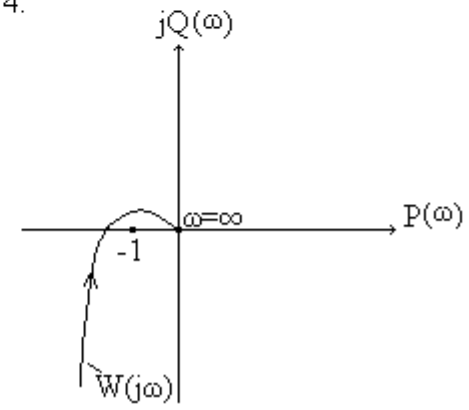

2.



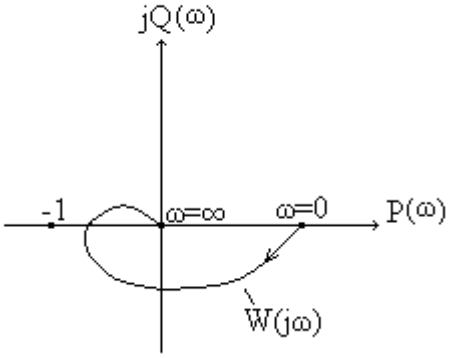

3.



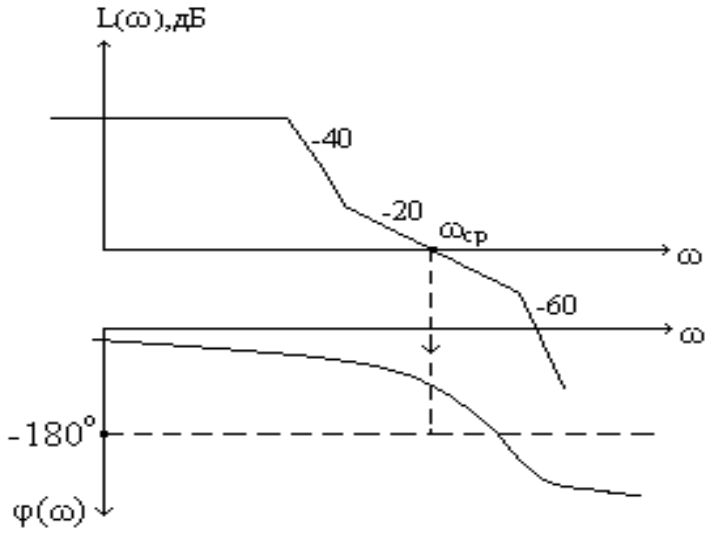

4.




5



***5.3.5. Замкнутая система управления, для которой логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики устойчивой разомкнутой системы приведены ниже:***




1) устойчива;
2) находится на колебательной границе устойчивости;
3) находится на апериодической границе устойчивости;
4) мало данных;
5) неустойчива.

## 5.4. Построение областей устойчивости

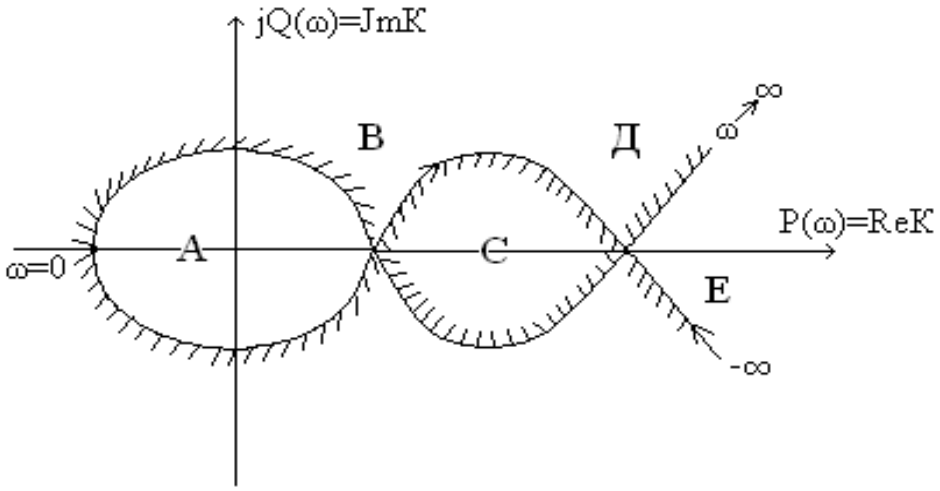
***5.4.1. Областью устойчивости называют область в пространстве варьируемых параметров системы, каждой точке которой соответствуют только***

1) правые корни характеристического уравнения системы;
2) мнимые корни характеристического уравнения системы;
3) комплексные корни характеристического уравнения системы;
4) левые корни характеристического уравнения системы;
5) мнимые и комплексные корни характеристического уравнения системы.

***5.4.2. D-разбиением называется процесс построения в пространстве параметров системы областей***

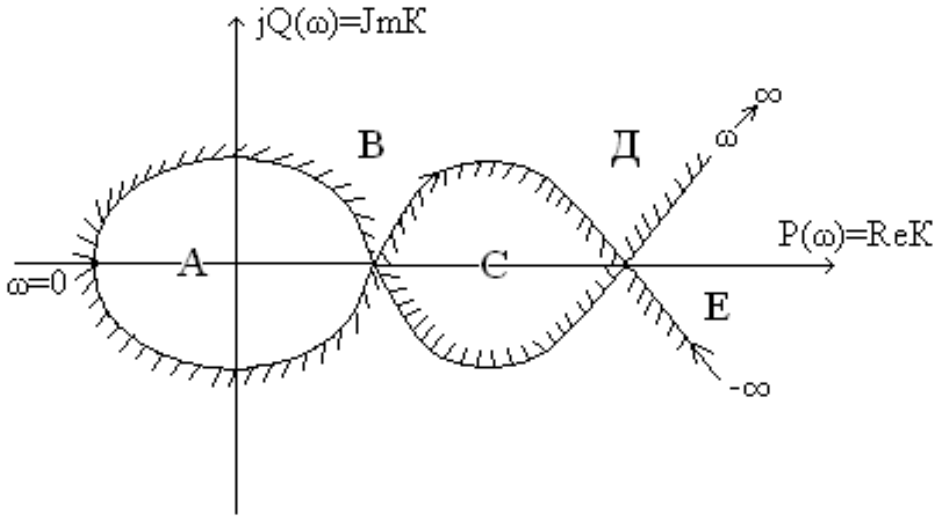
1) с левым распределением корней характеристического уравнения системы;
2) с правым распределением корней характеристического уравнения системы;
3) с различным распределением корней характеристического уравнения системы;
4) с распределением только мнимых корней характеристического уравнения системы;
5) с распределением только правых корней характеристического уравнения системы.

***5.4.3. Укажите на нижеприведенном графике область устойчивости, построенную в плоскости передаточного коэффициента разомкнутого контура системы “к”***



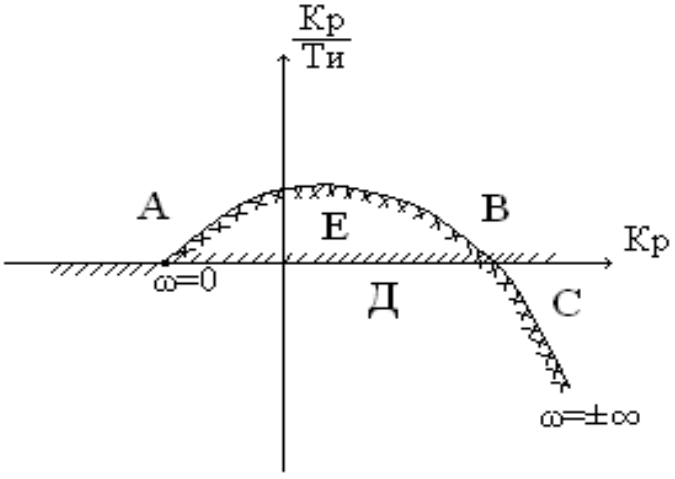

1) А;
2) В;
3) Д;
4) С;
5) Е.

***5.4.4. Укажите на нижеприведенном графике область устойчивости в плоскости передаточного коэффициента разомкнутого контура "к" область, в которой все корни характеристического уравнения системы являются левыми***




1) E; 2) B; 3) A; 4) Д; 5) C.

***5.4.5. Укажите на нижеприведенном графике области устойчивости, построенной в плоскости параметров настройки ПИ-регулятора, область, в которой нет правых корней характеристического уравнения системы***




1) Д; 2) C; 3) E; 4) B; 5) A.

## 5.5. Влияние структуры и передаточного коэффициента разомкнутого контура на устойчивость замкнутой системы

***5.5.1. Какая из замкнутых систем управления с отрицательной обратной связью, передаточные функции которых для разомкнутых контуров приведены ниже, является структурно-неустойчивой?***

1) $W(p)=\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$;

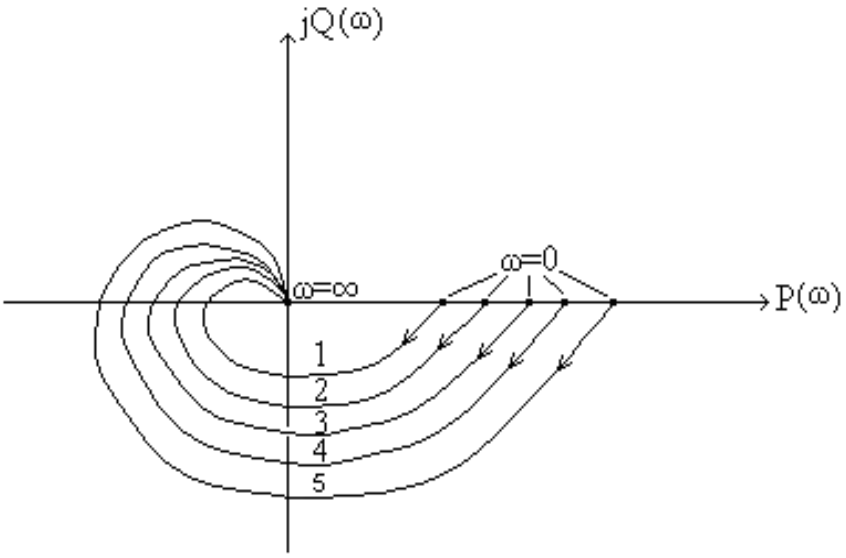
2) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{(T_2p+1)(T_3p+1)}$;

3) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{(T_2p+1)(T_3p+1)(T_4p+1)}$;

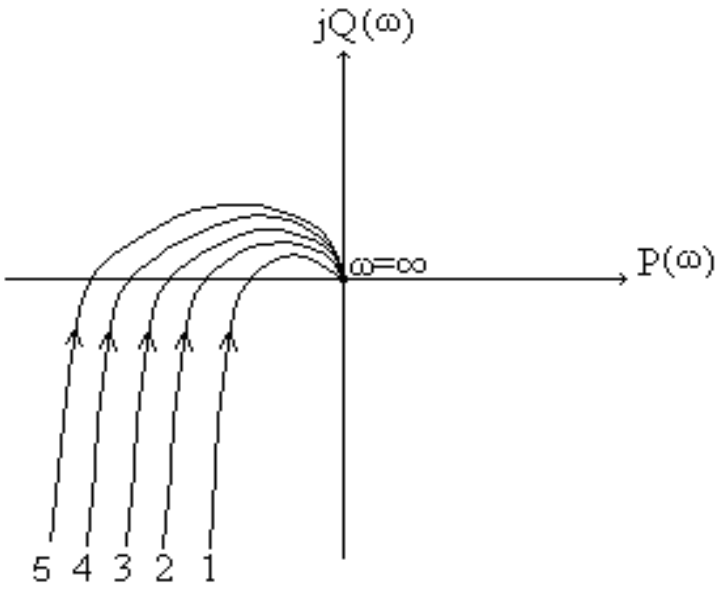
4) $W(p)=\dfrac{k}{p^2(Tp+1)}$;

5) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{p^2(T_2p+1)}$.

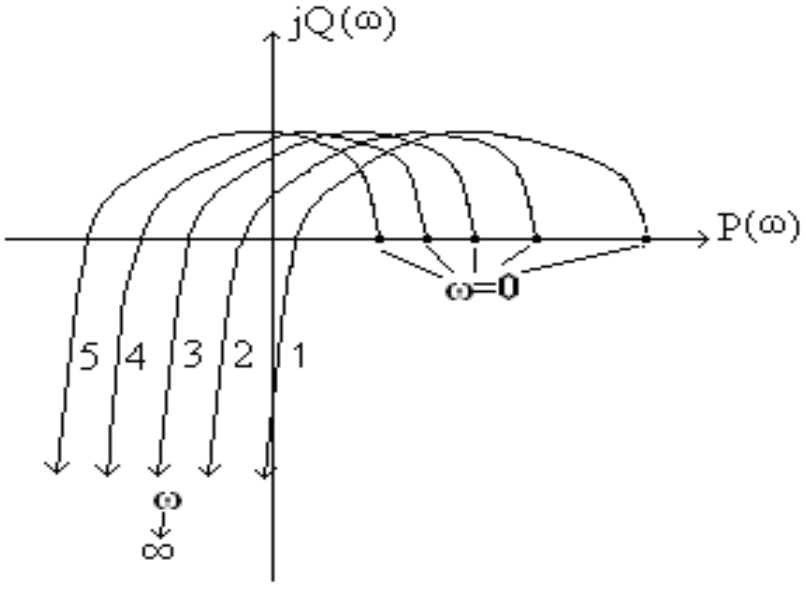
***5.5.2. В какой из систем управления, амплитудно-фазовые частотные характеристики которых приведены ниже, наибольший передаточный коэффициент разомкнутого контура?***



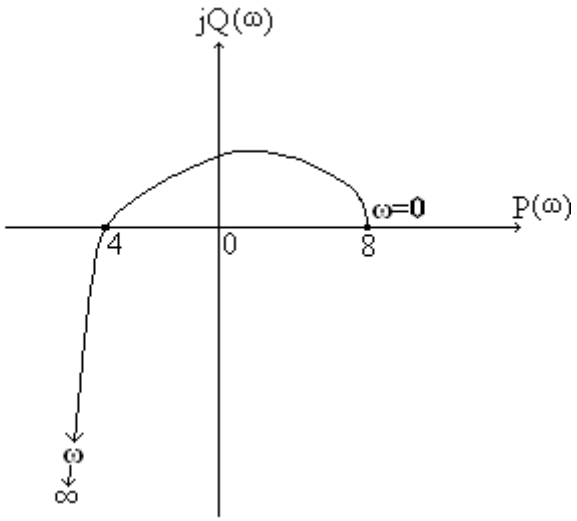
***5.5.3. В какой из систем управления с одинаковыми постоянными времени, амплитудно-фазовые частотные характеристики которых приведены ниже, наибольший передаточный коэффициент разомкнутого контура?***




***5.5.4. В какой из систем управления с одинаковыми постоянными времени, годографы Михайлова которых приведены ниже, наибольший передаточный коэффициент разомкнутого контура?***



***5.5.5. Передаточный коэффициент разомкнутого контура системы “k” с передаточной функцией*** $W(p) = \dfrac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$***, находящейся на границе устойчивости в замкнутом состоянии, в соответствии с нижеприведенным годографом Михайлова этой системы равен***

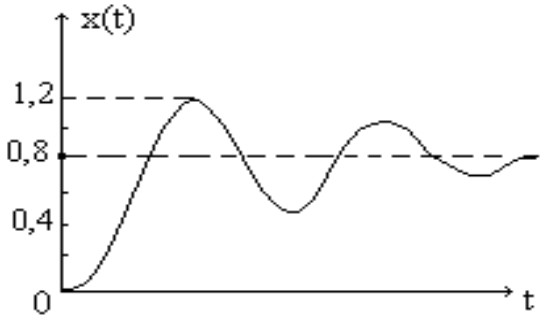



1) $к = 8$; 2) $к = 4$; 3) $к = 11$; 4) $к = 12$; 5) $к = 2$.

## 6. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

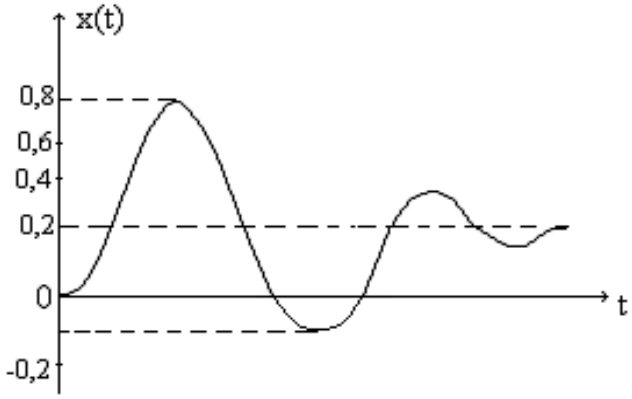
### 6.1. Понятие и показатели качества управления

***6.1.1. Чему равно перерегулирование “σ” в системе управления по каналу “задание – управляемая величина”?***



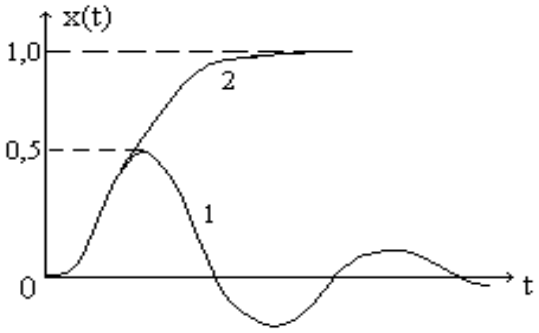

1) σ = 20 %;
2) σ = 40 %;
3) σ = 50 %;
4) σ = 30 %;
5) σ = 25 %.

***6.1.2. Чему равно перерегулирование “σ” в системе управления по каналу “возмущение – управляемая величина”?***




1) $\sigma = 20\%$;
2) $\sigma = 40\%$;
3) $\sigma = 25\%$;
4) $\sigma = 50\%$;
5) $\sigma = 30\%$.

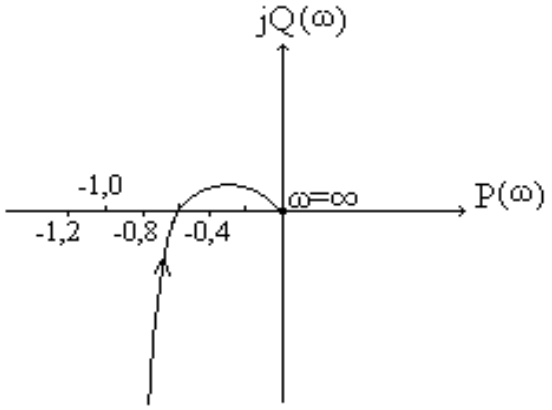
***6.1.3. Динамический коэффициент регулирования “$R_д$” в системе управления по каналу “возмущение – управляемая величина” (кривая 1) равен:***




Примечание: Кривая 2 – переходная характеристика объекта управления

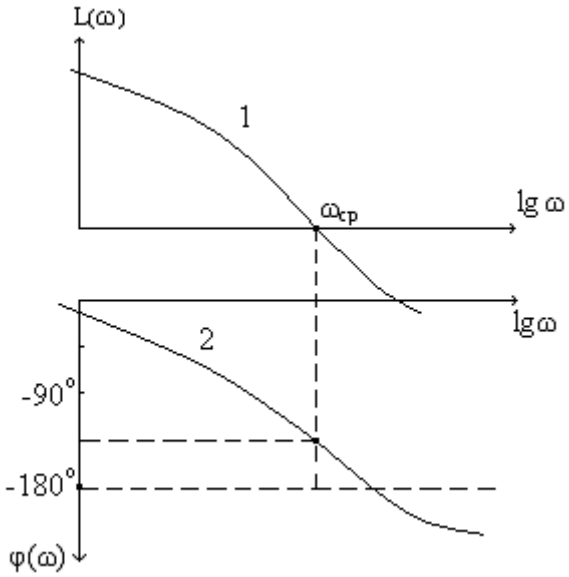
1) $R_д$=20 %;
2) $R_д$=50 %;
3) $R_д$=40 %;
4) $R_д$=25 %;
5) $R_д$=30 %.

***6.1.4. Запас устойчивости замкнутой системы управления по амплитуде $\Delta A$ для приведенной амплитудно-фазовой частотной характеристики устойчивой разомкнутой системы равен:***




1) $\Delta A = 0{,}6$;
2) $\Delta A = 0{,}8$;
3) $\Delta A = 0{,}2$;
4) $\Delta A = 0{,}5$;
5) $\Delta A = 0{,}4$.

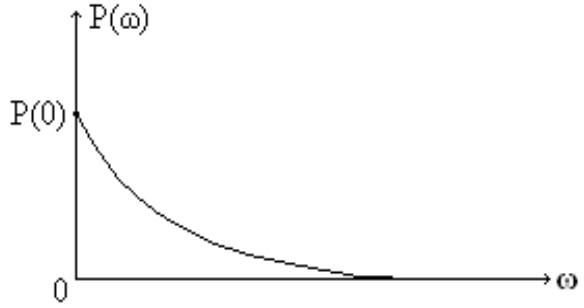
***6.1.5. Запас устойчивости замкнутой системы управления по фазе $\Delta\varphi$ для приведенных логарифмических амплитудно-частотной (кривая 1) и фазо-частотной (кривая 2) характеристик устойчивой разомкнутой системы равен***




1) $\Delta\varphi = 45^{\circ}$;
2) $\Delta\varphi = -45^{\circ}$;
3) $\Delta\varphi = 50^{\circ}$;
4) $\Delta\varphi = 60^{\circ}$;
5) $\Delta\varphi = 30^{\circ}$.

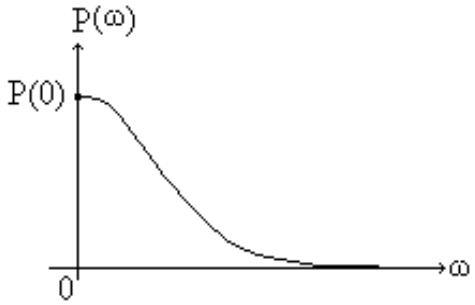
## 6.2. Приближенная оценка качества управления по частотным характеристикам

***6.2.1. Если действительная частотная характеристика P(ω) замкнутой системы по каналу "задание - управляемая величина" является непрерывной функцией частоты с отрицательной монотонно-убывающей производной*** $\frac{dP}{d\omega}$***, то перерегулирование "σ" равно***




1) σ = 10 %;
2) σ = 20 %;
3) σ = 0;
4) σ = 15 %;
5) σ < 20 %.

***6.2.2. Если действительная частотная характеристика P(ω) замкнутой системы по каналу "задание - управляемая величина" является положительной невозрастающей функцией, то перерегулирование "σ" равно***



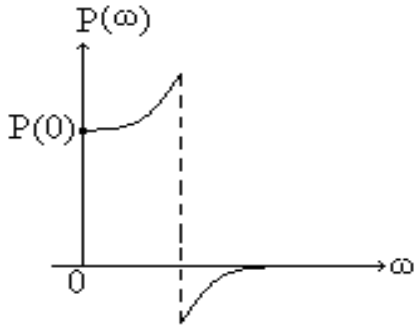

1) σ > 25 %;
2) σ = 30 %;
3) σ > 18 %;
4) σ ≤ 18 %;
5) σ ≤ 25 %.

***6.2.3. Если действительная частотная характеристика P(ω) замкнутой системы по каналу "задание - управляемая величина" на какой-то частоте имеет максимум, то перерегулирование "σ" равно***



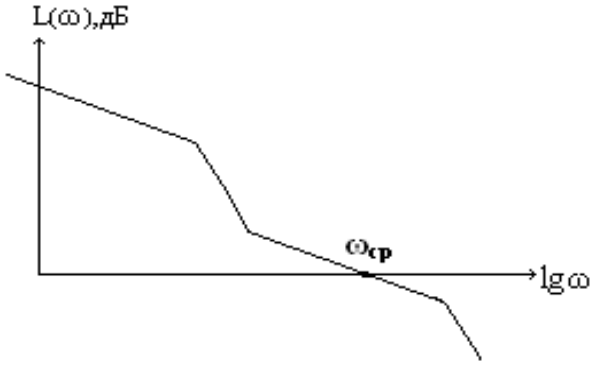

1) σ > 25 %;
2) σ > 18 %;
3) σ > 30 %;
4) σ = 30 %;
5) σ < 30 %.

***6.2.4. Если действительная частотная характеристика P(ω) замкнутой системы на какой-то частоте имеет разрыв , то***




1) σ > 50 %;
2) система находится на границе устойчивости;
3) σ > 60 %;
4) σ > 40 %;
5) σ = 60 %.

***6.2.5. Для того, чтобы замкнутая система управления обладала допустимым перерегулированием (σ ≤ 30…40%), наклон среднечастотного участка логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) разомкнутой системы на частоте среза "$\omega_{ср}$" должен быть равен***




1) – 40 дБ / дек;
2) – 60 дБ / дек;
3) + 20 дБ / дек;
4) + 40 дБ / дек;
5) – 20 дБ / дек.

## 6.3. Интегральные показатели качества

***6.3.1. Интегральные оценки качества управления представляют собой определенные интегралы***

1) по частоте от амплитудно-частотной функции замкнутой системы по каналу "задание – управляемая величина";
2) по частоте от амплитудно-частотной функции разомкнутой системы;
3) по частоте от амплитудно-частотной функции замкнутой системы по каналу "возмущение – управляемая величина";
4) во времени от некоторой функции управляемой величины или сигнала ошибки;
5) по частоте от амплитудно-частотной функции замкнутой системы по каналу "задание – сигнал ошибки".

***6.3.2. Какую из интегральных оценок нельзя применить для оценки качества колебательных процессов?***

1) модульная интегральная оценка;
2) модифицированная модульная интегральная оценка;
3) линейная интегральная оценка;
4) квадратичная интегральная оценка;
5) улучшенная квадратичная интегральная оценка.

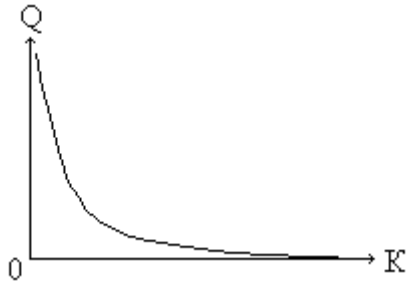
***6.3.3. Для какой из систем управления, передаточные функции которых для разомкнутых контуров приведены ниже, нельзя вычислить никакую интегральную оценку при любых значениях параметров?***

1) $W(p)=\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$; 2) $W(p)=\dfrac{k}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$;

3) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{p(T_2p+1)(T_3p+1)^2}$; 4) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{p^2(T_2p+1)(T_3p+1)^2}$;

5) $W(p)=\dfrac{k}{p^2(Tp+1)}$.

***6.3.4. Для какой из систем управления, передаточные функции которых для разомкнутых контуров приведены ниже, зависимость любой интегральной оценки от передаточного коэффициента разомкнутого контура [Q=f(к)] будет выглядеть, как показано на рисунке?***




1) $W(p)=\dfrac{k}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$;

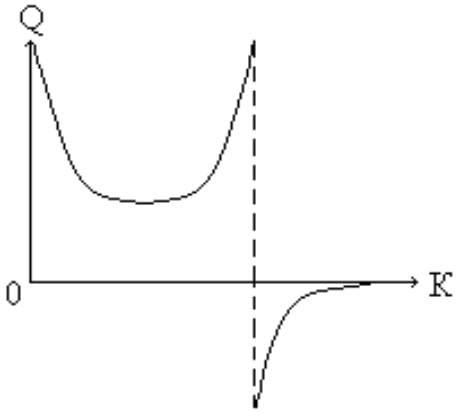
2) $W(p)=\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$;

3) $W(p)=\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$;

4) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{p(T_2p+1)(T_3p+1)^2}$;

5) $W(p)=\dfrac{k(T_1p+1)}{(T_2p+1)(T_3p+1)(T_4p+1)^2}$.

***6.3.5. Поясните, что означает разрыв характеристики Q=f(к) на графике зависимости интегральной оценки от передаточного коэффициента разомкнутого контура?***




1) система находится на апериодической границе устойчивости;
2) система находится на колебательной границе устойчивости;
3) система неустойчива по структуре;
4) система сильноколебательная;
5) система сильноинерционная.

## 6.4. Чувствительность, управляемость и наблюдаемость систем управления

***6.4.1. Чувствительность системы управления – это***

1) свойство системы изменять свои выходные координаты при отклонении того или иного ее параметра от расчетного;
2) свойство системы изменять показатели качества при отклонении того или иного ее параметра от расчетного;
3) свойство системы изменять свои координаты и показатели качества при отклонении того или иного ее параметра от расчетного;
4) свойство системы слабо реагировать на отклонения ее параметров от расчетных;
5) свойство системы вовремя реагировать на отклонения ее параметров от расчетных.

***6.4.2. Робастными (грубыми) системами управления называют системы, сохраняющие свои свойства при***

1) значительных параметрических возмущениях;
2) значительных операторных возмущениях;
3) незначительных параметрических возмущениях;
4) значительных параметрических и операторных возмущениях;
5) незначительных операторных возмущениях.

***6.4.3. Функция чувствительности системы управления представляет собой частную производную***

1) переходной характеристики системы $h(t)$ по какому-либо изменяющемуся параметру;
2) передаточной функции $\Phi(p)$ по какому-либо изменяющемуся параметру;
3) импульсной переходной характеристики $w(t)$ по какому-либо изменяющемуся параметру;
4) какого-нибудь показателя качества по какому-либо изменяющемуся параметру;
5) динамической характеристики (например, $h(t)$, $w(t)$, $\Phi(p)$) или какого-либо показателя качества (например, $\sigma$, $M$) по изменяющемуся параметру.

***6.4.4. Объект управления называют полностью управляемым, если***

1) его можно с помощью управляющего воздействия перевести из одного состояния в другое;
2) его можно за конечное время перевести из одного состояния в другое;
3) его можно с помощью некоторого управляющего воздействия перевести за конечное время из одного состояния в другое;
4) его можно с помощью некоторого ограниченного управляющего воздействия $y(t)$ перевести в течение конечного интервала времени $t_к$ из любого начального состояния $x(0)$ в заданное конечное состояние $x(t_к)$;
5) для его перевода из одного состояния в другое управляющее воздействие не должно иметь ограничений.

***6.4.5. Линейный стационарный объект, описываемый уравнениями состояния*** $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$ ***и выхода*** $\boldsymbol{x_в(t)=Cx(t)}$***, называется полностью наблюдаемым, если по результатам наблюдения выхода*** $\boldsymbol{x_в(t)}$

1) можно определить предыдущие значения переменных состояния $x(t)$;
2) нельзя определить предыдущие значения переменных состояния $x(t)$;
3) можно определить предыдущие значения некоторых переменных состояния $x(t)$;
4) можно с некоторой погрешностью определить предыдущие значения переменных состояния $x(t)$;
5) можно с некоторой погрешностью определить предыдущие значения некоторых переменных состояния.

# 7. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 7.1. Основные понятия и общие принципы синтеза алгоритмической структуры

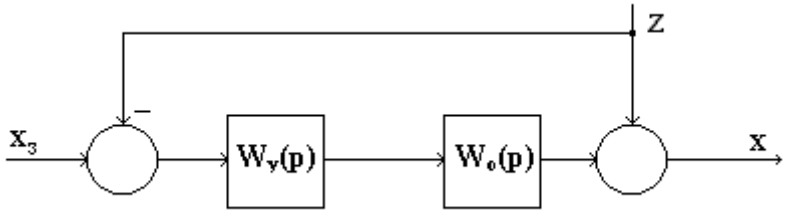
***7.1.1. Синтезом системы автоматического управления называют процедуру определения***

1) ее структуры по заданным показателям качества;
2) ее параметров по заданным показателям качества;
3) ее структуры и параметров по заданным показателям качества;
4) устойчивости системы;
5) устойчивости и качества системы.

***7.1.2. При синтезе (проектировании) алгоритмической структуры системы управления стремятся выполнить следующие главные требования***

1) система должна как можно точнее воспроизводить любые изменения задающего воздействия на выходе объекта управления;
2) система должна максимально лучше устранять влияние внешних и внутренних возмущений на управляемую величину;
3) система должна быть устойчивой;
4) система должна быть устойчивой и должна максимально лучше устранять влияние внешних и внутренних возмущений на управляемую величину;
5) система должна как можно точнее воспроизводить любые изменения задающего воздействия на выходе объекта управления, максимально лучше устранять влияние внешних и внутренних возмущений на управляемую величину и быть устойчивой.

***7.1.3. Для компенсации измеряемого возмущения z на выходе объекта $W_o(p)$ при разомкнутой схеме управления к управляющему устройству $W_y(p)$ должно предъявляться требование***




1) $W_y(p) = W_o(p)$;

2) $W_y(p) = 1$;

3) $W_y(p) = \dfrac{1}{W_o(p)}$;

4) $k_y = \infty$;

5) $W_y(p) = -W_o(p)$.

***7.1.4. При синтезе систем управления для точного воспроизведения задающего воздействия и полного подавления возмущающего воздействия к передаточным функциям системы по задающему $\Phi_з(p)$ и возмущающему $\Phi_z(p)$ воздействиям должны предъявляться требования:***

1) $\Phi_з(p) = \dfrac{X(p)}{X_з(p)} = 0;\ \ \Phi_z(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = 1;$

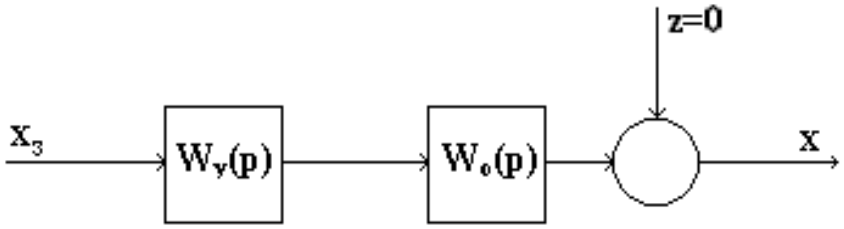
2) $\Phi_з(p) = \dfrac{X(p)}{X_з(p)} = 1;\ \ \Phi_z(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = 0;$

3) $\Phi_з(p) = \dfrac{X(p)}{X_з(p)} = 1;\ \ \Phi_z(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = 1;$

4) $\Phi_з(p) = \dfrac{X(p)}{X_з(p)} = 0;\ \ \Phi_z(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = 0;$

5) $\Phi_з(p) = \dfrac{X(p)}{X_з(p)} = \dfrac{1}{\Phi_з(p)};\ \ \Phi_z(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = 0.$

***7.1.5. Для компенсации инерционности объекта $W_o(p)$ при отсутствии внешних возмущений можно применить разомкнутую схему управления, выполнив требование к управляющему устройству $W_y(p)$***




1) $W_y(p) = W_o(p);$ 2) $W_y(p) = 1;$

3) $W_y(p) = \dfrac{1}{W_o(p)};$ 4) $k_y = \infty;$

5) $W_y(p) = -W_o(p).$

## 7.2. Коррекция динамических свойств систем управления

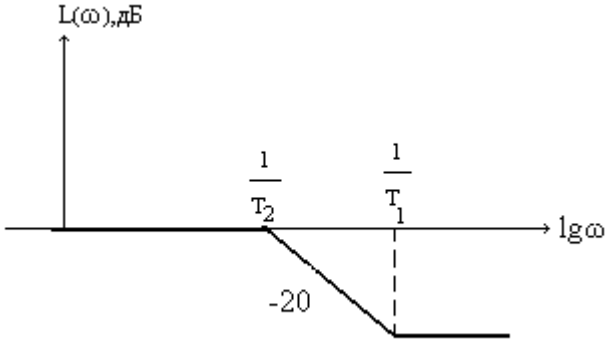
***7.2.1. Под коррекцией системы управления понимают процедуру, осуществляемую***

1) для уменьшения длительности переходного процесса;
2) для уменьшения колебательности переходного процесса;
3) для уменьшения длительности и колебательности переходного процесса;
4) с целью придания устойчивости структурно-неустойчивой системе;
5) с целью повышения запаса устойчивости структурно-устойчивой системы.

***7.2.2. Под стабилизацией системы управления понимают процедуру, осуществляемую***

1) для уменьшения длительности переходного процесса;
2) для уменьшения колебательности переходного процесса;
3) для уменьшения длительности и колебательности переходного процесса;
4) с целью придания устойчивости структурно-неустойчивой системе;
5) с целью придания устойчивости структурно-неустойчивой системе или с целью повышения запаса устойчивости структурно-устойчивой системы.

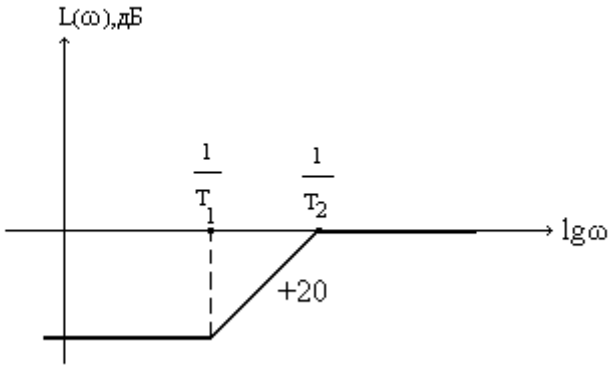
***7.2.3. Корректирующее устройство с передаточной функцией*** $W_k(p) = \dfrac{T_1(p)+1}{T_2(p)+1}$ ***($T_1<T_2$) и логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), приведенной ниже,***




***будучи последовательно включено в контур управления***

1) подавляет низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
2) подавляет высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
3) подавляет средние частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
4) усиливает низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
5) усиливает высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура.

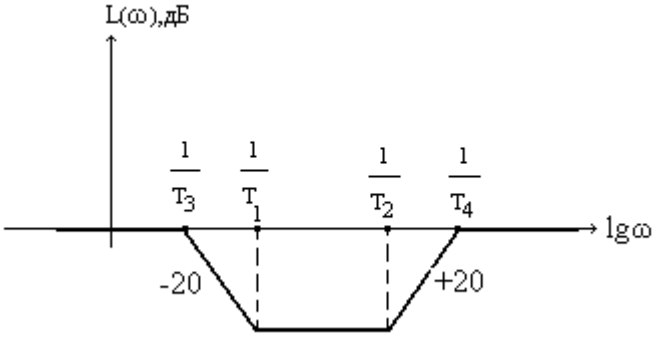
***7.2.4. Корректирующее устройство с передаточной функцией*** $W_к(p) = K\dfrac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ ***(к<1, $T_1 > T_2$) и логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), приведенной ниже,***




***будучи последовательно включено в контур управления***

1) подавляет низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
2) подавляет высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
3) подавляет средние частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
4) усиливает низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
5) усиливает высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура.

***7.2.5. Корректирующее устройство с передаточной функцией*** $W_к(p) = \dfrac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$ ***и логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), приведенной ниже,***




***будучи последовательно включено в контур управления***

1) подавляет низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
2) подавляет высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
3) подавляет средние частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
4) усиливает низкие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура;
5) усиливает высокие частоты на ЛАЧХ разомкнутого контура.

## 7.3. Синтез последовательных и параллельных корректирующих устройств по логарифмическим частотным характеристикам

***7.3.1. Синтез последовательного корректирующего устройства (КУ) по логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) разомкнутой системы состоит из нескольких этапов (приведены не по порядку):***

***А - проверочный расчет качества скорректированной системы;***

***В - определение ЛАЧХ последовательного КУ;***

***С - построение ЛАЧХ нескорректированной системы;***

***Д - построение желаемой ЛАЧХ по заданным показателям качества;***

***Е - подбор принципиальной схемы, передаточной функции и параметров КУ.***

***Какая последовательность вышеперечисленных процедур правильная?***

1) *С, В, Е, Д, А*;
2) *Е, Д, С, В, А*;
3) *С, Д, В, Е, А*;
4) *А, В, С, Е, Д*;
5) *Д, С, В, Е, А*.

***7.3.2. Синтез встречно-параллельного корректирующего устройства (КУ) (внутренней обратной связи) по логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) разомкнутой системы состоит из нескольких этапов (приведены не по порядку):***

***А - построение желаемой ЛАЧХ по заданным показателям качества;***

***В - определение ЛАЧХ встречно-параллельного КУ;***

***С - проверочный расчет качества скорректированной системы;***

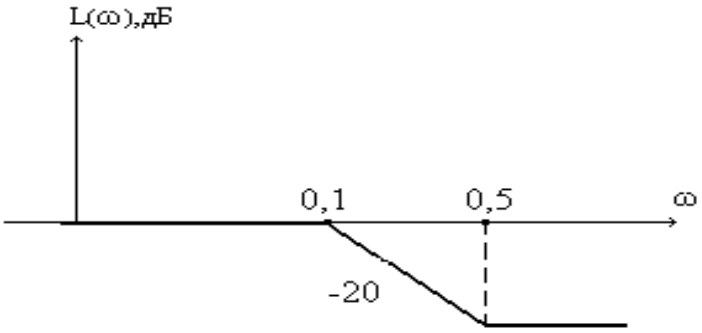
***Д - построение ЛАЧХ звеньев, не охваченных внутренней обратной связью;***

***Е - подбор принципиальной схемы, передаточной функции и параметров КУ.***

***Какая последовательность вышеперечисленных процедур правильная?***

1) *А, С, В, Е, Д*;
2) *Д, С, А, В, Е*;
3) *Е, А, В, С, Д*;
4) *Д, А, В, Е, С*;
5) *Д, С, В, Е, А*.

***7.3.3. По логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) корректирующего устройства определить его передаточную функцию $W_к(p)$***




1) $W_k(p)=\dfrac{10p+1}{2p+1}$;

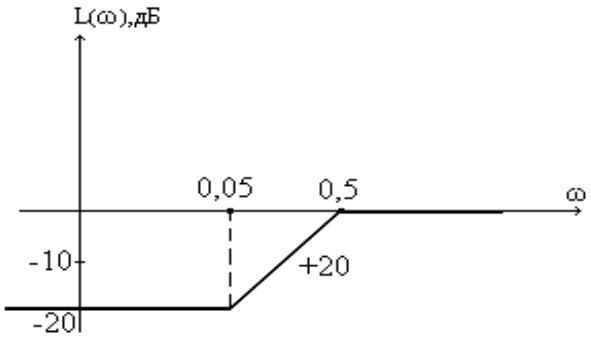
2) $W_k(p)=\dfrac{2p+1}{10p+1}$;

3) $W_k(p)=\dfrac{0{,}1p+1}{0{,}5p+1}$;

4) $W_k(p)=\dfrac{0{,}5p+1}{0{,}1p+1}$;

5) $W_k(p)=\dfrac{0{,}2p+1}{10p+1}$.

***7.3.4. По логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) корректирующего устройства определить его передаточную функцию $W_к(p)$***




1) $W_k(p)=\dfrac{20p+1}{2p+1}$;

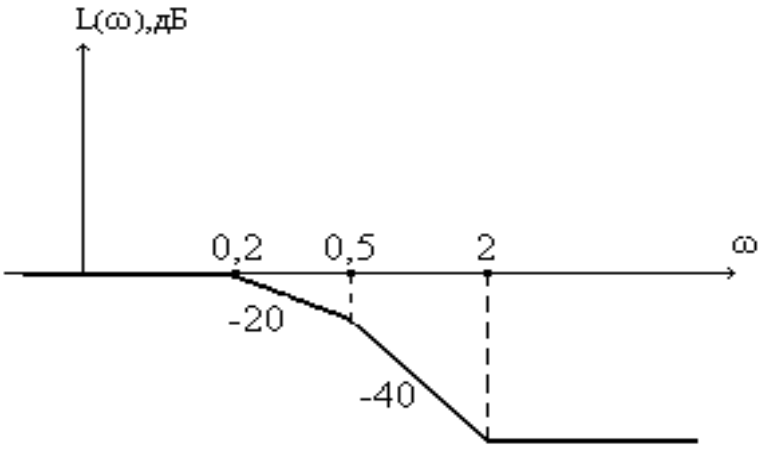
2) $W_k(p)=\dfrac{2p+1}{20p+1}$;

3) $W_k(p)=0{,}1\dfrac{0{,}5p+1}{0{,}05p+1}$;

4) $W_k(p)=0{,}1\dfrac{0{,}05p+1}{0{,}5p+1}$;

5) $W_k(p)=0{,}1\dfrac{20p+1}{2p+1}$.

***7.3.5. По логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) корректирующего устройства определить его передаточную функцию $W_к(p)$***




1) $W_{\text{k}}(p)=\dfrac{(5p+1)(2p+1)}{(0{,}5p+1)^2}$;

2) $W_{\text{k}}(p)=\dfrac{(0{,}5p+1)^2}{(5p+1)(2p+1)}$;

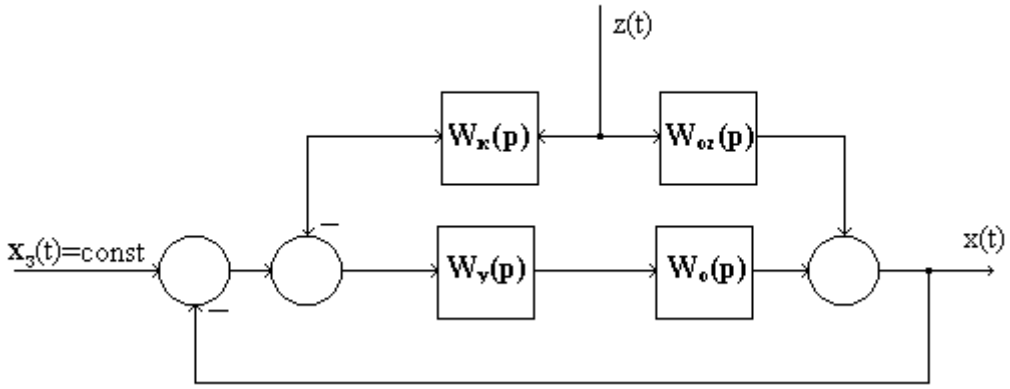
3) $W_{\text{k}}(p)=\dfrac{(0{,}2p+1)(0{,}5p+1)}{(2p+1)^2}$;

4) $W_{\text{k}}(p)=\dfrac{(2p+1)^2}{(0{,}2p+1)(0{,}5p+1)}$;

5) $W_{\text{k}}(p)=\dfrac{10(5p+1)(2p+1)}{(0{,}5p+1)^2}$.

## 7.4. Осуществление инвариантности в стабилизирующих и следящих системах

***7.4.1. Для приведенной. алгоритмической схемы системы стабилизации условие инвариантности управляемой величины x относительно возмущения z будет следующее:***




1) $W_{oz}(p) + W_к(p)W_y(p)W_o(p) = 0$;

2) $\dfrac{W_y(p)W_o(p)}{1+W_y(p)W_o(p)} = 0$;

3) $W_{oz}(p) - W_к(p)W_y(p)W_o(p) = 0$;

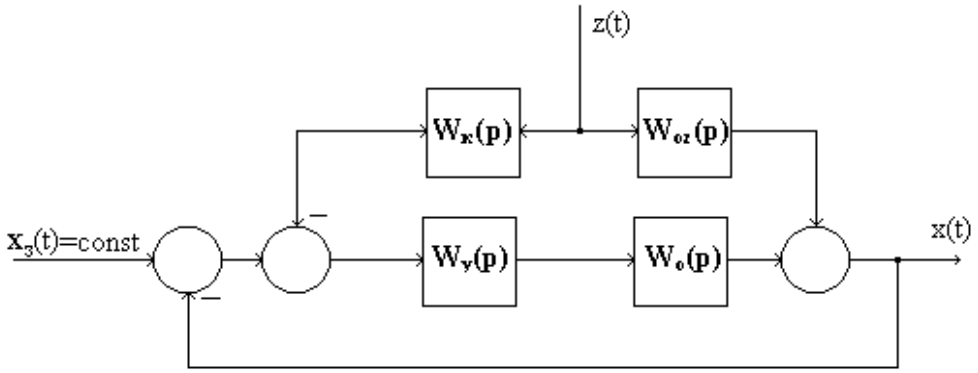
4) $\dfrac{W_y(p)W_o(p)}{1-W_y(p)W_o(p)} = 0$;

5) $1 - W_y(p)W_o(p) = 0$.

***7.4.2. Для физической реализации передаточной функции компенсирующего устройства $W_к(p)$ в инвариантной системе степень полинома числителя $W_к(p)$ "m" и степень полинома знаменателя "n" должны быть связаны соотношениями:***

1) $m > n$;
2) $m >> n$;
3) $m << n$;
4) $m \geq n$;
5) $m \leq n$.

***7.4.3. Для приведенной алгоритмической схемы системы стабилизации передаточную функцию компенсирующего устройства $W_к(p)$ находят из условия***




1) $W_{\text{k}}(p) = \dfrac{W_{\text{oz}}(p)}{W_{\text{y}}(p)}$;

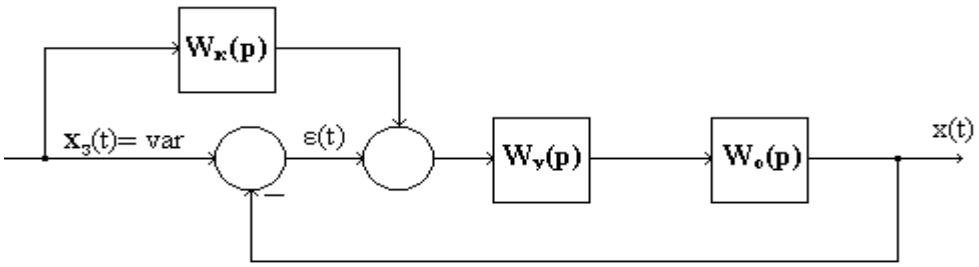
2) $W_{\text{k}}(p) = W_{\text{y}}(p)W_{\text{o}}(p)$;

3) $W_{\text{k}}(p) = \dfrac{W_{\text{y}}(p)W_{\text{o}}(p)}{W_{\text{oz}}(p)}$;

4) $W_{\text{k}}(p) = \dfrac{W_{\text{oz}}(p)}{W_{\text{y}}(p)W_{\text{o}}(p)}$;

5) $W_{\text{k}}(p) = W_{\text{y}}(p)W_{\text{o}}(p)W_{\text{oz}}(p)$.

***7.4.4. Для приведенной алгоритмической схемы следящей системы условие инвариантности сигнала ошибки ε относительно задающего воздействия $x_з$ будет следующее:***




1) $1 + W_к(p)W_y(p)W_o(p) = 0$;

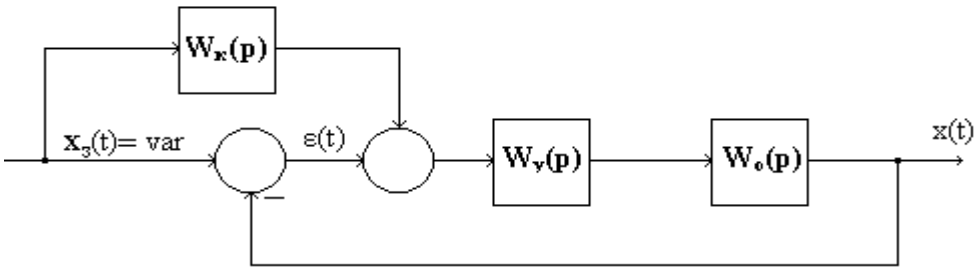
2) $1 - W_к(p)W_y(p)W_o(p) = 0$;

3) $1 - W_y(p)W_o(p) = 0$;

4) $1 + W_y(p)W_o(p) = 0$;

5) $W_к(p) - W_y(p)W_o(p) = 0$.

***7.4.5. Для приведенной алгоритмической схемы инвариантной следящей системы передаточную функцию компенсирующего устройства $W_к(p)$ находят из условия***




1) $W_{\text{к}}(p)=\dfrac{1}{W_{\text{у}}(p)W_{\text{о}}(p)}$;

2) $W_{\text{к}}(p)=W_{\text{у}}(p)W_{\text{о}}(p)$;

3) $W_{\text{к}}(p)=\dfrac{W_{\text{у}}(p)}{W_{\text{о}}(p)}$;

4) $W_{\text{к}}(p)=\dfrac{W_{\text{о}}(p)}{W_{\text{у}}(p)}$;

5) $W_{\text{к}}(p)=\dfrac{1}{1+W_{\text{у}}(p)W_{\text{о}}(p)}$.

# 8. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## 8.1. Числовые и функциональные характеристики случайных сигналов

***8.1.1. К числовым характеристикам случайного сигнала относятся***

1) среднее значение (математическое ожидание);
2) дисперсия;
3) среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия;
4) корреляционная функция;
5) спектральная плотность.

***8.1.2. Дисперсия $D_x$ стационарного случайного сигнала x(t) равна***

1) значению квадрата отклонений сигнала от математического ожидания "$m_x$";
2) среднему значению квадрата отклонений сигнала от математического ожидания "$m_x$";
3) отклонению сигнала от математического ожидания "$m_x$";
4) квадрату математического ожидания сигнала "$m_x$";
5) среднему значению сигнала, наблюдаемом на длительном интервале времени.

***8.1.3 К функциональным характеристикам случайного сигнала относятся***

1) среднее значение (математическое ожидание);
2) дисперсия;
3) корреляционная функция;
4) спектральная плотность;
5) корреляционная функция и спектральная плотность.

***8.1.4. Корреляционной функцией $R_x(\tau)$ случайного сигнала x(t) называется***

1) математическое ожидание произведений мгновенных значений центрированного сигнала $\overset{0}{x}(t)$;

2) среднее значение квадрата отклонений сигнала от математического ожидания "$m_x$";

3) математическое ожидание произведений мгновенных значений центрированного сигнала $\overset{0}{x}(t)$, разделенных промежутком времени $\tau$;

4) среднее значение отклонений сигнала от математического ожидания "$m_x$";

5) квадрат математического ожидания сигнала "$m_x$".

***8.1.5. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ случайного сигнала x(t) связана с дисперсией сигнала $D_x$ соотношением***

1) $D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x^2(\omega)d\omega$;

2) $D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S_x(\omega)|d\omega$;

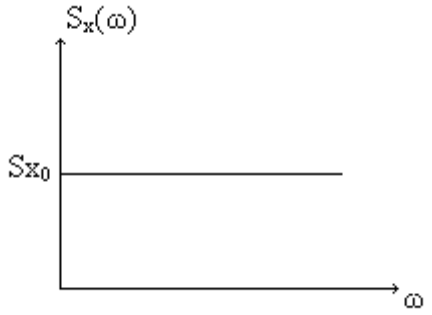
3) $D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|S_x(\omega)\right|^2 d\omega$;

4) $D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)d\omega$;

5) $D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_x(\omega)|d\omega$.

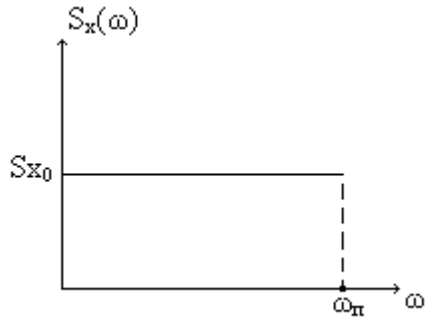
## 8.2. Характеристики типовых случайных сигналов

***8.2.1. График спектральной плотности $S_x(\omega)$ какого случайного сигнала приведен на рисунке?***



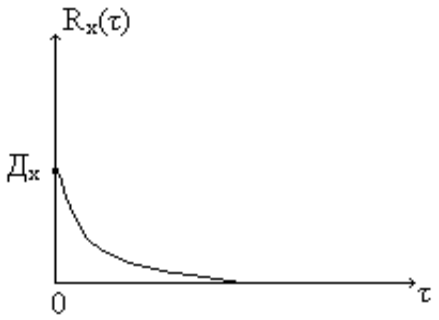

1) сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией;
2) сигнал с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией;
3) белый шум;
4) белый шум с ограниченной шириной спектра;
5) ступенчатый сигнал.

***8.2.2 График спектральной плотности $S_x(\omega)$ какого случайного сигнала приведен на рисунке?***



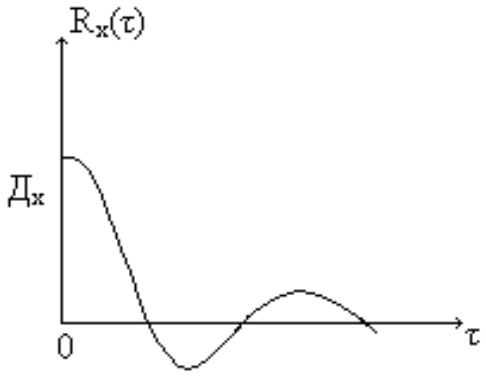

1) сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией;
2) сигнал с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией;
3) белый шум;
4) белый шум с ограниченной шириной спектра;
5) ступенчатый сигнал.

***8.2.3 График корреляционной функции $R_x(\tau)$ какого случайного сигнала приведен на рисунке?***



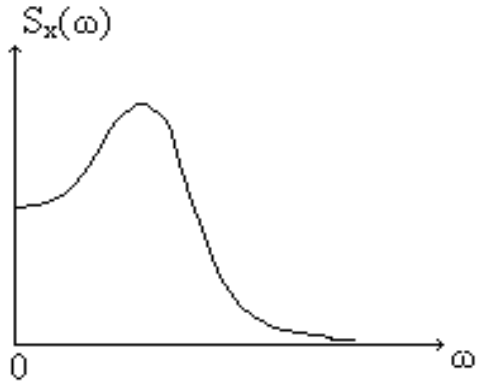

1) сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией;
2) сигнал с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией;
3) белый шум;
4) белый шум с ограниченной шириной спектра;
5) ступенчатый сигнал.

***8.2.4 График корреляционной функции $R_x(\tau)$ какого случайного сигнала приведен на рисунке?***




1) сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией;
2) сигнал с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией;
3) белый шум;
4) белый шум с ограниченной шириной спектра;
5) ступенчатый сигнал.

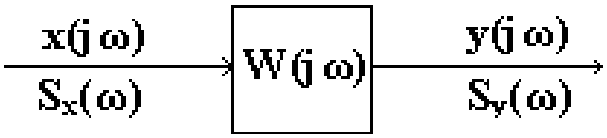
***8.2.5 График спектральной плотности $S_x(\omega)$ какого случайного сигнала приведен на рисунке?***




1) сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией;
2) сигнал с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией;
3) белый шум;
4) белый шум с ограниченной шириной спектра;
5) ступенчатый сигнал.

## 8.3. Преобразование случайного сигнала линейным динамическим звеном

***8.3.1. Для нижеприведенной алгоритмической схемы***




***спектральная плотность $S_y(\omega)$ случайного сигнала равна***

1) $S_y(\omega) = S_x(\omega)|W(j\omega)|$;

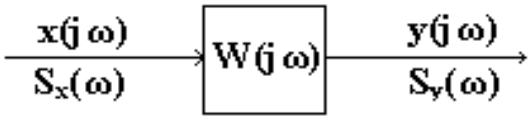
2) $S_y(\omega) = S_x(\omega)W(j\omega)$;

3) $S_y(\omega) = S_x(\omega)|W(j\omega)|^2$;

4) $S_y(\omega) = S_x(\omega)/|W(j\omega)|^2$;

5) $S_y(\omega) = S_x(\omega)/W(j\omega)$.

***8.3.2. Для нижеприведенной алгоритмической схемы***




***дисперсия $D_y$ выходного случайного сигнала равна***

1) $D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)W(j\omega)d\omega$;

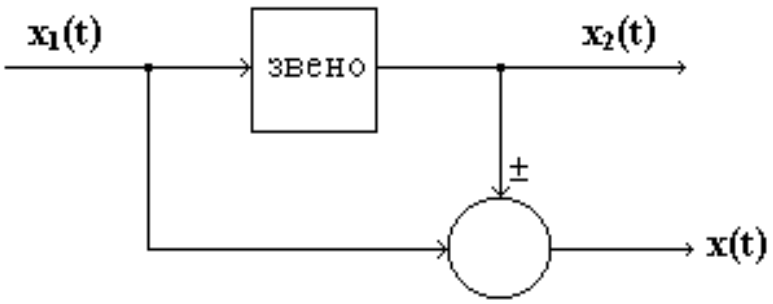
2) $D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|d\omega$;

3) $D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\frac{1}{W(j\omega)}d\omega$;

4) $D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 d\omega$;

5) $D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\frac{1}{|W(j\omega)|^2}$.

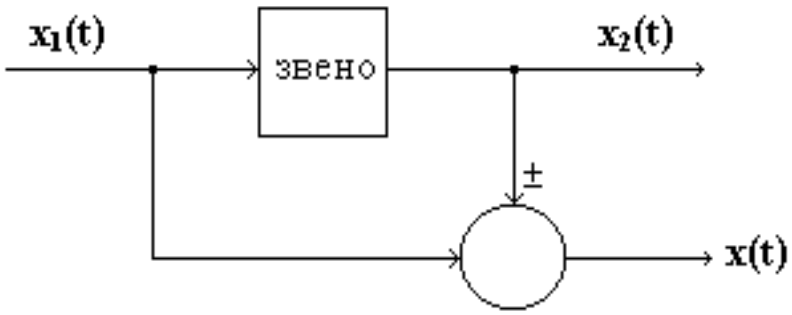
***8.3.3. Если алгебраически (в соответствии с нижеприведенной схемой)***




***складываются два коррелированных (связанных) сигнала $x(t)=x_1(t)\pm x_2(t)$, то корреляционная функция равна***

1) $R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) \pm R_{x2}(\tau)$;
2) $R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau) \pm R_{x1x2}(\tau) \pm R_{x2x1}(\tau)$;
3) $R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau)$;
4) $R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau) \pm R_{x1x2}(\tau)$;
5) $R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau) \pm R_{x2x1}(\tau)$.

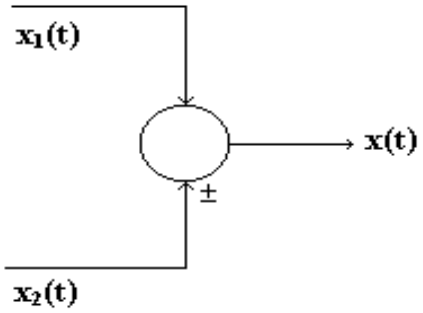
***8.3.4. Если алгебраически (в соответствии с нижеприведенной схемой)***




***складываются два коррелированных (связанных) сигнала $x(t)=x_1(t)\pm x_2(t)$, то спектральная плотность $S_x(\omega)$ равна***

1) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega)$;
2) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) \pm S_{x2}(\omega)$;
3) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega) \pm S_{x1x2}(j\omega) \pm S_{x2x1}(j\omega)$;
4) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) \pm S_{x2}(\omega) \pm S_{x1x2}(j\omega)$;
5) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega) \pm S_{x2x1}(j\omega)$.

***8.3.5. Если алгебраически (в соответствии с нижеприведенной схемой)***

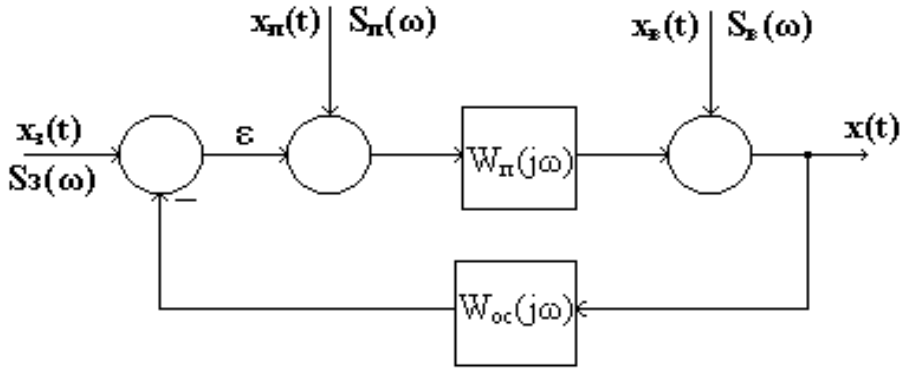



***складываются два некоррелированных сигнала $x(t)=x_1(t)\pm x_2(t)$, то спектральная плотность $S_x(\omega)$ равна***

1) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega)$;
2) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) \pm S_{x2}(\omega)$;
3) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega) \pm S_{x1x2}(j\omega) \pm S_{x2x1}(j\omega)$;
4) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) \pm S_{x2}(\omega) \pm S_{x1x2}(j\omega)$;
5) $S_x(\omega) = S_{x1}(\omega) + S_{x2}(\omega) \pm S_{x2x1}(j\omega)$.

## 8.4. Вычисление дисперсии сигнала ошибки замкнутой системы управления

### *8.4.1. Для алгоритмической схемы замкнутой системы дисперсия сигнала ошибки $D_\varepsilon$ по каналу "$x_з$ - $\varepsilon$" равна*




1) $D_{\varepsilon з} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}\right| d\omega;$

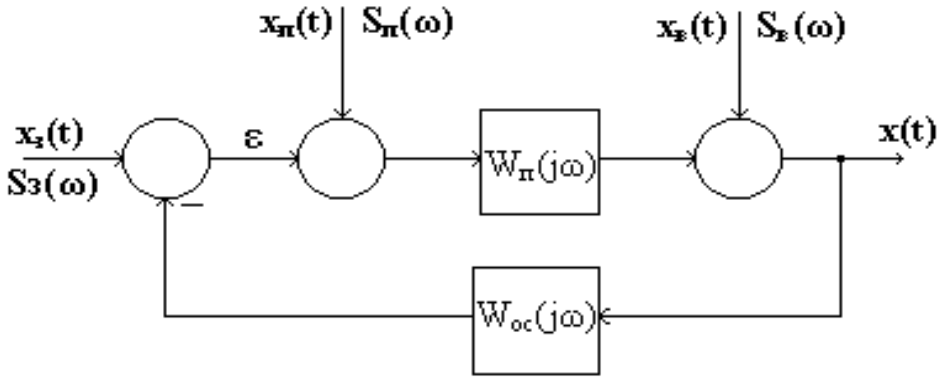
2) $D_{\varepsilon з} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

3) $D_{\varepsilon з} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{-W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

4) $D_{\varepsilon з} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{-W_{ос}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

5) $D_{\varepsilon з} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{W_п(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{ос}(j\omega)}\right|^2 d\omega.$

***8.4.2. Для алгоритмической схемы замкнутой системы дисперсия сигнала ошибки $D_\varepsilon$ по каналу "$x_п - \varepsilon$" равна***




1) $D_{\varepsilon п} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_п(\omega)\left|\frac{W_п(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

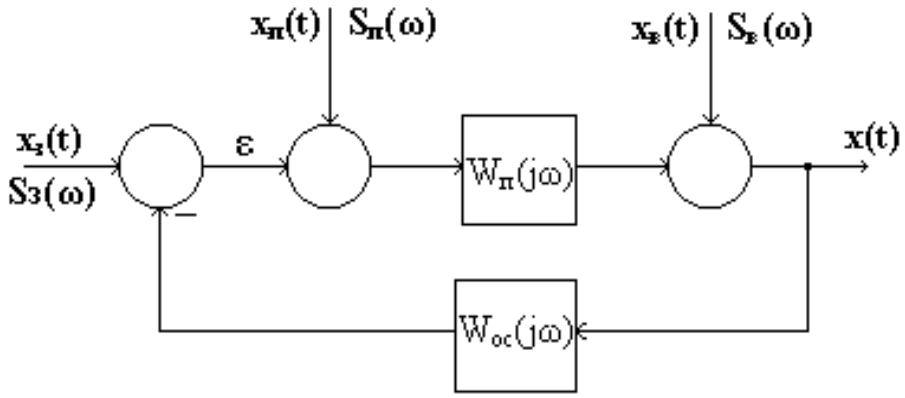
2) $D_{\varepsilon п} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_п(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega;$

3) $D_{\varepsilon п} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_п(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

4) $D_{\varepsilon п} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_п(\omega)\left|\frac{-W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

5) $D_{\varepsilon п} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_п(\omega)\left|\frac{-W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega.$

***8.4.3. Для алгоритмической схемы замкнутой системы дисперсия сигнала ошибки $D_\varepsilon$ по каналу "$x_в$ - $\varepsilon$" равна***




1) $D_{\varepsilon в} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega)\left|\frac{W_п(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega;$

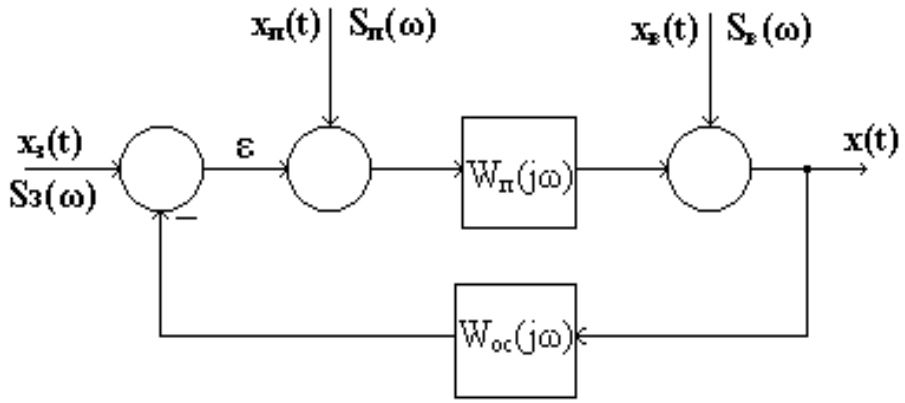
2) $D_{\varepsilon в} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega)\left|\frac{-W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega;$

3) $D_{\varepsilon в} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega)\left|\frac{-W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

4) $D_{\varepsilon в} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega)\left|\frac{W_п(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$

5) $D_{\varepsilon в} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_в(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega.$

***8.4.4. Для алгоритмической схемы замкнутой системы дисперсия выходного сигнала $D_x$ по каналу "$x_з$ - x" равна***




1) $$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega;$$

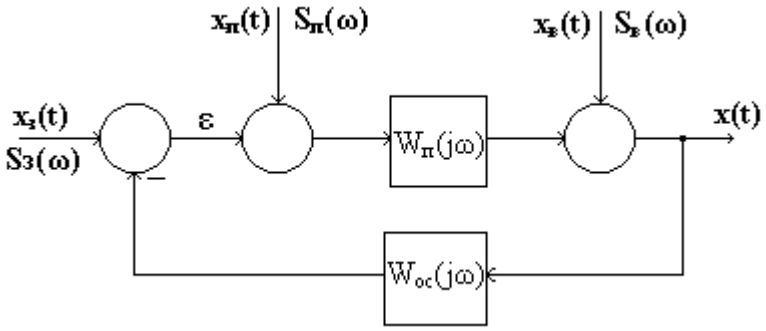
2) $$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{1}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$$

3) $$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{-W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$$

4) $$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{-W_{oc}(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right|^2 d\omega;$$

5) $$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega)\left|\frac{W_п(j\omega)}{1+W_п(j\omega)W_{oc}(j\omega)}\right| d\omega.$$

***8.4.5 Для алгоритмической схемы замкнутой системы дисперсия сигнала ошибки $D_\varepsilon$ при действии на систему трех некоррелированных сигналов $x_з(t)$, $x_п(t)$, $x_в(t)$ равна***

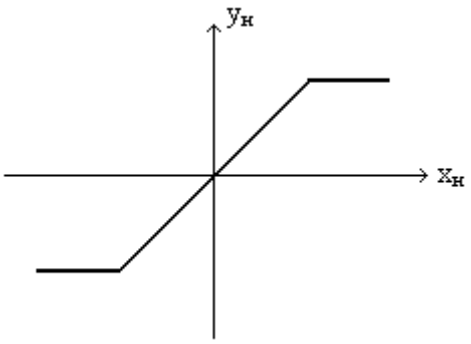



1) $D_\varepsilon = D_{\varepsilon з} + D_{\varepsilon п} - D_{\varepsilon в}$;
2) $D_\varepsilon = D_{\varepsilon з} - D_{\varepsilon п} - D_{\varepsilon в}$;
3) $D_\varepsilon = D_{\varepsilon з} + D_{\varepsilon п} + D_{\varepsilon в}$;
4) $D_\varepsilon = D_{\varepsilon з} - D_{\varepsilon п} + D_{\varepsilon в}$;
5) $D_\varepsilon = D_{\varepsilon п} + D_{\varepsilon в} - D_{\varepsilon з}$.

# 9. ХАРАКТЕРИСТИКИ И ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 9.1. Особенности нелинейных систем. Характеристики типовых нелинейных элементов

***9.1.1. Какие элементы автоматической системы управления обладают нижеприведенной статической характеристикой?***

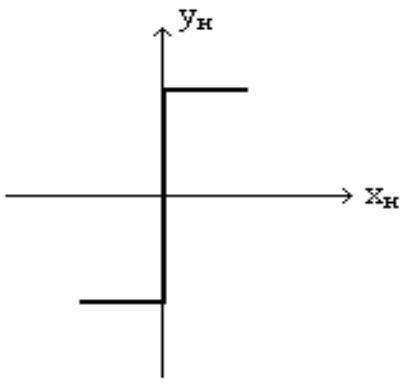



1) двухпозиционные регуляторы;
2) трехпозиционные регуляторы;
3) исполнительные органы с ограниченной пропускной способностью;
4) датчики;
5) релейные управляющие устройства.

***9.1.2. Главной особенностью нелинейных систем с существенными нелинейностями является то, что***

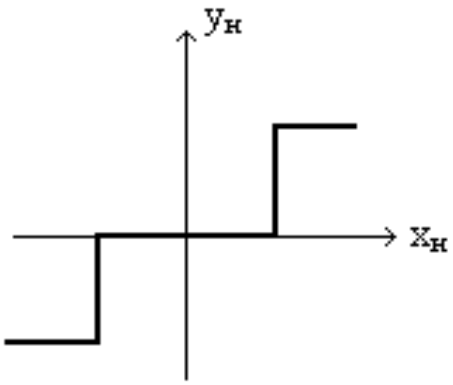
1) их устойчивость зависит от величины внешнего воздействия;
2) в них возможен режим автоколебаний;
3) они не подчиняются принципу суперпозиции (наложения сигналов);
4) форма переходного процесса зависит от величины внешнего воздействия;
5) показатели переходного процесса зависят от формы внешнего воздействия.

***9.1.3. Какие элементы автоматической системы управления обладают нижеприведенной статической характеристикой?***



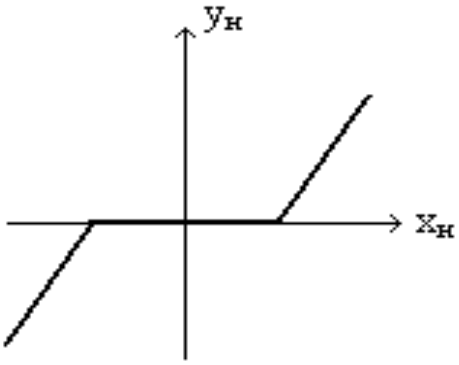

1) двухпозиционные регуляторы;
2) трехпозиционные регуляторы;
3) исполнительные органы с ограниченной пропускной способностью;
4) датчики;
5) релейные управляющие устройства.

***9.1.4. Какие элементы автоматической системы управления обладают нижеприведенной статической характеристикой?***




1) двухпозиционные регуляторы;
2) трехпозиционные регуляторы;
3) исполнительные органы с ограниченной пропускной способностью;
4) датчики;
5) релейные управляющие устройства.

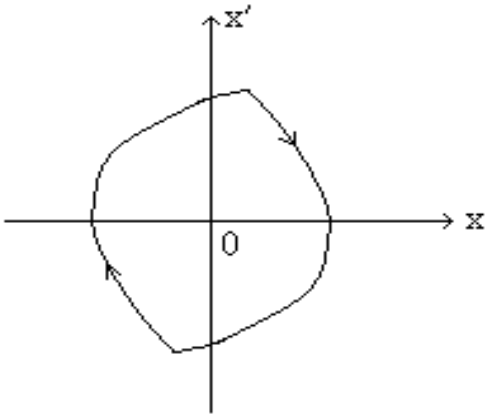
***9.1.5. Какие элементы автоматической системы управления обладают нижеприведенной статической характеристикой?***




1) двухпозиционные регуляторы;
2) трехпозиционные регуляторы;
3) исполнительные органы с ограниченной пропускной способностью;
4) датчики;
5) релейные управляющие устройства.

## 9.2. Метод фазовых траекторий

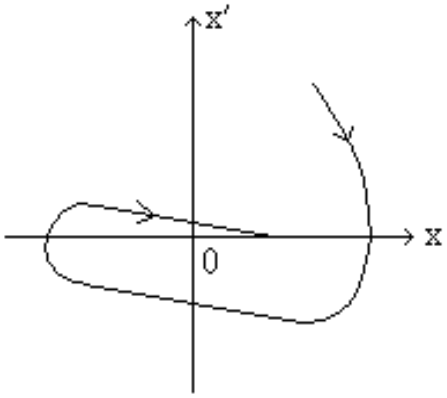
### *9.2.1. Нижеприведенная фазовая траектория*




***соответствует***

1) устойчивой нелинейной системе;
2) неустойчивой нелинейной системе;
3) линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости;
4) устойчивой линейной системе;
5) нелинейной системе, находящейся в режиме автоколебаний.

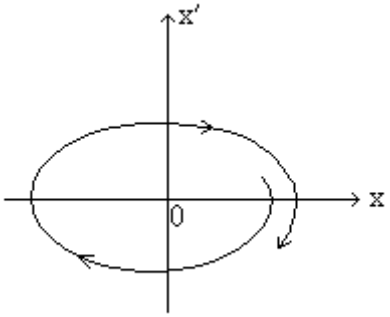
### *9.2.2. Нижеприведенная фазовая траектория*




***соответствует***

1) устойчивой нелинейной системе;
2) неустойчивой нелинейной системе;
3) линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости;
4) устойчивой линейной системе;
5) нелинейной системе, находящейся в режиме автоколебаний.

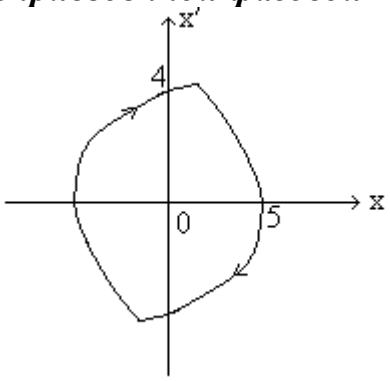
***9.2.3. Нижеприведенная фазовая траектория***




***соответствует***

1) устойчивой нелинейной системе;
2) неустойчивой нелинейной системе;
3) линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости;
4) устойчивой линейной системе;
5) нелинейной системе, находящейся в режиме автоколебаний.

***9.2.4. Амплитуда $X_{ma}$ и частота $\omega_a$ автоколебаний в нелинейной системе в соответствии с нижеприведенной фазовой траекторией***




***равны***

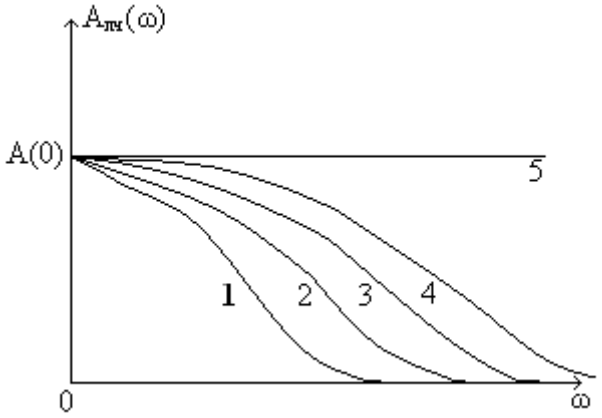
1) $X_{ma} \approx 5$, $\omega_a \approx 4$;
2) $X_{ma} \approx 5$, $\omega_a \approx 1{,}25$;
3) $X_{ma} \approx 4$, $\omega_a \approx 5$;
4) $X_{ma} \approx 5$, $\omega_a \approx 0{,}8$;
5) $X_{ma} \approx 4$, $\omega_a \approx 1{,}25$.

***9.2.5. Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем и наиболее удобен для анализа систем***

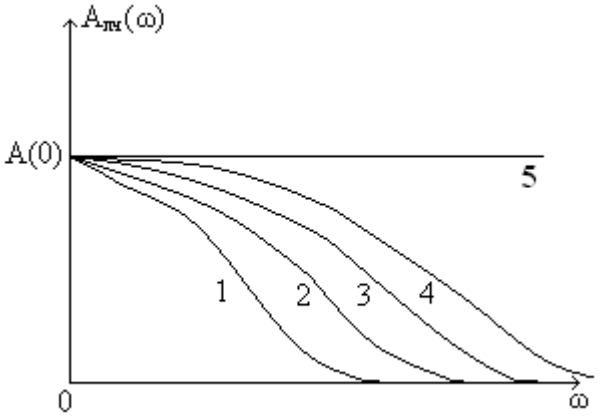
1) третьего порядка;
2) четвертого порядка;
3) второго порядка;
4) первого порядка;
5) любого порядка.

## 9.3. Метод гармонической линеаризации

***9.3.1. Для какой из нелинейных систем, чьи амплитудно-частотные характеристики линейной части $A_{лч}(\omega)$ приведены на рисунке, более справедливо применение метода гармонической линеаризации?***




***9.3.2. Для какой из нелинейных систем, чьи амплитудно-частотные характеристики линейной части $A_{лч}(\omega)$ приведены на рисунке, нельзя применить метод гармонической линеаризации?***




***9.3.3. Метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования автоколебаний в нелинейной системе и применяется для анализа систем***

1) первого порядка;
2) второго порядка;
3) любого порядка;
4) третьего порядка;
5) четвертого порядка.

***9.3.4. Сущность метода гармонической линеаризации состоит в том, что нелинейная функция на выходе нелинейного элемента $y_н$ раскладывается в ряд***

1) Тэйлора для двух членов разложения;
2) Маклорена для двух членов разложения;
3) Пада для двух членов разложения;
4) Фурье и заменяется первой гармоникой этого ряда;
5) Лорана для двух членов разложения.

***9.3.5. Для того, чтобы можно было полагать, что в контуре нелинейной системы циркулирует гармонический сигнал, линейная часть системы должна быть***

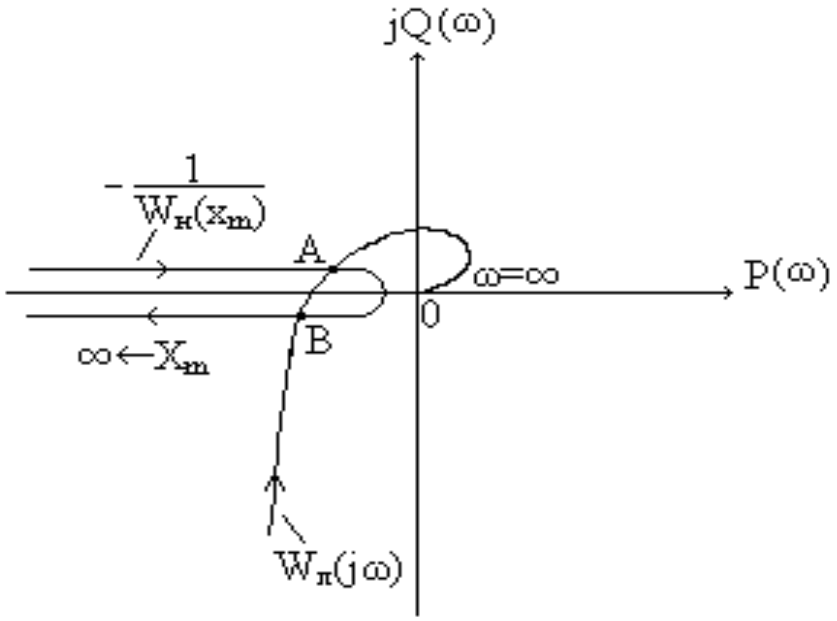
1) безынерционной;
2) сильноинерционной;
3) инерционной;
4) малоинерционной;
5) устойчивой.

## 9.4. Определение параметров автоколебаний в замкнутой системе управления

***9.4.1. Может ли неустойчивая замкнутая линейная система работать в режиме автоколебаний, если в ее контур последовательно с линейными элементами включить нелинейный элемент?***

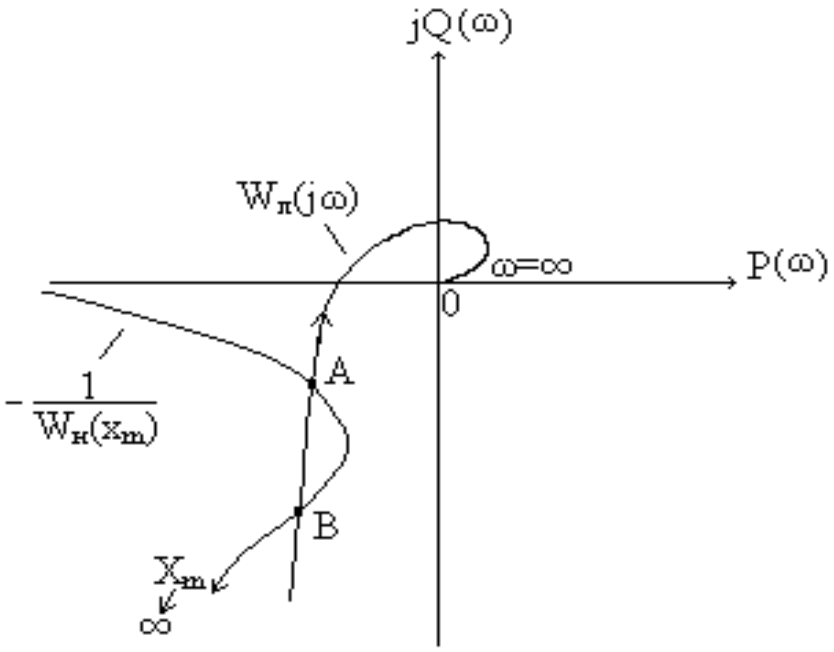
1) может;
2) не может;
3) может, если статическая характеристика нелинейного элемента имеет ограничение по ординате;
4) может, если уменьшить передаточный коэффициент разомкнутого контура линейной части;
5) может, если уменьшить постоянные времени системы.

***9.4.2. Определить наличие (отсутствие) и устойчивость (неустойчивость) автоколебаний в нелинейной системе с амплитудно-фазовой частотной характеристикой линейной части $W_л(j\omega)$ и обратной амплитудной характеристикой нелинейного элемента $-\frac{1}{W_н(x_m)}$, приведенными на рисунке***




1) в контуре есть устойчивые автоколебания;
2) в контуре есть неустойчивые автоколебания;
3) автоколебания в контуре отсутствуют;
4) в контуре есть неустойчивые автоколебания в точке А и устойчивые в точке В;
5) в контуре есть устойчивые автоколебания в точке А и неустойчивые в точке В.

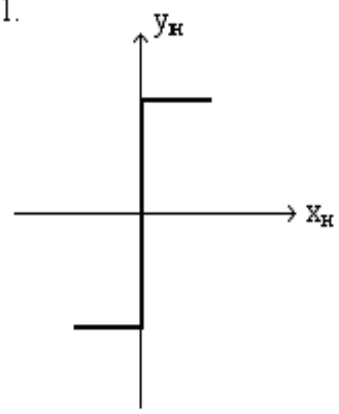
***9.4.3. Определить наличие (отсутствие) и устойчивость (неустойчивость) автоколебаний в нелинейной системе с амплитудно-фазовой частотной характеристикой линейной части $W_л(j\omega)$ и обратной амплитудной характеристикой нелинейного элемента $-\frac{1}{W_н(x_m)}$, приведенными ниже***



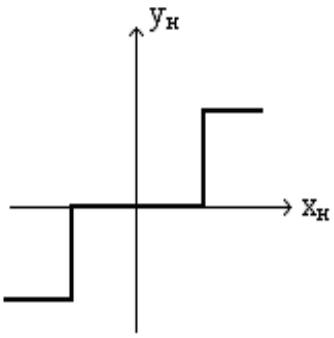

1) в контуре есть устойчивые автоколебания;
2) в контуре есть неустойчивые автоколебания;
3) автоколебания в контуре отсутствуют;
4) в контуре есть неустойчивые автоколебания в точке А и устойчивые в точке В;
5) в контуре есть устойчивые автоколебания в точке А и неустойчивые в точке В.

***9.4.4. Для какой из нелинейностей, входящих в контур нелинейной системы, нельзя применить критерий устойчивости Михайлова для определения параметров автоколебаний?***

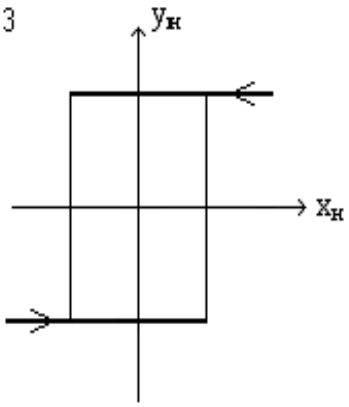
1.



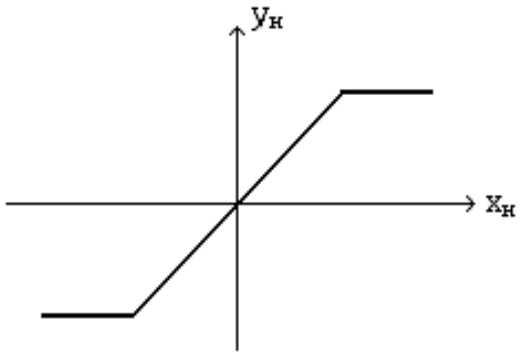

2.



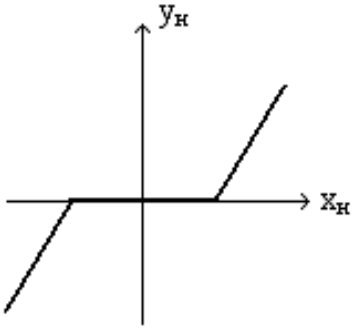

3



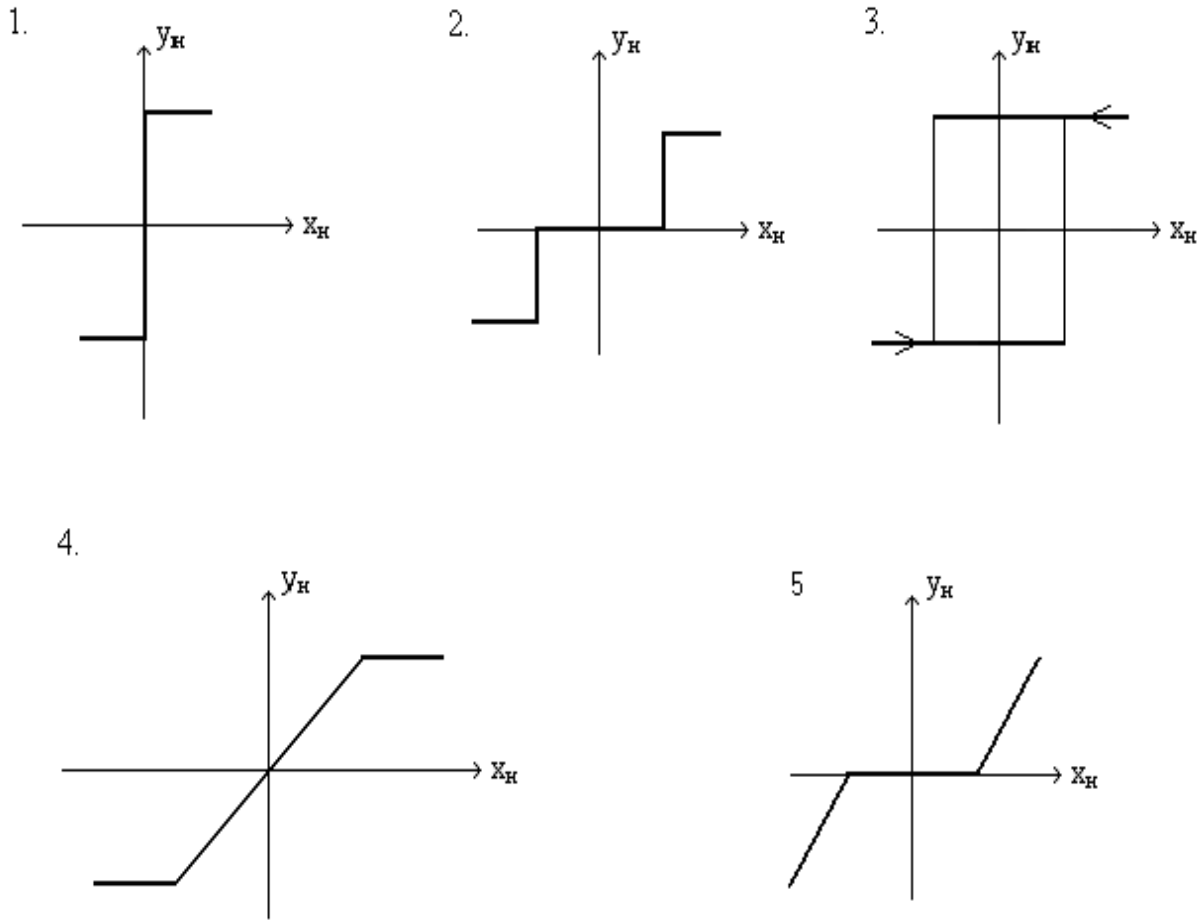

4.




5.



***9.4.5. С какой из нелинейностей, входящих в контур нелинейной системы, в контуре невозможны автоколебания?***




# 10. ОСНОВЫ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 10.1. Общие сведения о дискретных системах

***10.1.1. При амплитудно-импульсной модуляции сигнала (АИМ) в дискретной системе существуют следующие соотношения между значениями модулирующего сигнала x(t), амплитудой (высотой) импульсов $x_и$ , периодом повторения импульсов T, частотой повторения импульсов $\omega_д = \dfrac{2\pi}{T}$ и длительностью импульсов $\tau_и$ :***

1) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и = \text{const}$;
2) $x_и = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
3) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и = \text{const}$;
4) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
5) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и \equiv x(t)$.

***10.1.2. При широтно-импульсной модуляции сигнала (ШИМ) в дискретной системе существуют следующие соотношения между значениями модулирующего сигнала x(t), амплитудой (высотой) импульсов $x_и$, периодом повторения импульсов T, частотой повторения импульсов $\omega_д = \frac{2\pi}{T}$ и длительностью импульсов $\tau_и$ :***

1) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и = \text{const}$;
2) $x_и = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
3) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и = \text{const}$;
4) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
5) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и \equiv x(t)$.

***10.1.3. При частотно-импульсной модуляции сигнала (ЧИМ) в дискретной системе существуют следующие соотношения между значениями модулирующего сигнала x(t), амплитудой (высотой) импульсов $x_и$, периодом повторения импульсов T, частотой повторения импульсов $\omega_д = \frac{2\pi}{T}$ и длительностью импульсов $\tau_и$ :***

1) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и = \text{const}$;
2) $x_и = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
3) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и = \text{const}$;
4) $x_и \equiv x(t)$, $T = \text{const}$, $\tau_и \equiv x(t)$;
5) $x_и = \text{const}$, $\omega_д \equiv x(t)$, $\tau_и \equiv x(t)$.

***10.1.4. При каком условии формирующий элемент в импульсной системе можно назвать фиксирующим (запоминающим) или экстраполятором нулевого порядка?***

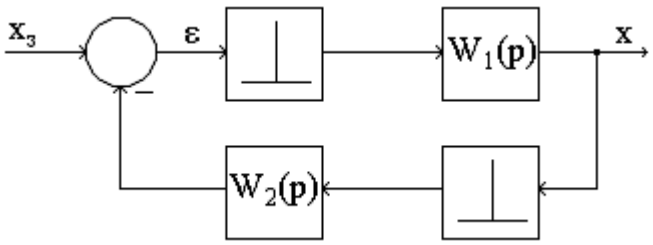
1) если частота повторения импульсов $\omega_д$ равна периоду повторения импульсов $T$ ($\omega_д = T$);
2) если амплитуда импульсов $x_и$ пропорциональна периоду повторения импульсов $T$ ($x_и \equiv T$);
3) если амплитуда импульсов $x_и$ пропорциональна длительности импульсов $\tau_и$ ($x_и \equiv \tau_и$);
4) если длительность импульсов $\tau_и$ равна периоду повторения импульсов $T$ ($\tau_и = T$);
5) если частота повторения импульсов $\omega_д$ пропорциональна длительности импульсов $\tau_и$ ($\omega_д \equiv \tau_и$).

***10.1.5. При каких соотношениях между частотой повторения импульсов $\omega_д$ и спектром частот непрерывной части, ограниченным частотой $\omega_х$, в импульсной системе не происходит потери информации (теорема Котельникова)?***

1) $\omega_д \le 2\omega_х$;
2) $\omega_д < \omega_х$;
3) $\omega_д = \omega_х$;
4) $\omega_д \ge \omega_х$;
5) $\omega_д \ge 2\omega_х$.

## 10.2. Математическое описание импульсной системы

***10.2.1. Дискретную передаточную функцию Ф(z) замкнутой импульсной системы по каналу "$x_з$ - x" записывают в виде***




1) $\Phi(z) = \dfrac{X(z)}{X_з(z)} = \dfrac{W_1(z)}{1 + W_1(z)W_2(z)}$;

2) $\Phi(z) = \dfrac{X(z)}{X_з(z)} = \dfrac{W_1(z)}{1 + W_1 W_2(z)}$;

3) $\Phi(z) = \dfrac{X(z)}{X_з(z)} = \dfrac{1}{1 + W_1(z)W_2(z)}$;

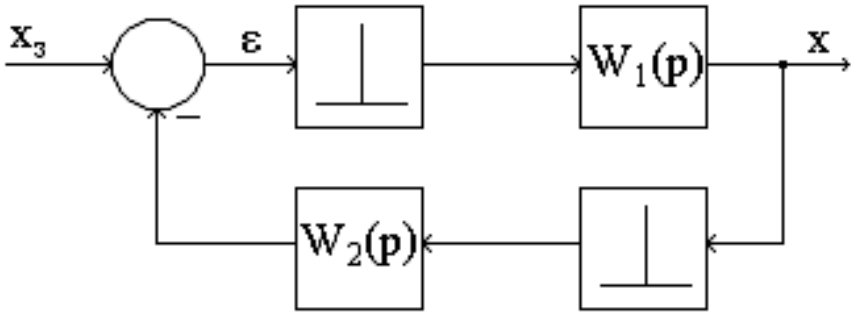
4) $\Phi(z) = \dfrac{X(z)}{X_з(z)} = \dfrac{1}{1 + W_1 W_2(z)}$;

5) $\Phi(z) = \dfrac{X(z)}{X_з(z)} = \dfrac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)}$.

***10.2.2. Как связан оператор Z-преобразования "Z" с оператором преобразования Лапласа "p"?***

1) $Z = e^{-pT}$;
2) $Z = Te^{pT}$;
3) $Z = e^{pT}$;
4) $Z = Te^{-pT}$;
5) $Z = \frac{1}{T}e^{pT}$.

***10.2.3. Дискретную передаточную функцию Φ(z) замкнутой импульсной системы по каналу "$x_з$ - ε" записывают в виде***




1) $\Phi(z) = \frac{\varepsilon(z)}{X_з(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)W_2(z)}$;

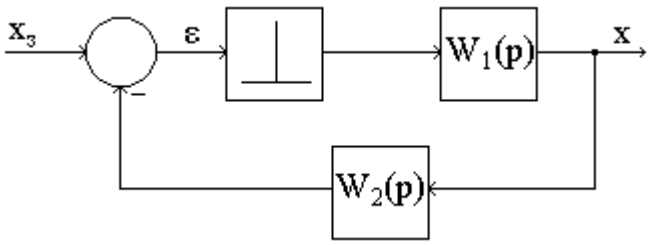
2) $\Phi(z) = \frac{\varepsilon(z)}{X_з(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1W_2(z)}$;

3) $\Phi(z) = \frac{\varepsilon(z)}{X_з(z)} = \frac{1}{1 + W_1(z)W_2(z)}$;

4) $\Phi(z) = \frac{\varepsilon(z)}{X_з(z)} = \frac{1}{1 + W_1W_2(z)}$;

5) $\Phi(z) = \frac{\varepsilon(z)}{X_з(z)} = \frac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)}$.

***10.2.4. Дискретную передаточную функцию Φ(z) замкнутой импульсной системы по каналу "$x_з$ - x" записывают в виде***




1) $\Phi(z)=\dfrac{X(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1+W_1(z)W_2(z)}$;

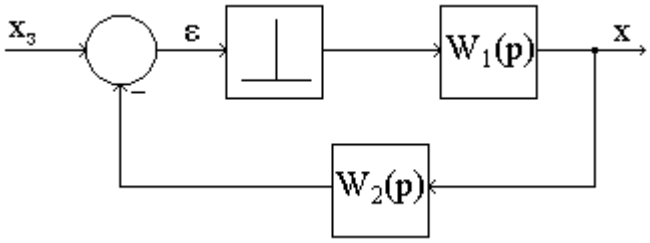
2) $\Phi(z)=\dfrac{X(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1+W_1W_2(z)}$;

3) $\Phi(z)=\dfrac{X(z)}{X_з(z)}=\dfrac{1}{1+W_1(z)W_2(z)}$;

4) $\Phi(z)=\dfrac{X(z)}{X_з(z)}=\dfrac{1}{1+W_1W_2(z)}$;

5) $\Phi(z)=\dfrac{X(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1-W_1(z)W_2(z)}$.

***10.2.5. Дискретную передаточную функцию Φ(z) замкнутой импульсной системы по каналу "$x_з$ - ε" записывают в виде***




1) $\Phi(z)=\dfrac{\varepsilon(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1+W_1(z)W_2(z)}$;

2) $\Phi(z)=\dfrac{\varepsilon(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1+W_1W_2(z)}$;

3) $\Phi(z)=\dfrac{\varepsilon(z)}{X_з(z)}=\dfrac{1}{1+W_1(z)W_2(z)}$;

4) $\Phi(z)=\dfrac{\varepsilon(z)}{X_з(z)}=\dfrac{1}{1+W_1W_2(z)}$;

5) $\Phi(z)=\dfrac{\varepsilon(z)}{X_з(z)}=\dfrac{W_1(z)}{1-W_1(z)W_2(z)}$.

## 10.3. Устойчивость импульсных систем

***10.3.1. Для того, чтобы замкнутая импульсная система, описываемая характеристическим уравнением $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$ была устойчивой, к корням характеристического уравнения предъявляют требования:***

1) $|z_к| > 1$;
2) $|z_к| << 1$;
3) $|z_к| < 1$;
4) $|z_к| = 1$;
5) $|z_к| >> 1$.

***10.3.2. При каких значениях передаточного коэффициента разомкнутого контура "к" и периода повторения импульсов T* устойчива *замкнутая импульсная система, описываемая характеристическим уравнением $z+кT-1=0$?***

1) $к = 2$, $T = 1$;
2) $к = 0{,}5$, $T = 0{,}5$;
3) $к = 2$, $T = 1{,}5$;
4) $к = 4$, $T = 0{,}5$;
5) $к = 2$, $T = 2$.

***10.3.3. При каких значениях передаточного коэффициента разомкнутого контура "к" и периода повторения импульсов T, замкнутая импульсная система, описываемая характеристическим уравнением $z+кT-1=0$, будет неустойчивой?***

1) $к = 2$, $T = 1$;
2) $к = 0{,}5$, $T = 0{,}5$;
3) $к = 2$, $T = 1{,}5$;
4) $к = 4$, $T = 0{,}5$;
5) $к = 2$, $T = 0{,}2$.

***10.3.4. При каких значениях передаточного коэффициента разомкнутого контура "к" и периода повторения импульсов T, замкнутая импульсная система, описываемая характеристическим уравнением $z+кT-1=0$, будет находиться* на границе устойчивости*?***

1) $к = 2$, $T = 1{,}5$;
2) $к = 0{,}5$, $T = 0{,}5$;
3) $к = 2$, $T = 0{,}2$;
4) $к = 2$, $T = 1$;
5) $к = 2$, $T = 2$.

***10.3.5. Какое соотношение должно быть между передаточным коэффициентом разомкнутого контура "к" и периодом повторения импульсов T в замкнутой* устойчивой *импульсной системе, характеристическое уравнение которой с целью использования аналога критерия устойчивости Гурвица приведено к виду кTw+2-кT=0?***

1) $к = 2T$;
2) $к = 0{,}5T$;
3) $к > \frac{2}{T}$;
4) $к = \frac{2}{T}$;
5) $к < \frac{2}{T}$.

## 10.4. Качество импульсных систем

***10.4.1. Определить, используя теорему Лапласа о конечном значении оригинала относительно сигнала ошибки*** $\varepsilon(\infty) = \lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon(jT) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \Phi_{\varepsilon}(z) x_{з}(z)$, ***точность импульсной системы в установившемся режиме при*** $x_з(t)=a\cdot 1(t)$ [$x_{з}(z) = \frac{az}{z-1}$], ***если дискретная передаточная функция*** $\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{z-1}{z+kT-1}$

1) $\varepsilon(\infty) = 1 / к$;
2) $\varepsilon(\infty) = a / к$;
3) $\varepsilon(\infty) = 0$;
4) $\varepsilon(\infty) = \infty$;
5) $\varepsilon(\infty) = ак$.

***10.4.2. Определить, используя теорему Лапласа о конечном значении оригинала относительно сигнала ошибки*** $\varepsilon(\infty) = \lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon(jT) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \Phi_{\varepsilon}(z) x_{з}(z)$, ***точность импульсной системы в установившемся режиме при*** $x_з(t)=at\cdot 1(t)$ [$x_{з}(z) = \frac{aTz}{z-1}$], ***если дискретная передаточная функция*** $\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{z-1}{z+kT-1}$

1) $\varepsilon(\infty) = 1 / к$;
2) $\varepsilon(\infty) = a / к$;
3) $\varepsilon(\infty) = 0$;
4) $\varepsilon(\infty) = \infty$;
5) $\varepsilon(\infty) = ак$.

***10.4.3. Найти величину перерегулирования σ в замкнутой импульсной системе с интегратором по каналу "$x_з$ - x", если z-изображение выходной величины системы $x(z)=1{,}5z^{-1}+0{,}75z^{-2}+1{,}125z^{-3}+0{,}937z^{-4}+\ldots$***

1) σ = 0;
2) σ = 20 %;
3) σ = 30 %;
4) σ = 50 %;
5) σ = 40 %.

***10.4.4. Найти установившееся значение выходной величины $x(\infty)$ импульсной системы с передаточной функцией*** $\Phi(z)=\dfrac{x(z)}{x_з(z)}=\dfrac{1{,}5}{z+0{,}5}$ ***при*** $x_з(t)=1(t)$ ***[для нахождения $x(\infty)$ следует в передаточной функции $\Phi(z)$ сделать подстановку $z=e^{pT}$ и использовать формулу $\Phi(0)=x(\infty)$]***

1) $x(\infty) = 0$;

2) $x(\infty) = \infty$;

3) $x(\infty) = 0{,}8$;

4) $x(\infty) = 0{,}3$;

5) $x(\infty) = 1$.

***10.4.5. Для того, чтобы переходный процесс в импульсной системе заканчивался за конечное число периодов T, равное порядку системы "n", коэффициенты характеристического уравнения системы $a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n=0$ должны удовлетворять условиям***

1) $a_n = 0$;

2) $a_0 = 0$;

3) $a_n = 1$;

4) $a_0 = 1$;

5) $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$.

# 11. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 11.1. Общая характеристика и классификация задач оптимального управления

***11.1.1. Автоматическая система управления называется*** **оптимальной,**

1) если она имеет наименьшую площадь под графиком переходного процесса управляемой величины;

2) если она при любых детерминированных воздействиях имеет удовлетворительные показатели качества;

3) если она среди всех систем рассматриваемого класса осуществляет наилучшее в определенном смысле управление;

4) если она при любых случайных воздействиях обеспечивает минимальную среднеквадратичную ошибку;

5) если она обеспечивает наилучшее быстродействие.

***11.1.2. Критерием оптимальности называют:***

1) количественную меру, на основании которой выбирают наилучший режим работы объекта управления;

2) количественную меру, по которой производятся сравнительная оценка возможных вариантов управления и выбор наилучшего варианта;

3) количественную меру, по которой производится сравнительная оценка различных режимов функционирования объекта;

4) количественную меру, на основании которой выбирают наилучший вариант управляющих воздействий;

5) технический или технико-экономический критерий, обеспечивающий наилучший режим работы системы.

***11.1.3. Равномерно-оптимальной называют систему,***

1) в которой наилучшее поведение системы обеспечивается только в среднем (например, системы под воздействием случайных возмущений);

2) в которой обеспечивается наилучший по сравнению с другими системами результат только в наихудшем случае;

3) в которой есть полная информация об объекте управления;

4) в которой каждый отдельный процесс является оптимальным (например, системы оптимальные по быстродействию);

5) в которой критерий оптимальности содержит ограничения на управляющее воздействие.

***11.1.4. Статистически-оптимальной называют систему,***

1) в которой наилучшее поведение системы обеспечивается только в среднем (например, системы под воздействием случайных возмущений);
2) в которой обеспечивается наилучший по сравнению с другими системами результат только в наихудшем случае;
3) в которой есть полная информация об объекте управления;
4) в которой каждый отдельный процесс является оптимальным (например, системы оптимальные по быстродействию);
5) в которой критерий оптимальности содержит ограничения на управляющее воздействие.

***11.1.5. Минимаксно-оптимальной называют систему,***

1) в которой наилучшее поведение системы обеспечивается только в среднем (например, системы под воздействием случайных возмущений);
2) в которой обеспечивается наилучший по сравнению с другими системами результат только в наихудшем случае;
3) в которой есть полная информация об объекте управления;
4) в которой каждый отдельный процесс является оптимальным (например, системы оптимальные по быстродействию);
5) в которой критерий оптимальности содержит ограничения на управляющее воздействие.

## 11.2 Критерии оптимальности

***11.2.1. Системами, оптимальными по быстродействию, называют системы,***

1) в которых обеспечивается минимальная площадь под графиком переходного процесса управляемой величины или сигнала ошибки;
2) которые имеют минимальные отклонения действительных координат объекта от желаемых значений;
3) которые при переводе изображающей точки фазового пространства из начального состояния в заданное обеспечивают минимум интеграла квадрата управляющих воздействий;
4) у которых достигается наименьшее время перевода изображающей точки объекта управления в фазовом пространстве из одного состояния в другое;
5) у которых обеспечивается перевод изображающей точки в фазовом пространстве из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов.

***11.2.2. Системами, оптимальными по расходу материальных ресурсов, называют системы,***

1) в которых обеспечивается минимальная площадь под графиком переходного процесса управляемой величины или сигнала ошибки;
2) которые имеют минимальные отклонения действительных координат объекта от желаемых значений;
3) которые при переводе изображающей точки фазового пространства из начального состояния в заданное обеспечивают минимум интеграла квадрата управляющих воздействий;
4) у которых достигается наименьшее время перевода изображающей точки объекта управления в фазовом пространстве из одного состояния в другое;
5) у которых обеспечивается перевод изображающей точки в фазовом пространстве из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов.

***11.2.3. Системами, оптимальными по расходу энергии, называют системы,***

1) в которых обеспечивается минимальная площадь под графиком переходного процесса управляемой величины или сигнала ошибки;
2) которые имеют минимальные отклонения действительных координат объекта от желаемых значений;
3) которые при переводе изображающей точки фазового пространства из начального состояния в заданное обеспечивают минимум интеграла квадрата управляющих воздействий;
4) у которых достигается наименьшее время перевода изображающей точки объекта управления в фазовом пространстве из одного состояния в другое;
5) у которых обеспечивается перевод изображающей точки в фазовом пространстве из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов.

***11.2.4. Системами, оптимальными по потерям управления, называют системы,***

1) в которых обеспечивается минимальная площадь под графиком переходного процесса управляемой величины или сигнала ошибки;
2) которые имеют минимальные отклонения действительных координат объекта от желаемых значений;
3) которые при переводе изображающей точки фазового пространства из начального состояния в заданное обеспечивают минимум интеграла квадрата управляющих воздействий;
4) у которых достигается наименьшее время перевода изображающей точки объекта управления в фазовом пространстве из одного состояния в другое;
5) у которых обеспечивается перевод изображающей точки в фазовом пространстве из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов.

***11.2.5. Системами, оптимальными в смысле минимума квадратичной интегральной оценки, называют системы,***

1) в которых обеспечивается минимальная площадь под графиком переходного процесса управляемой величины или сигнала ошибки;
2) которые имеют минимальные отклонения действительных координат объекта от желаемых значений;
3) которые при переводе изображающей точки фазового пространства из начального состояния в заданное обеспечивают минимум интеграла квадрата управляющих воздействий;
4) у которых достигается наименьшее время перевода изображающей точки объекта управления в фазовом пространстве из одного состояния в другое;
5) у которых обеспечивается перевод изображающей точки в фазовом пространстве из начального состояния в заданное при минимальных затратах ресурсов.

## 11.3. Принцип максимума и метод динамического программирования

***11.3.1. При решении задач оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина математическое описание объекта n-го порядка должно быть представлено***

1) в виде передаточной функции;
2) с помощью “*n*” дифференциальных уравнений первого порядка (форма Коши);
3) в виде амплитудно-фазовой частотной функции;
4) в виде дифференциального уравнения *n*-го порядка;
5) в виде переходной функции.

***11.3.2. Основная задача принципа максимума Понтрягина состоит***

1) в синтезе оптимального по быстродействию закона управления линейным стационарным объектом в разомкнутом контуре;
2) в синтезе оптимального по быстродействию закона управления линейным стационарным объектом в замкнутом контуре;
3) в отыскании в классе ступенчатых кусочно-непрерывных функций, лежащих в замкнутой области допустимых управлений, оптимального управления, соответствующего принятому критерию оптимальности;
4) в синтезе оптимального по быстродействию закона управления линейным нестационарным объектом в разомкнутом контуре;
5) в синтезе оптимального по быстродействию закона управления нелинейным нестационарным объектом в замкнутом контуре.

***11.3.3. Суть принципа максимума Понтрягина состоит в том,***

1) чтобы быстрее реализовать нужный критерий оптимальности;
2) чтобы без экономических потерь реализовать заданный критерий оптимальности;
3) чтобы найти алгоритм управления, обеспечивающий перевод объекта из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время;
4) что для быстрейшего достижения цели управления необходимо использовать максимально допустимые управления, т. е. такие, которые лежат на границе областей допустимых значений;
5) чтобы найти алгоритм управления при заданном критерии оптимальности и ограничениях на управляющее воздействие.

***11.3.4. Метод динамического программирования Беллмана основан на “принципе оптимальности”, в котором говорится, что***

1) для нахождения оптимального управления необходима поэтапная (пошаговая) оптимизация траектории управляемой величины в фазовом пространстве;
2) на каждом шаге управления закон управления должен быть разный;
3) при пошаговой оптимизации траектории управляемой величины в фазовом пространстве сначала оптимизируют последний участок траектории;
4) оптимальное управление не зависит от “предыстории” системы и определяется лишь ее состоянием в рассматриваемый момент времени;
5) при пошаговой оптимизации траектории управляемой величины в фазовом пространстве сначала оптимизируют начальный участок траектории.

***11.3.5. При решении задач оптимального управления с использованием метода динамического программирования Беллмана математическое описание объекта n-го порядка должно быть представлено***

1) в виде передаточной функции;
2) с помощью “*n*” дифференциальных уравнений первого порядка (форма Коши);
3) в виде амплитудно-фазовой частотной функции;
4) в виде дифференциального уравнения *n*-го порядка;
5) в виде переходной функции.

## 11.4. Адаптивные системы управления

***11.4.1. Адаптивными (самоприспособляющимися) называют такие системы управления, которые***

1) в условиях непредвиденного изменения свойств управляемого объекта автоматически изменяют структуру управляющего устройств
2) в условиях непредвиденного изменения свойств управляемого объекта, внешних воздействий или цели управления автоматически изменяют структуру или параметры управляющего устройства, обеспечивая необходимое качество управления;
3) в условиях непредвиденного изменения внешних воздействий автоматически изменяют параметры управляющего устройства;
4) в условиях изменения цели управления автоматически изменяют структуру и параметры управляющего устройства;
5) в условиях непредвиденного изменения свойств управляемого объекта автоматически изменяют параметры управляющего устройства.

***11.4.2. В самонастраивающихся системах адаптация***

1) осуществляется изменением параметров управляющего устройства;
2) осуществляется изменением параметров управляющего воздействия;
3) осуществляется изменением параметров управляющего устройства или управляющего воздействия;
4) достигается изменением структуры управляющего устройства;
5) достигается изменением структуры и параметров управляющего устройства.

***11.4.3. В самоорганизующихся системах адаптация***

1) осуществляется изменением параметров управляющего устройства;
2) осуществляется изменением параметров управляющего воздействия;
3) осуществляется изменением параметров управляющего устройства или управляющего воздействия;
4) достигается изменением структуры управляющего устройства;
5) достигается изменением структуры и параметров управляющего устройства.

***11.4.4. Системами оптимизации называют адаптивные системы, которые обеспечивают***

1) выполнение какого-либо критерия оптимальности;
2) достижение какого-либо показателя качества;
3) во время управления изучение характеристик объекта;
4) во время управления поиск наилучшего управляющего воздействия;
5) в процессе функционирования экстремизацию какого-либо показателя качества.

***11.4.5. Экстремальной системой управления называют***

1) самонастраивающуюся систему с оптимизацией какого-либо показателя статического режима объекта;
2) систему, в которой достигается оптимум какого-либо показателя по квадратичному критерию;
3) систему, в которой минимизируют расход энергии или материального ресурса;
4) систему, которая обеспечивает стабилизацию качества управления;
5) систему, которая обеспечивает оптимизацию качества управления.

## ОТВЕТЫ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.1.1 – 2 | 1.2.1 -2 | 1.3.1 - 3 | 1.4.1 – 4 | | |
| 1.1.2 – 3 | 1.2.2 - 3 | 1.3.2 - 3 | 1.4.2 – 5 | | |
| 1.1.3 – 4 | 1.2.3 - 1 | 1.3.3 - 3 | 1.4.3 – 2 | | |
| 1.1.4 – 5 | 1.2.4 - 5 | 1.3.4 - 4 | 1.4.4 – 3 | | |
| 1.1.5 - 1 | 1.2.5 - 4 | 1.3.5 - 5 | 1.4.5 – 4 | | |
| | | | | | |
| 2.1.1 - 3 | 2.2.1 - 3 | 2.3.1 - 2 | 2.4.1 - 4 | 2.5.1 - 3 | 2.6.1 – 4 |
| 2.1.2 - 4 | 2.2.2 - 2 | 2.3.2 - 3 | 2.4.2 - 5 | 2.5.2 - 4 | 2.6.2 – 3 |
| 2.1.3 - 5 | 2.2.3 - 3 | 2.3.3 - 4 | 2.4.3 - 3 | 2.5.3 - 2 | 2.6.3 – 5 |
| 2.1.4 - 3 | 2.2.4 - 5 | 2.3.4 - 5 | 2.4.4 - 4 | 2.5.4 - 5 | 2.6.4 - 2 |
| 2.1.5 - 2 | 2.2.5 - 4 | 2.3.5 - 3 | 2.4.5 - 5 | 2.5.5 - 4 | 2.6.5 – 4 |
| | | | | | |
| 3.1.1 - 5 | 3.2.1 - 3 | 3.3.1 - 4 | 3.4.1 - 4 | 3.5.1 – 3 | |
| 3.1.2 - 4 | 3.2.2 - 4 | 3.3.2 - 4 | 3.4.2 - 3 | 3.5.2 – 4 | |
| 3.1.3 – 2 | 3.2.3 - 5 | 3.3.3 - 3 | 3.4.3 - 5 | 3.5.3 – 2 | |
| 3.1.4 – 3 | 3.2.4 - 2 | 3.3.4 - 2 | 3.4.4 - 1 | 3.5.4 – 5 | |
| 3.1.5 - 1 | 3.2.5 - 5 | 3.3.5 - 5 | 3.4.5 - 3 | 3.5.5 – 3 | |
| | | | | | |
| 4.1.1 - 3 | 4.2.1 - 3 | 4.3.1 - 4 | 4.4.1 - 3 | 4.5.1 - 2 | 4.6.1 – 2 |
| 4.1.2 - 4 | 4.2.2 - 4 | 4.3.2 - 3 | 4.4.2 - 4 | 4.5.2 - 3 | 4.6.2 – 3 |
| 4.1.3 - 2 | 4.2.3 - 2 | 4.3.3 - 2 | 4.4.3 - 2 | 4.5.3 - 2 | 4.6.3 – 5 |
| 4.1.4 - 4 | 4.2.4 - 5 | 4.3.4 - 1 | 4.4.4 - 1 | 4.5.4 - 1 | 4.6.4 – 4 |
| 4.1.5 - 5 | 4.2.5 - 2 | 4.3.5 - 5 | 4.4.5 - 5 | 4.5.5 - 5 | 4.6.5 – 1 |
| | | | | | |
| 5.1.1 - 4 | 5.2.1 - 5 | 5.3.1 - 3 | 5.4.1 - 4 | 5.5.1 – 4 | |
| 5.1.2 - 2 | 5.2.2 - 2 | 5.3.2 - 2 | 5.4.2 - 3 | 5.5.2 – 5 | |
| 5.1.3 - 3 | 5.2.3 - 1 | 5.3.3 - 4 | 5.4.3 - 4 | 5.5.3 – 5 | |
| 5.1.4 - 5 | 5.2.4 - 2 | 5.3.4 - 5 | 5.4.4 - 5 | 5.5.4 – 1 | |
| 5.1.5 - 2 | 5.2.5 - 4 | 5.3.5 - 1 | 5.4.5 - 3 | 5.5.5 – 2 | |
| | | | | | |
| 6.1.1 - 3 | 6.2.1 - 3 | 6.3.1 - 4 | 6.4.1 – 3 | | |
| 6.1.2 - 4 | 6.2.2 - 4 | 6.3.2 - 3 | 6.4.2 – 4 | | |
| 6.1.3 - 2 | 6.2.3 - 2 | 6.3.3 - 5 | 6.4.3 – 5 | | |
| 6.1.4 - 5 | 6.2.4 - 2 | 6.3.4 - 2 | 6.4.4 – 4 | | |
| 6.1.5 - 1 | 6.2.5 - 5 | 6.3.5 - 2 | 6.4.5 – 1 | | |
| | | | | | |
| 7.1.1 - 3 | 7.2.1 - 3 | 7.3.1 - 3 | 7.4.1 – 3 | | |
| 7.1.2 - 5 | 7.2.2 - 5 | 7.3.2 - 4 | 7.4.2 – 5 | | |
| 7.1.3 - 3 | 7.2.3 - 2 | 7.3.3 - 2 | 7.4.3 – 4 | | |
| 7.1.4 - 2 | 7.2.4 - 1 | 7.3.4 - 5 | 7.4.4 – 2 | | |
| 7.1.5 - 3 | 7.2.5 - 3 | 7.3.5 - 2 | 7.4.5 – 1 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8.1.1 – 3 | 8.2.1 - 3 | 8.3.1 - 3 | 8.4.1 – 2 |
| 8.1.2 - 2 | 8.2.2 - 4 | 8.3.2 - 4 | 8.4.2 – 4 |
| 8.1.3 - 5 | 8.2.3 - 1 | 8.3.3 - 2 | 8.4.3 – 3 |
| 8.1.4 - 3 | 8.2.4 - 2 | 8.3.4 - 3 | 8.4.4 – 5 |
| 8.1.5 - 4 | 8.2.5 - 2 | 8.3.5 - 1 | 8.4.5 – 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9.1.1 – 3 | 9.2.1 - 5 | 9.3.1 - 1 | 9.4.1 – 3 |
| 9.1.2 – 3 | 9.2.2 - 1 | 9.3.2 - 5 | 9.4.2 – 4 |
| 9.1.3 – 1 | 9.2.3 - 2 | 9.3.3 - 3 | 9.4.3 – 4 |
| 9.1.4 – 2 | 9.2.4 - 4 | 9.3.4 - 4 | 9.4.4 – 3 |
| 9.1.5 - 4 | 9.2.5 - 3 | 9.3.5 - 2 | 9.4.5 – 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10.1.1 – 1 | 10.2.1 – 1 | 10.3.1 - 3 | 10.4.1 – 3 |
| 10.1.2 – 2 | 10.2.2 – 3 | 10.3.2 - 2 | 10.4.2 – 2 |
| 10.1.3 – 3 | 10.2.3 – 3 | 10.3.3 - 3 | 10.4.3 – 4 |
| 10.1.4 – 4 | 10.2.4 – 2 | 10.3.4 - 4 | 10.4.4 – 5 |
| 10.1.5 - 5 | 10.2.5 – 4 | 10.3.5 - 5 | 10.4.5 – 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11.1.1 – 3 | 11.2.1 – 4 | 11.3.1 – 2 | 11.4.1 – 2 |
| 11.1.2 – 2 | 11.2.2 – 5 | 11.3.2 – 3 | 11.4.2 – 3 |
| 11.1.3 – 4 | 11.2.3 – 3 | 11.3.3 – 4 | 11.4.3 – 4 |
| 11.1.4 – 1 | 11.2.4 – 2 | 11.3.4 – 4 | 11.4.4 – 5 |
| 11.1.5 - 2 | 11.2.5 – 1 | 11.3.5 – 2 | 11.4.5 – 1 |

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Лукас, В. А.* Теория управления техническими системами: учебное пособие для вузов / В. А. Лукас. – 4-е издание, исправленное. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2005. – 677 с.

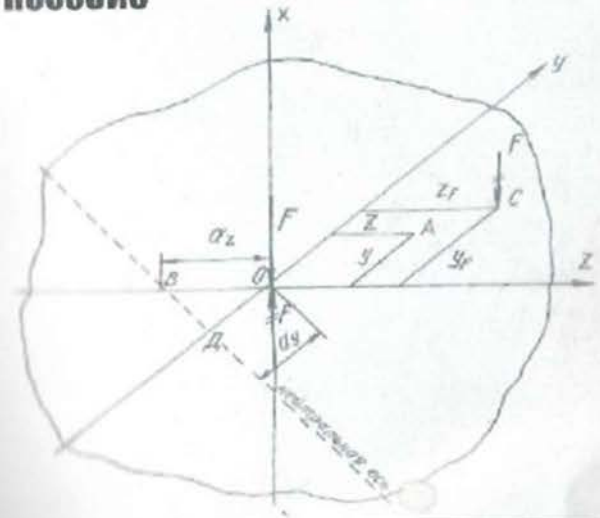
*Певзнер, Л. Д.* Теория систем управления: учебное пособие для вузов / Л. Д. Певзнер. – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 472 с.

*Салихов, З. Г.* Терминология основных понятий автоматики: учебно-справочное пособие / З. Г. Салихов. – М.: Изд-во МИСиС, 2002. – 126 с.

*Брюханов, В. Н.* Теория автоматического управления: учебник для вузов / В. Н. Брюханов [и др.]; под ред. Ю. М. Соломенцева – М.: Высшая школа, 2002. - 286 с.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие




Екатеринбург - 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»



# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом
Уральского государственного горного университета
в качестве учебного пособия

Издание второе, исправленное и дополненное

Екатеринбург – 2012

УДК 620.10
М 74

*Рецензенты:* Таугер В. М., профессор кафедры мехатроника УрГУПС, канд. техн. наук, доцент; Раевская Л. Т., зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики УГЛТУ, канд. техн. наук, доцент.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

М 74 **Сопротивление материалов в примерах и задачах:** учебное пособие / 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург Н. В. Мокрушин, С. А. Ляпцев, Л. Д. Чучманова, К. В. Середа; Уральский гос. горный университет.– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012.– 184 с.
ISBN 978-5-8019-0185-5

Учебное пособие отражает опыт проведения практических занятий по дисциплине «Сопротивление материалов» в Уральском государственном горном университете. В пособии приведены примеры расчетов стержней, валов, балок, испытывающих простые и сложные виды деформаций. Для самостоятельной работы представлены задания по основным темам дисциплины.

Учебное пособие предназначено для студентов очного и заочного обучения.

Рис. 42. Табл. 22. Библ. 21 наим.

УДК 620.10

ISBN 978-5-8019-0185-5

© Уральский государственный
горный университет, 2008, 2012
© Мокрушин Н. В., Ляпцев С. А.,
Чучманова Л. Д., Середа К. В., 2008, 2012

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Введение в учебную программу высших технических учебных заведений новых дисциплин, отражающих современное состояние науки и техники, при ограниченных сроках обучения привело к существенному сокращению количества лекционных часов по курсу сопротивления материалов.

Восполнение появившихся в результате этого пробелов в знании студентами вузов сопротивления материалов может быть достигнуто в известной мере за счет самостоятельного изучения ими необходимых разделов этого важного для будущего инженера курса. Данное учебное пособие составлено в соответствии с программой курса по сопротивлению материалов. По каждой теме предмета в пособии даны краткие теоретические сведения и основные формулы. Приведены примеры расчетов стержней на растяжение и сжатие (глава 1), примеры по определению главных моментов инерции поперечных сечений различного профиля (глава 2), рассмотрены примеры расчета вала на кручение (глава 3). В главе 4 рассмотрены примеры расчетов балок, испытывающих деформацию поперечного изгиба, на прочность и жесткость. С применением метода сил в главе 5 приведены примеры расчетов статически неопределимых неразрезных балок и плоских статически неопределимых рам. Виды сложного сопротивления (косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением) рассмотрены в главе 6. Рассмотрение деформации продольного изгиба и расчеты на устойчивость гибких стержней приведены в главе 7.

Более подробное изложение теоретического материала приведено в работах [1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 18].

Для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ по каждой теме составлены задания с необходимыми рисунками и таблицами. Для расчетов рекомендуется следующая литература [2, 8, 11, 14, 15, 16].

При выполнении практических расчетов используются следующие основные характеристики материалов [17]:

*модули продольной упругости:* стали $E_{\text{с}} = 2 \cdot 10^{11}$ Па; дюраля (и алюминия) $E_{\text{д}} = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па; меди $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{11}$ Па; чугуна $E_{\text{ч}} = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па; дерева $E_{\text{д}} = 1 \cdot 10^{10}$ Па;

*модуль сдвига стали:* $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па;

*коэффициенты теплового линейного расширения:* стали $\alpha_{\text{с}} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град; дюраля $\alpha_{\text{д}} = 2,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град; меди $\alpha_{\text{м}} = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/град;

*коэффициент Пуассона для стали:* $\nu = 0,30$.

# Глава 1

# ПРОДОЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

**Растяжением** называют такой вид деформации, при котором в каждом его поперечном сечении возникают только продольные внутренние усилия.

Продольное усилие $F$ в любом поперечном сечении численно равно алгебраической сумме проекций на ось стержня внешних сил, приложенных к части стержня, расположенной по одну сторону от сечения. Усилие считается положительным, если вызывает растяжение рассматриваемого участка.

При растяжении (сжатии) в сечении возникают только нормальные напряжения, которые определяются по формуле (1.1):

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{1.1}$$

где $F$ – продольное усилие, кН; $A$ – площадь поперечного сечения, м$^2$.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} \le \sigma_{adm}, \tag{1.2}$$

где $\sigma_{adm}$ – допускаемое нормальное напряжение материала стержня, МПа.

Абсолютная деформация $\Delta l$ однородного участка (постоянные сечение и материал) определяется **по закону Гука**:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}\ , \tag{1.3}$$

где $l$ – длина участка, м; $E$ – модуль продольной упругости материала (модуль Юнга), Па.

Для наглядного представления строятся эпюры. Эпюрами продольных сил и нормальных напряжений называют графики, показывающие законы изменения сил и напряжений в поперечных сечениях по длине стержня. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений строятся в выбранном масштабе с учетом знаков.

### Пример 1.1.

К узлу $C$ кронштейна $ABC$ (рис. 1.1, *а*) приложена сила $F$ = 100 кН. Стержень $AC$ – стальной, круглого сечения диаметром $d$ = 30 мм; стержень $BC$ – дюралюминиевый, квадратного сечения со стороной $a$ = 40 мм. Определить напряжения в стержнях, а также горизонтальное, вертикальное и полное перемещения узла $C$.

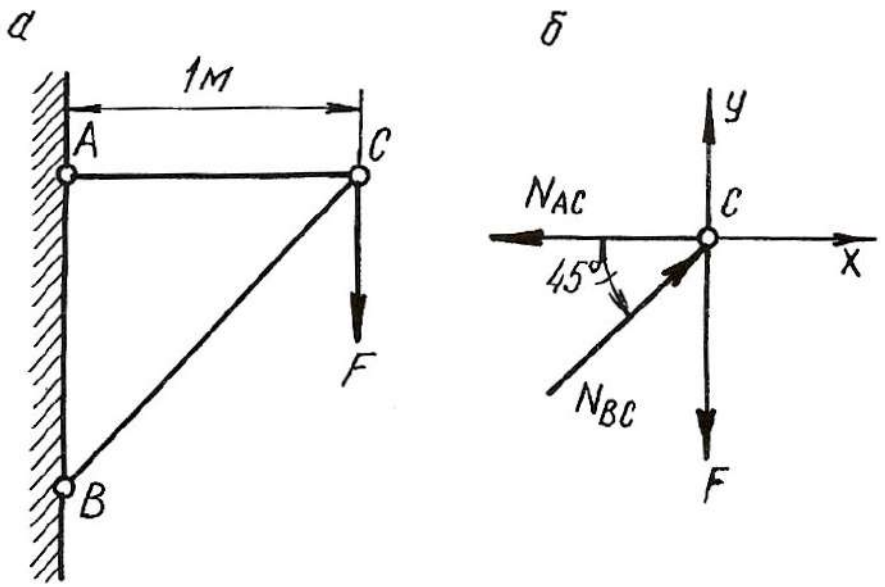



Рис. 1.1.

*Решение.*

Для определения продольных сил в стержнях $AC$ и $BC$ условно вырезаем узел $C$, заменяем действие стержней на узел усилиями и составляем уравнение равновесия для узла $C$ (рис. 1.1, *б*)

$$\sum X = 0; \quad -N_{AC} + N_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{BC} \cdot \sin 45^\circ - F = 0.$$

Откуда

$$N_{BC} = \frac{F}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,707} = 141 \cdot 10^3 \text{ Н} = 141 \text{ кН},$$

$$N_{AC} = N_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 141 \cdot 10^3 \cdot 0,707 = 100 \cdot 10^3 \text{ Н} = 100 \text{ кН}.$$

Стержень $AC$ растянут, а стержень $BC$ сжат. Определяем площади поперечных сечений стержней

$$A_{AC} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 706 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$A_{BC} = a^2 = (40 \cdot 10^{-3})^2 = 1600 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержней $AC$ и $BC$

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{100 \cdot 10^3}{706 \cdot 10^{-6}} = 141 \cdot 10^6 \text{ Па} = 141 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC} = -\frac{N_{BC}}{A_{BC}} = -\frac{141 \cdot 10^3}{1600 \cdot 10^{-6}} = -88 \cdot 10^6 \text{ Па} = -88 \text{ МПа}.$$

Знак минус указывает на то, что в стержне $BC$ возникает деформация сжатия.

Находим удлинения стержней:

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E_{\text{ст}} \cdot A_{AC}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 706 \cdot 10^{-6}} = 0,71 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 0,71\ \text{мм};$$

$$\Delta l_{BC} = -\frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E_{\text{дюр}} \cdot A_{BC}} = -\frac{141 \cdot 10^3 \cdot 1,41}{7 \cdot 10^{10} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}} = -1,77 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = -1,77\ \text{мм},$$

где $l_{BC} = \dfrac{l_{AC}}{\cos 45^\circ} = \dfrac{1}{0,707} = 1,41$ м; $E_{\text{ст}}$, $E_{\text{дюр}}$ – модули продольной упругости стального и дюралюминиевого стержней, Па.

Для определения перемещения точки $C$ мысленно разъединим стержни в этом шарнире и отметим их новые длины $AC_1$ и $BC_2$ (рис. 1.2, *а*). Для того, чтобы найти новое положение точки $C$, необходимо деформированные стержни свести вместе путем их вращения вокруг шарниров $A$ и $B$. Точки $C_1$ и $C_2$ будут перемещаться по дугам, которые вследствие их малости могут быть приняты за прямые $C_1C_3$ и $C_2C_3$, перпендикулярные к стержням $AC$ и $BC$. Точка пересечения этих перпендикуляров (точка $C_3$) и даст положение узла $C$ после деформации. На рис. 1.2, *б* изображена диаграмма перемещений в большом масштабе.

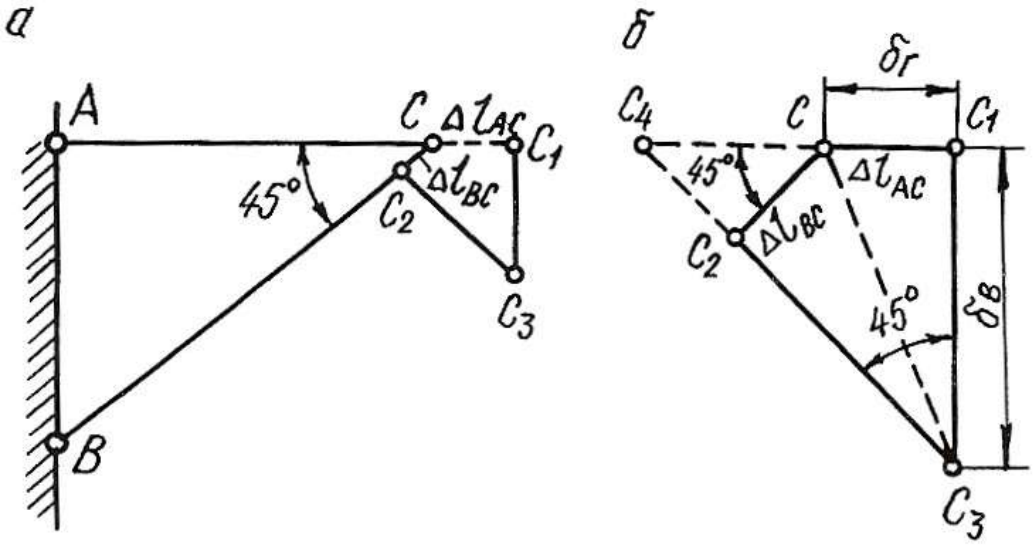



Рис. 1.2.

Горизонтальное перемещение узла $C$ равно $\delta_{\text{г}} = \Delta l_{\text{AC}} = 0,71$ мм.

Для удобства определения вертикального перемещения произведем дополнительное построение. Продолжим линии $C_1C$ и $C_3C_2$ до их пересечения в точке $C_4$.

Вертикальное перемещение узла $C$

$$\delta_в = C_1C_3 = \frac{C_1C_4}{\text{tg}45^o} = C_1C_4 = C_1C + CC_4 = \Delta l_{AC} + \frac{\Delta l_{BC}}{\cos 45^o};$$

$$\delta_в = 0,71 + \frac{1,77}{0,707} = 3,21 \text{ мм}.$$

Полное перемещение узла $C$

$$\delta = CC_3 = \sqrt{\delta_г^2 + \delta_в^2} = \sqrt{0,71^2 + 3,21^2} = 3,29 \text{ мм}.$$

## 1.1. Влияние собственного веса на напряжения и перемещения

Если ось в стержне вертикальна, то его собственный вес вызывает центральное растяжение или сжатие. Если вертикальный брус закреплен верхним концом, то от собственного веса он растягивается, а при закреплении нижнего конца – сжимается. Собственный вес вертикального бруса можно рассматривать как продольную (осевую) внешнюю нагрузку, распределенную вдоль оси бруса.

Рассмотрим брус постоянного сечения, закрепленный верхним концом. Продольная сила от собственного веса в поперечном сечении бруса на расстоянии $x$ от его нижнего конца равна весу нижележащей части бруса

$$N_x = \rho g A x, \tag{1.4}$$

где $N_x$ – продольная сила от собственного веса, Н; $\rho$ – плотность материала, кг/м$^3$; $g$ – ускорение свободного падения, м/с$^2$; $A$ – площадь поперечного сечения бруса, м$^2$; $x$ – расстояние от нижнего конца стержня, м.

Напряжение от собственного веса определяется по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \rho g x. \tag{1.5}$$

По формулам (1.4) и (1.5) строятся эпюры $N$ и $\sigma$ с учетом знаков. Если на стержень действует дополнительная сила $F$, то продольная сила и нормальное напряжение определяются по формулам:

$$N_x = F + \rho g A x; \tag{1.6}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \rho g x. \tag{1.7}$$

Полное удлинение (укорочение) стержня постоянного сечения от собственного веса определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}, \tag{1.8}$$

где $l$ – длина стержня, м; $E$ – модуль продольной упругости материала, Па.

При действии внешней силы $F$ и собственного веса удлинение стержня определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E}. \qquad (1.9)$$

В формулах (1.7) и (1.9) физический смысл первого слагаемого – напряжение и удлинение от внешней силы, второго – напряжение и удлинение от собственного веса.

Перемещение любого поперечного сечения бруса, закрепленного верхним концом, равно удлинению части бруса, лежащей над сечением, и равно сумме удлинений под действием собственного веса верхней части, нижней части бруса и внешней силы.

Рассмотрим подробнее решение типовой задачи.

**Пример 1.2.**

Для стального бруса переменного сечения (рис. 1.3, *а*) с учетом собственного веса и при продольной нагрузке $F$ требуется:

1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса.
2. Найти полное удлинение (укорочение) бруса.
3. Определить перемещение сечения I-I.

Исходные данные: $A = 20$ см$^2$; $a = 1{,}0$ м; $b = 1{,}5$ м; $c = 1{,}0$ м; $F = 40$ кН.

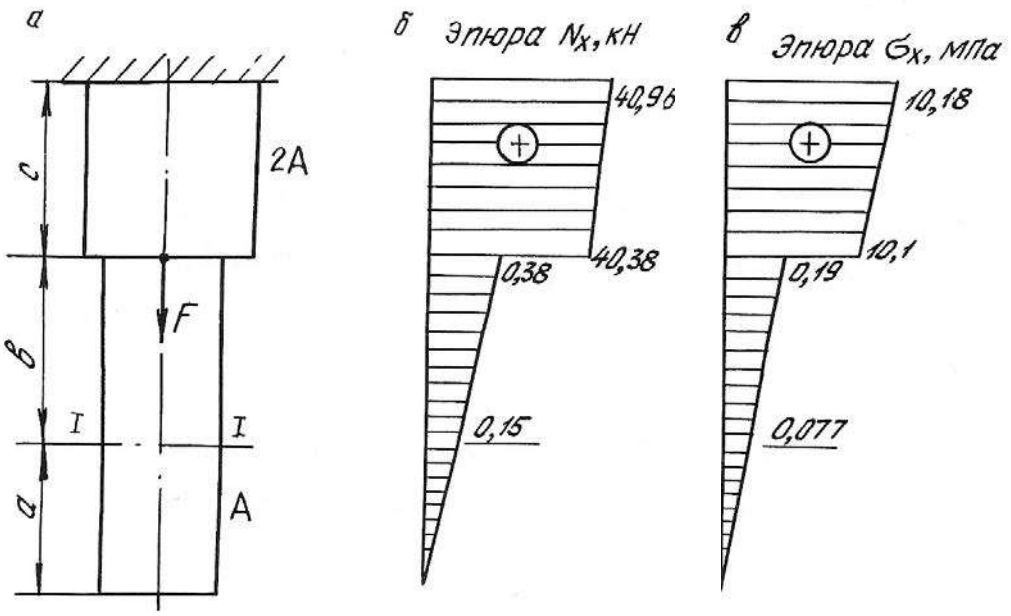



Рис. 1.3.

*Решение.*

Определим продольную силу и нормальное напряжение в поперечном сечении по формулам (1.6) и (1.7):

а) на участке длиной $a$ (нижний участок): $0 \le x \le 1{,}0$ м;

$$N_x = \rho g A x;$$

$$\sigma_x = \rho g x.$$

При $x = 0$ $\quad N_x = 0,$

$\sigma_x = 0.$

При $x = 1$ м $\quad N_x = 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 150$ Н $= 0{,}15$ кН;

$\sigma_x = 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 80000$ Па $= 0{,}08$ МПа.

б) на участке длиной $b$ (средний участок): $1{,}0 \le x \le 2{,}5$ м;

$$N_x = Q_a + \rho g A (x - a);$$

$$\sigma_x = \frac{Q_a}{A} + \rho g (x - a);$$

где $Q_a = \rho g A a = 0{,}15$ кН – вес нижнего участка бруса; для среднего участка он играет роль внешней силы.

При $x = 1{,}0$ м; $\quad N_x = Q_a = 0{,}15$ кН;

$\sigma_x = 0{,}08$ МПа.

При $x = 2{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}38$ кН;

$\sigma_x = 0{,}08 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}19$ МПа.

в) на участке длиной $c$ (верхний участок): $2{,}5 \le x \le 3{,}5$ м;

$$N_x = Q_a + Q_b + F + \rho g 2A(x - a - b);$$

$$\sigma_x = \frac{Q_a + Q_b + F}{2A} + \rho g (x - a - b),$$

где $Q_b = \rho g A b = 0{,}23$ кН – вес среднего участка бруса.

При $x = 2{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 0{,}23 + 40 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 10^{-7} = 40{,}38$ кН;

$\sigma_x = 10{,}1$ МПа.

При $x = 3{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 0{,}23 + 40 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-7} = 40{,}96$ кН;

$\sigma_x = 10{,}18$ МПа.

Строим эпюры $\boldsymbol{N}_x$ (рис. 1.3, *б*) и $\sigma_x$ (рис. 1.3, *в*).

Определим полное удлинение стержня по формуле (1.9). Полное удлинение складывается из удлинений каждого участка бруса под действием внешних сил и собственного веса.

$$\Delta l = \Delta a + \Delta b + \Delta c \ ;$$

где $\Delta a = \dfrac{\rho g a^2}{2E} = \dfrac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0{,}19 \cdot 10^{-6}$ м;

$$\Delta b = \frac{Q_a \cdot b}{EA} + \frac{\rho g b^2}{2E} = \frac{0{,}15 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} =$$

$$= 0{,}56 \cdot 10^{-6} + 0{,}43 \cdot 10^{-6} = 0{,}99 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta c = \frac{(Q_a + Q_b + F)c}{E \cdot 2A} + \frac{\rho g c^2}{2E} = \frac{(0{,}15 + 0{,}23 + 40) \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} =$$

$$= 50{,}48 \cdot 10^{-6} + 0{,}19 \cdot 10^{-6} = 50{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l = 0{,}19 \cdot 10^{-6} + 0{,}99 \cdot 10^{-6} + 50{,}67 \cdot 10^{-6} = 51{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Перемещение сечения I-I равно удлинению лежащей над сечением части бруса, т. е.

$$\delta_{\text{I-I}} = \Delta c + \Delta b = 0{,}99 \cdot 10^{-6} + 50{,}67 \cdot 10^{-6} = 51{,}66 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

## 1.2. Напряженное состояние материала в точке

**Напряженным состоянием** называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через данную точку. В различных точках тела напряженное состояние неоднородно и определить все значения возникающих напряжений затруднительно. В связи с этим в сопротивлении материалов точку рассматривают в виде элементарного параллелепипеда с гранями $dx \cdot dy \cdot dz$. При этом считается, что возникающие напряжения на гранях и в наклонных сечениях распределяются равномерно. Нормальные напряжения на гранях обозначаются: $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$, а касательные: $\tau_{xy}$, $\tau_{yx}$, $\tau_{zy}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{xz}$, $\tau_{zx}$. Двойной индекс при касательных напряжениях указывает на направление и плоскость, где они действуют. Например, индексы при напряжении $\tau_{xy}$ означают, что $x$ – направление действия этого напряжения по оси $x$; $y$ – это напряжение возникает в плоскости, нормаль к которой параллельна оси $y$.

Во взаимно перпендикулярных сечениях касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Это свойство касательных напряжений называется **законом парности касательных напряжений**

$$-\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Рассматриваемый параллелепипед в теле стержня можно сориентировать таким образом, что по его граням будут действовать только нормальные напряжения, а касательные будут равны нулю. В этом случае грани будут называться главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения – главными напряжениями. По количеству главных напряжений, возникающих одновременно на главных площадках, различают три вида напряженного состояния точки упругого тела: линейное, плоское и объемное. Главные напряжения обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Принято считать, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Наиболее часто встречается плоское напряженное состояние материала.

Для правильной оценки опасности, угрожающей прочности стержня, необходимо знать полностью его напряженное состояние. Это требует умение вычислять напряжения не только по сечениям, перпендикулярным оси стержня, но и по наклонным сечениям.

Напряжения в наклонных сечениях, нормаль к которым с осью $x$ составляет угол $\alpha$, определяются по следующим формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \qquad (1.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha, \qquad (1.11)$$

Для сечений, проходящих под углом $\beta = \alpha + 90^\circ$, возникающие напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha; \qquad (1.12)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha, \qquad (1.13)$$

Угол $\alpha$ положительный, если он отсчитан в направлении от оси $x$ к оси $y$ по кратчайшему угловому пути, против хода часовой стрелки.

Нормальное напряжение $\sigma_\alpha$ считается положительным, если его направление совпадает с направлением внешней нормали к наклонной площадке. Положительное направление $\tau_\alpha$ образовано поворотом внешней нормали к наклонной площадке на угол $90^o$ по ходу часовой стрелки.

Противоположные направления $\sigma_\alpha$ и $\tau_\alpha$ следует считать отрицательными.

Площадки, где действуют экстремальные нормальные напряжения и нет касательных напряжений, называются главными площадками, а напряжения, действующие на главных площадках – главными напряжениями. Они обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ и определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{1}{2}\left[ (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \right]; \qquad (1.14)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{1}{2}\left[ (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \right]. \qquad (1.15)$$

Положение главных площадок определяется углом наклона $\alpha_0$

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad (1.16)$$

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках под углом $45^o$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\ . \qquad (1.17)$$

**Пример 1.3.**

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние: $\sigma_x = 80$ МПа; $\alpha = 30^o$; $\tau_{xy} = 10$ МПа (рис. 1.4). Требуется найти:

1. Главные напряжения и положение главных площадок.
2. Максимальные касательные напряжения.
3. Определить аналитически величины нормальных $\sigma_\alpha$ и касательных $\tau_\alpha$ напряжений, действующих на площадках, нормаль, к которой составляет угол $\alpha$ с горизонтальной осью $x$. Показать на чертеже заданный элемент и направление соответствующих напряжений.

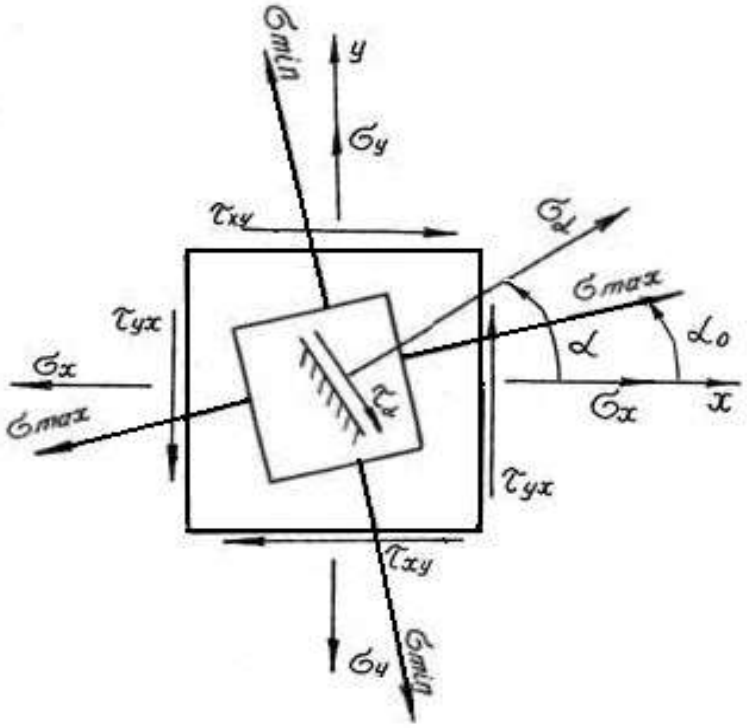



Рис. 1.4.

*Решение.*

Определим главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(80+20) + \sqrt{(80-20)^2 + 4\cdot 10^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[100 + 63,6\right] = 81,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(80+20) - \sqrt{(80-20)^2 + 4\cdot 10^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[100 - 63,6\right] = 18,2 \text{ МПа}.$$

Найдем положение главных площадок

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\cdot(-10)}{80-20} = 0,333; \qquad 2\alpha_0 = 18^o 24'; \qquad \alpha_0 = 9^o 12'.$$

Определим аналитически величины $\sigma_\alpha$ и $\tau_\alpha$, действующие на площадке, нормаль к которой составляет угол $30^o$ с горизонтальной осью (см. рис. 1.4.)

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx}\sin 2\alpha = 80\cdot 0,866^2 + 20\cdot 0,5^2 - (-10)\cdot 0,866 =$$

$$= 73,65 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{yx}\cos 2\alpha = \frac{80-20}{2}0,866 + (-10)\cdot 0,5 = 20,98 \text{ МПа}.$$

Вектор максимальных главных напряжений $\sigma_{max}$ всегда проходит через те четверти осей координат, в которых стрелки касательных напряжений сходятся.

## 1.3. Статически неопределимые стержневые системы

**Статически неопределимыми системами** называют такие системы, у которых реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях их элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений равновесия статики.

Равновесие плоской стержневой системы обеспечивается тремя опорными направлениями. Всякое закрепление сверх трех опорных направлений является «лишним» с точки зрения равновесия системы, что делает ее *статически неопределимой*. Термин «лишние» является условным. Постановка дополнительных опорных закреплений производится с целью уменьшения деформации, веса конструкции или с целью увеличения ее грузоподъемности.

Расчет статически неопределимой системы начинается с определения степени статической неопределимости системы, которая равна числу «лишних» связей (число неизвестных сил минус три – число уравнений статики для плоской системы).

Определение усилий в статически неопределимой системе связано с необходимостью составления дополнительных уравнений – уравнений совместности деформаций. Число этих уравнений должно быть равно степени статической неопределимости стержневой системы.

Уравнения совместности деформаций устанавливают геометрические зависимости между упругими перемещениями отдельных элементов при соблюдении равновесия всей системы в целом.

Геометрическая схема деформаций должна рассматриваться не с точки зрения обычной геометрии, а на основе кинематики малых перемещений, с учетом того, что траектории отдельных точек элементов являются прямыми линиями.

Решение статически неопределимых систем необходимо производить в следующей последовательности:

1. Заданную систему освободить от наложенных на нее связей, действие которых заменяется реакциями, и составить уравнения статики;
2. Определить степень статической неопределимости системы;
3. По числу «лишних» неизвестных составить дополнительные уравнения из условия совместности деформаций. В уравнениях упругие деформации выразить через усилия по закону Гука в развернутом виде по формуле (1.3);
4. Решить совместно уравнения равновесия статики и дополнительные уравнения, определяя усилия в элементах конструкций;
5. Исходя из условия задачи и на основании условия прочности, определить поперечные размеры стержней.

Рассмотрим подробнее пример расчета статически неопределимой системы.

**Пример 1.4.**

Для статически неопределимой системы (рис. 1.5), состоящей из жесткой невесомой балки $AB$ и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно, требуется:

1. Определить усилия, возникающие в стержне от действия силы $F$.
2. Подобрать сечение стержней из двух равнобоких уголков, каждое при $A_2 : A_1 = 2$; $F = 180$ кН; $a = 2{,}0$ м; $b = 1{,}0$ м; $h = 2{,}0$ м.

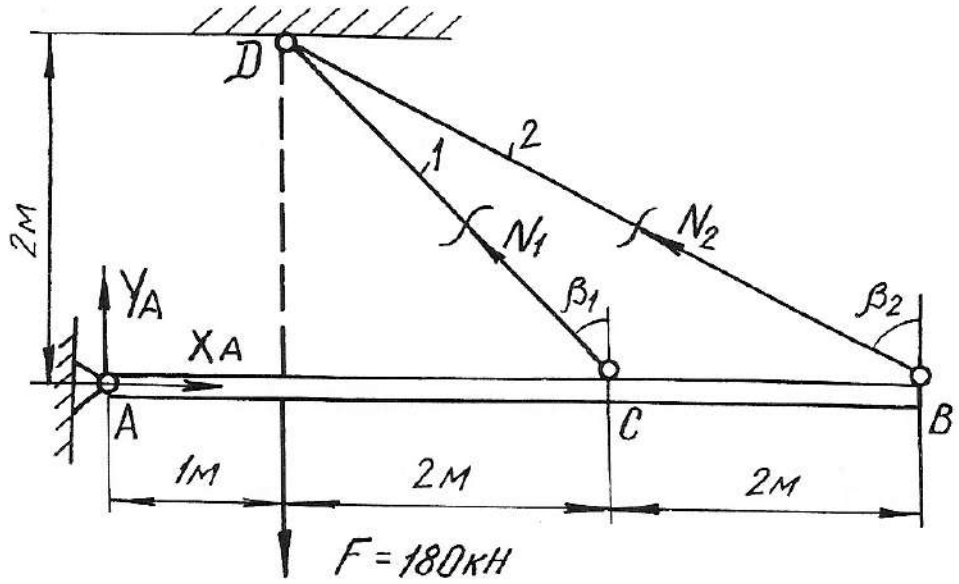



Рис. 1.5.

*Решение.*

Перед началом решения по приведенному плану определяем геометрические параметры системы

$$l_1 = DC = \sqrt{4+4} = 2{,}83 \text{ м}; \quad \beta_1 = 45°;$$

$$l_2 = DB = \sqrt{4+16} = 4{,}47 \text{ м}; \quad \sin\beta_2 = \frac{4}{4{,}47} = 0{,}89;$$

Далее освобождаем брус $AB$ от наложенных связей, заменяя их действие реакциями $X_A$, $Y_A$, $N_1$, $N_2$. Так как на балку $AB$ действуют четыре неизвестные силы, то одна связь «лишняя», т. е. задача является однажды статически неопределимой.

Из трех уравнений равновесия достаточно записать только одно уравнение, не содержащее $X_A$, $Y_A$, определение которых не ставится в задаче,

$$\sum M_A = 0; \qquad -F \cdot 1 + N_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot 3 + N_2 \cdot \cos\beta_2 \cdot 5 = 0;$$

$$-180 + N_1 \cdot 0{,}707 \cdot 3 + N_2 \cdot 0{,}45 \cdot 5 = 0 \qquad (1.18)$$

В уравнении статики два неизвестных, поэтому нужно записать еще одно дополнительное уравнение из условия совместности деформаций стержней $DB$ и $DC$. Рассматривая геометрическую схему деформаций этих стержней, считаем перемещение точек $B$ и $C$ балки вертикальными (рис. 1.6). Из подобия треугольников $ACC_1$ и $ABB_1$ имеем:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{3}{5}.$$

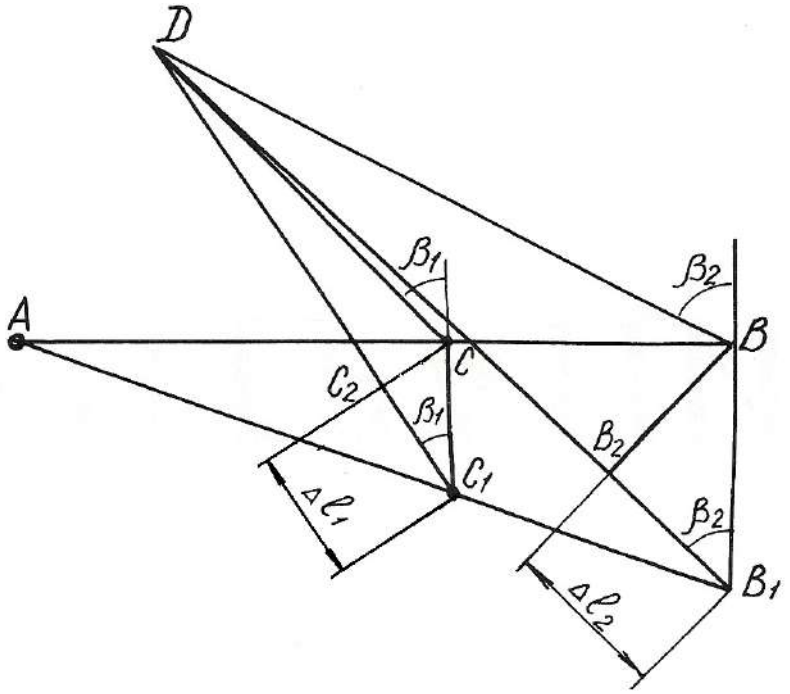



Рис. 1.6.

Учитывая, что $\begin{cases} CC_1 = \dfrac{CC_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1}; \\ BB_1 = \dfrac{B_1B_2}{\cos\beta_2} = \dfrac{\Delta l_2}{\cos\beta_2}, \end{cases}$

получим $\dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\Delta l_2}{\cos\beta_2}$; откуда

$$\Delta l_1 = 0{,}94 \cdot \Delta l_2 . \qquad (1.19)$$

Равенство (1.19) и есть условие совместности деформации стержней 1 и 2. Выразим деформации через усилия по закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 2{,}83}{EA_1}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 4{,}74}{E \cdot 2A_1}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (1.19)

$$\frac{N_1 \cdot 2{,}83}{EA_1} = 0{,}94 \frac{N_2 \cdot 4{,}74}{E \cdot 2A_1}.$$

Отсюда получим

$$2{,}83 \cdot N_1 - 2{,}10 \cdot N_2 = 0. \qquad (1.20)$$

Теперь можно определить усилия $N_1$ и $N_2$, решая совместно систему уравнений (1.18) и (1.20),

$$\begin{cases} 2{,}12 \cdot N_1 + 2{,}25 \cdot N_2 - 180 = 0; \\ 2{,}83 \cdot N_1 - 2{,}10 \cdot N_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем $N_1 = 34{,}94$ кН; $N_2 = 47{,}08$ кН.

Подбираем сечение стержней из условий прочности:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{\sigma_{adm}} = \frac{34{,}94 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2{,}18 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 2{,}18\ \text{см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{\sigma_{adm}} = \frac{47{,}08 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2{,}94 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 2{,}94\ \text{см}^2.$$

Для площадей задано условие $A_2{:}A_1 = 2$. Если принять $A_1 = 2{,}18$ см$^2$, тогда $A_2 = 4{,}36$ см$^2$. Условие $A_2 \geq 2{,}94$ см$^2$ выполняется.

Сечение подбираем из двух равнобоких уголков по ГОСТ 8509-93 (табл. П. 3).

Для первого стержня подбираем два уголка №2 (20х20х3 мм) с площадью сечения 1,13 см$^2$. Для второго стержня принимаем два уголка №4 (40х40х3 мм) с площадью сечения 2,35 см$^2$.

Полные площади сечений будут равны $A_1 = 2{,}26$ см$^2$; $A_2 = 4{,}70$ см$^2$.

Проверим отношение площадей:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4{,}70}{2{,}26} = 2{,}08.$$

Отклонение $\delta = \dfrac{2{,}08 - 2}{2} 100\ \% = 3{,}98\ \%.$

Погрешность допустимая.

**Пример 1.5.** Монтажная задача

Для статически неопределимой системы (рис. 1.7), состоящей из жесткой невесомой балки $AB$ и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно, требуется определить дополнительные усилия в стержнях конструкции, если стержень 2 изготовлен короче проектного размера на $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м при $A_2 : A_1 = 2$; $a$ =2,0 м; $b = 1{,}0$ м; $h = 2{,}0$ м.

При сборке стержни деформируются: стержень 2 – растянется, стержень 1 – сожмется. В соответствии с этим покажем направления дополнительных усилий $N_1'$ и $N_2'$ (см. рис. 1.7), возникающих после сборки конструкции.

Для определения усилий воспользуемся уравнением статики

$$\sum \text{M}_A = 0; \qquad -N_1' \cdot \cos\beta_1 \cdot 3 + N_2' \cdot \cos\beta_2 \cdot 5 = 0;$$

$$-2{,}12 N_1' + 2{,}25 N_2' = 0. \qquad (1.21)$$

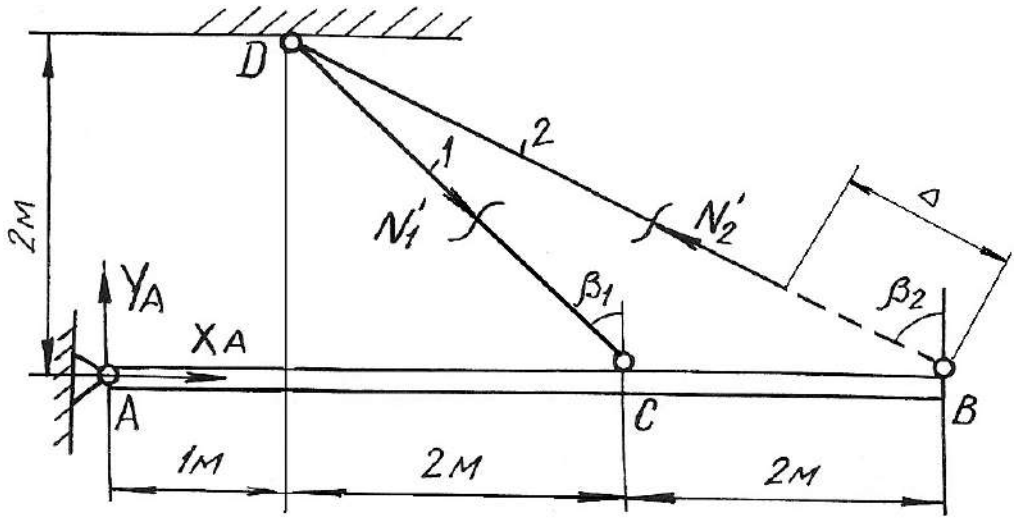



Рис. 1.7.

Уравнение одно, неизвестных два, следовательно, система один раз статически неопределима. Запишем дополнительно условие совместности деформаций. Рассмотрим картину деформаций стержней (см. рис. 1.8). Из подобия треугольников $AC_1C$ и $AB_1B$ получим $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{C_1C}{B_1B}=\dfrac{3}{5}$.

Учитывая соотношение $C_1C=\dfrac{CC_2}{\cos\beta_1}=\dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1}$; $B_1B=\dfrac{B_2B}{\cos\beta_2}=\dfrac{\Delta-\Delta l_2}{\cos\beta_2}$,

получаем $\dfrac{\Delta l_1}{0{,}707}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\Delta-\Delta l_2}{0{,}45}$; $\Delta l_1=0{,}94(\Delta-\Delta l_2)$. (1.22)

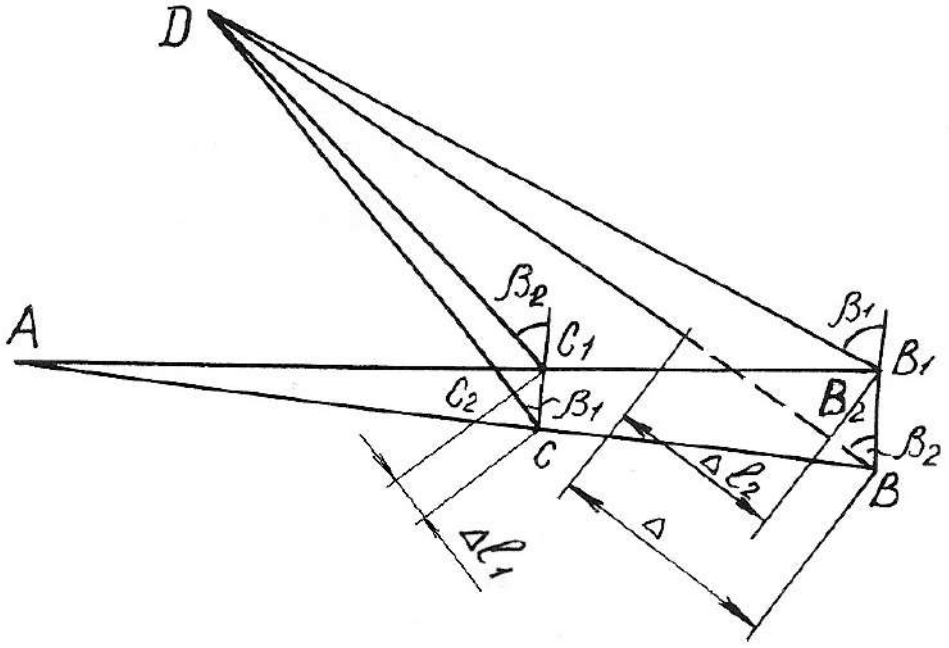



Рис. 1.8.

Выражение (1.22) – условие совместности деформаций стержней 1 и 2. Выражая деформацию через усилия по закону Гука, получим

$$\frac{N_1' l_1}{EA_1} + \frac{0{,}94 \cdot N_2' l_2}{EA_2} = 0{,}94 \cdot \Delta$$

или

$$1{,}25 \cdot N_1' + 0{,}894 \cdot N_2' = 94 \qquad (1.23)$$

Решая совместно систему уравнений (1.21) и (1.23), определяем усилия $N_1'$ и $N_2'$

$$N_1' = 42{,}75 \text{ кН}; \; N_2' = 45{,}36 \text{ кН}.$$

**Пример 1.6.**

Стержень длиной $l$ = 800 мм, защемленный обоими концами, подвергается действию двух сосредоточенных сил $F_1$=100 кН и $F_2$=150 кН (рис. 1.9, *а*). Определить напряжения, возникающие в различных сечениях стержня, и проверить его прочность, если допускаемое напряжение $\sigma_{adm}$=140 МПа. Площадь поперечного сечения $A$ = 10 см$^2$, $l_1$ = 200 мм и $l_2$ = 600 мм.

*Решение.*

Обозначим реакции в заделках стержня через $R_A$ и $R_B$. На стержень действует система сил, направленных вдоль одной прямой. Для такой системы статика дает одно уравнение равновесия

$$\sum Y = 0; \quad R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0,$$

откуда $R_A + R_B = F_1 + F_2$. (1.24)

Для составления уравнения совместности деформаций мысленно отбросим нижнюю заделку и заменим ее действие на стержень реакцией $R_B$, т. е. приложим к сечению $B$ (к нижнему торцовому сечению) такую силу, которая оказывает на стержень воздействие, полностью аналогичное воздействию заделки. Таким образом, изображенная система эквивалентна заданной системе и, поскольку в заданной системе перемещение сечения $B$ равно нулю, то и для второй системы (рис.1.9, *б*) должно соблюдаться то же условие

$$\delta_B = 0. \qquad (1.25)$$

Для определения вида левой части записанного равенства используем принцип независимости действия сил, т. е. вычислим перемещение сечения $B$ как сумму перемещений, вызванных каждой силой $F_1$, $F_2$ и $R_B$ в отдельности

$$\delta_B = \delta_{F_1} + \delta_{F_2} + \delta_{R_B}.$$

Под действием одной лишь силы $F_1$ деформируется только верхняя часть стержня, нижняя и средняя части перемещаются как твердое тело. Таким образом, перемещение сечения $B$, вызванное силой $F_1$, равно удлинению верхней части стержня

$$\delta_{F_1} = \frac{F_1 l_1}{EA}.$$

Аналогично установим, что перемещение сечения $B$ от действия силы $F_2$, равно удлинению верней и средней частей

$$\delta_{F_2} = \frac{F_2 l_2}{EA}.$$

Наконец, перемещение сечения $B$ от действия силы $R_B$ равно укорочению всего стержня

$$\delta_{R_B} = \frac{R_B l}{EA}.$$

Суммируя полученные величины и приравнивая сумму нулю согласно равенству (1.25), получим уравнение совместности деформаций,

$$\frac{F_1 l_1}{EA} + \frac{F_2 l_2}{EA} - \frac{R_B l}{EA} = 0,$$

откуда $R_B = \dfrac{F_1 l_1 + F_2 l_2}{l} = \dfrac{100 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,6}{0,8} = 137,5$ кН.

Подставив значение реакции $R_B$ в уравнение равновесия (1.24), определим значение реакции в точке $A$:

$$R_A = F_1 + F_2 - R_B = F_1 + F_2 - \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2}{l} = \frac{(F_1 + F_2) l - (F_1 l_1 + F_2 l_2)}{l} =$$

$$= \frac{(100 + 150) \cdot 0,8 - (100 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,6)}{0,8} = 112,5 \text{ кН}.$$

На рис. 1.9, *в* приведена эпюра продольных сил, в соответствии с которой определяем напряжения на различных участках стержня.

В поперечных сечениях верхней части стержня

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{112,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 112,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112,5 \text{ МПа};$$

в поперечных сечениях средней части

$$\sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа},$$

а в нижней части

$$\sigma^{(3)} = \frac{N_3}{A} = -\frac{137,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -137,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -137,5 \text{ МПа}.$$

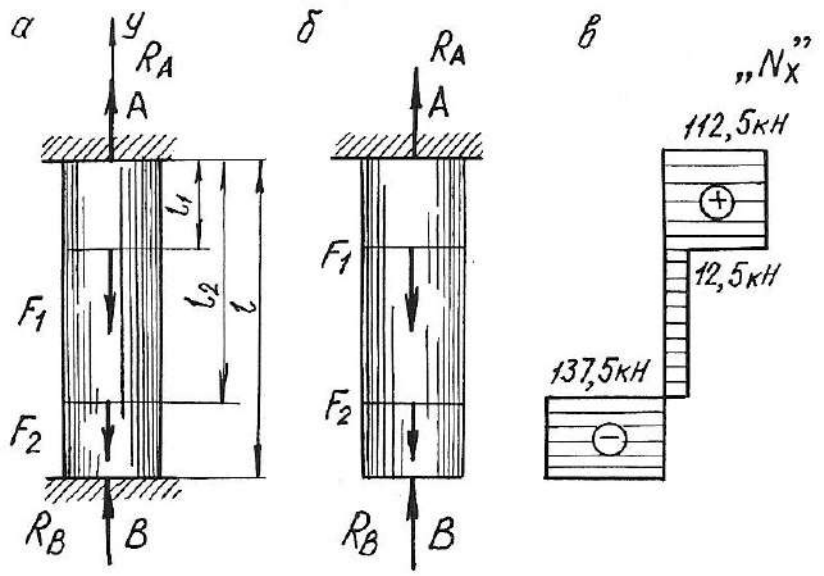



Рис. 1.9.

Наиболее напряженными, как видно из расчетов, являются поперечные сечения нижней части стержня. Это напряжение используем для проверки стержня на прочность:

$$\left|\sigma^{(3)}\right| = 137{,}5 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 140 \text{ МПа},$$

т. е. условие прочности выполняется.

**Пример 1.7.** Температурная задача

Определить допускаемое повышение температуры составного стержня (рис. 1.10.) из условия, чтобы напряжения сжатия не превышали в стальной части $\sigma_c = 120$ МПа, в медной $\sigma_м = 60$ МПа и в алюминиевой $\sigma_a = 70$ МПа. (линейные размеры на рисунке приведены в мм).

*Решение.*

Площади поперечных сечений ступеней стержня

$$A_м = \frac{\pi(50\cdot10^{-3})^2}{4} = 1963\cdot10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_a = \frac{\pi(40\cdot10^{-3})^2}{4} = 1257\cdot10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_c = \frac{\pi(30\cdot10^{-3})^2}{4} = 707\cdot10^{-6} \text{ м}^2.$$

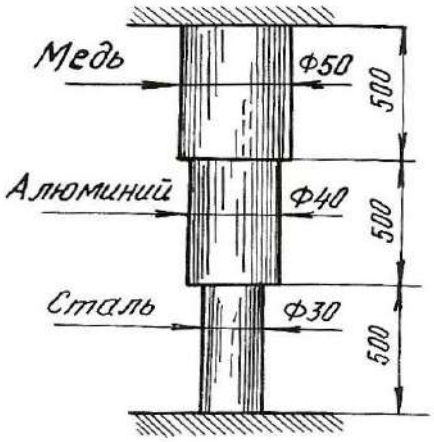



Рис. 1.10.

Продольные силы, при которых напряжения в ступенях будут равны заданным величинам, должны быть следующими:

$$N_{\text{м}} = A_{\text{м}} \cdot \sigma_{\text{м}} = 1963 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{6} = 118000 \text{ Н} = 118 \text{ кН};$$

$$N_{\text{а}} = A_{\text{а}} \cdot \sigma_{\text{а}} = 1257 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^{6} = 88000 \text{ Н} = 88 \text{ кН};$$

$$N_{\text{с}} = A_{\text{с}} \cdot \sigma_{\text{с}} = 707 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{6} = 84800 \text{ Н} = 84{,}8 \text{ кН}.$$

Величина продольной силы не одинакова для всего стержня, следовательно, в качестве допускаемой продольной силы должно быть принято меньшее из трех полученных значений, а именно $N = N_{\text{с}} = 84{,}8$ кН.

Длина стержня в результате защемления обоих концов остается при изменении температуры неизменной. Следовательно, удлинение стержня в результате повышения температуры должно равняться полученному упругому укорочению

$$\Delta l_t = \Delta l = l_{\text{м}} \alpha_{\text{м}} \Delta t + l_{\text{а}} \alpha_{\text{а}} \Delta t + l_{\text{с}} \alpha_{\text{с}} \Delta t = l(\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}) \Delta t,$$

где $\alpha_{\text{м}}$, $\alpha_{\text{а}}$, $\alpha_{\text{с}}$ – соответствующие коэффициенты теплового линейного расширения.

$$\Delta l = \Delta l_{\text{м}} = \Delta l_{\text{а}} = \Delta l_{\text{с}} = \frac{N l_{\text{м}}}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{N l_{\text{а}}}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{N l_{\text{с}}}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}} = Nl\left(\frac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right);$$

$$l(\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}) \Delta t = Nl\left(\frac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right),$$

откуда $\Delta t = \dfrac{N\left(\dfrac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \dfrac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \dfrac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right)}{\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}}.$

Подставим численные значения величин и произведем вычисления

$$\Delta t = \frac{84800\left[\dfrac{1}{1 \cdot 10^{11} \cdot 1963 \cdot 10^{-6}} + \dfrac{1}{0{,}7 \cdot 10^{11} \cdot 1257 \cdot 10^{-6}} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 707 \cdot 10^{-6}}\right]}{16{,}5 \cdot 10^{-6} + 25 \cdot 10^{-6} + 12{,}5 \cdot 10^{-6}} = 36^{\circ}.$$

Далее определим напряжения в поперечных сечениях стержня при повышении температуры на $36^{\circ}$

$$\sigma_{\text{м}} = -\frac{N}{A_{\text{м}}} = -\frac{84800}{1963 \cdot 10^{-6}} = -43 \cdot 10^{6} \text{ Па} = -43 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{а}} = -\frac{N}{A_{\text{а}}} = -\frac{84800}{1257 \cdot 10^{-6}} = -67{,}5 \cdot 10^{6} \text{ Па} = -67{,}5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{с}} = -120 \text{ МПа}.$$

## 1.4. Задания для расчетов стержней с учетом собственного веса

Для стального бруса с учетом собственного веса и при продольной нагрузке $F$ (табл. 1.1.) требуется по указанной схеме (табл. 1.2.):

1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса.

2. Найти полное удлинение (укорочение) бруса для геометрических размеров, приведенных в табл. 1.1. Плотность стали $\rho$=7850 кг/см$^3$; ускорение силы тяжести $g$ = 9,81 м/с$^2$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

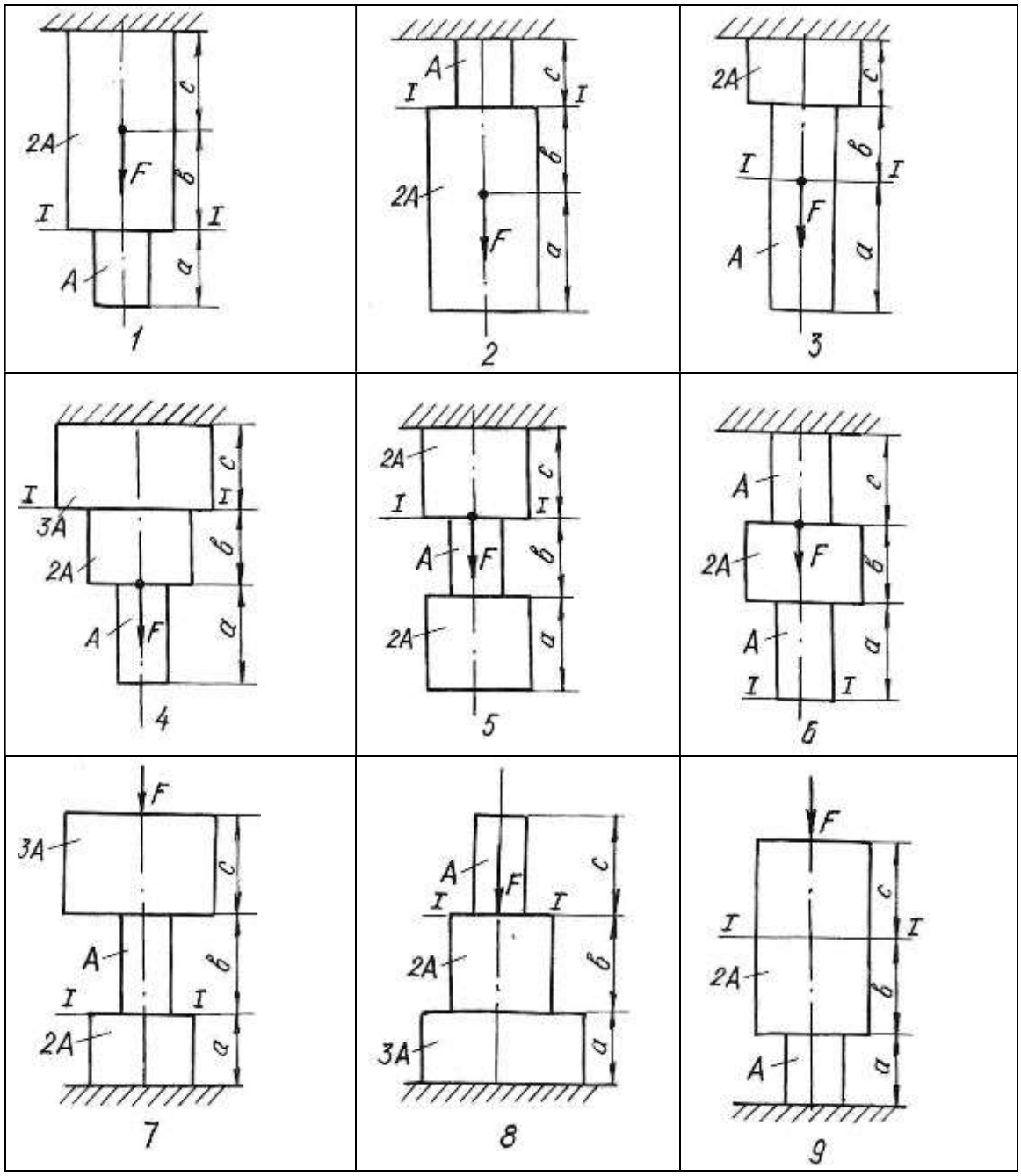
3. Определить перемещение сечений I-I.

Таблица 1.1

| Номер варианта | $a$, м | $b$, м | $c$, м | $F$, кН | $A$, см² |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 | 1,0 | 2,0 | 30 | 20 |
| 2 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 40 | 30 |
| 3 | 2,0 | 1,0 | 2,0 | 50 | 40 |
| 4 | 2,0 | 1,0 | 1,5 | 60 | 18 |
| 5 | 2,0 | 1,5 | 1,5 | 20 | 24 |
| 6 | 1,5 | 1,0 | 2,0 | 40 | 28 |
| 7 | 1,5 | 1,0 | 1,0 | 50 | 30 |
| 8 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 50 | 32 |
| 9 | 1,5 | 1,0 | 1,5 | 60 | 12 |
| 10 | 2,0 | 1,0 | 1,5 | 70 | 14 |
| 11 | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 20 | 15 |
| 12 | 2,0 | 2,0 | 1,0 | 40 | 18 |
| 13 | 1,0 | 1,5 | 1,0 | 30 | 20 |
| 14 | 1,4 | 1,0 | 1,0 | 40 | 24 |
| 15 | 1,0 | 3,0 | 1,0 | 50 | 28 |
| 16 | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 40 | 30 |
| 17 | 1,2 | 1,0 | 2,4 | 70 | 32 |
| 18 | 2,0 | 1,5 | 2,0 | 60 | 20 |
| 19 | 2,6 | 1,0 | 1,7 | 60 | 18 |
| 20 | 2,0 | 1,0 | 1,5 | 50 | 22 |
| 21 | 1,5 | 1,8 | 1,4 | 40 | 15 |
| 22 | 2,0 | 1,0 | 1,4 | 30 | 16 |
| 23 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 20 | 20 |
| 24 | 1,5 | 1,0 | 2,0 | 10 | 16 |
| 25 | 1,4 | 2,0 | 1,0 | 40 | 18 |

Таблица 1.2

**Расчетные схемы бруса**



## 1.5. Задания для определения напряжений при плоском напряженном состоянии

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (рис. 1.11.). Показать на рисунке элемент и направления напряжений в соответствии с вариантом задания.

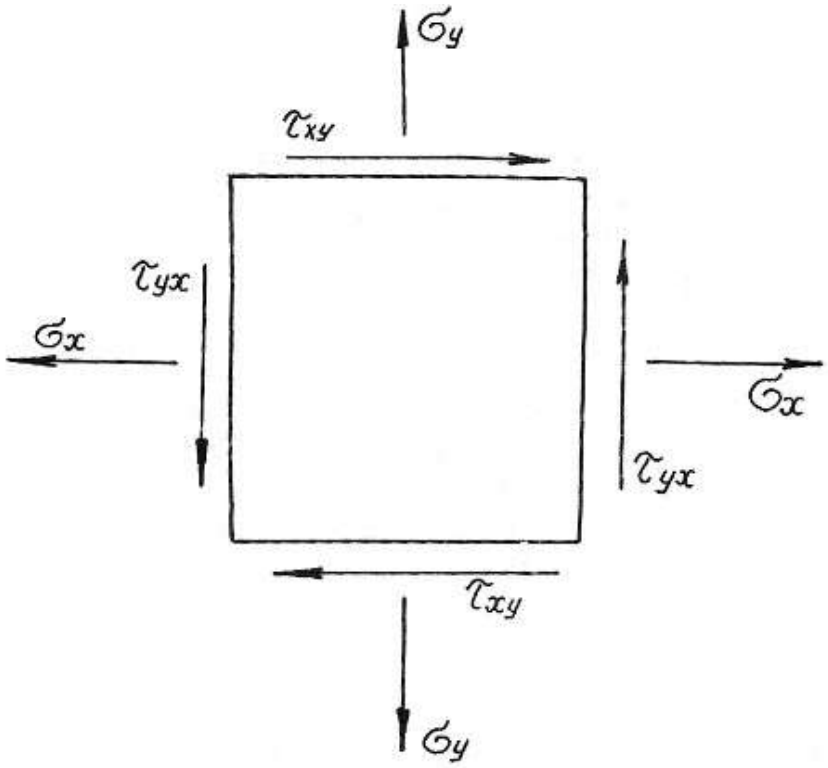



Рис. 1.11.

Требуется найти:

1. Главные напряжения и положение главных площадок.
2. Максимальные касательные напряжения.
3. Определить аналитически величины нормальных $\sigma_\alpha$ и касательных напряжений $\tau_\alpha$ , действующих на площадках, нормаль к которым составляет угол $\alpha$ с горизонтальной осью $x$.

Данные приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

| Номер варианта | $\sigma_x$ , МПа | $\sigma_y$ , МПа | $\tau_{xy}$ , МПа | $\alpha$, град |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 40,0 | -20,0 | -10,0 | 30 |
| 2 | 12,0 | 10,0 | -80,0 | -45 |
| 3 | -10,0 | -14,0 | -12,0 | 15 |
| 4 | 15,0 | 12,0 | 90,0 | 30 |
| 5 | 20,0 | -40,0 | 80,0 | 15 |
| 6 | -12,0 | 10,0 | -80,0 | 45 |
| 7 | 20,0 | -2,0 | 10,0 | -30 |
| 8 | 80,0 | 10,0 | -60,0 | 45 |
| 9 | 12,0 | 14,0 | 10,0 | 30 |
| 10 | -14,0 | -10,0 | 50,0 | 15 |
| 11 | 20,0 | 10,0 | -80,0 | -45 |
| 12 | 30,0 | -50,0 | -10,0 | 60 |
| 13 | -25,0 | 10,0 | 50,0 | 15 |
| 14 | 16,0 | 80,0 | 10,0 | 30 |
| 15 | 18,0 | -10,0 | 10,0 | -30 |
| 16 | 22,0 | 12,0 | -90,0 | 45 |
| 17 | -16,0 | -12,0 | 10,0 | 20 |
| 18 | 10,0 | 80,0 | -60,0 | -20 |
| 19 | 25,0 | -25,0 | 10,0 | 30 |
| 20 | -10,0 | 10,0 | 60,0 | 60 |
| 21 | 12,0 | 10,0 | -60,0 | 20 |
| 22 | 18,0 | -10,0 | -12,0 | 45 |
| 23 | -40,0 | 30,0 | 20,0 | 30 |
| 24 | 50,0 | -60,0 | 10,0 | -30 |
| 25 | 45,0 | 35,0 | 15,0 | -45 |

## 1.6. Задания для расчета статически неопределимых стержневых систем

Для статически неопределимой системы, состоящей из жесткой невесомой балки и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно (табл.1.4), требуется:

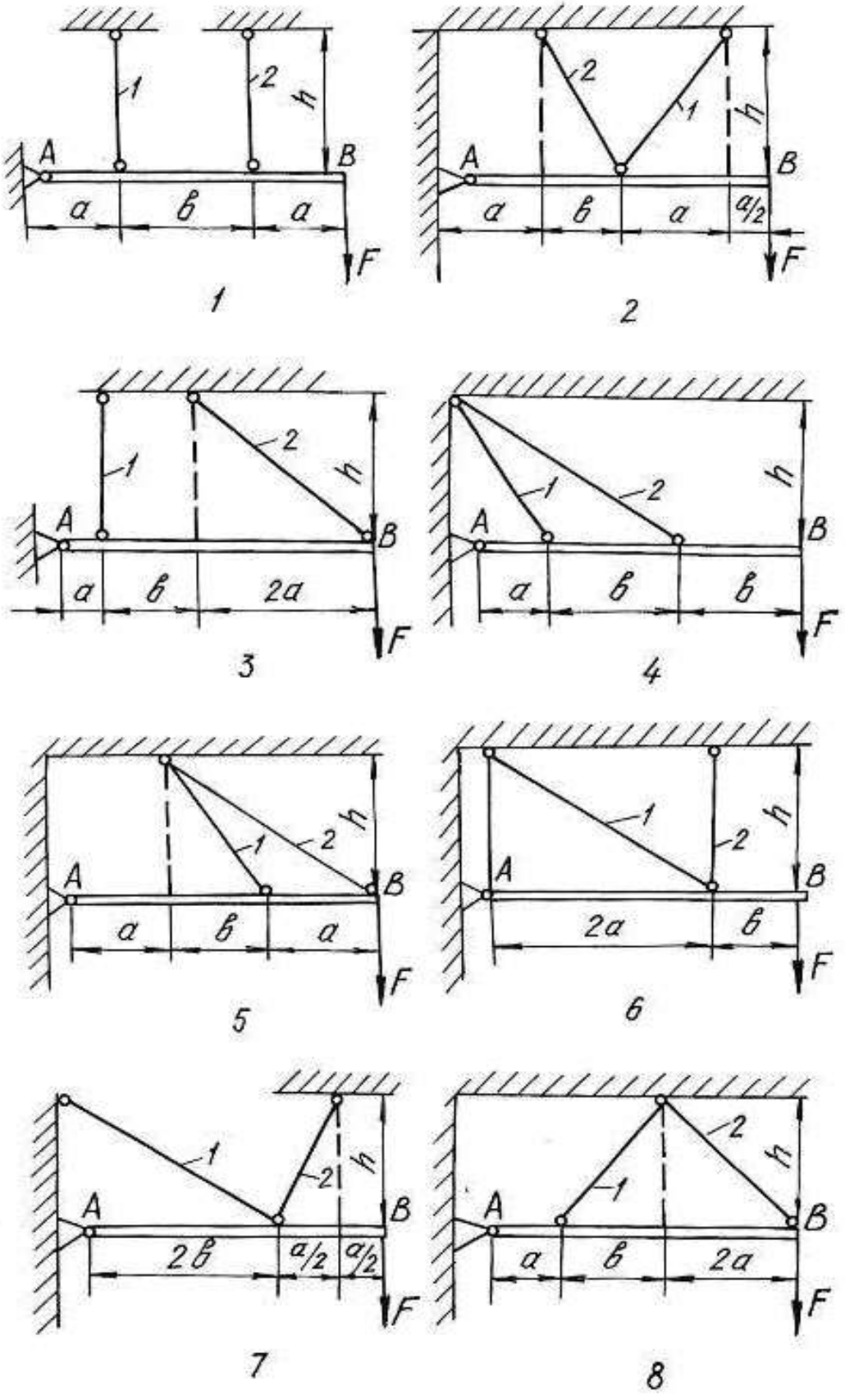
1. Определить усилия, возникающие в стержнях от действия нагрузки $F$;
2. Подобрать сечение стержней из двух равнобоких уголков каждое по ГОСТ 8509-93 (см. табл. П. 3).
3. Определить дополнительные усилия в стержнях конструкции, если стержень 2 изготовлен короче проектного размера на $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

При расчетах принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{adm}$=160 МПа, остальные данные приведены в табл. 1.4. Расчетные схемы приведены в табл. 1.5.

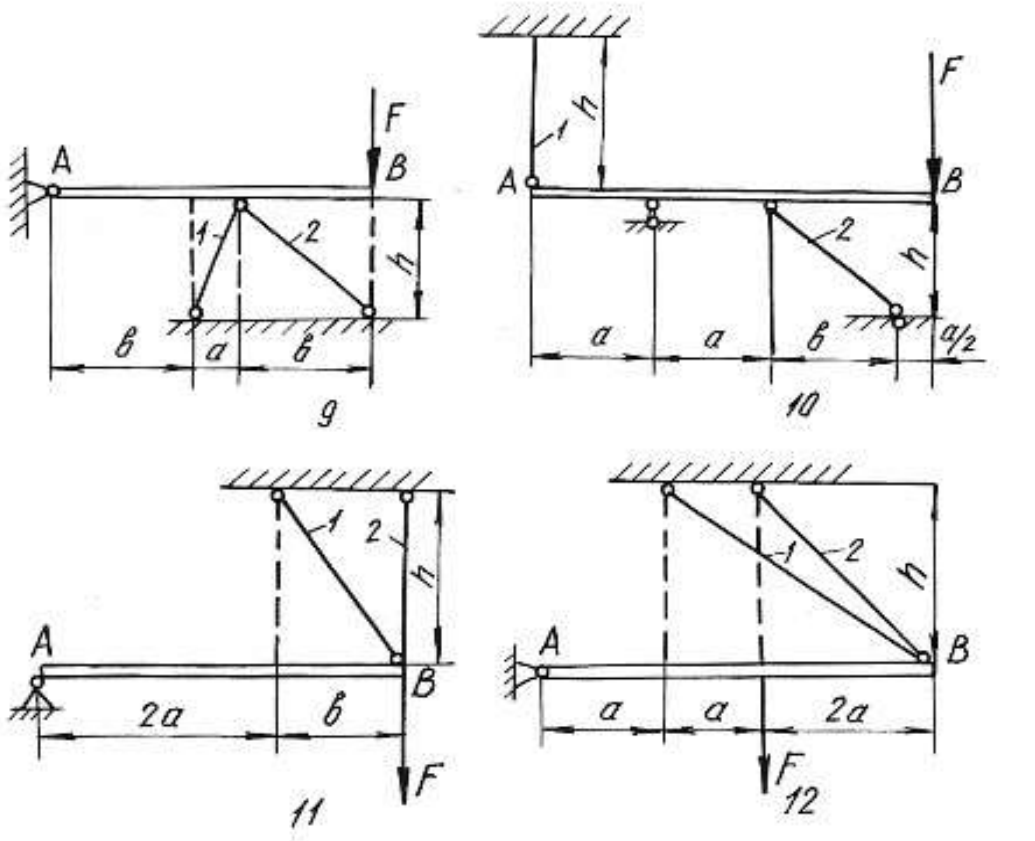
Таблица 1.4

| Номер варианта | $a$, м | $b$, м | $h$, м | $A_2 : A_1$ | $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,0 | 1,4 | 1,8 | 2,0 | 80 |
| 2 | 2,2 | 1,6 | 2,0 | 1,5 | 120 |
| 3 | 2,6 | 1,8 | 2,2 | 1,2 | 150 |
| 4 | 2,5 | 1,1 | 1,5 | 1,0 | 180 |
| 5 | 1,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 100 |
| 6 | 2,0 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 240 |
| 7 | 2,4 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 140 |
| 8 | 2,8 | 1,6 | 2, | 2,0 | 120 |
| 9 | 1,6 | 1,2 | 1,5 | 1,5 | 100 |
| 10 | 2,4 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 180 |
| 11 | 3,0 | 2,0 | 2,0 | 1,5 | 260 |
| 12 | 2,4 | 1,8 | 2,2 | 2,0 | 320 |
| 13 | 1,8 | 1,4 | 1,2 | 1,5 | 400 |
| 14 | 2,0 | 1,5 | 1,3 | 1,2 | 360 |
| 15 | 1,5 | 1,5 | 2,0 | 1,5 | 400 |
| 16 | 1,0 | 0,9 | 1,5 | 1,1 | 340 |
| 17 | 1,1 | 1,3 | 1,8 | 1,8 | 250 |
| 18 | 1,5 | 1,2 | 2,0 | 2,0 | 120 |
| 19 | 0,9 | 0,6 | 3,0 | 1,4 | 170 |
| 20 | 0,8 | 0,7 | 2,3 | 1,6 | 210 |
| 21 | 1,2 | 1,7 | 1,3 | 1,3 | 200 |
| 22 | 1,3 | 1,4 | 0,8 | 1,7 | 90 |
| 23 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 0,9 | 110 |
| 24 | 2,0 | 1,1 | 1,0 | 0,8 | 130 |
| 25 | 1,5 | 1,6 | 0,8 | 0,7 | 280 |

Таблица 1.5



Окончание табл. 1.5



# Глава 2

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Моментами инерции являются геометрические характеристики, отражающие заполнение веществом плоского поперечного сечения балки. Значения моментов инерции для стандартных поперечных сечений можно найти в любой литературе, список которой приведен в конце настоящего пособия. Моменты инерции относительно собственных осей простых фигур определяются по известным формулам.

Для прямоугольника

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \qquad J_y = \frac{hb^3}{12}; \qquad J_{xy} = 0, \tag{2.1}$$

где $x, y$ – горизонтальная и вертикальная оси, проходящие через центр тяжести прямоугольника; $b$ – ширина; $h$ – высота прямоугольника.

Для круга

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}; \qquad J_{xy} = 0. \tag{2.2}$$

Для треугольника

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \qquad J_y = \frac{hb^3}{36}; \qquad J_{xy} = \pm\frac{b^2h^2}{72}. \tag{2.3}$$

При этом знак центробежного момента определяется следующим образом. Треугольник вычерчивается в масштабе, через его центр проводятся оси, которые делят треугольник на четыре четверти. В первой и третьей четвертях площадь положительна, в остальных – отрицательна. Если суммарная положительная площадь будет по размеру больше отрицательной, то знак центробежного момента будет тоже положительный и наоборот.

Осевые моменты инерции прокатных профилей выписываются из таблицы (сортамента проката) в соответствии с номером профиля. Для равнополочных уголков центробежный момент относительно горизонтальной и вертикальной осей определяется по формуле:

$$J_{xy} = \left(J_{x_0} - J_{y_0}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} + J_{x_0y_0}\cos 2\alpha, \tag{2.4}$$

где $x_0, y_0$ – оси, проходящие через центр тяжести уголка под углом $45^\circ$ к горизонтальной и вертикальной осям уголка.

При этом нужно помнить, что угол поворота осей *xy* относительно осей $x_0y_0$ будет отрицательным. Если уголок неравнополочный, то его условно разбивают на два прямоугольника, находят их центры тяжести, и центробежный

момент относительно собственных осей всего уголка определяют по формуле центробежных моментов инерции относительно параллельных осей.

Для составного сечения необходимо определять положение центра тяжести, разбив его на простейшие части (прямоугольник, круг, треугольник, двутавр, швеллер, уголок). Формулы для определения центра тяжести имеют вид:

$$x_c = \frac{\sum S_{x_{\text{вр}}}}{\sum A} = \frac{\left(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots, + A_n x_n\right)}{\left(A_1 + A_2 + \ldots, + A_n\right)};$$
$$y_c = \frac{\sum S_{y_{\text{вр}}}}{\sum A} = \frac{\left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots, + A_n y_n\right)}{\left(A_1 + A_2 + \ldots, + A_n\right)}, \qquad (2.5)$$

где $S_{y_{\text{вр}}}, S_{x_{\text{вр}}}$ – статические моменты площадей простых фигур относительно временных осей; $A_1$, $A_2$,…, $A_n$ – площади простых фигур; $x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых фигур во временных осях.

Главными моментами инерции плоской фигуры (сечения) называют моменты инерции, определяемые относительно главных центральных осей сечения. Такие оси должны отвечать следующим требованиям:

1) они проходят через центр тяжести сечения;

2) относительно этих осей наблюдаются экстремальные значения моментов инерции (главные моменты инерции);

3) центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю.

В формулы напряжений, содержащие моменты инерции, необходимо всегда подставлять значения главных моментов инерции. Определение главных моментов инерции проводится в следующем порядке.

1. Заданное поперечное сечение сложной конфигурации вычерчивается в выбранном масштабе с указанием всех размеров.

2. Сечение условно разбивается на простейшие фигуры (прямоугольник, круг, треугольник, двутавр, швеллер, уголок).

3. Определяется положение центра тяжести площадки каждой простой фигуры и из этих центров проводятся собственные оси координат.

4. Для всей фигуры сечения проводятся временные (вспомогательные) оси координат $(x_{\text{вр}}, y_{\text{вр}})$ параллельно собственным осям отдельных фигур (желательно, чтобы временные оси проходили через центры тяжести простых фигур, что ведет к уменьшению объема вычислений).

5. Определяются координаты центра тяжести площади всего сечения по формулам (2.5).

6. Центр тяжести сечения наносится на чертеж, и из него проводятся опорные оси координат $(x_c, y_c)$ параллельно временным осям.

7. Определяются осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно опорных осей. При этом используют формулы для определения моментов инерции относительно параллельных осей:

$$J_{x_c} = \left(J_{x_1} + A_1 a_1^2\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_2} + A_2 a_2^2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{x_n} + A_n a_n^2\right)^{n};$$

$$J_{y_c} = \left(J_{y_1} + A_1 b_1^2\right)^{\text{I}} + \left(J_{y_2} + A_2 b_2^2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{y_n} + A_n b_n^2\right)^{n}; \qquad (2.6)$$

$$J_{x_c y_c} = \left(J_{x_1 y_1} + A_1 a_1 b_1\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_2 y_2} + A_2 a_2 b_2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{x_n y_n} + A_n a_n b_n\right)^{n},$$

где $J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_n}$ и $J_{y_1}, J_{y_2}, \ldots, J_{y_n}$ – моменты инерции простых фигур относительно собственных осей; $J_{x_1 y_1}, J_{x_2 y_2}, \ldots, J_{x_n y_n}$ – центробежные моменты инерции простых фигур относительно собственных осей; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – расстояния между собственными осями $x_1, x_2 \ldots, x_n$ простых фигур и центральной осью $x_c$; $b_1, b_2 \ldots, b_n$ – расстояния между собственными осями $y_1, y_2 \ldots, y_n$ простых фигур и центральной осью $y_c$ (с учетом знаков).

8. Определяется положение главных осей инерции по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}. \qquad (2.7)$$

Положительным считается угол $\alpha_0$, откладываемый против хода часовой стрелки.

9. Проводятся главные оси на чертеже под углом $\alpha_0$ по отношению к центральным осям.

10. Определяются главные моменты инерции по формулам:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \\ J_{y_0} &= J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

или

$$J_{\max/\min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)^2 + 4 \cdot J_{x_c y_c}^2}. \qquad (2.9)$$

11. Проводится проверка правильности решения задачи в двух вариантах:

а) суммы главных моментов инерции и моментов инерции относительно центральных осей должны быть равны

$$J_{x_0} + J_{y_0} = \left(J_{x_c} + J_{y_c}\right) \pm 5\ \%; \qquad (2.10)$$

б) центробежный момент инерции относительно главных осей должен быть равен нулю

$$J_{x_0y_0} = \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0 . \qquad (2.11)$$

**Пример 2.1.**

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнополочного уголка (рис. 2.1), требуется:

1) определить положение центра тяжести;

2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести;

3) определить направления главных центральных осей $x_0$ и $y_0$;

4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;

5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

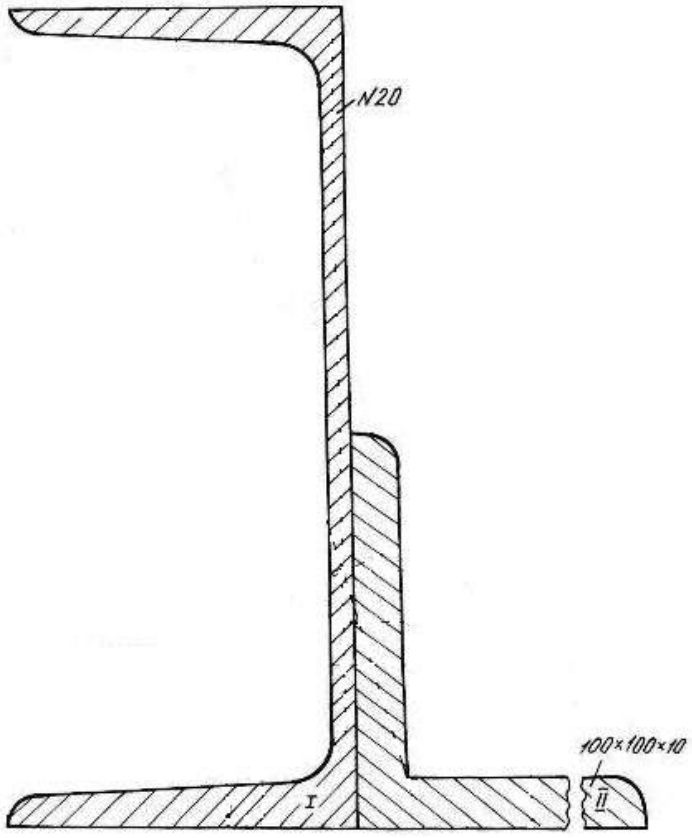



Рис. 2.1.

*Решение.*

1. Проводим временные оси $x_{вр}$ и $y_{вр}$ через левый нижний угол сечения (рис. 2.2) и разбиваем сечение на две фигуры: швеллер I и уголок II.

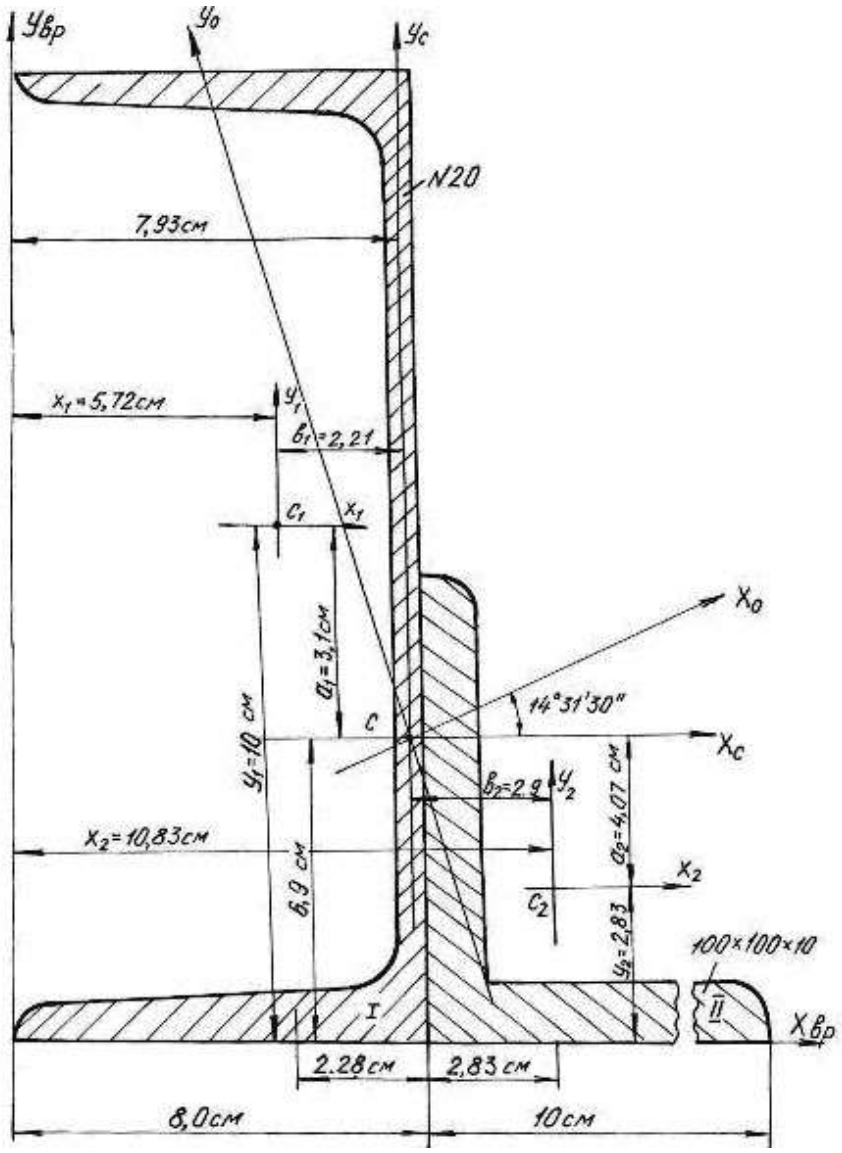



Рис. 2.2.

Основные данные фигур выписываем из таблиц сортамента проката.

Швеллер № 20а: $A_1 = 25{,}2$ см$^2$, $Z_0 = 2{,}28$ см, $J_{x_1} = 1670$ см$^4$, $J_{y_1} = 139$ см$^4$.

Уголок 100×100×10 мм: $A_2 = 19{,}2$ см$^2$, $Z_0 = 2{,}83$ см, $J_{x_0} = 284$ см$^4$, $J_{y_0} = 74{,}1$ см$^4$, $J_{x_2} = J_{y_2} = 179$ см$^4$ (рис. 2.3).

Координаты центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{(A_1 x_1 + A_2 x_2)}{(A_1 + A_2)} = \frac{25{,}2 \cdot 5{,}72 + 19{,}2 \cdot 10{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 7{,}93 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\left(A_1 y_1 + A_2 y_2\right)}{\left(A_1 + A_2\right)} = \frac{25{,}2 \cdot 10 + 19{,}2 \cdot 2{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 6{,}9 \text{ см};$$

где $A_1$, $A_2$ – площади поперечного сечения первой и второй фигур; $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ – координаты центров тяжести фигур относительно временных осей.

По значениям координат центра тяжести фигуры наносим точку $C$ (см. рис. 2.2.) и проводим центральные оси $x_c$ и $y_c$ параллельно временным осям.

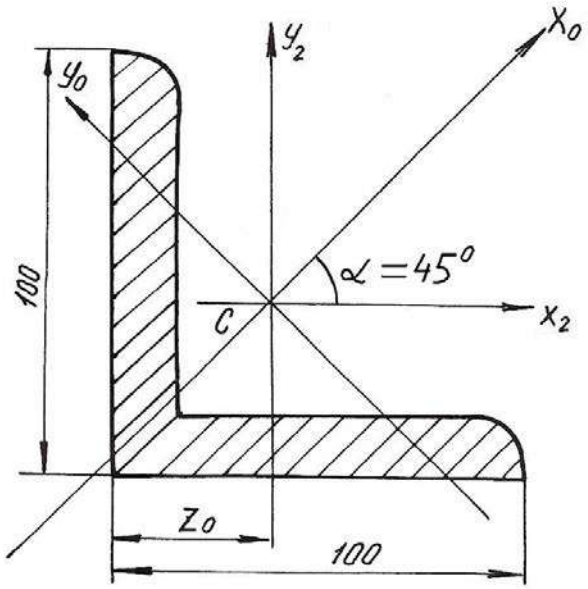



Рис. 2.3.

2. Вычисляем осевые моменты инерции относительно центральных опорных осей

$$J_{x_C} = \left(J_{x_C}\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_C}\right)^{\text{II}} = \left(J_{x_1} + A_1 a_1^2\right) + \left(J_{x_2} + A_2 a_2^2\right) =$$

$$= \left[1670 + 25{,}2\left(3{,}1\right)^2\right] + \left[179 + 19{,}2\left(-4{,}07\right)^2\right] = 2409 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = \left(J_{y_C}\right)^{\text{I}} + \left(J_{y_C}\right)^{\text{II}} = \left(J_{y_1} + A_1 b_1^2\right) + \left(J_{y_2} + A_2 b_2^2\right) =$$

$$= \left[139 + 25{,}2\left(\text{-}2{,}21\right)^2\right] + \left[179 + 19{,}2\left(2{,}9\right)^2\right] = 603 \text{ см}^4.$$

3. Вычисляем центробежный момент инерции сечения относительно осей $x_c$ и $y_c$. Центробежный момент швеллера относительно собственных осей равен 0, так как его оси проходят через центр тяжести и одна из них является осью симметрии.

Для уголка собственные центральные оси, т. е. оси $x_2$ и $y_2$ не являются главными, поэтому центробежный момент уголка в этой системе координат не равен 0. Вычислим его.

Из таблиц сортамента

$$J_{x_0} = 284 \text{ см}^4; \quad J_{y_0} = 74{,}1 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2y_2} = \frac{\left(J_{x_0} - J_{y_0}\right)}{2}\sin 2\alpha + J_{x_0y_0}\cos 2\alpha = \frac{284 - 74{,}1}{2}(-1) + 0 = -104{,}95 \text{ см}^4.$$

Угол $\alpha$ отрицателен, так как поворот осей $x_0$, $y_0$ направлен по ходу часовой стрелки.

$$J_{x_cy_c} = \left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{II}} = (J_{x_1y_1} + A_1a_1b_1) + (J_{x_2y_2} + A_2a_2b_2) =$$

$$= [0 + 25{,}2(3{,}1)(-2{,}21)] + [-104{,}95 + 19{,}2(-4{,}07)(2{,}90)] =$$

$$= -172{,}0 - 104{,}95 - 225 = -501{,}95 \text{ см}^4.$$

Угол поворота главных осей инерции

$$\text{tg}2\alpha_0 = \frac{2J_{x_cy_c}}{\left(J_{y_c} - J_{x_c}\right)} = \frac{2(-501{,}95)}{(603 - 2409)} = 0{,}555, \quad 2\alpha_0 = 29^{\text{o}}03', \quad \alpha_0 = 14^{\text{o}}31'30''.$$

4. Откладываем полученный угол против хода часовой стрелки от центральных осей $x_c$, $y_c$ и проводим главные оси инерции $x_0$, $y_0$ (см. рис. 2.2).

5. Определяем главные моменты инерции

$$J_{x_0} = J_{x_c}\cos^2\alpha_0 + J_{y_c}\sin^2\alpha_0 - J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0 = 2536 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_{x_c}\sin^2\alpha_0 + J_{y_c}\cos^2\alpha_0 + J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0 = 476 \text{ см}^4.$$

Так как $J_{x_c} > J_{y_c}$, то $J_{\max}$ будет относительно оси $x_0$, а $J_{\min}$ будет относительно оси $y_0$.

*Проверка.*

а) Согласно формуле (2.10)

$$J_{x_c} + J_{y_c} = \left(J_{x_0} + J_{y_0}\right) \pm 5\ \%;$$

$$(2409 + 603)\cdot 10^{-8} = (2536 + 476)\cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$3012\cdot 10^{-8} \text{ см}^4 = 3012\cdot 10^{-8} \text{ см}^4.$$

б) Согласно формуле (2.11)

$$J_{x_0y_0} = \frac{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{x_cy_c}\cos 2\alpha_0 = 0;$$

$$J_{x_0y_0} = \frac{(2409-603)}{2}\sin 2\left(14^\circ 31' 30''\right) - 501{,}95 \cdot \cos 2\left(14^\circ 31' 30''\right) = 0;$$
$$J_{x_0y_0} = 438 - 438 = 0.$$

Проверка показывает, что главные моменты инерции определены правильно.

6. Вычерчиваем поперечное сечение в масштабе 1:2 с указанием всех осей и размеров.

**Пример 2.2.**

Для заданного поперечного сечения (рис. 2.4) определить положение центра тяжести, найти положение главных осей инерции и значения главных моментов инерции.

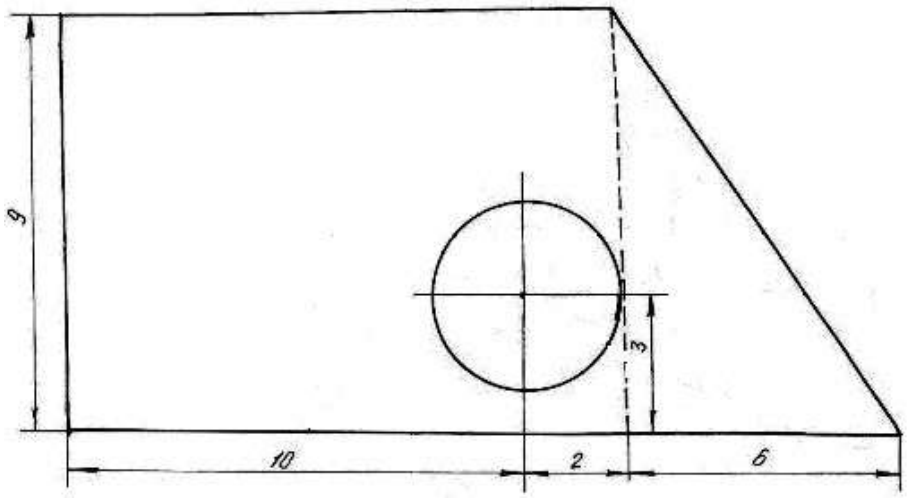



Рис. 2.4.

*Решение.*

1. Чертим поперечное сечение в масштабе 1:1;

2. Разбиваем сечение на простейшие фигуры: I – прямоугольник, II – прямоугольный треугольник, III – круг;

3. Проводим временные оси $x_{вр}$ и $y_{вр}$ через левый нижний угол заданного сечения (рис. 2.5).

4. Обозначив на рисунке центры тяжести простейших фигур, находим их координаты относительно временных осей и определяем площади фигур

$$C_1\begin{cases} x_1 = 6 \text{ см}; \\ y_1 = 4{,}5 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_2\begin{cases} x_2 = 14 \text{ см}; \\ y_2 = 3 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_3\begin{cases} x_3 = 10 \text{ см}; \\ y_3 = 3 \text{ см}. \end{cases}$$

$$A_1 = 108 \text{ см}^2, \qquad A_2 = 27 \text{ см}^2, \qquad A_3 = 12{,}56 \text{ см}^2.$$

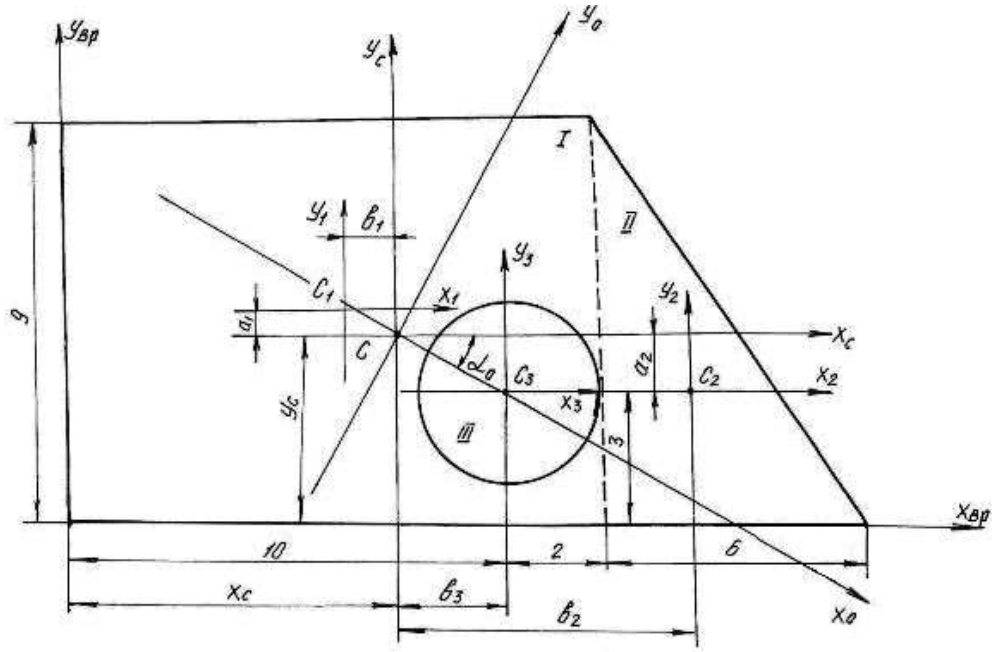



Рис. 2.5.

5. Определим координаты центра тяжести сечения

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{6\cdot 108 + 14\cdot 27 - 10\cdot 12{,}56}{108 + 27 - 12{,}56} = 7{,}35 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{4{,}5\cdot 108 + 3\cdot 27 - 3\cdot 12{,}56}{108 + 27 - 12{,}56} = 4{,}32 \text{ см}.$$

Обозначим на рис. 2.5 положение центра тяжести $C$ ($x_c$ =7,35 см; $y_c$ =4,32 см) и проведем центральные оси $x_c$ и $y_c$ параллельно временным осям.

6. Определим координаты центров тяжести простейших фигур $(C_1,\ C_2,\ C_3)$ относительно центральных осей $x_c$ и $y_c$

$$C_1\begin{cases} b_1 = x_1 - x_C = 1{,}35 \text{ см} \\ a_1 = y_1 - y_C = 0{,}18 \text{ см} \end{cases} \qquad C_2\begin{cases} b_2 = x_2 - x_C = 6{,}65 \text{ см} \\ a_2 = y_2 - y_C = -1{,}32 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_3\begin{cases} b_3 = x_3 - x_C = 2{,}65 \text{ см} \\ a_3 = y_3 - y_C = -1{,}32 \text{ см}. \end{cases}$$

7. Определим моменты инерции простейших фигур относительно их центральных осей

Для прямоугольника:

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12\cdot 9^3}{12} = 729 \text{ см}^4;\ J_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{12^3\cdot 9}{12} = 1296 \text{ см}^4;\ J_{x_1y_1} = 0.$$

Для треугольника:

$$J_{x_2}=\frac{bh^3}{36}=\frac{6\cdot 9^3}{36}=121{,}5\text{ см}^4;\qquad J_{y_2}=\frac{b^3h}{36}=\frac{6^3\cdot 9}{36}=54\text{ см}^4;$$

$$J_{x_2y_2}=-\frac{b^2h^2}{72}=-\frac{6^2\cdot 9^2}{72}=-40{,}5\text{ см}^4,$$

знак минус указывает на преобладание суммарной отрицательной части площади поперечного сечения.

Для круга:

$$J_{x_3}=J_{y_3}=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{3{,}14\cdot 4^4}{64}=12{,}56\text{ см}^4;\qquad J_{x_3y_3}=0.$$

8. Определим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей $x_c$ и $y_c$, используя формулы моментов инерции относительно параллельных осей

$$J_{x_c}=\left(J_{x_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{x_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{x_c}\right)^{\text{III}}=\left(J_{x_1}+A_1a_1^2\right)+\left(J_{x_2}+A_2a_2^2\right)-\left(J_{x_3}+A_3a_3^2\right)=$$

$$=\left(729+0{,}18^2\cdot 108\right)+\left(121{,}5+(-1{,}32)^2\cdot 27\right)-\left(12{,}56+(-1{,}32)^2\cdot 12{,}56\right)=866{,}6\text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}=\left(J_{y_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{y_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{y_c}\right)^{\text{III}}=\left(J_{y_1}+A_1b_1^2\right)+\left(J_{y_2}+A_2b_2^2\right)-\left(J_{y_3}+A_3b_3^2\right)=$$

$$=\left(1296+(-1{,}35)^2\cdot 108\right)++\left(54+6{,}65^2\cdot 27\right)-\left(12{,}56+2{,}65^2\cdot 12{,}56\right)=1093{,}32\text{ см}^4;$$

$$J_{x_cy_c}=\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{III}}=$$

$$=\left(J_{x_1y_1}+a_1b_1A_1\right)+\left(J_{x_2y_2}+a_2b_2A_2\right)-\left(J_{x_3y_3}+a_3b_3A_3\right)=$$

$$=\left(0+0{,}18\cdot(-1{,}35)\cdot 108\right)+\left(-40{,}5+(-1{,}32)\cdot 6{,}65\cdot 27\right)-\left(0+(-1{,}32)\cdot 2{,}56\cdot 12{,}56\right)=$$

$$=-259{,}82\text{ см}^4.$$

Получили, что центробежный момент сечения $J_{x_cy_c}\neq 0$, следовательно, оси $x_c$ и $y_c$ не являются главными осями инерции.

9. Найдём положение главных осей инерции по формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha_0=\frac{-2\cdot J_{x_cy_c}}{J_{x_c}-J_{y_c}}=-2{,}29;\text{ откуда }\ 2\cdot\alpha_0=-66^{\text{o}}20';\ \ \alpha_0=-33^{\text{o}}10'.$$

10. Проводим главные оси инерции $x_0$, $y_0$ под углом $\alpha_0$ относительно центральных осей и определяем значение главных моментов инерции

$$J_{x_0}=J_{x_c}\cos^2\alpha_0+J_{y_c}\sin^2\alpha_0-J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0=696{,}48\text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_{x_c}\sin^2\alpha_0 + J_{y_c}\cos^2\alpha_0 + J_{x_c y_c}\sin 2\alpha_0 = 1263{,}42 \text{ см}^4.$$

$$J_{\min} = J_{x_0} = 696{,}48 \text{ см}^4; \qquad J_{\max} = J_{y_0} = 1263{,}42 \text{ см}^4.$$

*Проверка*.

а) Согласно формуле (2.10)

$$J_{x_c} + J_{y_c} = \left(J_{x_0} + J_{y_0}\right) \pm 5\%;$$

$$\left(866{,}6 + 1093{,}32\right)\cdot 10^{-8} = \left(696{,}48 + 1263{,}42\right)\cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$1959{,}9\cdot 10^{-8}\text{см}^4 = 1959{,}9\cdot 10^{-8}\text{см}^4.$$

б) Согласно формуле (2.11)

$$J_{x_0 y_0} = \frac{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{x_c y_c}\cos 2\alpha_0 = 0;$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{\left(866{,}6 - 1093{,}32\right)}{2}\sin 2\left(-33^{\circ}10'\right) + \left(-259{,}82\right)\cos 2\left(-33^{\circ}10'\right) = 0;$$

$$J_{x_0 y_0} = 104 - 104 = 0.$$

Проверка показывает, что главные моменты инерции определены правильно.

## 2.1. Задания для определения главных моментов инерции

а) Для заданного поперечного сечения (табл. 2.1), состоящего из швеллера и равнополочного уголка или из швеллера и двутавра (табл. 2.2), требуется:

1. Определить положение центра тяжести;
2. Найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей $x_C$ и $y_C$, проходящих через центр тяжести сечения;
3. Определить положение главных осей инерции $x_0$ и $y_0$;
4. Найти главные моменты инерции относительно главных осей $x_0$ и $y_0$;
5. Вычертить сечение в выбранном масштабе и указать на нем все размеры в числах и все оси;
6. Сделать проверочные расчеты.

б) Для заданного поперечного сечения (табл. 2.3) требуется:

1. Определить положение центра тяжести;
2. Найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей $x_C$ и $y_C$, проходящих через центр тяжести сечения;
3. Определить положение главных осей инерции $x_0$ и $y_0$;

4. Найти главные моменты инерции относительно главных осей $x_0$ и $y_0$;

5. Сделать проверочные расчеты.

Таблица 2.1

| Номер варианта | Тип сечения | Швеллер № | Равнобокий уголок, мм | Двутавр № |
|---|---|---|---|---|
| 1 | I | 14 | 80×80×8 | 12 |
| 2 | II | 16 | 80×80×6 | 14 |
| 3 | III | 18 | 90×90×8 | 16 |
| 4 | IV | 20 | 90×90×7 | 18 |
| 5 | V | 22 | 90×90×6 | 20а |
| 6 | VI | 24 | 100×100×8 | 20 |
| 7 | VII | 27 | 100×100×10 | 22а |
| 8 | VIII | 30 | 100×100×12 | 22 |
| 9 | IX | 33 | 125×125×10 | 24а |
| 10 | X | 36 | 125×125×12 | 24 |

Таблица 2.2

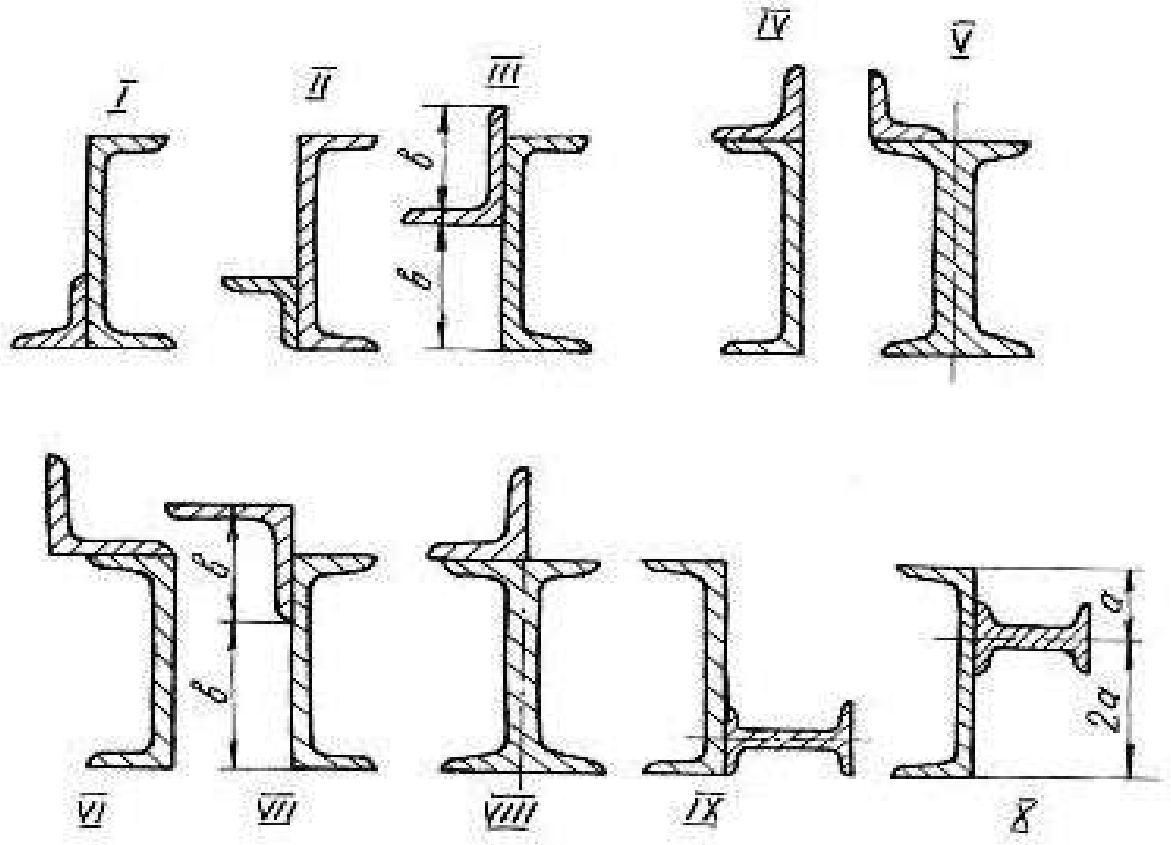
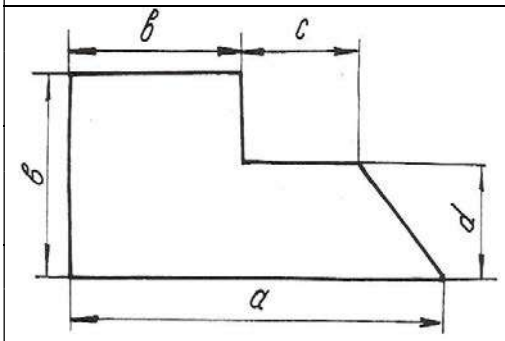
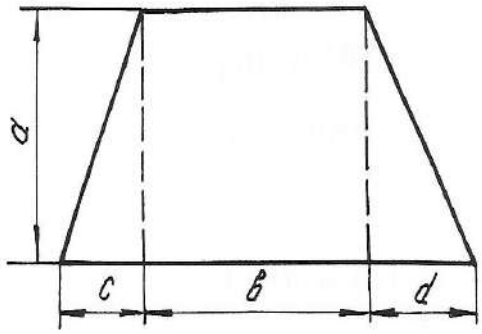
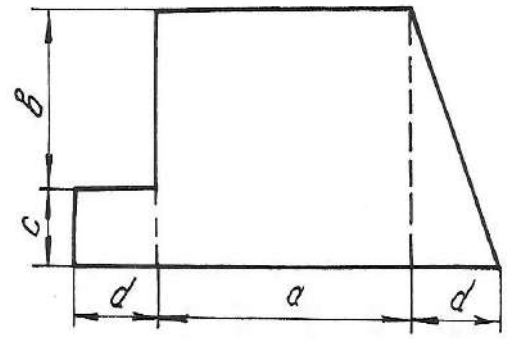
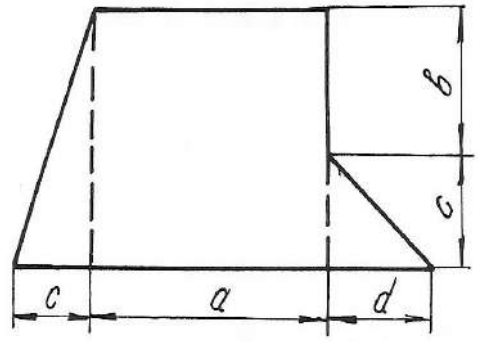
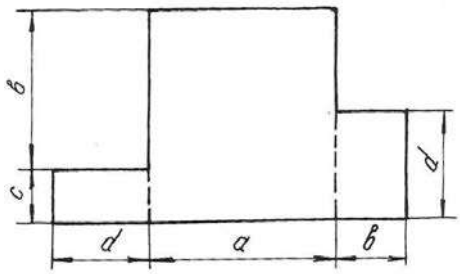
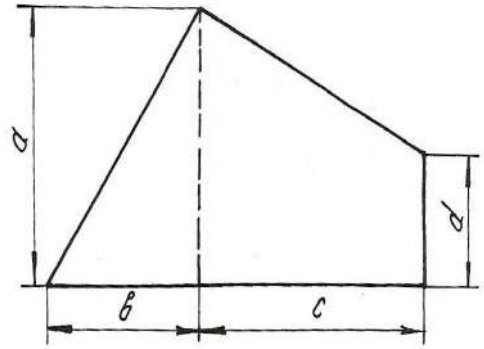
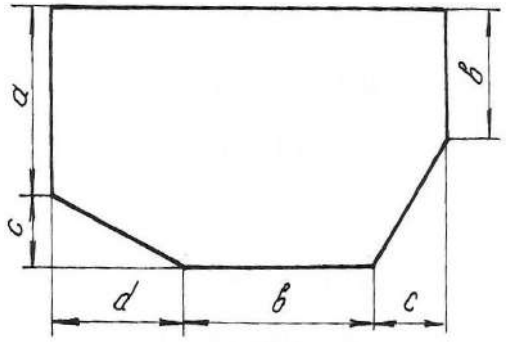
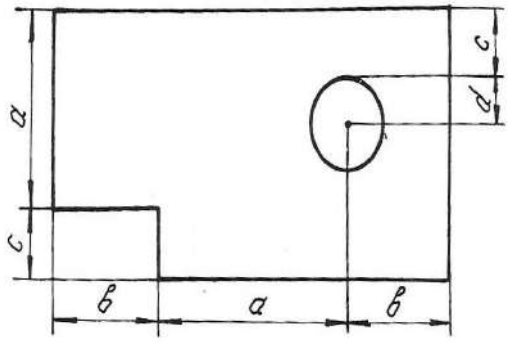


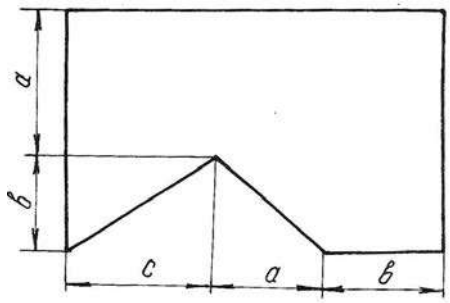
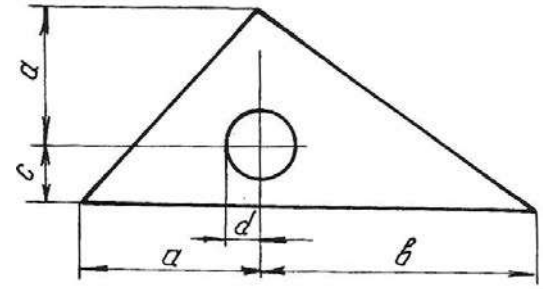
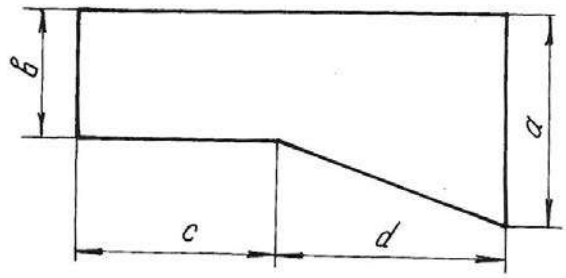
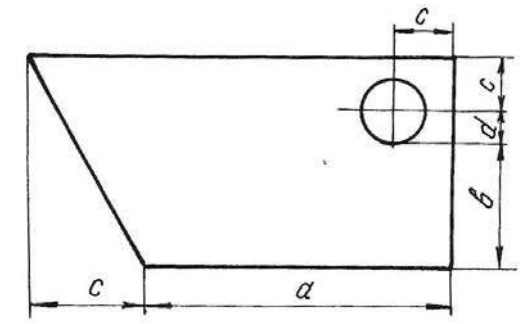
Таблица 2.3

| Вид поперечного сечения | Номер варианта | *a*, см | *в*, см | *c*, см | *d*, см |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 1 | 12 | 6 | 4 | 2 |
| | 2 | 16 | 10 | 2 | 6 |
| | 3 | 9 | 6 | 1 | 3 |
|  | 4 | 6 | 9 | 3 | 5 |
| | 5 | 7 | 8 | 6 | 9 |
| | 6 | 8 | 6 | 4 | 6 |
| | 7 | 9 | 5 | 2 | 3 |
|  | 8 | 6 | 4 | 3 | 4 |
| | 9 | 5 | 2 | 4 | 4 |
| | 10 | 4 | 3 | 2 | 5 |
| | 11 | 7 | 5 | 3 | 2 |
|  | 12 | 9 | 4 | 4 | 6 |
| | 13 | 7 | 5 | 3 | 3 |
| | 14 | 6 | 3 | 6 | 4 |
| | 15 | 4 | 2 | 5 | 6 |

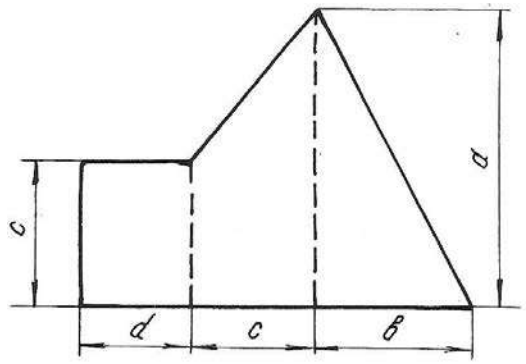
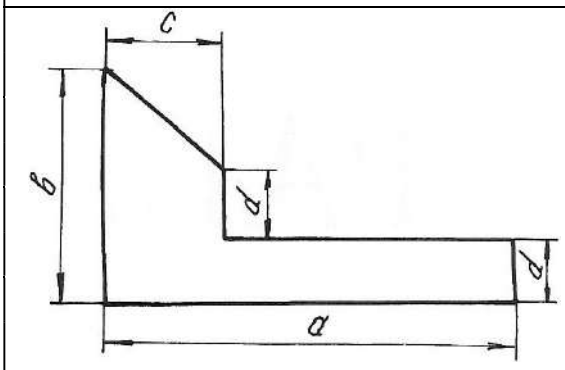
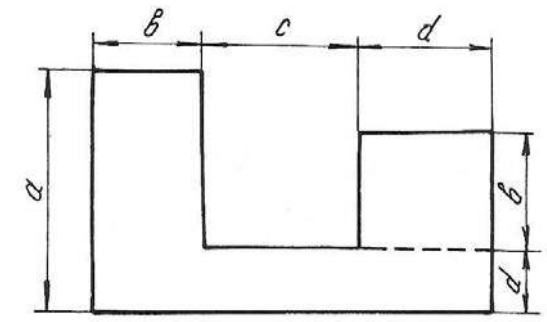
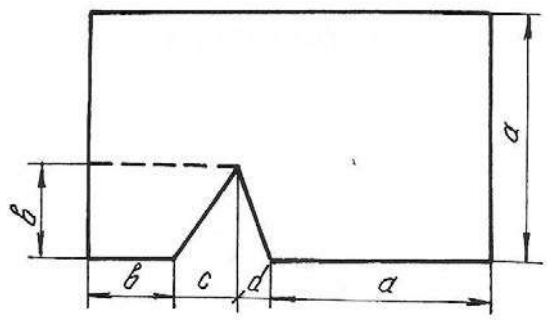
Продолжение табл. 2.3

| Вид поперечного сечения | Номер варианта | *a*, см | *в*, см | *c*, см | *d*, см |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 16 | 12 | 9 | 4 | 6 |
| | 17 | 18 | 12 | 5 | 8 |
| | 18 | 14 | 6 | 6 | 7 |
| | 19 | 15 | 19 | 3 | 4 |
|  | 20 | 12 | 10 | 6 | 6 |
| | 21 | 16 | 8 | 9 | 4 |
| | 22 | 20 | 9 | 8 | 12 |
| | 23 | 14 | 14 | 12 | 6 |
| | 24 | 24 | 20 | 10 | 4 |
|  | 25 | 10 | 8 | 4 | 3 |
| | 26 | 11 | 9 | 6 | 6 |
| | 27 | 13 | 12 | 5 | 9 |
| | 28 | 15 | 10 | 5 | 6 |
| | 29 | 8 | 4 | 8 | 12 |
|  | 30 | 8 | 5 | 2 | 2 |
| | 31 | 9 | 4 | 1 | 2 |
| | 32 | 6 | 9 | 3 | 3 |
| | 33 | 10 | 6 | 4 | 1 |
| | 34 | 12 | 8 | 5 | 1 |

Продолжение табл. 2.3

| Вид поперечного сечения | Номер варианта | *a*, см | *в*, см | *c*, см | *d*, см |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 35 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| | 36 | 9 | 4 | 6 | 5 |
| | 37 | 10 | 6 | 12 | 9 |
| | 38 | 12 | 9 | 10 | 6 |
|  | 39 | 12 | 10 | 3 | 1 |
| | 40 | 10 | 12 | 3 | 2 |
| | 41 | 9 | 12 | 3 | 1 |
| | 42 | 8 | 10 | 3 | 2 |
|  | 43 | 20 | 12 | 4 | 4 |
| | 44 | 18 | 10 | 3 | 5 |
| | 45 | 12 | 9 | 5 | 6 |
| | 46 | 15 | 12 | 6 | 4 |
|  | 47 | 10 | 4 | 3 | 1 |
| | 48 | 12 | 6 | 4 | 2 |
| | 49 | 14 | 5 | 5 | 3 |
| | 50 | 16 | 6 | 4 | 1 |

Окончание табл. 2.3

| Вид поперечного сечения | Номер варианта | *a*, см | *в*, см | *c*, см | *d*, см |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 51 | 12 | 10 | 6 | 3 |
| | 52 | 18 | 12 | 4 | 9 |
| | 53 | 20 | 14 | 8 | 6 |
| | 54 | 22 | 16 | 10 | 4 |
|  | 55 | 30 | 12 | 12 | 4 |
| | 56 | 24 | 14 | 10 | 6 |
| | 57 | 18 | 16 | 9 | 5 |
| | 58 | 12 | 10 | 8 | 3 |
|  | 59 | 9 | 6 | 2 | 4 |
| | 60 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| | 61 | 10 | 8 | 3 | 8 |
| | 62 | 12 | 9 | 4 | 1 |
|  | 63 | 20 | 10 | 6 | 3 |
| | 64 | 12 | 6 | 4 | 3 |
| | 65 | 15 | 9 | 3 | 6 |
| | 66 | 18 | 10 | 9 | 6 |

# Глава 3
# ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ ВАЛА

Деформация кручения возникает при действии на вал пар сил, действующих в плоскостях, перпендикулярных к его продольной оси. При расчетах вала на кручение выполняются следующие условия прочности и жесткости:

$$\tau_{max} \le \tau_{adm}, \quad \varphi_{max} \le \varphi_{adm},$$

где $\tau_{max}$ – максимальное касательное напряжение, $\varphi_{max}$ – максимальный угол закручивания вала.

Для определения максимального касательного напряжения и максимального угла закручивания необходимо иметь представление о том, как изменяется величина крутящего момента по длине вала. Текущие значения крутящих моментов определяются графиками их изменения, называемыми эпюрами. Вал по длине делится на участки вертикальными линиями, проведенными через те сечения, где приложены моменты пар сил. На каждом участке крутящий момент имеет постоянное значение и равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси, приложенных слева от сечения, проведенного условно на данном участке, или же приложенных справа от этого сечения.

Правило знаков: момент в сечении считается положительным, если, смотря на торцевое крайнее правое сечение вала, момент направлен по ходу часовой стрелки. Параллельно продольной оси вала проводится нулевая линия, от которой положительные моменты откладываются вверх, отрицательные – вниз в выбранном масштабе. Эпюра штрихуется вертикальными линиями. Диаметр сечения вала определяется из условия прочности

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \le \tau_{adm}, \tag{3.1}$$

где $T_{max}$ – максимальный крутящий момент из эпюры $T$; $W_p = \dfrac{J_p}{d/2} = \dfrac{\left(\pi d^4/32\right)}{\left(d/2\right)} = \dfrac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления кручению поперечного сечения.

Исходя из условия прочности $\dfrac{\pi d^3}{16} \ge \dfrac{T_{max}}{\tau_{adm}}$, можно определить диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T_{max}}{\left(\pi\tau_{adm}\right)}} \quad . \tag{3.2}$$

Углы закручивания вала на отдельных участках определяются по формуле:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p}, \tag{3.3}$$

где $T$ − крутящий момент на рассматриваемом участке вала, взятый из эпюры моментов; $l$ - длина участка вала; $GJ_p$ − жесткость вала при кручении; $G$ − модуль сдвига; $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ − полярный момент инерции поперечного сечения вала.

При построении эпюры углов закручивания вала необходимо помнить, что полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания вала на отдельных участках. Значения углов закручивания в промежуточных сечениях определяются по формуле:

$$\alpha_{\text{прав}} = \alpha_{\text{лев}} + \varphi, \tag{3.4}$$

где $\alpha_{\text{лев}}$ − суммарный угол закручивания всех участков, которые находятся слева от рассматриваемого участка; $\varphi$ − угол закручивания на данном участке.

Для определения максимального относительного угла закручивания определяют углы для каждого участка по формуле:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}, \tag{3.5}$$

где $l$ − длина рассматриваемого участка.

**Пример 3.1.**

К стальному валу приложены три известных момента: $T_1$=1100 Н·м, $T_2$=1400 Н·м, $T_3$ = 1800 Н·м, $a$ = 1,1 м, $b$ = 1,4 м, $c$ = 1,8 м (рис. 3.1).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента $X$ угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении $\tau_{\text{adm}}$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшего большого, соответственно равного 30, 35,40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания.

5. Найти наибольший относительный угол закручивания и проверить вал на жесткость при $\theta_{\text{adm}} = 1{,}5\,\text{град}/\text{м}$.

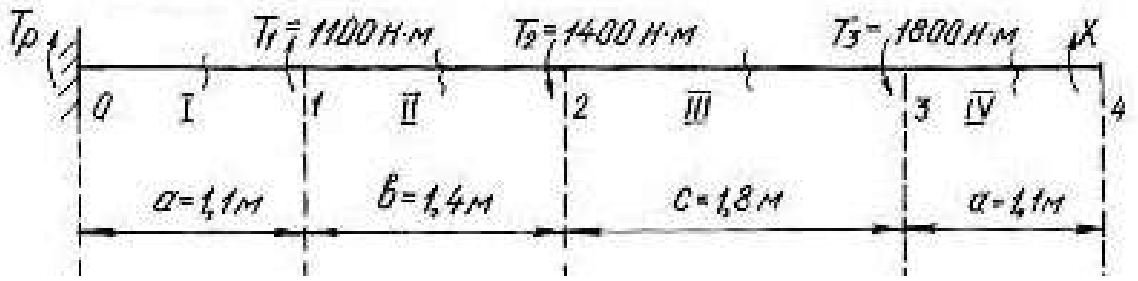



Рис. 3.1.

*Решение.*

1. Задача является статически неопределимой, так как невозможно определить из одного уравнения равновесия два неизвестных момента $T_p$ и $X$. Для решения составим одно уравнение статики и одно уравнение совместности деформации. Уравнение статики представляем в виде уравнения моментов относительно продольной оси вала

$$\sum T = T_p + T_1 - T_2 - T_3 + X = 0\,.$$

Угол закручивания правого концевого сечения может быть выражен как алгебраическая сумма взаимных углов закручивания сечений отдельных участков под действием каждого из моментов в отдельности

$$\sum \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0\,,$$

где $\varphi_1$ – угол закручивания вала на участке 0-1 под действием момента $T_1$; $\varphi_2$ – угол закручивания вала на участке под действием момента $T_2$; $\varphi_3$ – угол закручивания вала на участке под действием момента $T_3$; $\varphi_4$ – угол закручивания вала на участке 3-4 под действием неизвестного момента *X*.

При этом

$$\varphi_1 = \frac{T_1 a}{GJ_p};\quad \varphi_2 = -\frac{T_2(a+b)}{GJ_p};\quad \varphi_3 = -\frac{T_3(a+b+c)}{GJ_p};\quad \varphi_4 = \frac{X(2a+b+c)}{GJ_p}.$$

$$\sum \varphi = \frac{T_1 a}{GJ_p} - \frac{T_2(a+b)}{GJ_p} - \frac{T_3(a+b+c)}{GJ_p} + \frac{X(2a+b+c)}{GJ_p} =$$

$$= T_1 a - T_2(a+b) - T_3(a+b+c) + X(2a+b+c) = 0.$$

Подставив данные, получим

$$1100 \cdot 1{,}1 - 1400 \cdot 2{,}5 - 1800 \cdot 4{,}3 + X \cdot 5{,}4 = 0\,;$$

откуда $X = \dfrac{-1210 + 3500 + 7740}{5{,}4} = 1857$ Н·м.

Реактивный момент находим из уравнения статики:

$$T_p = -T_1 + T_2 + T_3 - X;$$

$$T_p = -1100 + 1400 + 1800 - 1857 = 243 \text{ Н·м}.$$

2. Для построения эпюры моментов (рис. 3.2) определяем значения мо-

ментов методом сечений.

В сечении IV-IV $T_{IV} = 1857$ Н·м.

В сечении III-III $T_{III} = 1857 - 1800 = 57$ Н·м.

В сечении II-II $T_{II} = 1857 - 1800 - 1400 = -1343$ Н·м.

В сечении I-I $T_{I} = 1857 - 1800 - 1400 + 1100 = -243$ Н·м.

3. Найдем полярный момент инерции сечения

$$W_P \geq \frac{|T_{max}|}{\tau_{adm}} \geq \frac{1857}{60 \cdot 10^6} \geq 30{,}95 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где $\tau_{adm} = 60$ МПа; $T_{max} = 1857$ Нм.

Из соотношения $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ найдем диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 30{,}95 \cdot 10^{-6}}{3{,}14}} = 5{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 55 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала равным 60 мм.

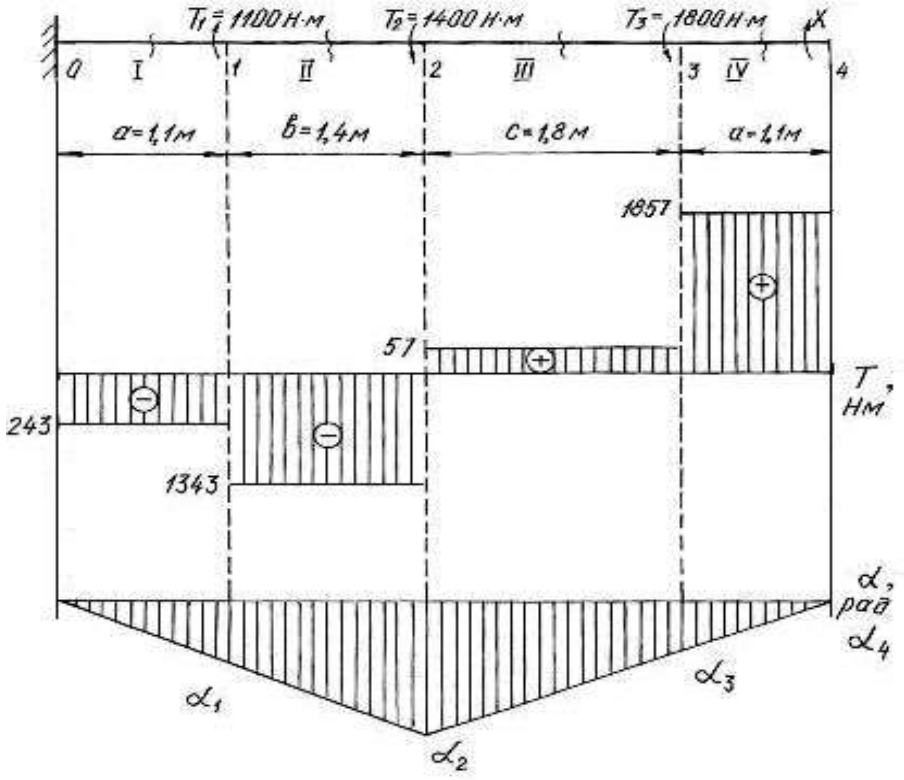



Рис. 3.2.

4. Углы закручивания вала на участках находим по формуле (3.3). Для этого сначала найдем $J_p$

$$J_p = \frac{3{,}14 \cdot 6^4}{32} = 127{,}2 \text{ см}^4 = 127{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$\varphi_{\text{I}} = \frac{T_{\text{I}} a}{G J_p} = -\frac{243 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}1}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0026 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{II}} = \frac{T_{\text{II}} b}{G J_p} = -\frac{-1343 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}4}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0185 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{III}} = \frac{T_{\text{III}} c}{G J_p} = \frac{57 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}8}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0010 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{IV}} = \frac{T_{\text{IV}} a}{G J_p} = \frac{1857 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}1}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0200 \text{ рад}.$$

В месте жёсткой заделки в сечении 0 вал неподвижен. По формуле (3.4), находим угол закручивания вала в сечениях 1, 2, 3, 4:

$\alpha_1 = \alpha_0 + \varphi_{\text{I}} = 0 - 0{,}0026$ рад;

$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi_{\text{II}} = -0{,}0026 - 0{,}0185 = -0{,}0211$ рад;

$\alpha_3 = \alpha_2 + \varphi_{\text{III}} = -0{,}0211 + 0{,}001 = -0{,}0201$ рад;

$\alpha_4 = \alpha_3 + \varphi_{\text{IV}} = -0{,}0201 + 0{,}02 = -0{,}0001 \approx 0$ рад.

Строим эпюру углов закручивания (см. рис.3.2). Относительный угол закручивания на каждом участке можно определить по формуле (3.5):

$$\theta_{\text{I}} = \frac{\varphi_{\text{I}}}{1{,}1} = -\frac{0{,}0026}{1{,}1} = -0{,}0023 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{II}} = \frac{\varphi_{\text{II}}}{1{,}4} = -\frac{0{,}0185}{1{,}4} = -0{,}0132 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{III}} = \frac{\varphi_{\text{III}}}{1{,}8} = \frac{0{,}0010}{1{,}8} = 0{,}0006 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{IV}} = \frac{\varphi_{\text{IV}}}{1{,}1} = \frac{0{,}0200}{1{,}1} = 0{,}0182 \text{ рад/м}.$$

5. Наибольшим является относительный угол закручивания на участке 3-4

$$\theta_{\max} = 0{,}0182 \text{ рад/м} = 0{,}0182 \frac{180^\circ}{\pi} = 1{,}04 \text{ град/м}.$$

Таким образом, $\theta_{\max} = 1{,}04$ град/м $< \theta_{\text{adm}} = 1{,}5$ град/м, т. е. условие жесткости выполняется.

**Пример 3.2.**

Шкив двухколодочного тормоза крана, имеющий диаметр $D = 300$ мм, жестко крепится на стальном валу диаметром $d = 30$ мм (рис. 3.3). Определить наибольшие напряжения кручения в сечении вала, если сила нажатия на колодки тормозного шкива $Q$ = 820 Н, коэффициент трения скольжения между колодками и шкивом $f = 0{,}4$. Определить угол закручивания вала, если $l = 400$ мм.

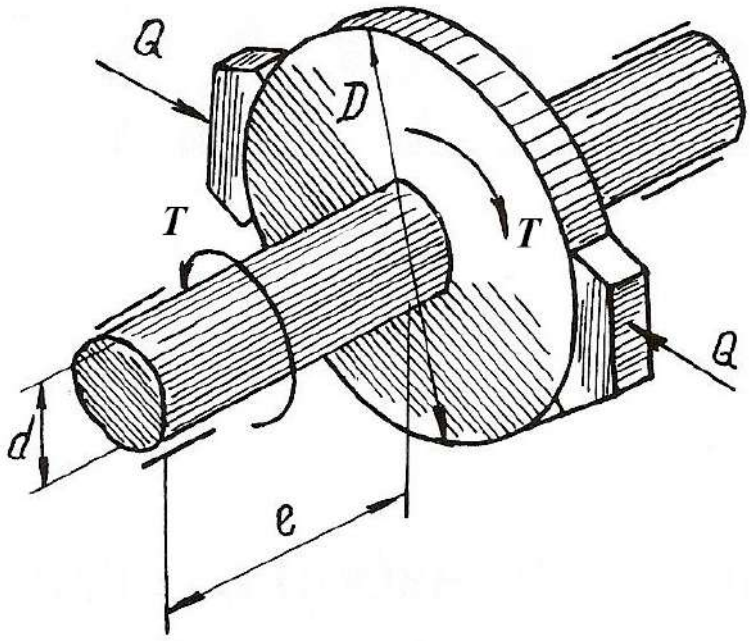



Рис. 3.3.

*Решение.*

Окружное усилие на тормозном шкиве равно силе трения, возникающей между колодками и шкивом

$$F = Qf = 820 \cdot 0{,}4 = 328 \text{ Н}.$$

Крутящий момент на тормозном шкиве

$$T = FD = 328 \cdot 30 \cdot 10^{-2} = 98{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции сечения вала равны

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16}\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^3 = 5{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32}\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^4 = 7{,}96 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Наибольшее касательное напряжение в сечении определяем по формуле (3.1)

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} = \frac{98,4}{5,3 \cdot 10^{-6}} = 18,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,5 \text{ МПа}.$$

Угол закручивания вала тормозного шкива

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{98,4 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{-10} \cdot 7,96 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,36^\circ,$$

следовательно $\varphi = 22'$.

**Пример 3.3.**

К стальному валу, оба конца которого защемлены (рис. 3.4, *а*), приложен крутящий момент $T = 440$ Н·м. Определить реактивные моменты в опорах $A$ и $B$ и построить эпюру крутящих моментов при $l_1 = 0,2$ м, $l = 0,8$ м.

*Решение.*

Обозначим реактивные моменты в защемлении через $T_A$ и $T_B$. Из статики знаем уравнение равновесия

$$-T_A + T - T_B = 0 \text{ или } T_A + T_B = T$$

Далее составим уравнение совместности деформаций. Для этого отбросим (мысленно) защемление правого конца вала и заменим его действием на вал неизвестным реактивным моментом $T_B$ (рис. 3.4, *б*).

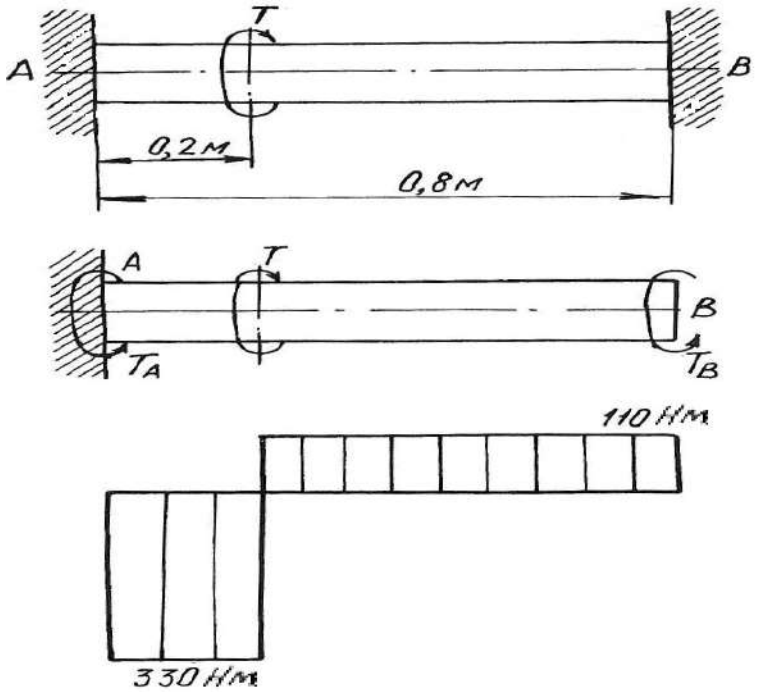



Рис. 3.4.

Величину момента $T_B$ определим из условия, что угол закручивания правого крайнего сечения от действия моментов $T$ и $T_A$ равен нулю, так как это сечение вследствие защемления неподвижно. Угол закручивания правого освобожденного сечения вала на основе принципа независимости действия сил можно определить как сумму двух слагаемых

$$\varphi = \varphi' + \varphi'',$$

где $\varphi'$ и $\varphi''$ – углы закручивания правого освобожденного сечения вала, найденные отдельно от моментов $T$ и $T_B$, при этом $\varphi' = \dfrac{Tl_1}{GJ_p}$ ; $\varphi'' = -\dfrac{T_B l}{GJ_p}$.

Знак минус в выражении $\varphi''$ взят потому, что моменты $T$ и $T_B$ противоположны по направлению.

Полный угол закручивания правого сечения равен нулю, поэтому

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{Tl_1}{GJ_p} - \frac{T_B l}{GJ_p} = 0,$$

откуда $T_B = \dfrac{Tl_1}{l} = \dfrac{440 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = 110$ Н·м.

Из уравнения статики определим момент $T_A$

$$T_A = T - T_B = 440 - 110 = 330 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 3.4, *в*.

### 3.1. Задания для расчета валов на кручение

К стальному валу приложены три известных момента $T_1,\ T_2,\ T_3$.

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента $X$ угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении $\tau_{adm}$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания, найти наибольший относительный угол закручивания и проверить вал на жесткость при $\theta_{adm} = 1{,}5$ град/м.

Данные для расчета приведены на рис. 3.5 и в табл. 3.1.

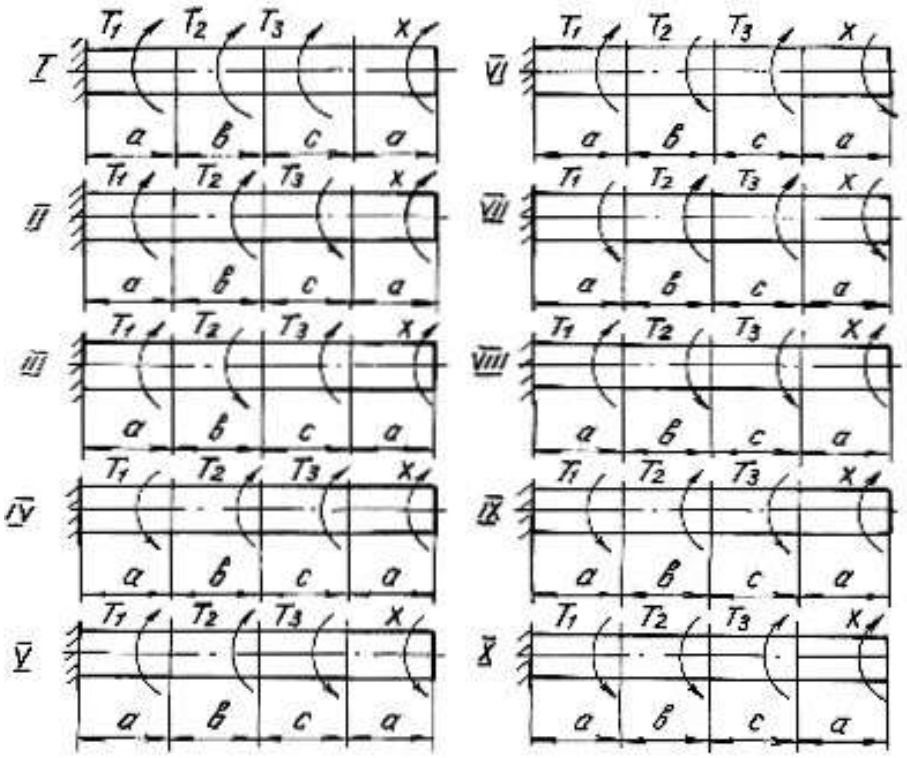



Рис. 3.5.

Таблица 3.1

| Номер варианта | Номер схемы | Расстояние, м | | | Момент, Н·м | | | $\tau_{adm}$, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *a* | *b* | *c* | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | |
| 1 | I | 1,1 | 1,2 | 1,1 | 1100 | 1000 | 1200 | 35 |
| 2 | II | 1,2 | 1,3 | 1,2 | 1200 | 1100 | 1000 | 40 |
| 3 | III | 1,3 | 1,4 | 1,3 | 1300 | 1200 | 1100 | 45 |
| 4 | IV | 1,4 | 1,5 | 1,4 | 1400 | 1300 | 1200 | 50 |
| 5 | V | 1,5 | 1,6 | 1,5 | 1500 | 1400 | 1300 | 55 |
| 6 | VI | 1,6 | 1,7 | 1,6 | 1600 | 600 | 1500 | 60 |
| 7 | VII | 1,7 | 1,8 | 1,7 | 1700 | 700 | 1600 | 65 |
| 8 | VIII | 1,8 | 1,9 | 1,8 | 1800 | 800 | 1700 | 70 |
| 9 | IX | 1,9 | 2,0 | 1,9 | 1900 | 900 | 1800 | 75 |
| 10 | X | 2,0 | 2,1 | 2,0 | 2000 | 1000 | 2100 | 80 |

# Глава 4
# ДЕФОРМАЦИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА БАЛОК

Деформация поперечного изгиба может возникнуть от любых нагрузок, если линии действия этих нагрузок находятся в плоскости, проходящей через продольную ось балки. Если в такой плоскости располагается одна из главных осей инерции поперечного сечения, то возникает деформация плоского изгиба. От действия внешних нагрузок в поперечных сечениях балок возникают внутренние силовые факторы – поперечные силы и изгибающие моменты. Для их нахождения пользуемся методом сечений и, изучая равновесие сил, приводим внешние нагрузки к центру тяжести поперечного сечения.

Поперечная сила $Q_x$ в любом сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения, на ось, перпендикулярную к продольной оси балки.

Изгибающий момент $M_x$ в любом сечении равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих с одной стороны от рассматриваемого сечения балки, относительно центра тяжести сечения.

Правило знаков для $Q_x$ и $M_x$:

1) поперечная сила считается положительной, если она сдвигает левую часть балки от сечения вверх, а правую часть балки вниз;

2) изгибающий момент в сечении считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз; при изгибе балки выпуклостью вверх изгибающий момент считается отрицательным.

Уравновесить момент внешних сил может только момент внутренних сил упругости, который образован силами, направленными нормально к сечению балки. Поперечная сила может быть уравновешена силой, которая является равнодействующей внутренних сил упругости, расположенных в плоскости сечения балки.

Таким образом, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях балок, зависят от величины изгибающих моментов в этих сечениях, а касательные напряжения – от величины поперечных сил в этих сечениях. Эту зависимость в общем виде можно записать

$$\sigma = f_1(M_x); \quad \tau = f_2(Q_x)$$

Таким образом, для того, чтобы определить напряжения в поперечных сечениях, необходимо знать законы изменения $Q_x$ и $M_x$ по длине балок. Для этого строят два графика, называемых эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов.

Порядок построения эпюр сводится к следующему:

1. Заданная балка вычерчивается в выбранном масштабе с указанием размеров и нагрузок;

2. С помощью уравнений равновесия статики определяются реакции опор с обязательной последующей проверкой;

3. Балка разбивается на отдельные участки. Каждый участок имеет свой закон изменения нагрузки;

4. Для каждого участка записываются уравнения для определения $Q_x$ и $M_x$;

5. Вычисляют ординаты $Q_x$ и $M_x$ по составленным для отдельных участков уравнениям;

6. Строят в принятом масштабе эпюры $Q_x$ и $M_x$.

Положительные значения найденных величин откладываются выше нулевой линии эпюры, а отрицательные − ниже ее.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов можно выполнить, применяя следующие контрольные правила для построения эпюр:

1. На концевых шарнирных опорах $Q_x$ равны реакциям, а $M_x$ равны нулю, если на опорах не приложены пары с моментами *M.*

2. На участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

3. На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра $Q_x$ изменяется по закону прямой наклонной линии, а эпюра $M_x$ − по закону квадратичной параболы. В том сечении, где эпюра $Q_x$ пересекается с нулевой линией, на эпюре $M_x$ наблюдается экстремальное значение момента (вершина параболы).

4. На участках, где приложена нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника, эпюра $Q_x$ изменяется по закону квадратичной параболы, а эпюра $M_x$ − по закону кубической параболы.

5. В тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы (включая и реакции), на эпюре $Q_x$ наблюдаются скачки (перепады) на величину этих сил, а на эпюре $M_x$ − переломы смежных линий.

6. В тех сечениях, где приложены пары с моментами *M*, на эпюре $M_x$ наблюдаются скачки на величину этих моментов.

7. На свободном конце консольной балки поперечная сила $Q_x$ равна нулю, если в этом месте не приложена сосредоточенная сила; и изгибающий момент $M_x$ равен нулю, если в этом месте не приложена пара с моментом *M.*

8. В жесткой заделке консольной балки $Q_x$ равна реакции, а изгибающий момент $M_x$ равен моменту заделки.

Нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_{\text{н.о.}}} y, \qquad (4.1)$$

где $M_x$ − изгибающий момент в сечении; $J_{\text{н.о.}}$ − момент инерции сечения относительно нейтральной оси поперечного сечения (нейтральная ось – это ось, в любой точке которой нормальные напряжения всегда равны нулю); $y$ − расстояние до рассматриваемого волокна от нейтральной оси.

Касательные напряжения при изгибе могут быть определены по формуле Д. И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}}{J_{\text{н.о.}} b}, \tag{4.2}$$

где $Q_x$ − поперечная сила в сечении; $S_{\text{н.о.}}$ − статический момент площади отсеченной части поперечного сечения выше уровня, на котором определяются касательные напряжения относительно нейтральной оси; $b$ − ширина сечения на уровне, для которого определяются напряжения.

Подбор поперечного сечения балки производится на основании следующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{\text{adm}}, \tag{4.3}$$

откуда

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}}, \tag{4.4}$$

где $M_{\max}$ − максимальный изгибающий момент, взятый из эпюры $M_x$; $W_{\text{н.о.}}$ − момент сопротивления поперечного сечения балки изгибу относительно нейтральной оси; $\sigma_{\text{adm}}$ − допускаемое нормальное напряжение для материала балки.

После подбора поперечного сечения производится полная проверка балки на прочность по следующим напряжениям:

а) по рабочим нормальным напряжениям

$$\sigma_{\text{раб.}} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{\text{adm}},$$

где $W_{\text{н.о.}}$ − момент сопротивления выбранного поперечного сечения.

б) по максимальным касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{н.о.}}}{J_{\text{н.о.}} b} \le \tau_{\text{adm}},$$

где $Q_{\max}$ − наибольшая поперечная сила, взятая из эпюры $Q_x$; $S_{\text{н.о.}}$ − статический момент части площади выбранного поперечного сечения, находящейся выше или ниже нейтральной оси, относительно этой оси; $b$ − ширина сечения на уровне нейтральной оси; $J_{\text{н.о.}}$ − момент инерции выбранного сечения относительно нейтральной оси.

в) по главным напряжениям:

проверка проводится для балок, ширина сечений которых не постоянна. При этой проверке на основании эпюр выбирается опасное сечение балки, в котором одновременно значения $Q_x$ и $M_x$ большие. По формулам (4.1) и (4.2) для этого сечения строят эпюры нормальных и касательных напряжений, а затем определяют главные напряжения для характерных волокон сечения по его высоте, пользуясь формулой:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \tag{4.5}$$

Для стальных балок определяют расчётное (эквивалентное) напряжение для верхних (нижних), средних, переходных волокон (где резко изменяется ширина сечения) по III или IV теориям прочности.

Проверка прочности сводится к рассмотрению выполнения следующих условий прочности:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_{adm}, \tag{4.6}$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le \sigma_{adm}. \tag{4.7}$$

## 4.1. Расчет балки на прочность

**Пример 4.1.**

Для расчетной схемы с указанными размерами и нагрузками (рис. 4.1.) построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Подобрать поперечное сечение балки в двух вариантах:

а) прямоугольного профиля, полагая, что балка деревянная при $\sigma_{adm} = 10$ МПа; соотношение между размерами сечения принять равным $b:h = 1:2$;

б) двутаврового профиля (см. табл. П.1), материал сталь при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $\tau_{adm} = 96$ МПа.

в) провести полную проверку стальной балки на прочность.

*Решение.*

Определение опорных реакций.

Расчёт балки следует начинать с расстановки и определения величины опорных реакций. Величина и направление опорных реакций и реактивных моментов могут быть определены из решения уравнений равновесия. Для плоской

системы параллельных сил (поперечный плоский изгиб) условия равновесия описываются двумя уравнениями статики: $\sum M_A = 0;\ \sum M_B = 0$.

Рассматриваемая балка (см. рис. 4.1) имеет две шарнирные опоры. В опоре *A* (шарнирно-подвижной) возникает одна реакция $R_A$ , в опоре *B* (шарнирно-неподвижной) направление реакции в общем случае неизвестно, поэтому разложим её на две составляющие: $H_B$ − горизонтальную и $R_B$ − вертикальную. Все нагрузки действуют перпендикулярно продольной оси балки, поэтому из уравнения проекций на горизонтальную ось *x* получается, что составляющая $H_B = 0$. Запишем уравнения моментов сил относительно опоры *B*

$$\sum M_B = 0, \qquad M_1 - R_A \cdot 5 + F \cdot 3 - M_2 + q \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 0 .$$

Решаем уравнение относительно $R_A$

$$R_A = \frac{M_1 + F \cdot 3 - M_2 + q \cdot 3 \cdot 0{,}5}{5} = \frac{30 + 60 \cdot 3 - 50 + 20 \cdot 1{,}5}{5} = 38 \text{ кН} .$$

Запишем уравнения моментов сил относительно опоры *A*

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 4{,}5 - M_2 - F \cdot 2 + M_1 = 0 .$$

Решаем уравнение относительно $R_B$

$$R_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 4{,}5 + M_2 + F \cdot 2 - M_1}{5} = \frac{20 \cdot 3 \cdot 4{,}5 + 50 + 60 \cdot 2 - 30}{5} = \frac{410}{5} = 82 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности вычисления опорных реакций составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось *y*:

$$\sum y = 0, \quad R_A - F - q \cdot 3 + R_B = 0; \quad 38 - 60 - 60 + 82 = 0, \ \ 120 - 120 = 0 .$$

Последнее уравнение обращается в тождество, следовательно, величина реакций и их направление определены правильно.

Если в результате решения уравнения реакция имеет отрицательное значение, то следует изменить направление реакции на противоположное и в дальнейших расчётах считать её положительной.

После определения опорных реакций можно перейти к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, предварительно разбив балку по длине на участки, в пределах которых закон изменения внешних нагрузок остаётся постоянным.

Границы участков располагаются в местах приложения моментов пар сил, сосредоточенных сил, начала или конца распределенной нагрузки.

Участки нумеруются слева или справа от концевых сечений балки. Рассчитываемая балка имеет пять участков I - V.

При составлении аналитических выражений для $Q_x$ и $M_x$ в пределах I-го участка проведём сечение с абсциссой $x_1$ и рассмотрим равновесие левой части консоли. На эту часть балки действует пара сил с моментом $M_1 = 30$ кН · м, поэтому поперечная сила $Q_\text{I} = 0$, а изгибающий момент в любом сечении будет постоянным $M_\text{I} = -M_1 = -30$ кН · м.

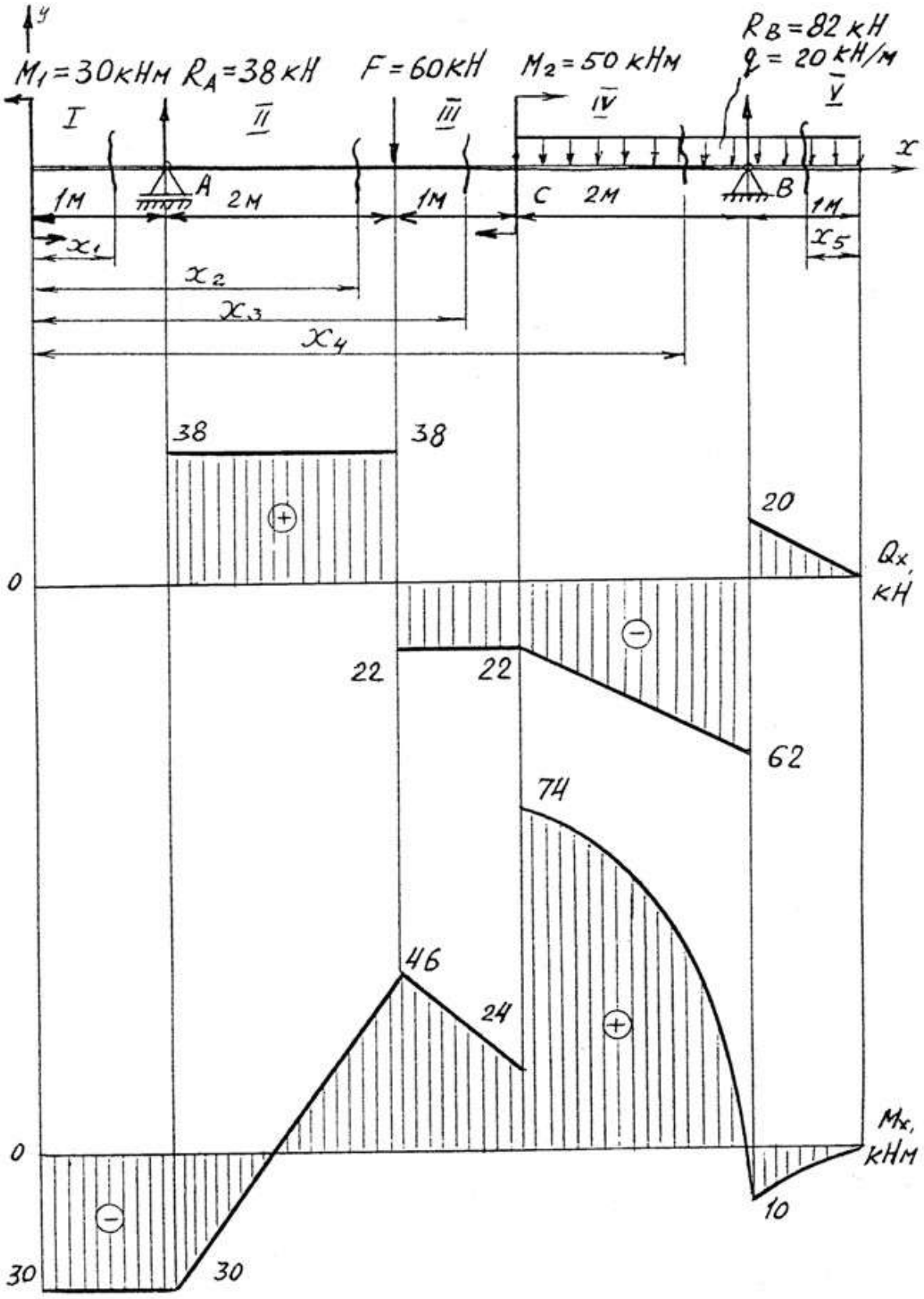

y
M1 = 30кНм
RA = 38 кН
F = 60кН
M2 = 50 кНм
RB = 82 кН
q = 20 кН/м
I
II
III
IV
V
x
A
B
C
1м
2м
1м
2м
1м
x1
x2
x3
x4
x5
38
38
20
0
Qx, кН
22
22
62
74
46
24
0
Mx, кНм
10
30
30

Рис. 4.1.

Для составления аналитических выражений $Q_x$ и $M_x$ в пределах II-го участка проводим сечение с абсциссой $x_2$ и рассматриваем равновесие левой части балки.

$Q_{\text{II}} = R_A = 38$ кН − поперечная сила в пределах II-го участка постоянна.

$M_{\text{II}} = -M + R_A(x_2 - 1)$.

Это уравнение прямой линии, для её построения достаточно определить ординаты изгибающего момента в двух точках (на концах участка):

при $x_2 = 1$ м $\quad M_{\text{II}} = -M_1 = -30$ кН·м;

при $x_2 = 3$ м $\quad M_{\text{II}} = -M_1 + R_A \cdot 2 = -30 + 76 = 46$ кН·м.

Для III-го участка (сечение с абсциссой $x_3$)

$Q_{\text{III}} = R_A - F = 38 - 60 = -22$ кН.

На этом участке поперечная сила не зависит от $x_3$ и поэтому на протяжении всего участка она не меняет своего значения.

$M_{\text{III}} = -M_1 + R_A(x_3 - 1) - F(x_3 - 3)$.

Это уравнение прямой линии.

Вычислим моменты при следующих значениях $x_3$:

при $x_3 = 3$ м $\quad M_{\text{III}} = -30 + 38 \cdot 2 = 46$ кН·м;

при $x_3 = 4$ м $\quad M_{\text{III}} = -30 + 38 \cdot 3 - 60 = 24$ кН·м.

Для IV-го участка (сечение с абсциссой $x_4$) поперечная сила равна:

$Q_{\text{IV}} = R_A - F - q(x_4 - 4)$.

Это уравнение прямой линии.

Вычислим ординаты в начале и в конце участка:

при $x_4 = 4$ м $\quad Q_{\text{IV}} = 38 - 60 = -22$ кН;

при $x_4 = 6$ м $\quad Q_{\text{IV}} = 38 - 60 - 40 = -62$ кН.

Уравнение изгибающих моментов для IV-го участка имеет вид

$$M_{\text{IV}} = -M_1 + R_A(x_4 - 1) - F(x_4 - 3) + M_2 - q\frac{(x_4 - 4)^2}{2}.$$

Это уравнение параболы.

Для её построения определяем моменты:

при $x_4 = 4$ м $\quad M_{\text{IV}} = -30 + 114 - 60 + 50 - 20 \cdot 0 = 74$ кН;

при $x_4 = 6$ м $\quad M_{\text{IV}} = -30 + 38 \cdot 5 - 60 \cdot 3 + 50 - 20 \cdot (4/2) = -10$ кН.

Прежде, чем составлять выражение поперечной силы и изгибающего момента для V-го участка, заметим, что их можно найти как из равновесия левой части, так и из равновесия отсеченной правой части. Каждый раз к выбору решения нужно подходить с точки зрения возможной простоты и наименьшего количества вычислений.

Для V-го участка (сечение с абсциссой $x_5$) поперечная сила равна

$Q_{\text{V}} = q x_5$.

Вычислим значения ординат:

при $x_5 = 0$ $\quad Q_{\text{V}} = 0$;

при $x_5 = 1$ м $\quad Q_{\text{V}} = 20$ кН.

Составим уравнение изгибающего момента для V-го участка:

$$M_{\text{V}} = -qx_5 \frac{x_5}{2} = -\frac{qx_5^2}{2}.$$

Получили уравнение параболы. Для её построения вычислим ординаты:

при $x_5 = 0$, $\quad M_{\text{V}} = 0$;

при $x_5 = 1$, $\quad M_{\text{V}} = -10$ кН·м.

При построении эпюр $Q_x$ и $M_x$ выбираем масштаб и откладываем положительные значения ординат эпюр от нулевой линии вверх, а отрицательные вниз (см. рис. 4.1). После построения эпюр устанавливаем наибольшие значения поперечной силы $Q_{\max} = 62$ кН и изгибающего момента $M_{\max} = 74$ кН·м.

Сечение *C* является опасным, в нем $Q_x = 22$ кН, $M_x = 74$ кН$\cdot$м.

Подбор поперечного сечения балки проводим в соответствии с условием задания в двух вариантах:

а) подбор сечения прямоугольного профиля деревянной балки

$$W_{\text{н.о.}} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 7{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 7400 \text{ см}^3.$$

Для прямоугольного сечения $W_{\text{н.о.}} = \dfrac{J_{\text{н.о.}}}{y_{\max}} = \dfrac{(bh)^3/12}{h/2} = \dfrac{bh^2}{6}$.

При $h = 2b$, $\quad W_{\text{н.о.}} = (2/3)b^3 \geq 7400$ см$^3$, $\quad$ отсюда $\quad b \geq \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 7400}{2}} = 22{,}3$ см;

$h = 2 \cdot 22{,}3 = 44{,}6$ см.

После округления размеров в большую сторону принимаем: $h = 46$ см, $b = 23$ см.

б) подбор сечения двутаврового профиля

$$W_{\text{н.о.}} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 4{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 462 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента проката этому значению соответствует двутавр № 30, для которого $W_{\text{н.о.}} = W_x^{\text{табл.}} = 472$ см$^3$.

Основные размеры и геометрические характеристики профиля:

высота $h = 0{,}3$ м; ширина полки $b = 0{,}135$ м; толщина полки $t = 0{,}01$ м; толщина стенки $d = 0{,}65 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A = 46{,}5 \cdot 10^{-4}$ м$^2$; момент инерции сечения относительно нейтральной оси $J_{\text{н.о.}} = J_x^{\text{табл.}} = 0{,}708 \cdot 10^{-4}$ м$^4$; статический момент половины площади сечения относительно нейтральной оси $S_{\text{н.о.}}^{\max.} = S_x^{\text{табл.}} = 2{,}68 \cdot 10^{-4}$ м$^3$.

Полная проверка стальной балки на прочность:

а) проверка по рабочим нормальным напряжениям

$$\sigma_{\text{раб.}} = \frac{M_{\max}}{W_x^{\text{табл.}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{4,72 \cdot 10^{-4}} = 157 \cdot 10^6 \text{ Па} = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{раб.}} = 157 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа},$$

т. е. условие прочности выполняется.

б) проверка по максимальным касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{табл.}}}{J_x^{\text{табл.}} d} = \frac{62 \cdot 2,68 \cdot 10^{-4}}{0,708 \cdot 10^{-4} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 36,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 36,2 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условие прочности выполняется.

в) проверка по главным напряжениям в опасном сечении *C*, в котором $Q_x = 22$ кН, $M_x = 74$ кН·м.

Строим эпюру нормальных напряжений для этого сечения по уровням (рис. 4.2):

$$\sigma_{1-1} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} y_{1-1} = -\frac{74 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 10^{-4}} 0,15 = -157 \cdot 10^6 \text{ Па} = -157 \text{ МПа}.$$

Знак «минус» при напряжении для верхних волокон указывает на то, что при положительной эпюре $M_x$ в этом сечении верхняя часть волокон испытывает деформацию осевого сжатия.

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{1-1} = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2-2} = \sigma_{3-3} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} y_{2-2} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} \left(\frac{h}{2} - t\right) = -\frac{74 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 10^{-4}} (0,15 - 0,01) =$$

$$= -147 \cdot 10^6 \text{ Па} = -147 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{4-4} = 0, \text{ так как } y_{4-4} = 0.$$

Эпюра касательных напряжений также строится по значениям, определяемым для различных уровней (волокон) сечения

$$\tau_{1-1} = \tau_{7-7} = 0,$$

так как $S_{\text{н.о.}}^{1-1} = 0,$ т. е. статический момент площади сечения, находящейся выше или ниже уровня 1-1 относительно нейтральной оси, равен нулю.

Напряжения в волокнах уровня 2-2 и 6-6 можно не определять, так как они обычно очень малы.

В переходных волокнах 3-3 и 5-5 напряжения будут равны

$$\tau_{3-3} = \tau_{5-5} = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}^{3-3}}{J_x^{\text{табл.}} b_{3-3}} = \frac{Q_x bt(h/2 - t/2)}{J_x^{\text{табл.}} d} =$$

$$= \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 0{,}135 \cdot 0{,}01 \cdot (0{,}15 - 0{,}005)}{0{,}708 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-2}} = 9{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9{,}7 \text{ МПа}.$$

Для волокон нейтрального слоя

$$\tau_{4-4} = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}^{4-4}}{J_x^{\text{табл.}} b_{4-4}} = \frac{Q_x S_x^{\text{табл.}}}{J_x^{\text{табл.}} d} = \frac{22 \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-4}}{0{,}708 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-2}} = 12{,}8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12{,}8 \text{ МПа}.$$

Эпюры σ и τ строятся в масштабе (см. рис. 4.2).

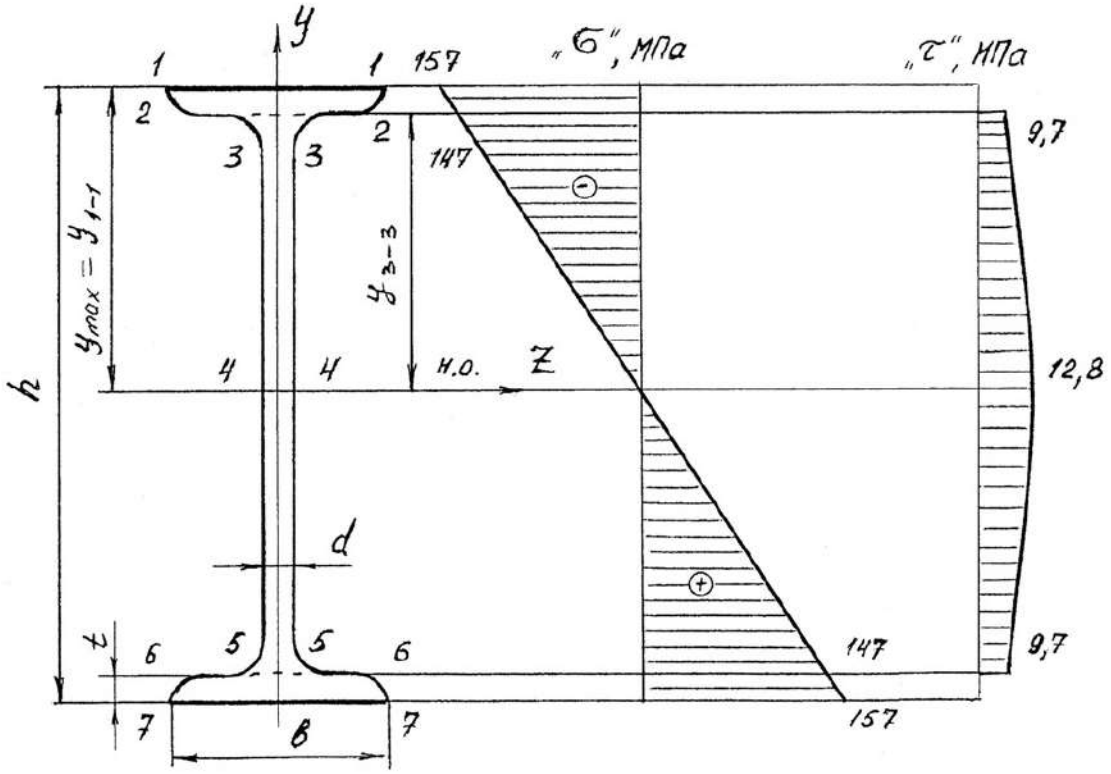



Рис. 4.2.

На основании эпюр напряжений определяют главные напряжения для верхних, переходных и средних волокон

$$\sigma_1^{1-1} = 1/2(\sigma_{1-1} + \sqrt{\sigma_{1-1}^2 + 4\tau_{1-1}^2}) = 1/2(-157 + \sqrt{157^2 + 4 \cdot 0^2}) = 0;$$

$$\sigma_2^{1-1} = 1/2(-157 - \sqrt{157^2 + 4 \cdot 0^2}) = -157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1^{3-3} = 1/2(-147 + \sqrt{147^2 + 4 \cdot 9{,}7^2}) = 0{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^{3-3} = 1/2(-147 - \sqrt{147^2 + 4 \cdot 9{,}7^2}) = -147{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1^{4-4} = 1/2(0 + \sqrt{0^2 + 4 \cdot 12{,}8^2}) = 12{,}8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^{4-4} = -12{,}8 \text{ МПа}.$$

Определим величины расчётных напряжений по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{p}}^{1-1} = \sigma_1^{1-1} - \sigma_2^{1-1} = 0 - (-157) = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{p}}^{3-3} = \sigma_1^{3-3} - \sigma_2^{3-3} = 0,5 - (-147,5) = 148 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{p}}^{4-4} = \sigma_1^{4-4} - \sigma_2^{4-4} = 12,8 - (-12,8) = 25,6 \text{ МПа},$$

таким образом условие прочности $\sigma_{\text{p}}^{\text{III}} < \sigma_{\text{adm}}$ выполняется.

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{p}}^{1-1} = \sqrt{(\sigma_1^{1-1})^2 + (\sigma_2^{1-1})^2 - \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}} = \sqrt{0^2 + 157^2 - 0^2} = 157 \text{ МПа}.$$

Аналогично: $\sigma_{\text{p}}^{3-3} = 148$ МПа; $\sigma_{\text{p}}^{4-4} = 22,1$ МПа.

Таким образом, результаты по всем вариантам полной проверки прочности балки показывают, что все условия прочности выполняются, следовательно, к практическому применению принимается двутавр № 30.

**Пример 4.2.** Консольная балка, сложное сечение.

Для заданной схемы балки (рис. 4.3) построить эпюры поперечных сил $Q_x$ и изгибающих моментов $M_x$, определить размеры сечения заданной формы из условия прочности, принимая $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

*Решение.*

Определим реакции опоры $A$ из уравнений равновесия

1) $\sum M_A = 0; \quad -M_A + M - q \cdot 1 \cdot 2,5 + F \cdot 3 = 0;$

$M_A = M - q \cdot 1 \cdot 2,5 + F \cdot 3 = 6 - 10 + 24 = 20$ кН·м.

2) $\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot 1 + F = 0$ (предварительное направление реакции $R_A$ вверх);

$R_A = q \cdot 1 - F = 4 - 8 = -4$ кН (меняем направление реакции на противоположное).

Проверка

$$\sum M_C = 0; \quad -M_A + R_A \cdot 3 + M + q \cdot 1 \cdot 0,5 = -20 + 12 + 6 + 2 = 0.$$

Определим размеры поперечного сечения (см. рис. 4.3), для чего условно разбиваем это сечение на фигуры 1, 2, 3 и 4, площади которых равны: $A_1 = 5b \cdot 6b;\ A_2 = 2b \cdot 3b;\ A_3 = A_4 = b \cdot b.$

Для определения положения центра тяжести сечения проводим вспомогательную ось $x_{\text{вр}}$ и найдем координату $y_C$ по известной формуле

$$y_c = \frac{S_{x_{\text{вр}}}}{A} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4}{A_1 - A_2 + \cdot A_3 + A_4} =$$

$$= \frac{6b \cdot 5b \cdot 2{,}5b - 2b \cdot 3b \cdot 1{,}5b + 2b \cdot b \cdot 0{,}5b}{6b \cdot 5b - 2b \cdot 3b + 2b \cdot b} = 2{,}58b,$$

где $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ – расстояния от центров тяжести фигур 1, 2, 3, 4 до оси $x_{вр}$.

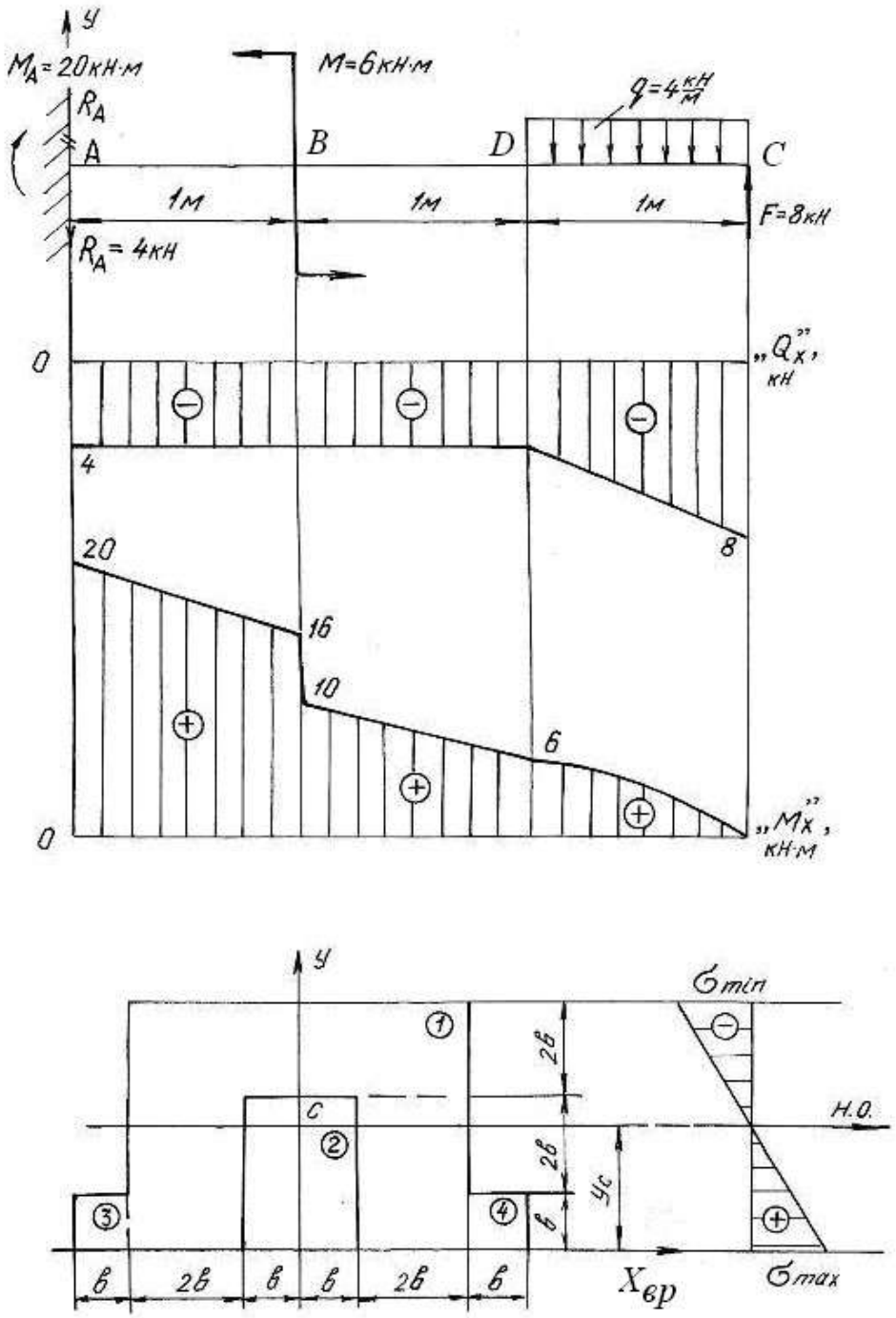



Рис. 4.3.

Так как сечение симметричное, то его центр тяжести лежит на оси симметрии $y$.

Проводим нейтральную ось через центр тяжести параллельно вспомогательной оси $x_{\text{вр}}$. Находим момент инерции относительно нейтральной оси

$$J_{\text{н.о.}} = \left(J_{\text{н.о.}}\right)^1 - \left(J_{\text{н.о.}}\right)^2 + 2\left(J_{\text{н.о.}}\right)^3 = \left[\frac{6b\cdot(5b)^3}{12} + 6b\cdot 5b\cdot(y_1 - y_c)^2\right] -$$

$$-\left[\frac{2b\cdot(3b)^3}{12} + 2b\cdot 3b\cdot(y_2 - y_c)^2\right] + 2\cdot\left[\frac{b\cdot b^3}{12} + b\cdot b\cdot(y_3 - y_c)^2\right] = 60\cdot b^4,$$

где $(y_n - y_C)$ – расстояние между собственной осью простой фигуры и нейтральной осью.

Строим эпюры поперечных сил $Q_x$ и изгибающих моментов $M_x$, пользуясь контрольными правилами и начиная построения со свободного конца балки.

$Q_C = -F = -8$ кН; $Q_D = -F + q\cdot 1 = -8 + 4 = -4$ кН $= Q_B = Q_A$;

$M_C = 0$; $M_D = F\cdot 1 - q\cdot 1\cdot 0{,}5 = 8 - 2 = 6$ кН·м;

$M_B = F\cdot 2 - q\cdot 1\cdot 1{,}5 = 16 - 6 = 10$ кН·м.

В сечении $B$ изгибающий момент возрастает на момент $M = 6$ кН·м, что на эпюре $M_x$ отражается в виде скачка. Изгибающий момент в жесткой заделке равен моменту заделки $M_A$.

Максимальный изгибающий момент $M_{\max} = M_A = 20$ кН·м. Максимальные напряжения, возникающие в нижних волокнах этого сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y^{\text{н}}_{\max}}{J_{\text{н.о.}}} = \frac{20\cdot 2{,}58\cdot b}{60\cdot b^4} = \frac{0{,}83\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3}.$$

Максимальные напряжения, возникающие в верхних волокнах этого сечения

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\max} y^{\text{в}}_{\max}}{J_{\text{н.о.}}} = \frac{20\cdot 2{,}42\cdot b}{60\cdot b^4} = \frac{0{,}81\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3}.$$

Приравнивая наибольшее напряжение к допускаемому напряжению $\sigma_{\text{adm}}$, получим размер сечения $b$

$$\sigma_{\max} = \frac{0{,}83\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3} \le \sigma_{\text{adm}} = 160\ \text{МПа};\ b^3 \ge \frac{0{,}83\cdot 10^3}{160\cdot 10^6},$$

$$b \ge \sqrt[3]{5{,}2\cdot 10^{-6}} = 1{,}73\cdot 10^{-2}\ \text{м};\ \ b = 18\ \text{мм}.$$

## 4.2. Задания для расчета балок на прочность

Для расчетной схемы балки необходимо:

1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

2. Подобрать поперечное сечение балки в двух вариантах:

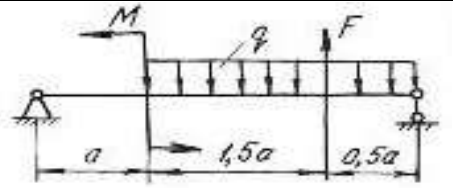
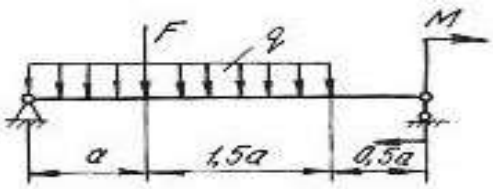
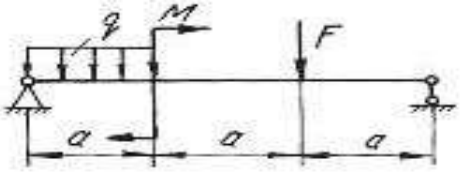
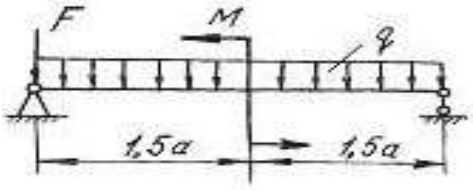
а) прямоугольного профиля, полагая, что балка деревянная при $\sigma_{adm} = 10$ МПа; соотношение между размерами сечения принять равными $b:h = 1:2$;

б) двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $\tau_{adm} = 96$ МПа.

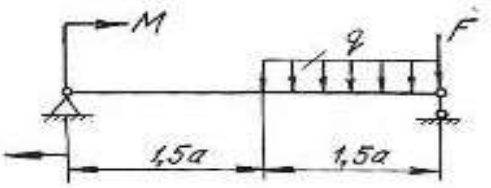
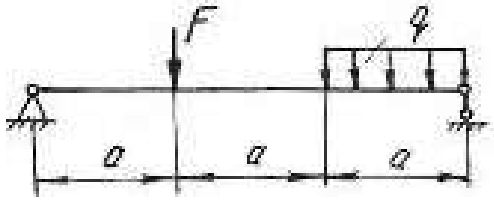
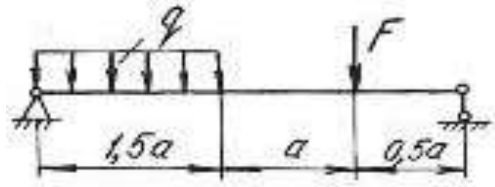
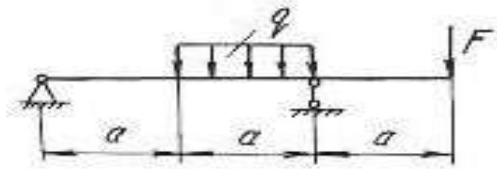
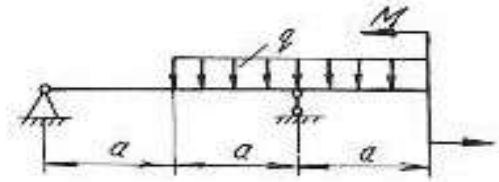
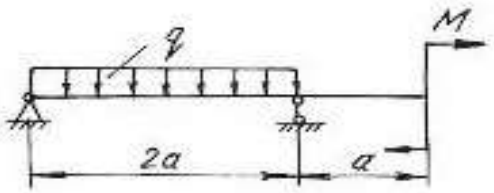
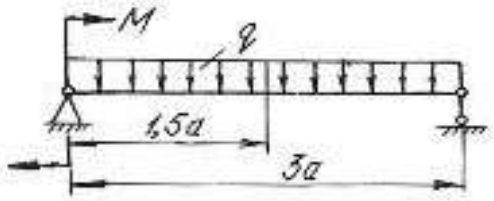
3. Провести полную проверку стальной двутавровой балки на прочность.

Данные для расчета приведены в табл. 4.1.

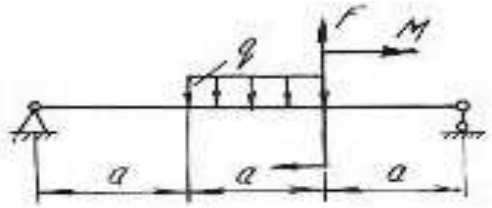
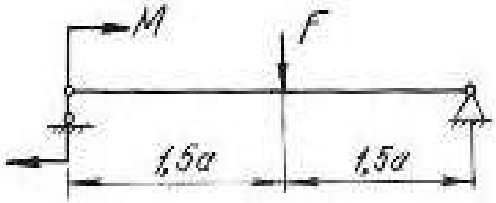
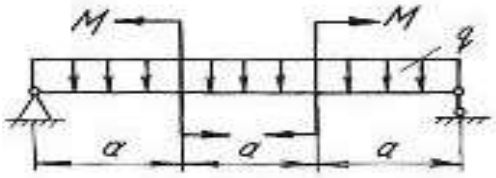
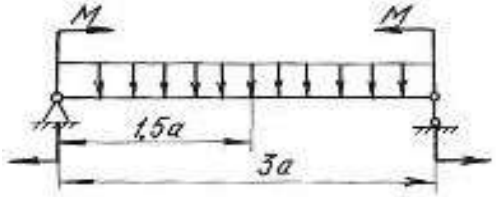
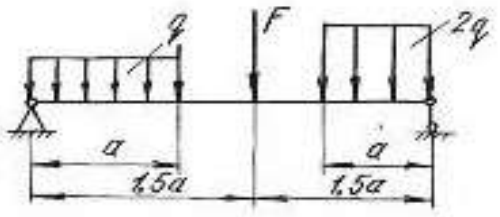
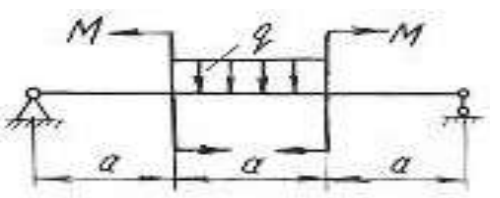
Таблица 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a*, м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|  | 1 | 2,0 | 19 | 20 | 20 |
| | 2 | 1,0 | 16 | 35 | 40 |
| | 3 | 1,2 | 10 | 30 | 40 |
|  | 4 | 2,0 | 10 | 25 | 50 |
| | 5 | 2,2 | 30 | 50 | 40 |
| | 6 | 2,4 | 10 | 10 | 20 |
|  | 7 | 1,0 | 10 | 65 | 20 |
| | 8 | 1,2 | 10 | 55 | 40 |
| | 9 | 2,0 | 20 | 45 | 15 |
|  | 10 | 1,0 | 18 | 32 | 60 |
| | 11 | 2,2 | 10 | 35 | 50 |
| | 12 | 1,8 | 30 | 42 | 30 |
|  | 13 | 2,0 | 12 | 26 | 20 |
| | 14 | 1,0 | 14 | 14 | 20 |
| | 15 | 2,0 | 15 | 25 | 30 |

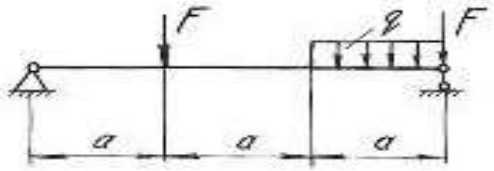
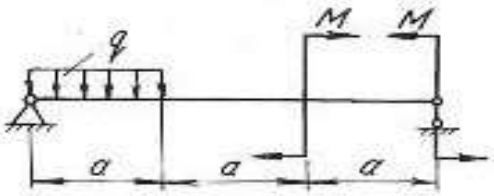
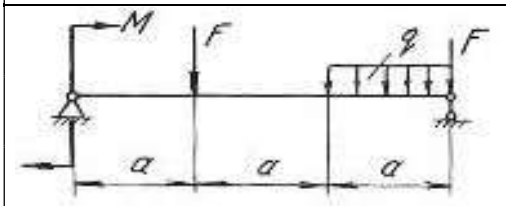
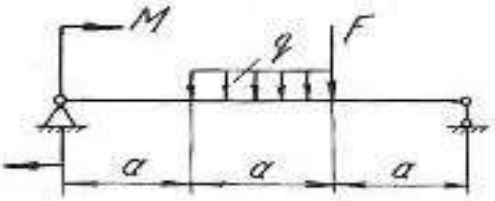
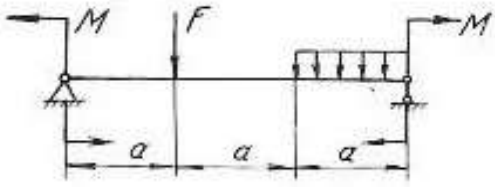
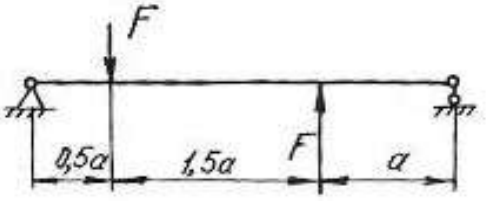
Продолжение табл. 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a*, м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|  | 16 | 1,0 | 10 | 32 | 40 |
| | 17 | 2,0 | 25 | 42 | 20 |
| | 18 | 1,6 | 30 | 50 | 30 |
|  | 19 | 1,0 | 10 | – | 10 |
| | 20 | 2,0 | 11 | – | 30 |
| | 21 | 1,0 | 12 | – | 30 |
|  | 22 | 1,2 | 13 | – | 60 |
| | 23 | 2,2 | 14 | – | 70 |
| | 24 | 3,0 | 15 | – | 40 |
|  | 25 | 3,0 | 16 | – | 20 |
| | 26 | 1,2 | 17 | – | 70 |
| | 27 | 2,0 | 18 | – | 70 |
|  | 28 | 3,0 | 20 | 10 | – |
| | 29 | 2,0 | 21 | 60 | – |
| | 30 | 2,0 | 22 | 10 | – |
|  | 31 | 2,1 | 23 | 30 | – |
| | 32 | 2,0 | 24 | 30 | – |
| | 33 | 2,2 | 25 | 30 | – |
|  | 34 | 2,0 | 26 | 40 | – |
| | 35 | 2,0 | 27 | 40 | – |
| | 36 | 2,0 | 28 | 40 | – |

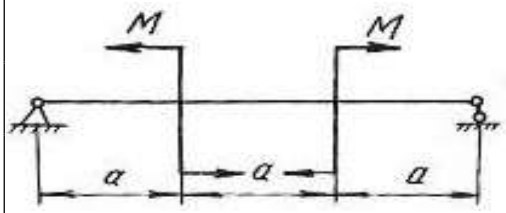
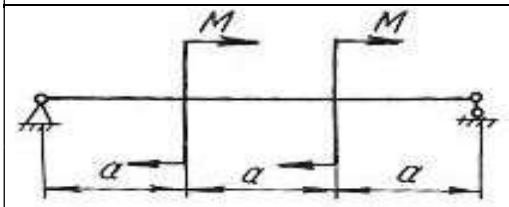
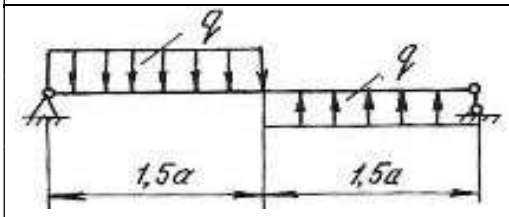
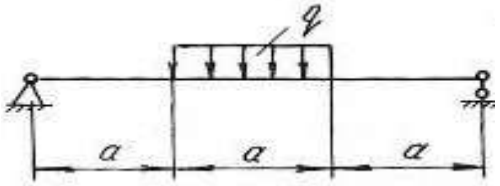
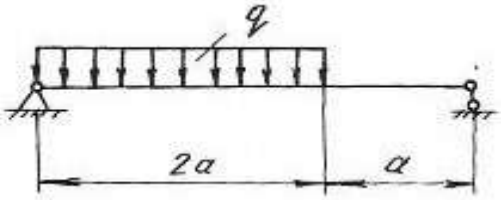
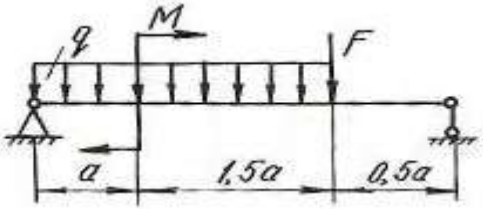
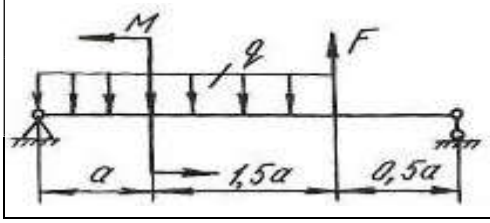
Продолжение табл. 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a*, м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|  | 37 | 1,2 | 10 | 30 | 15 |
| | 38 | 1,3 | 12 | 40 | 10 |
| | 39 | 1,4 | 15 | 45 | 12 |
|  | 40 | 1,0 | 14 | 50 | 10 |
| | 41 | 2,0 | 13 | 60 | 20 |
| | 42 | 2,0 | 12 | 55 | 12 |
|  | 43 | 1,1 | 16 | – | 20 |
| | 44 | 1,4 | 17 | – | 16 |
| | 45 | 1,5 | 20 | – | 15 |
|  | 46 | 1,6 | 18 | 30 | – |
| | 47 | 1,2 | 11 | 20 | – |
| | 48 | 1,3 | 14 | 10 | – |
|  | 49 | 0,8 | 15 | 40 | – |
| | 50 | 0,7 | 13 | 13 | – |
| | 51 | 1,1 | 17 | 22 | – |
|  | 52 | 0,5 | 24 | – | 20 |
| | 53 | 0,6 | 28 | – | 30 |
| | 54 | 0,9 | 30 | – | 40 |
|  | 55 | 1,1 | 10 | 30 | – |
| | 56 | 1,2 | 20 | 31 | – |
| | 57 | 1,3 | 30 | 32 | – |

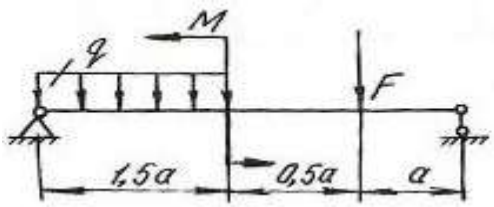
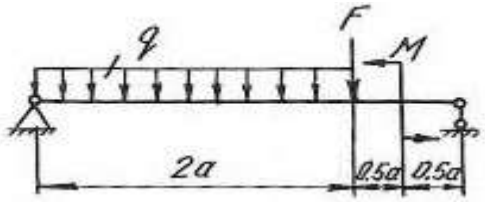
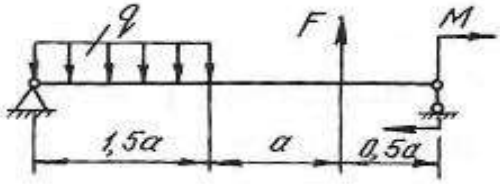
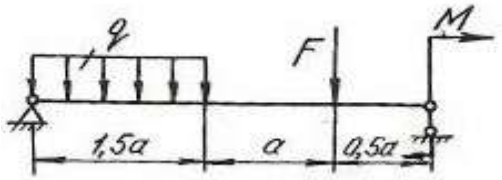
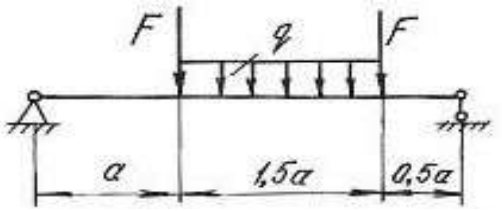
Продолжение табл. 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a,* м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|  | 58 | 1,4 | 40 | – | 40 |
| | 59 | 1,2 | 35 | – | 50 |
| | 60 | 2,0 | 28 | – | 80 |
|  | 61 | 1,5 | 12 | 20 | – |
| | 62 | 1,7 | 14 | 30 | – |
| | 63 | 1,9 | 16 | 40 | – |
|  | 64 | 2,1 | 18 | 20 | 20 |
| | 65 | 2,3 | 19 | 30 | 30 |
| | 66 | 2,5 | 20 | 25 | 40 |
|  | 67 | 2,0 | 12 | 30 | 25 |
| | 68 | 2,4 | 10 | 35 | 30 |
| | 69 | 2,7 | 10 | 30 | 35 |
|  | 70 | 1,0 | 12 | 10 | 40 |
| | 71 | 2,0 | 14 | 20 | 30 |
| | 72 | 2,0 | 16 | 30 | 40 |
|  | 73 | 1,0 | – | – | 20 |
| | 74 | 2,0 | – | – | 30 |
| | 75 | 2,5 | – | – | 40 |

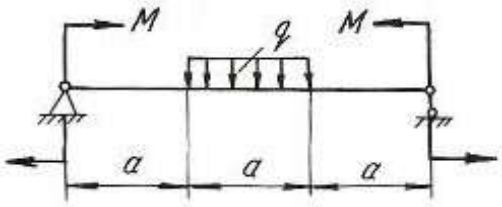
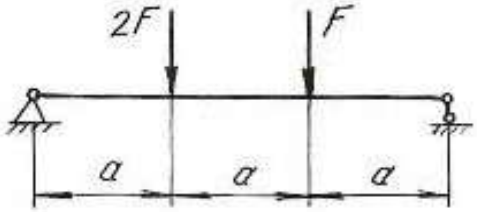
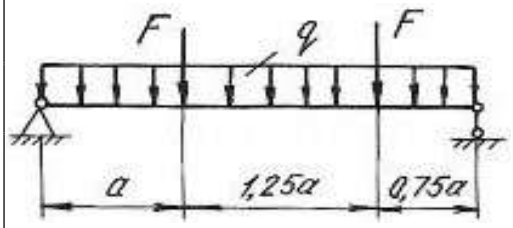
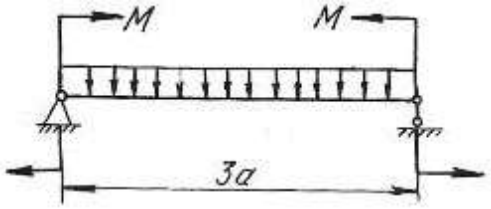
Продолжение табл. 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a*, м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|   | 76 | 1,5 | – | 30 | – |
| | 77 | 2,5 | – | 40 | – |
| | 78 | 1,2 | – | 50 | – |
|   | 79 | 1,3 | – | 40 | – |
| | 80 | 1,4 | – | 25 | – |
| | 81 | 1,6 | – | 30 | – |
|   | 82 | 1,7 | 10 | – | – |
| | 83 | 1,8 | 10 | – | – |
| | 84 | 1,9 | 10 | – | – |
|   | 85 | 2,1 | 30 | – | – |
| | 86 | 2,2 | 20 | – | – |
| | 87 | 2,3 | 10 | – | – |
|   | 88 | 2,0 | 25 | – | – |
| | 89 | 1,0 | 15 | – | – |
| | 90 | 2,3 | 10 | – | – |
|   | 91 | 1,0 | 15 | 30 | 80 |
| | 92 | 2,0 | 20 | 40 | 90 |
| | 93 | 2,0 | 25 | 50 | 100 |
|   | 94 | 1,2 | 10 | 45 | 25 |
| | 95 | 1,4 | 12 | 50 | 30 |
| | 96 | 1,6 | 15 | 60 | 35 |

Продолжение табл. 4. 1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a,* м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|  | 97 | 1,8 | 15 | 30 | 40 |
| | 98 | 1,0 | 18 | 20 | 45 |
| | 99 | 1,4 | 21 | 55 | 50 |
|  | 100 | 1,0 | 10 | 30 | 55 |
| | 101 | 2,0 | 20 | 35 | 80 |
| | 102 | 1,0 | 30 | 60 | 40 |
|  | 103 | 1,9 | 15 | 25 | 60 |
| | 104 | 1,7 | 13 | 50 | 40 |
| | 105 | 1,3 | 17 | 75 | 20 |
|  | 106 | 1,0 | 18 | 20 | 35 |
| | 107 | 2,2 | 16 | 60 | 45 |
| | 108 | 2,3 | 14 | 40 | 55 |
|  | 109 | 1,0 | – | 30 | 50 |
| | 110 | 0,6 | – | 40 | 50 |
| | 111 | 0,8 | – | 30 | 60 |
|  | 112 | 1,0 | 2 | – | 70 |
| | 113 | 0,6 | 30 | – | 60 |
| | 114 | 1,2 | 40 | – | 50 |

Окончание табл. 4.1

| Схема балки и нагрузки | Номер варианта | Числовые значения нагрузок и размеров | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *a,* м | *q*, кН/м | *M*, кН·м | *F*, кН |
|   | 115 | 1,2 | 20 | 40 | – |
| | 116 | 1,3 | 10 | 20 | – |
| | 117 | 1,4 | 20 | 30 | – |
|   | 118 | 1,5 | – | – | 40 |
| | 119 | 1,0 | – | – | 30 |
| | 120 | 1,3 | – | – | 20 |
|   | 121 | 1,0 | 10 | – | 20 |
| | 122 | 1,0 | 20 | – | 40 |
| | 123 | 1,0 | 30 | – | 10 |
|   | 124 | 1,2 | 10 | 20 | – |
| | 125 | 1,3 | 11 | 40 | – |
| | 126 | 1,5 | 12 | 50 | – |

## 4.3. Расчет балки на жесткость

После проверки балок на прочность они обычно проверяются на жесткость.

Проверка состоит в определении максимальных перемещений балки при изгибе и сравнении их с допускаемыми значениями для данного материала и типа балки. При этом должны выполняться следующие условия:

$$y_{\max} \le y_{\text{adm}}; \quad y_{\text{adm}} = (\frac{1}{20} \div \frac{1}{250})l; \qquad \theta_{\max} \le \theta_{\text{adm}},$$

где $y_{\text{adm}}$ – допускаемый прогиб; $\theta_{\text{adm}}$ – допускаемый угол поворота; $l$ – пролёт балки.

Для определения прогибов и углов поворота в статически определимых балках обычно применяют метод начальных параметров, который записывается в виде следующих универсальных уравнений:

$$EJ_Z\theta = EJ_Z\theta_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(x-b_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-c_i)^3}{3!}, \quad (4.8)$$

где $n$ – количество нагрузок на рассматриваемых участках.

$$EJ_z y = EJ_Z y_0 + EJ_Z\theta_0 x + \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(x-b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-c_i)^4}{4!}, \quad (4.9)$$

где $\theta$ – угол поворота в исследуемом сечении; $y$ – прогиб в исследуемом сечении; $y_0$ – прогиб в начале координат; $\theta_0$ – угол поворота в начале координат; $x$ – расстояние от начала координат до сечения, в котором определяются перемещения; $M$, $F$, $q$ – внешние нагрузки, включая и реакции; $a$ – расстояния от начала координат до сечений, где приложены моменты; $b$ – расстояния от начала координат до сечений, где приложены сосредоточенные силы; $c$ – расстояния от начала координат до начала каждого участка, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой; $EJ_Z$ – жесткость балки при поперечном изгибе.

Метод начальных параметров применяется при условии, что жесткость $EJ_Z$ постоянна по всей длине балки.

Слагаемые, которые включают $M$, $F$, $q$, по знаку определяются в соответствии с правилами знаков, принятыми для определения $M_x$ при расчете слева. При использовании метода начальных параметров необходимо выполнить следующие требования:

1. Начало координат принимается единым для всей балки (обычно в левом крайнем сечении балки);

2. Если равномерно распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, то ее необходимо продлить до этого сечения, а для сохранения равновесия приложить такую же по величине, но противоположного направления нагрузку. Эту контрнагрузку необходимо включить в уравнения.

Начальные параметры $y_0$ и $\theta_0$ определяются следующим образом. Если начало координат находится не на опоре (рис. 4.4, *б*), то составляем два дополнительных уравнения прогибов для двух опор, где заранее известно, что прогибы на опорах равны нулю. Если начало координат находится на концевой шарнирной опоре (рис. 4.4, *в*), то составляем одно дополнительное уравнение прогибов для другой опоры. Если начало координат находится в жесткой заделке (рис. 4.4, *г*), то дополнительные уравнения составлять не нужно.

При решении задач необходимо иметь в виду, что положительное направление оси $y$ принято вверх. При этом условии положительное значение угла поворота соответствует вращению сечения против хода часовой стрелки, положительный прогиб направлен вверх.

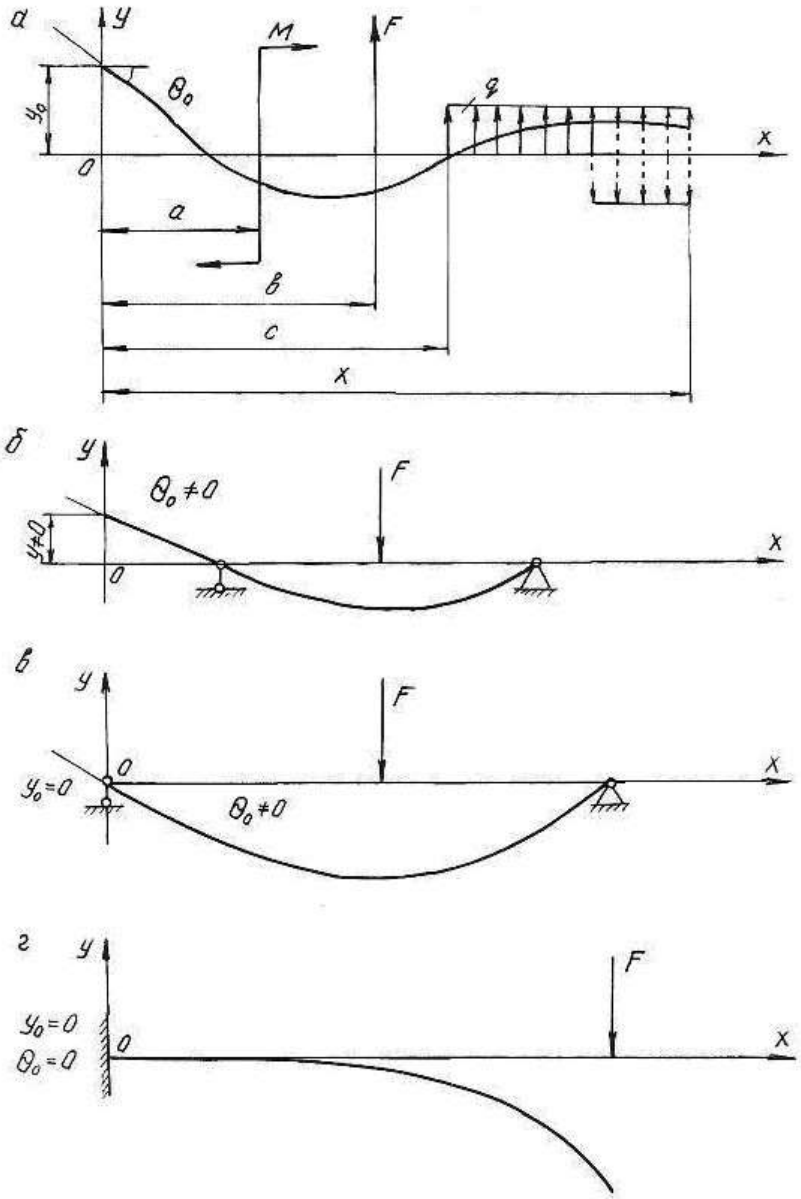



Рис. 4.4.

**Пример 4.3.**

Для балки, изображенной на рис. 4.5, построить эпюры $Q_x$ и $M_x$, подобрать поперечное двутавровое сечение (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. По методу начальных параметров определить прогибы в сечениях $C$ и $D$ и угол поворота сечения $B$. Построить эпюру прогибов и провести проверку на жесткость при $y_{adm} = (1/200)l = (1/200)4 = 0,02$ м $= 2$ см, где $l$ – пролет балки.

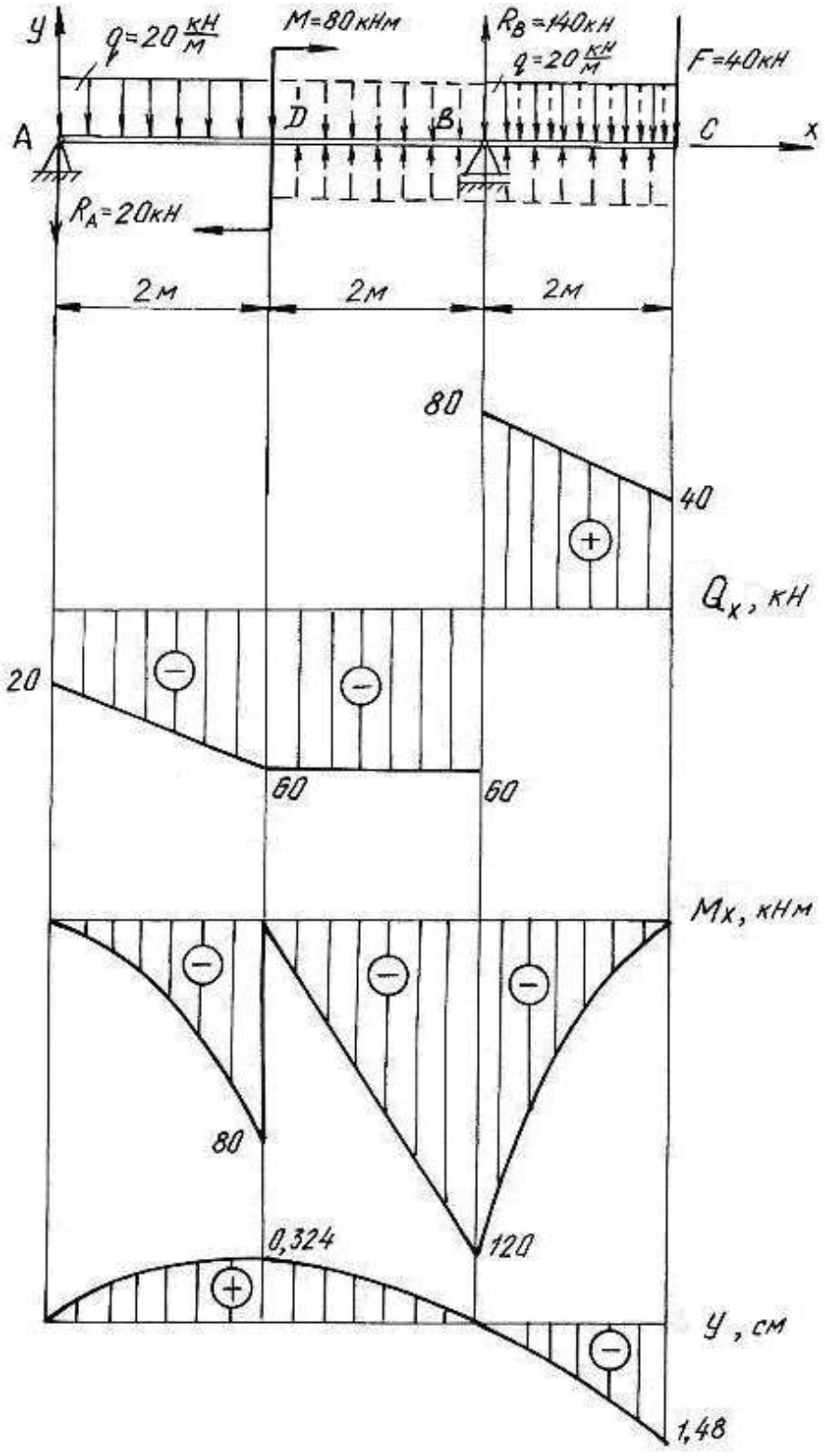

y
q=20 кН/м
M=80 кНм
R_B=140кН
q=20 кН/м
F=40кН
A
D
B
C
x
R_A=20кН
2м
2м
2м
80
40
Q_x, кН
20
60
60
M_x, кНм
80
120
0,324
y, см
1,48

Рис. 4.5.

*Решение.*

Определим опорные реакции:

$$\sum M_B = 0, \qquad R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 = 0;$$
$$R_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 3 - 80 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 40 \cdot 2 = 0; \quad R_A = 20 \text{ кН}.$$
$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 - M - q \cdot 2 \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$
$$R_B \cdot 4 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 80 - 20 \cdot 2 \cdot 5 - 40 \cdot 6 = 0; \qquad R_B = 140 \text{ кН}.$$

Проводим проверку

$$\sum Y = 0; \qquad -R_A + R_B - q \cdot 2 - F - q \cdot 2 = 0;$$
$$-20 + 140 - 20 \cdot 2 - 40 - 20 \cdot 2 = 0; \quad 0 = 0$$

По контрольным правилам строим эпюры $Q_x$ и $M_x$, и подбираем поперечное сечение при $M_{\max} = 120$ кН.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 750 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента (см. табл. П.1) принимаем двутавр № 36:

$J_z = J_x^{\text{табл.}} = 13380 \text{ см}^4 = 13380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

Для определения перемещений помещаем начало координат на левой опоре (прогиб $y_0 = 0$, угол поворота $\theta_0 \neq 0$). Составляем дополнительное уравнение прогибов для сечения $B$ (при $x_B = 4$ м), где заранее известно, что прогиб на опоре $y_B$ равен нулю.

Распределенная нагрузка обрывается в сечении $D$. Продолжим её до сечения $B$, в котором определяем перемещение, но, чтобы не нарушить прежнее равновесие, вводим уравновешивающую нагрузку обратного направления на участке $BD$.

$$EJ_Z y_B = EJ_Z \theta_0 x_B + \frac{M(x-2)^2}{2} - \frac{R_A(x_B - 0)^3}{6} - \frac{q(x_B - 0)^4}{24} + \frac{q(x_B - 2)^4}{24};$$
$$0 = EJ_Z \theta_0 \cdot 4 + \frac{80(4-2)^2}{2} - \frac{20(4-0)^3}{6} - \frac{20(4-0)^4}{24} + \frac{20(4-2)^4}{24}.$$

Последний член уравнения учитывает компенсирующую нагрузку. Подставляя числовые значения, получим $EJ_Z \theta_0 = EJ_Z \theta_A = 63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Определим прогибы на границах заданных участков. При определении прогиба в сечении $C$ равномерно распределенную нагрузку необходимо продлить до этого сечения и уравновесить её.

В сечении $C$ ($x_C = 6$ м):

$$EJ_Z y_C = EJ_Z \theta_0 x_C + \frac{M(x_C-2)^2}{2} - \frac{R_A(x_C-0)^3}{6} + \frac{R_B(x_C-4)^3}{6} -$$
$$- \frac{q(x_C-0)^4}{24} + \frac{q(x_C-2)^4}{24} - \frac{q(x_C-4)^4}{24};$$

$$EJ_Z y_C = 63{,}3 \cdot 6 + \frac{80 \cdot (6-2)^2}{2} - \frac{20 \cdot (6-0)^3}{6} + \frac{140 \cdot (6-4)^3}{6} - \frac{20 \cdot (6-0)^4}{24} +$$
$$+ \frac{20(6-2)^4}{24} - \frac{20(6-4)^4}{24} = -393 \text{ кНм}^3;$$

$$y_C = \frac{-393 \cdot 10^3}{EJ_Z} = \frac{-393 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0148 \text{ м}; \; y_C = -1{,}480 \text{ см};$$

в сечении $D$ ($x_D = 2$ м):

$$EJ_Z y_D = EJ_Z \theta_0 \cdot x_D - \frac{R_A(x_D-0)^3}{6} - \frac{q(x_D-0)^4}{24} = 63{,}3 \cdot 2 - \frac{20(2-0)^3}{6} - \frac{20(2-0)^4}{24} =$$

$$= 86{,}7 \text{ кНм}^3; \qquad y_D = \frac{86{,}7 \cdot 10^3}{EJ_Z} = \frac{86{,}7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0{,}00324 \text{ м} = 0{,}324 \text{ см}.$$

По полученным значениям прогибов строим изогнутую ось балки (см. рис. 4.5).

Определим угол поворота сечения $B$ ($x_B = 4$ м), продлив и уравновесив распределенную нагрузку

$$EJ_Z \theta_B = EJ_Z \theta_0 + \frac{M(x-2)^1}{1} - \frac{R_A(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} + \frac{q(x-2)^3}{6} =$$

$$= 63{,}3 + \frac{80(4-2)^1}{1} - \frac{20(4-0)^2}{2} - \frac{20(4-0)^3}{6} + \frac{20(4-2)^3}{6} = -123 \text{ кНм}^2;$$

$$\theta_B = -\frac{123 \cdot 10^3}{EJ_Z} = -\frac{123 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -46 \cdot 10^{-4} \text{ рад} =$$
$$= -46 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180}{\pi} = -0{,}26^\circ = -0^\circ 15' 36''.$$

Максимальный прогиб балки $y_{\max} = y_C = 1{,}480$ см.

Таким образом, $y_{\max} = 1{,}480$ см $< y_{\text{adm}} = 2$ см, следовательно, условие жесткости выполняется.

## 4.4. Задания для расчета балок на жесткость

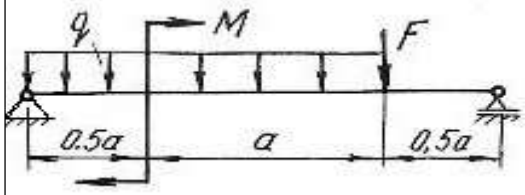
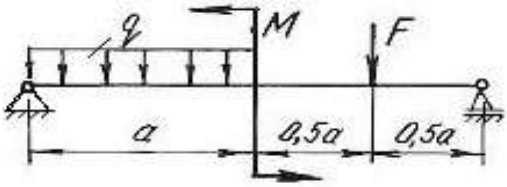
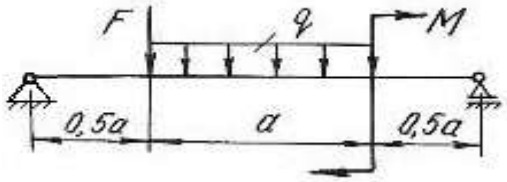
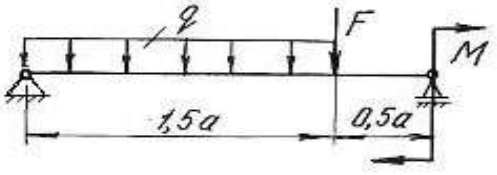
Для расчетной схемы (табл. 4.2) необходимо:

1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

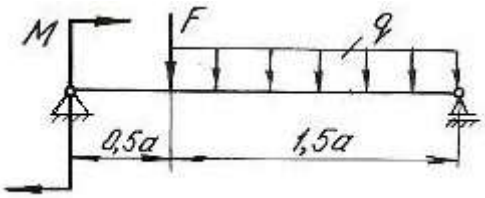
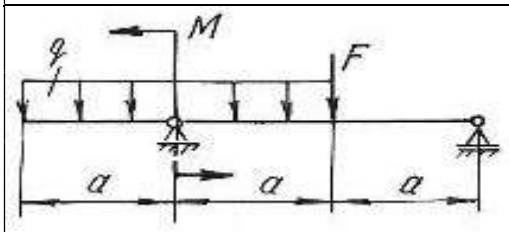
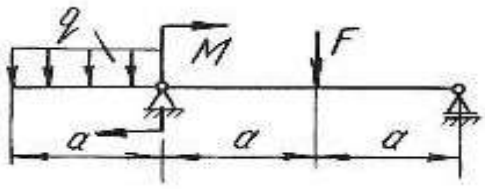
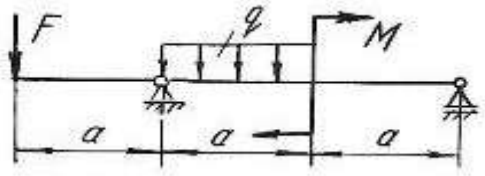
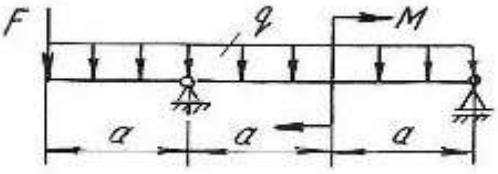
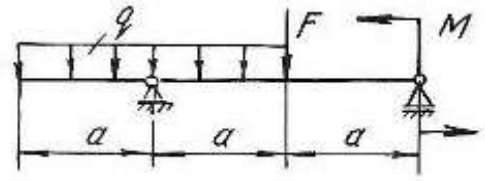
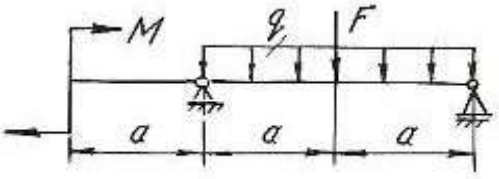
2. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля (см. табл. П. 1), материал – сталь при $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

3. Определить по методу начальных параметров величину прогибов балки в характерных сечениях и провести проверку балки на жесткость, приняв $y_{adm} = (1/100)l$.

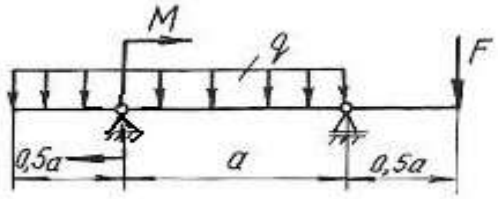
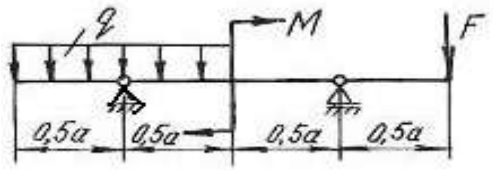
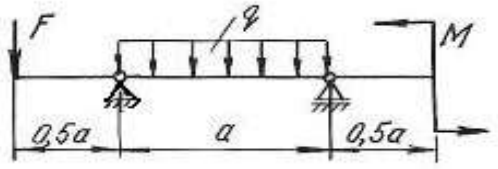
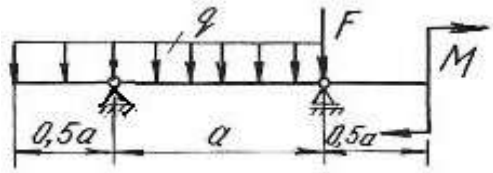
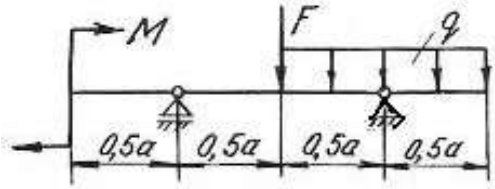
Таблица 4.2

| Схема балки и нагрузки | Вариант | $a$, м | $q$, кН/м | $M$, кН·м | $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 1 | 1 | 10 | 30 | 20 |
| | 2 | 0,5 | 20 | 25 | 30 |
|  | 3 | 1 | 10 | 10 | 16 |
| | 4 | 2 | 20 | 30 | 10 |
| | 5 | 0,5 | 30 | 15 | 12 |
|  | 6 | 1 | 12 | 36 | 24 |
| | 7 | 2 | 6 | 12 | 10 |
| | 8 | 1 | 4 | 12 | 8 |
|  | 9 | 0,5 | 10 | 20 | 16 |
| | 10 | 2 | 4 | 12 | 10 |
| | 11 | 1 | 20 | 24 | 12 |
|  | 12 | 1 | 12 | 12 | 10 |
| | 13 | 2 | 10 | 4 | 10 |
| | 14 | 1 | 8 | 20 | 30 |

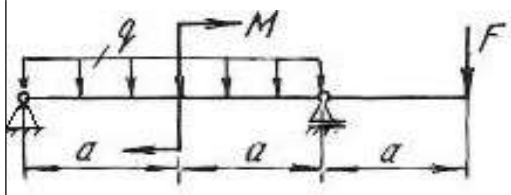
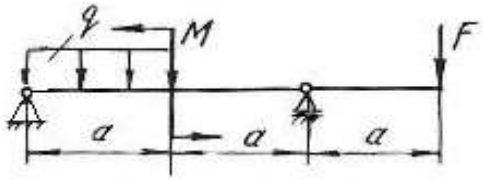
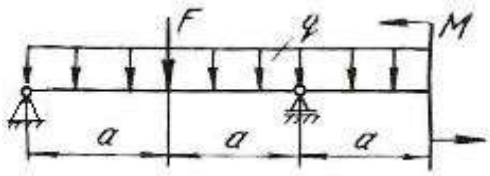
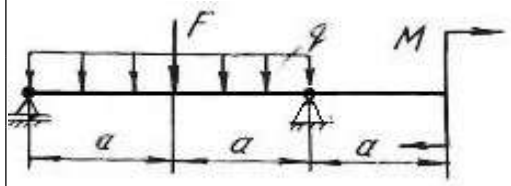
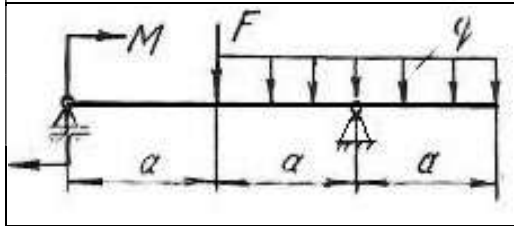
Продолжение табл. 4.2

| Схема балки и нагрузки | Вариант | $a$, м | $q$, кН/м | $M$, кН·м | $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 15 | 1 | 8 | 12 | 16 |
| | 16 | 1 | 12 | 14 | 10 |
| | 17 | 2 | 4 | 16 | 6 |
|  | 18 | 1 | 10 | 18 | 24 |
| | 19 | 2 | 4 | 16 | 16 |
| | 20 | 0,5 | 20 | 32 | 24 |
|  | 21 | 1 | 20 | 15 | 8 |
| | 22 | 2 | 8 | 14 | 4 |
| | 23 | 0,5 | 10 | 28 | 12 |
|  | 24 | 1 | 24 | 10 | 10 |
| | 25 | 2 | 12 | 16 | 12 |
| | 26 | 0,5 | 4 | 18 | 24 |
|  | 27 | 1 | 20 | 10 | 6 |
| | 28 | 2 | 10 | 8 | 16 |
| | 29 | 0,5 | 4 | 15 | 8 |
|  | 30 | 1 | 2 | 6 | 4 |
| | 31 | 2 | 4 | 12 | 10 |
| | 32 | 0,5 | 8 | 12 | 18 |
|  | 33 | 1 | 10 | 12 | 4 |
| | 34 | 2 | 12 | 18 | 12 |
| | 35 | 0,5 | 20 | 30 | 10 |

Продолжение табл. 4.2

| Схема балки и нагрузки | Вариант | $a$, м | $q$, кН/м | $M$, кН·м | $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 36 | 1 | 20 | 12 | 8 |
| | 37 | 2 | 12 | 16 | 16 |
| | 38 | 1 | 40 | 24 | 20 |
|  | 39 | 1 | 10 | 20 | 12 |
| | 40 | 2 | 4 | 12 | 8 |
| | 41 | 1 | 8 | 4 | 12 |
|  | 42 | 1 | 24 | 12 | 8 |
| | 43 | 2 | 8 | 10 | 4 |
| | 44 | 1 | 12 | 24 | 20 |
|  | 45 | 1 | 36 | 12 | 24 |
| | 46 | 2 | 32 | 16 | 20 |
| | 47 | 1 | 16 | 8 | 8 |
|  | 48 | 1 | 16 | 18 | 10 |
| | 49 | 2 | 12 | 20 | 12 |
| | 50 | 1 | 32 | 10 | 6 |
|  | 51 | 1 | 24 | 20 | 4 |
| | 52 | 2 | 4 | 24 | 16 |
| | 53 | 1 | 8 | 30 | 10 |

Окончание табл. 4.2

| Схема балки и нагрузки | Вариант | $a$, м | $q$, кН/м | $M$, кН·м | $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 54 | 1 | 10 | 12 | 6 |
| | 55 | 2 | 4 | 10 | 8 |
| | 56 | 0,5 | 8 | 8 | 4 |
|  | 57 | 1 | 20 | 12 | 6 |
| | 58 | 2 | 12 | 36 | 8 |
| | 59 | 1 | 24 | 16 | 12 |
|  | 60 | 1 | 10 | 40 | 16 |
| | 61 | 0,5 | 12 | 18 | 10 |
| | 62 | 2 | 4 | 36 | 12 |
|  | 63 | 1 | 10 | 20 | 10 |
| | 64 | 1 | 12 | 16 | 8 |
| | 65 | 2 | 4 | 16 | 12 |
|  | 66 | 1 | 12 | 10 | 20 |
| | 67 | 2 | 8 | 32 | 16 |
| | 68 | 0,5 | 24 | 12 | 12 |
|  | 69 | 1 | 10 | 18 | 12 |
| | 70 | 2 | 8 | 36 | 16 |
| | 71 | 0,5 | 20 | 42 | 8 |

# Глава 5

# СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ НЕРАЗРЕЗНЫЕ МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ И ПЛОСКИЕ РАМЫ

## 5.1. Статически неопределимые балки

Цельная балка, лежащая на нескольких опорах, называется неразрезной. С промежуточными опорами такая балка обычно соединена шарнирно. Концевые опоры могут быть или шарнирными или защемленными.

Неразрезные балки представляют собой статически неопределимые системы, так как для их расчета уравнений статики недостаточно. Эти балки могут быть рассчитаны с помощью теоремы о трех моментах или методом сил.

В данном разделе рассматривается решение неразрезной балки по методу сил.

Способ расчета статически неопределимых систем, при котором за «лишние» неизвестные принимаются силы или моменты, называется **методом сил**. Для расчета статически неопределимой балки необходимо раскрыть ее статическую неопределимость, для чего эту балку освобождают сначала от «лишних» связей, превращая ее тем самым в статически определимую (геометрически неизменяемую) систему, называемую основной системой. Она может быть получена путем введения необходимого количества шарниров, балочных опор, путем разреза контура (чаще для рам) и др.

Дополнительные уравнения для нахождения «лишних» неизвестных составляются из условий, что взаимные перемещения основной системы в местах приложения «лишних» неизвестных равны нулю (условия совместности деформаций – условия неразрезности).

Степень статической неопределимости балки соответствует количеству «лишних» неизвестных. В качестве «лишних» неизвестных можно принимать реакции на опорах балки или опорные моменты. Для многопролетных неразрезных балок за «лишние» неизвестные удобнее принять опорные моменты. Опорными моментами называют суммарные моменты внутренних сил упругости, возникающих в поперечных сечениях над опорами.

На рис. 5.1, *а* показана дважды статически неопределимая балка. За «лишние» неизвестные приняты опорные моменты на первой и второй опорах. Моменты на нулевой и третьей опорах равны нулю (рис. 5.1, *б*).

Для определения «лишних» неизвестных воспользуемся условием:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0, \\ \Delta_2 &= 0, \end{aligned} \qquad (5.1)$$

где $\Delta_1$ – суммарное возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от всех внешних нагрузок и от всех «лишних» неизвестных по направле-

нию действия первой «лишней» неизвестной $X_1$; $\Delta_2$ – суммарное возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от всех внешних нагрузок и от всех «лишних» неизвестных по направлению действия второй «лишней» неизвестной $X_2$.

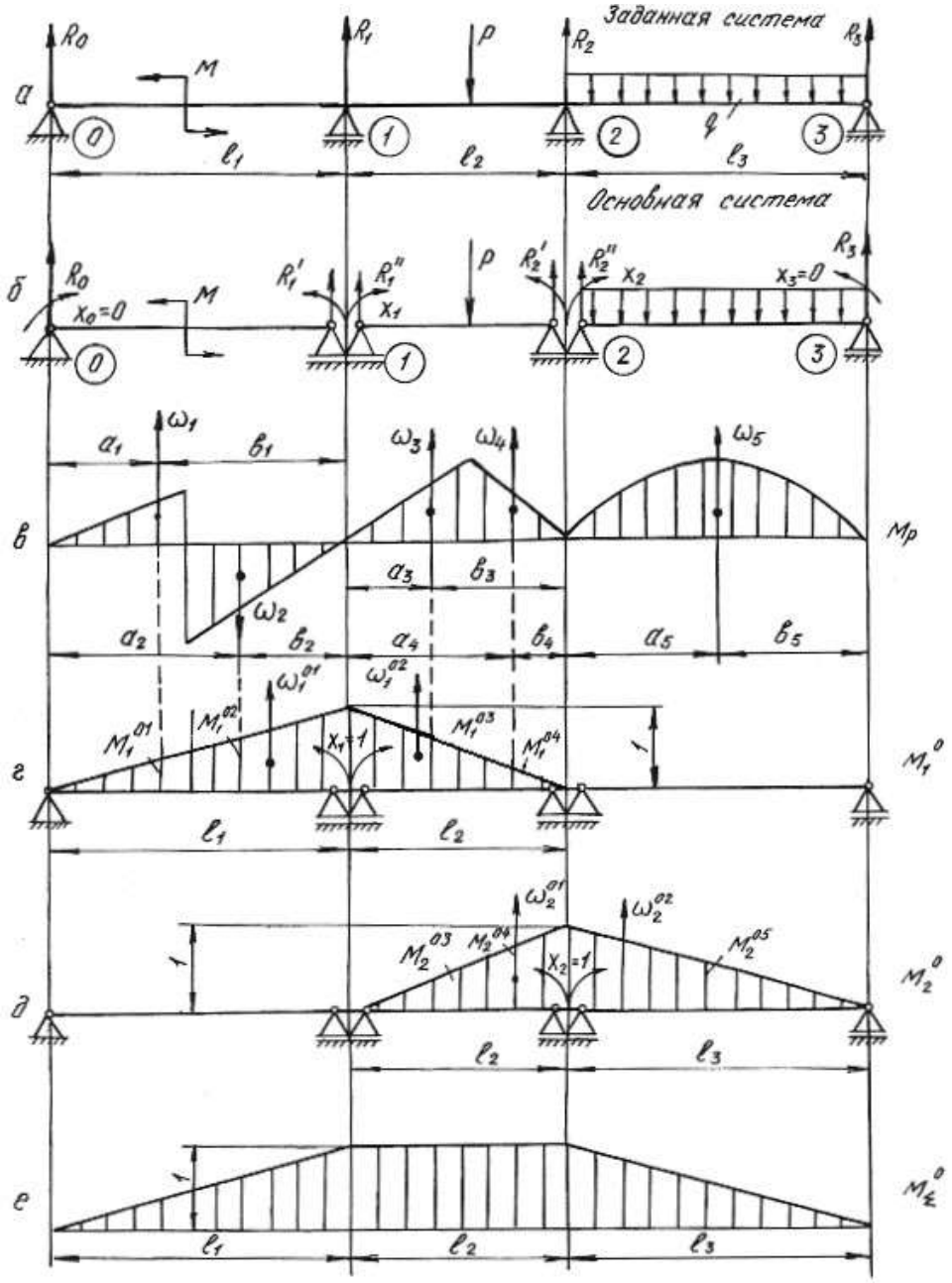



Рис. 5.1.

Эти перемещения в силу принципа независимости действия сил можно представить как сумму перемещений от каждой отдельной силы, приложенной к системе, т. е. от внешней нагрузки, обобщенно обозначаемой буквой *P,* и от неизвестных $X_1$, $X_2$, приложенных на опорах основной системы. Указанные пе-

ремещения выражаются через неизвестные $X_1$, $X_2$, нагрузку $P$ и перемещения от единичных сил $X_1$=1, $X_2$=1.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Эти уравнения носят название канонических уравнений метода сил. Число их равно степени статической неопределимости системы. На примере первого уравнения рассмотрим обозначения:

$\delta_{11}$ – возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от действия единичной силы $X_1 = 1$ по направлению действия первой «лишней» неизвестной $X_1$;

$\delta_{11}X_1$ – возможное перемещение, вызванное действием $X_1$ по ее направлению;

$\delta_{12}$ – возможное перемещение от единичной нагрузки $X_2 = 1$ по направлению $X_1$;

$\delta_{12}X_2$– возможное перемещение от второй «лишней» неизвестной $X_2$ по направлению $X_1$;

$\Delta_{1p}$ – возможное перемещение от всех внешних нагрузок по направлению «лишней» неизвестной $X_1$.

Коэффициенты канонических уравнений с одинаковыми числовыми индексами $\delta_{11}$, $\delta_{22}$ называются *главными коэффициентами***.** Они всегда положительны. Коэффициенты с разными числовыми индексами $\delta_{21}$, $\delta_{12}$ называются *побочными*. Они могут быть положительными или отрицательными. На основании теоремы о взаимности перемещений побочные коэффициенты $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Свободные члены канонических уравнений $\Delta_{1p}$, и $\Delta_{2p}$ еще называют *грузовыми членами*, так как они представляют собой перемещения от внешних нагрузок.

Для вычисления коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений строим эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок (единичные эпюры) – рис. 5.1, *г*, *д* и эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок (грузовые эпюры) – рис. 5.1, *в*.

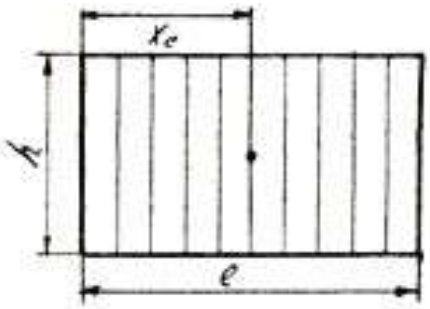
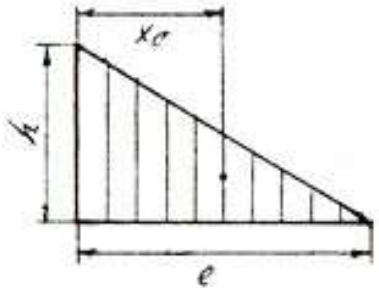
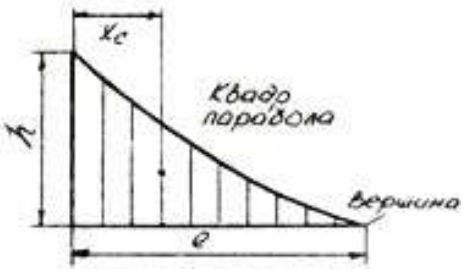
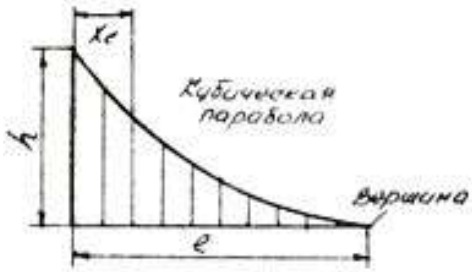
Коэффициенты уравнений и свободные члены находим путем перемножения эпюр по формуле Верещагина (или по формуле Симпсона)

$$\delta = \frac{1}{EJ}\sum \omega M_c^0, \tag{5.3}$$

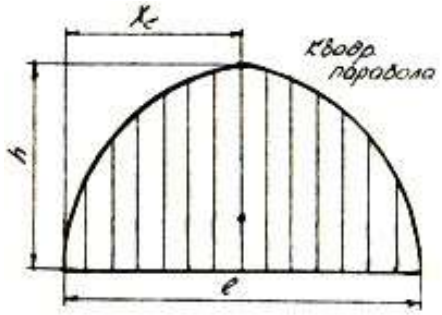
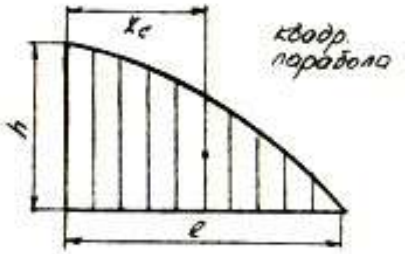
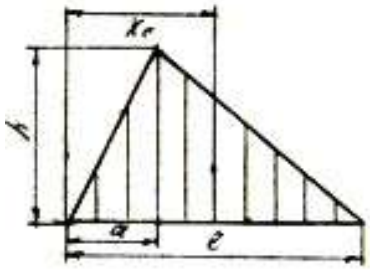
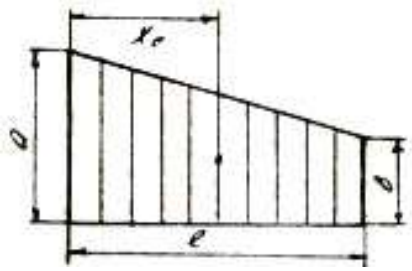
где $\omega$ – площадь эпюры изгибающих моментов; $M_c^0$ – ордината из единичной эпюры напротив центра тяжести грузовой эпюры; $EJ$ – жесткость балки при изгибе.

Формулы для определения площадей и координат их центров тяжести приведены в табл. 5.1**.**

Таблица 5.1

| Фигура | ω | $x_c$ |
|---|---|---|
|  | $lh$ | $\frac{1}{2}l$ |
|  | $\frac{1}{2}lh$ | $\frac{1}{3}l$ |
|  | $\frac{1}{3}lh$ | $\frac{1}{4}l$ |
|  | $\frac{1}{4}lh$ | $\frac{1}{5}l$ |

Окончание табл. 5.1

| Фигура | ω | $x_c$ |
|---|---|---|
|  | $\frac{2}{3}lh$ | $\frac{1}{2}l$ |
|  | $\frac{2}{3}lh$ | $\frac{3}{8}l$ |
|  | $\frac{1}{2}lh$ | $\frac{a+l}{3}$ |
|  | $l\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(a+2b)}{3(a+b)}l$ |

Главные коэффициенты $\delta_{11}$ и $\delta_{22}$ находим в результате перемножения единичных эпюр $M_1^0$, $M_2^0$ самих на себя

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_1^0 M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{3}\right);$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_2^0 M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_2}{3}+\frac{l_3}{3}\right);$$

Побочные коэффициенты находим путем взаимного перемножения указанных единичных эпюр.

Для определения коэффициента $\delta_{12}$ берется площадь эпюры $M_2^0$ на участке длиной $l_2$, которая умножается на ординату с эпюры $M_1^0$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_2^0 M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\sum\omega_1^0 M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{l_2}{6\cdot EJ}.$$

Свободные члены уравнений находим путем умножения грузовых эпюр $M_p$ на единичные $M_1^0$ и $M_2^0$

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_p M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1 M_1^{01}-\omega_2 M_1^{02}+\omega_3 M_1^{03}+\omega_4 M_1^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\frac{b_3}{l_2}+\omega_4\frac{b_4}{l_2}\right),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – площади грузовых эпюр; $M_1^{01}, M_1^{02}, M_1^{03}, M_1^{04}$ – ординаты, взятые из единичной эпюры $M_1^0$ напротив центров тяжести указанных площадей.

$$\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_p M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\omega_3 M_2^{03}+\omega_4 M_2^{04}+\omega_5 M_2^{05}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\omega_3\frac{a_3}{l_2}+\omega_4\frac{a_4}{l_2}+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right).$$

После подстановки найденных перемещений в канонические уравнения получим

$$\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{3}\right)X_1+\frac{l_2}{6EJ}X_2+\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\frac{b_3}{l_2}+\omega_4\frac{b_4}{l_2}\right)=0;$$

$$\frac{l_2}{6EJ}X_1+\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_2}{3}+\frac{l_3}{3}\right)X_2+\frac{1}{EJ}\left(\omega_3\frac{a_3}{l_2}+\omega_4\frac{a_4}{l_2}+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right)=0.$$

Во избежание ошибок при определении «лишних» неизвестных необходимо проверить правильность определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для этого необходимо построить суммарную эпюру единичных моментов $M_\Sigma^0$.

При умножении по правилу Верещагина суммарной единичной эпюры $M_{\Sigma}^{0}$ на единичную эпюру $M_{1}^{0}$ должна получиться сумма коэффициентов первого канонического уравнения

$$\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{2}\right).$$

При умножении суммарной эпюры $M_{\Sigma}^{0}$ на эпюру $M_{2}^{0}$ должна получиться сумма коэффициентов второго канонического уравнения

$$\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_3}{3}+\frac{l_2}{2}\right).$$

Эта проверка называется построчной.

Произведение суммарной единичной эпюры саму на себя должно быть равным сумме всех коэффициентов канонических уравнений

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+l_2+\frac{l_3}{3}\right).$$

Эта проверка называется универсальной.

Правильность определения грузовых членов уравнений состоит в следующем: их сумма должна равняться произведению грузовой эпюры $M_p$ на суммарную единичную эпюру $M_{\Sigma}^{0}$

$$\Delta_{1p}+\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\cdot 1+\omega_4\cdot 1+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right).$$

Убедившись в правильности определения коэффициентов и свободных членов уравнений методом последовательного исключения, находим «лишние» неизвестные $X_1$ и $X_2$ из канонических уравнений. При правильном определении «лишних» неизвестных после их подстановки в канонические уравнения, последние должны обращаться в тождества.

Учитывая опорные моменты и внешние нагрузки, определяют по уравнениям статики опорные реакции, строят эпюру поперечных сил $Q_x$ и эпюру изгибающих моментов $M_x$.

Порядок решения неразрезной балки методом сил сводится к следующему:

1. Определяют степень статической неопределимости балки;

2. Выбирают основную систему (тем самым выбираются «лишние» неизвестные);

3. По числу «лишних» неизвестных составляются канонические уравнения;

4. Строят эпюры изгибающих моментов от действующих на основную систему внешних нагрузок – грузовые эпюры;

5. В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладывают единичные моменты и строят эпюры изгибающих моментов от этих единичных моментов – единичные эпюры;

6. Вычисляют главные, побочные коэффициенты и свободные члены канонических уравнений и проверяют правильность их вычисления;

7. Методом последовательного исключения неизвестных решают канонические уравнения и определяют «лишние» неизвестные с последующей проверкой;

8. С помощью уравнений равновесия определяют опорные реакции заданной балки с последующей проверкой;

9. Строят эпюры поперечных сил $Q_x$ и изгибающих моментов $M_x$;

10. Подбирают поперечное сечение балки заданного профиля;

11. Производят проверку на прочность и жесткость балки, если это требуется по условию задачи.

**Пример 5.1.**

Для заданной схемы стальной неразрезной балки (рис. 5.2, *а*) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
2. Подобрать поперечное сечение двутаврового профиля (см. табл. П. 1), если $\sigma_{adm} = 160\,\text{МПа}$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

*Решение.*

Определяем степень статической неопределимости балки. Она равна двум (числу опор без двух плюс единица из-за наличия жесткой заделки) и выбираем основную систему.

В качестве «лишних» неизвестных принимаются опорные моменты. Основная система показана на рис. 5.2, *б*.

Составляем канонические уравнения:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения главных, побочных коэффициентов и свободных членов уравнений строим единичные эпюры $M_1^0$ (рис. 5.2, *г*), $M_2^0$ (рис. 5.2, *д*) и суммарную единичную эпюру $M_\Sigma^0$ (рис. 5.2, *е*). Грузовые эпюры $M_p$ представлены на рис. 5.2, *в*.

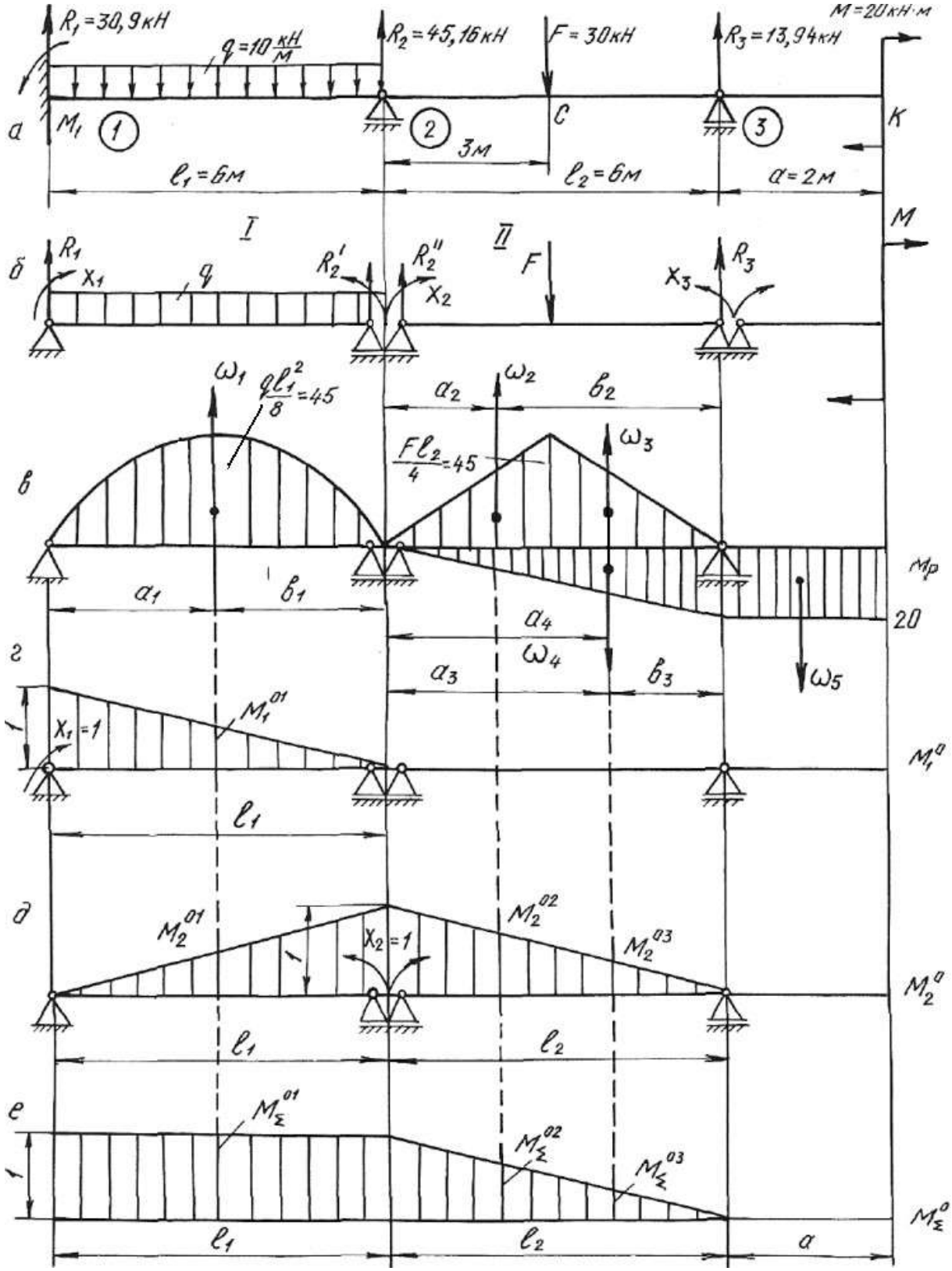

R1 = 30,9 кН
q = 10 кН/м
R2 = 45,16 кН
F = 30 кН
R3 = 13,94 кН
M = 20 кН·м
а
б
в
г
д
е
M1
1
2
3
C
K
3м
l1 = 6м
l2 = 6м
a = 2м
I
II
R1
X1
q
R2'
R2''
X2
F
X3
R3
M
ω1
ql1²/8 = 45
ω2
a2
b2
Fl2/4 = 45
ω3
Mр
20
a1
b1
a4
ω4
a3
b3
ω5
X1 = 1
M1^01
M1^0
l1
M2^01
M2^02
M2^03
X2 = 1
M2^0
l2
MΣ^01
MΣ^02
MΣ^03
MΣ^0
a

Рис. 5.2.

Путем умножения эпюр $M_1^0$ и $M_2^0$ самих на себя, находим значения главных коэффициентов:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{2{,}0}{EJ};$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(2{,}0+2{,}0\right)=\frac{4{,}0}{EJ}.$$

Побочные коэффициенты определяем путем взаимного перемножения единичных эпюр $M_1^0$ и $M_2^0$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}.$$

Находим свободные (грузовые) члены уравнений, перемножая эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок на единичные эпюры.

Площади грузовых эпюр:

$$\omega_1=\frac{2}{3}h_1l_1=\frac{2}{3}\cdot 4{,}5\cdot 10^4\cdot 6=18\cdot 10^4\ \text{Н·м}^2;$$

$$\omega_2=\omega_3=\frac{1}{2}h_2\frac{l_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot 4{,}5\cdot 10^4\cdot 3=6{,}75\cdot 10^4\ \text{Н·м}^2;$$

$$\omega_4=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^3\cdot 6=6\cdot 10^4\ \text{Н·м}^2.$$

Расстояния $a_1=b_1=3$ м; $a_2=b_3=2$ м; $b_2=a_3=4$ м; $a_4=4$ м.

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1M_1^{01}\right)=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{9\cdot 10^4}{EJ},$$

где $M_1^{01}$– ордината единичной эпюры $M_1^0$ напротив центра тяжести площади грузовой эпюры $\omega$:

$$\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1M_2^{01}+\omega_2M_2^{02}+\omega_3M_2^{03}-\omega_4M_2^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1-6\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{4}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}\right)=$$

$$=\frac{15{,}75\cdot 10^4}{EJ}-\frac{2\cdot 10^4}{EJ}=\frac{13{,}75\cdot 10^4}{EJ},$$

где $M_2^{01}$, $M_2^{02}$, $M_2^{03}$, $M_2^{04}$– ординаты единичной эпюры $M_2^0$ напротив центров тяжести площадей грузовых эпюр $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$.

Производим проверку правильности определения коэффициентов и свободных членов уравнений, для чего строим суммарную единичную эпюру $M_\Sigma^0$.

*Построчная проверка.* Перемножая суммарную единичную эпюру $M_{\Sigma}^{0}$ на единичную эпюру $M_{1}^{0}$, должны получить сумму коэффициентов первого канонического уравнения

$$\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+0\right)=\frac{3}{EJ}.$$

При перемножении эпюры $M_{\Sigma}^{0}$ на единичную эпюру $M_{2}^{0}$ должны получить сумму коэффициентов второго канонического уравнения:

$$\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{5{,}00}{EJ}.$$

*Универсальная проверка*. Умножаем суммарную единичную эпюру $M_{\Sigma}^{0}$ саму на себя. Должны получить сумму всех коэффициентов канонических уравнений:

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot 6\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{8{,}00}{EJ}.$$

Проводим проверку правильности определения грузовых членов уравнений.

Перемножением грузовой эпюры $M_p$ на суммарную единичную эпюру $M_{\Sigma}^{0}$ должны получить сумму свободных членов уравнений:

$$\Delta_{1p}+\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1 M_{\Sigma}^{01}+\omega_2 M_{\Sigma}^{02}+\omega_3 M_{\Sigma}^{03}-\omega_4 M_{\Sigma}^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot 1+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{4}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}-6\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{22{,}75\cdot 10^4}{EJ}.$$

Подставляем коэффициенты и свободные члены в канонические уравнения:

$$\frac{2{,}00}{EJ}X_1+\frac{1{,}00}{EJ}X_2+\frac{9\cdot 10^4}{EJ}=0.$$

$$\frac{1{,}00}{EJ}X_1+\frac{4{,}0}{EJ}X_2+\frac{13{,}75\cdot 10^4}{EJ}=0.$$

После сокращения на жесткость получаем:

$$2{,}00X_1+1{,}00X_2+9\cdot 10^4=0.$$

$$1{,}00X_1+4{,}00X_2+13{,}75\cdot 10^4=0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$X_1=M_1=-3{,}18\cdot 10^4\ \text{Н·м}=-31{,}8\ \text{кН·м},$$

$$X_2 = M_2 = -2{,}64 \cdot 10^4 \text{ Нм} = -26{,}4 \text{ кН·м}.$$

На опоре № 3 (см. рис. 5.2, *а*) опорный момент будет равен моменту $M$ со знаком минус:

$$X_3 = M_3 = -20 \text{ кН·м}.$$

Подставив найденные значения «лишних» неизвестных в канонические уравнения, убеждаемся в том, что эти уравнения превращаются в тождества.

Определяем опорные реакции заданной балки из уравнений статики:

$$\sum M_1^{\text{I}} = 0; \quad R_2^1 l_1 + M_2 - \frac{q l_1^2}{2} - M_1 = 0;$$

$$R_2^{'} = -\frac{M_2}{l_1} + \frac{q l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = \frac{26{,}4}{6} + \frac{10 \cdot 6}{2} - \frac{31{,}8}{6} = 29{,}1 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2^{\text{I}} = 0; \quad -R_1 l_1 - M_1 + \frac{q l_1^2}{2} + M_2 = 0;$$

$$R_1 = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{q l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1} = \frac{31{,}8}{6} + \frac{10 \cdot 6}{2} - \frac{26{,}4}{6} = 30{,}9 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2^{\text{II}} = 0; \quad M_3 + R_3 l_3 - F\frac{l_2}{2} - M_2 = 0;$$

$$R_3 = -\frac{M_3}{l_2} + \frac{F}{2} + \frac{M_2}{l_2} = \frac{20}{6} + \frac{30}{2} - \frac{26{,}4}{6} = 13{,}94 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3^{\text{II}} = 0; \quad -M_2 - R_2^2 l_2 + P\frac{l_2}{2} + M_3 = 0;$$

$$R_2^{''} = -\frac{M_2}{l_2} + \frac{F}{2} + \frac{M_3}{l_2} = \frac{26{,}4}{6} + \frac{30}{2} - \frac{20}{6} = 16{,}06 \text{ кН}.$$

Окончательно:

$$R_1 = 30{,}9 \text{ кН}; R_2 = R_2^{'} + R_2^{''} = 29{,}1 + 16{,}06 = 45{,}16 \text{ кН}; \; R_3 = 13{,}94 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad R_1 + R_2 + R_3 - F - q \cdot l_1 = 0; \quad 30{,}9 + 45{,}16 + 13{,}94 - 30 - 10 \cdot 6 = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил $Q_x$ и эпюру изгибающих моментов $M_x$ по правилам, принятым при построении эпюр для статически определимых балок (рис. 5.3**).**

$Q_1 = R_1 = 30{,}9$ кН;

$Q_2 = R_1 - q \cdot l_1 = 30{,}9 - 10 \cdot 6 = -29{,}1$ кН;

Затем скачок вверх на $R_2 = 45{,}16$ кН.

На участке от опоры 2 до сечения *C*: $Q_x = 16{,}06$ кН.

Затем скачок вниз в сечении *C* на силу *F*, $Q_C = 16{,}06 - 30 = -13{,}94$ кН.

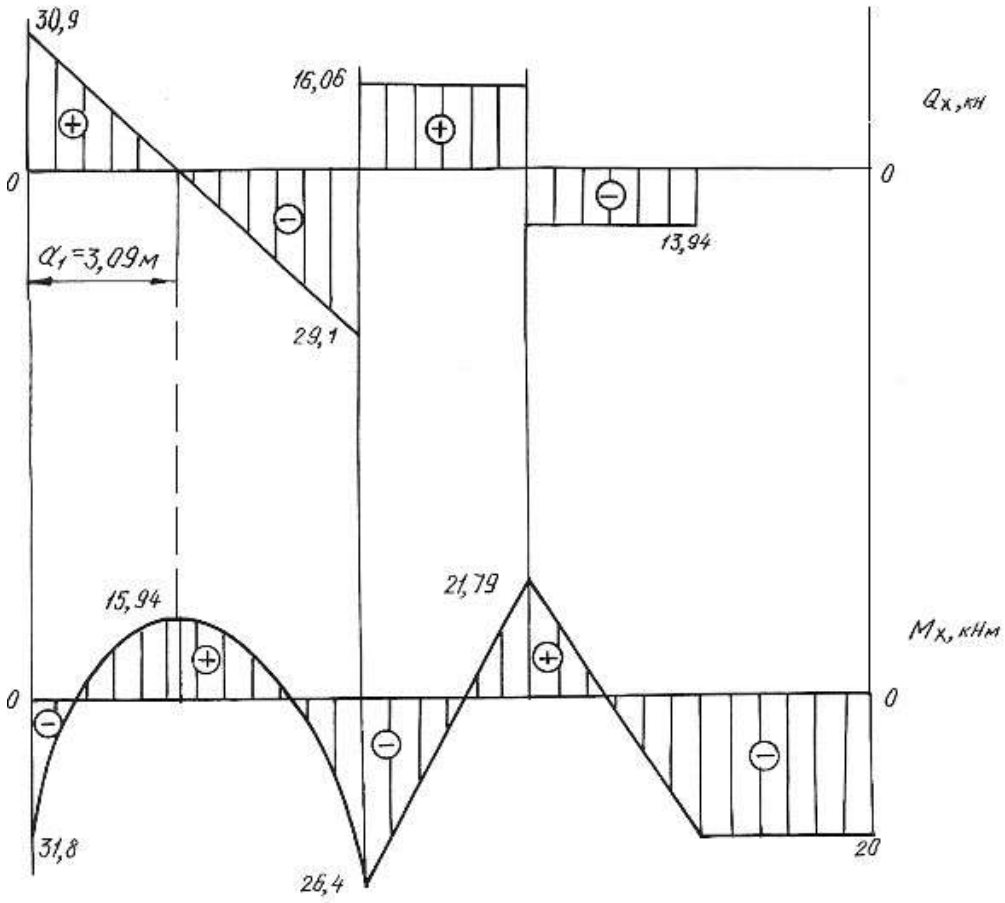



Рис. 5.3.

Находим расстояние *a*

$$\frac{30,9}{a_1}=\frac{29,1}{6-a_1},\ a_1=3,09\ \text{м}.$$

На участке от сечении *C* до опоры 3

$$Q_{C-3}=-13,94\ \text{кН}.$$

В левом крайнем сечении $M_x=-M_1=-31,8\ \text{кН}\cdot\text{м}$.

При $x=a_1=3,09\,\text{м}$

$$M_x=R_1a_1-\frac{qa_1^2}{2}-M_1=30,9\cdot3,09-\frac{10\cdot3,09^2}{2}-31,8=15,94\ \text{кН}\cdot\text{м}$$

В сечении над опорой 2

$$M_x=-M_1+R_1l_1-\frac{ql_1^2}{2}=-31,8+30,9\cdot6-\frac{10\cdot6^2}{2}=-26,4\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

До сечения *C* расчет производим справа:

$$M_k=-M=-20\ \text{кН}\cdot\text{м},$$

$$M_C=-M+R_3\cdot3=-20+13,93\cdot3=21,79\ \ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

На участке балки от сечения *K* до опоры 3: $M_x = -20$ кН·м.

По сортаменту проката в соответствии с ГОСТ 8239-89 подбираем поперечное сечение двутаврового профиля, используя условие прочности

$$M_{\max} \le \sigma_{adm} \cdot W_{н.о.},$$

откуда $W_{н.о.} \ge \dfrac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \dfrac{31{,}8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1{,}98 \cdot 10^{-4}$ м$^3$ $= 198$ см$^3$.

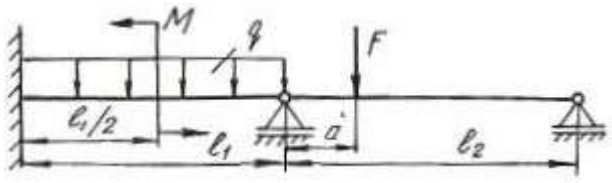
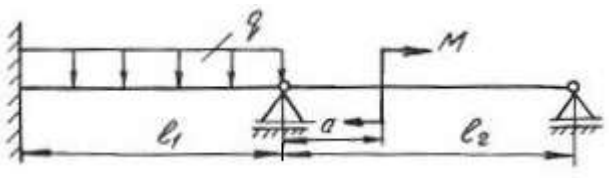
Принимаем двутавр № 20а, для которого $W_{н.о.} = W_x^{табл.} = 203$ см$^3$, $J_{н.о.} = J_x^{табл.} = 2030$ см$^4$, $A = 28{,}9$ см$^2$.

## 5.2. Задания для расчета статически неопределимых балок

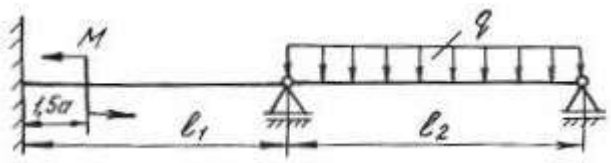
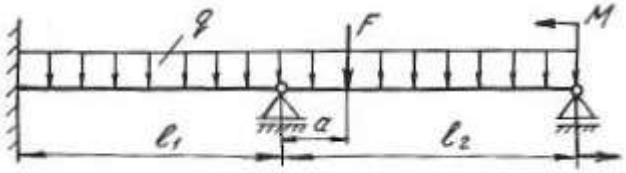
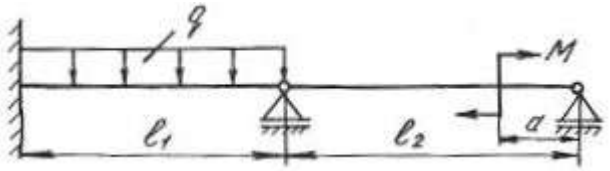
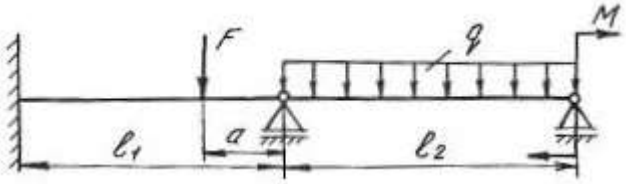
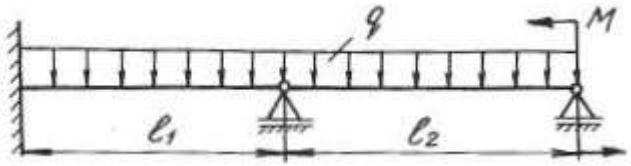
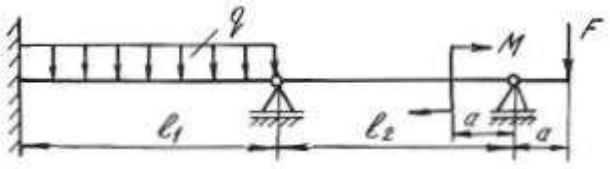
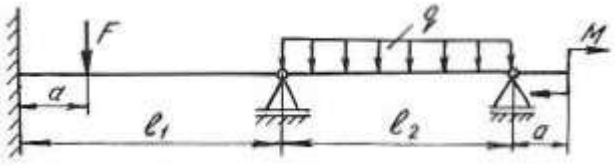
Для заданной схемы неразрезной балки при заданных значениях длин и нагрузок в соответствии с указанным номером варианта требуется:

1. Определить степень статической неопределимости балки, выбрать основную систему.
2. Составить канонические уравнения по методу сил.
3. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений. Проверить правильность их определения.
4. После определения неизвестных построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
5. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа. Данные для расчета взять из табл. 5.2.

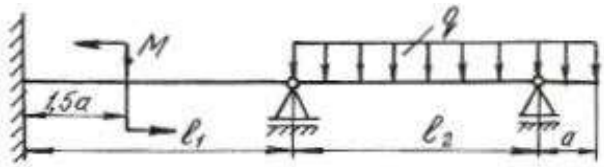
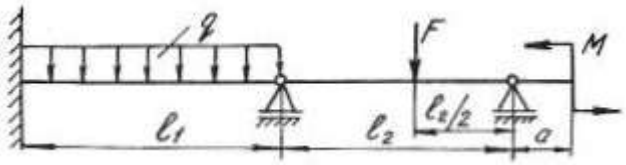
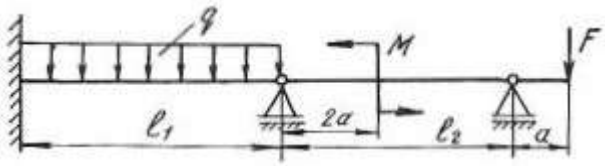
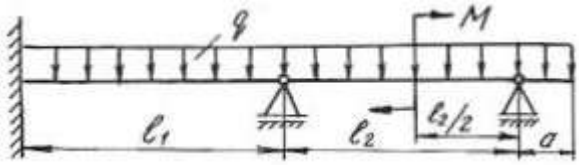
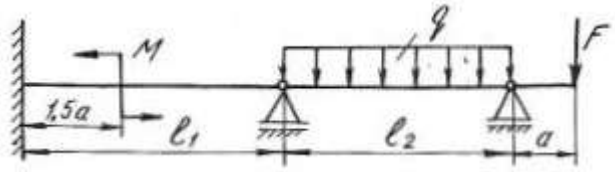
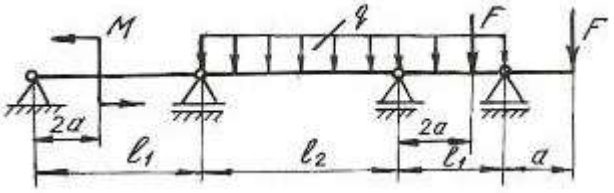
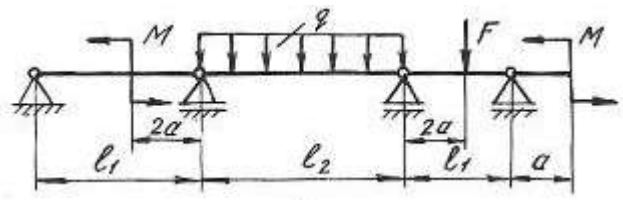
Таблица 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер варианта | *M*, кН·м | *F*, кН | *q*, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | *a*, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 1 | 10 | 10 | 15 | 3,5 | 5,0 | 0,5 |
| | 2 | 20 | 11 | 15 | 2,5 | 4,0 | 0,5 |
| | 3 | 30 | 12 | 15 | 4,0 | 4,0 | 0,5 |
|  | 4 | 15 | 13 | 10 | 3,0 | 5,5 | 0,5 |
| | 5 | 20 | 14 | 10 | 3,5 | 5,0 | 0,5 |
| | 6 | 25 | 15 | 10 | 2,5 | 5,0 | 0,4 |

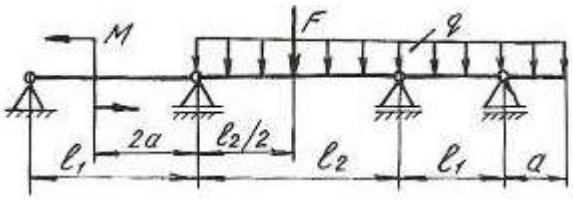
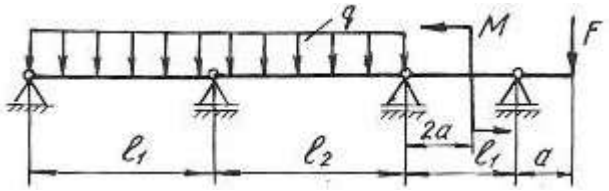
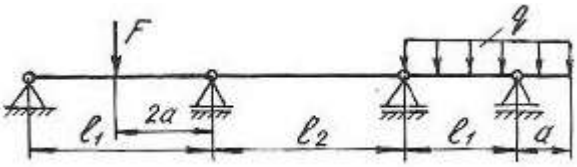
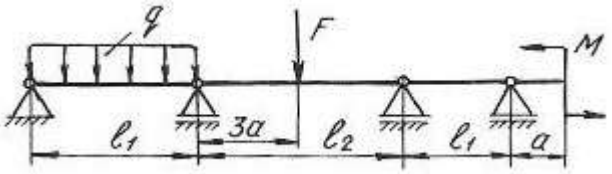
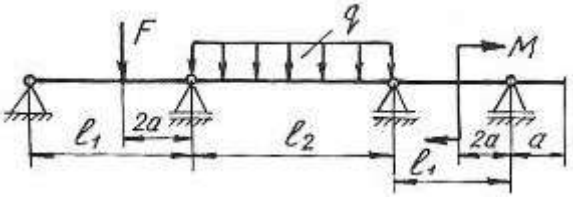
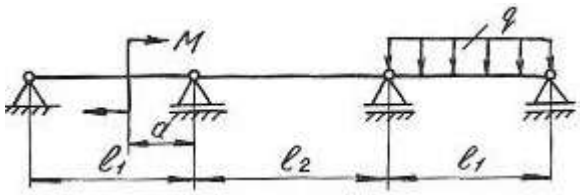
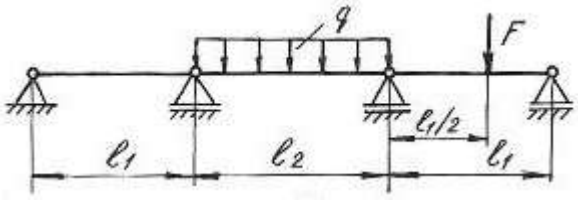
Продолжение табл. 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер вари-анта | $M$, кН·м | $F$, кН | $q$, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 7 | 10 | 10 | 10 | 5,0 | 5,0 | 0,4 |
| | 8 | 15 | 11 | 15 | 3,5 | 6,0 | 0,6 |
| | 9 | 20 | 12 | 20 | 3,5 | 5,0 | 0,4 |
|  | 10 | 10 | 15 | 20 | 4,0 | 5,0 | 0,4 |
| | 11 | 20 | 20 | 10 | 2,0 | 5,0 | 0,5 |
| | 12 | 30 | 25 | 10 | 3,0 | 4,0 | 0,6 |
|  | 13 | 30 | 11 | 15 | 2,0 | 5,0 | 0,4 |
| | 14 | 40 | 10 | 15 | 4,5 | 5,0 | 0,5 |
| | 15 | 20 | 12 | 15 | 3,5 | 5,5 | 0,6 |
|  | 16 | 15 | 12 | 10 | 3,5 | 4,5 | 0,5 |
| | 17 | 20 | 10 | 10 | 2,6 | 5,2 | 0,4 |
| | 18 | 25 | 11 | 10 | 2,0 | 5,0 | 0,8 |
|  | 19 | 25 | 20 | 20 | 3,5 | 6,0 | 0,5 |
| | 20 | 20 | 25 | 15 | 3,0 | 5,5 | 0,8 |
| | 21 | 15 | 10 | 10 | 3,5 | 3,5 | 0,8 |
|  | 22 | 20 | 10 | 10 | 3 | 5 | 0,5 |
| | 23 | 30 | 11 | 10 | 4 | 6 | 0,4 |
| | 24 | 25 | 12 | 10 | 5 | 6 | 0,6 |
|  | 25 | 20 | 15 | 10 | 2 | 3 | 0,4 |
| | 26 | 30 | 16 | 10 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 27 | 40 | 20 | 10 | 4 | 5 | 0,6 |

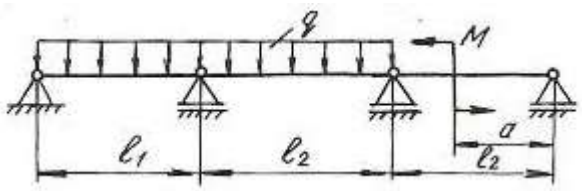
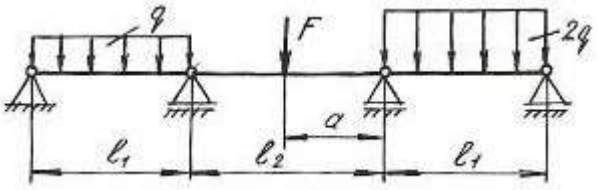
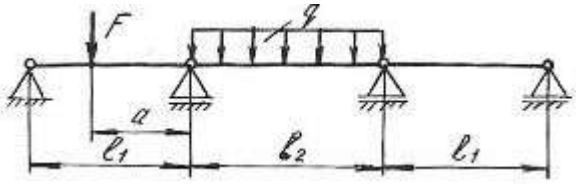
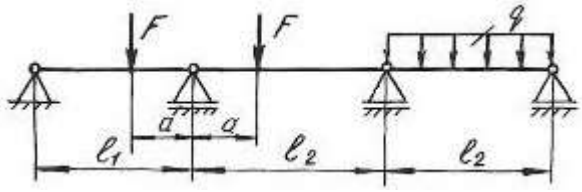
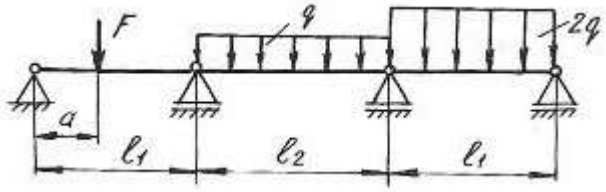
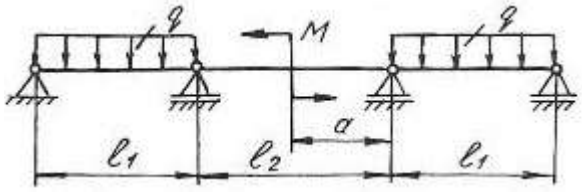
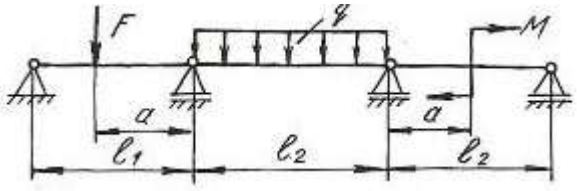
Продолжение табл. 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер вари-анта | $M$, кН·м | $F$, кН | $q$, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 28 | 15 | 10 | 15 | 3 | 5 | 0 |
| | 29 | 20 | 15 | 15 | 4 | 6 | 0,5 |
| | 30 | 25 | 20 | 15 | 5 | 6 | 0,4 |
|  | 31 | 30 | 12 | 20 | 2 | 3 | 0,4 |
| | 32 | 35 | 14 | 15 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 33 | 40 | 16 | 20 | 2,5 | 5 | 0,6 |
|  | 34 | 10 | 20 | 10 | 3 | 5,5 | 0,4 |
| | 35 | 15 | 15 | 15 | 2,5 | 4 | 0,5 |
| | 36 | 20 | 10 | 20 | 5 | 6 | 0,6 |
|  | 37 | 20 | 12 | 15 | 4 | 6 | 0,4 |
| | 38 | 15 | 14 | 20 | 3,5 | 4 | 0,6 |
| | 39 | 10 | 16 | 25 | 4 | 5 | 0,5 |
|  | 40 | 10 | 10 | 30 | 2,5 | 4 | 0,4 |
| | 41 | 15 | 20 | 20 | 3 | 5 | 0,5 |
| | 42 | 20 | 30 | 10 | 4 | 6 | 0,6 |
|  | 43 | 10 | 15 | 10 | 3 | 5 | 0,4 |
| | 44 | 20 | 25 | 12 | 4 | 5 | 0,5 |
| | 45 | 30 | 35 | 14 | 5 | 6 | 0,6 |
|  | 46 | 40 | 10 | 10 | 2 | 5 | 0,5 |
| | 47 | 20 | 25 | 16 | 3 | 4 | 0,6 |
| | 48 | 10 | 30 | 10 | 4 | 6 | 0,4 |

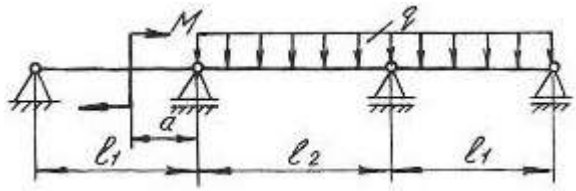
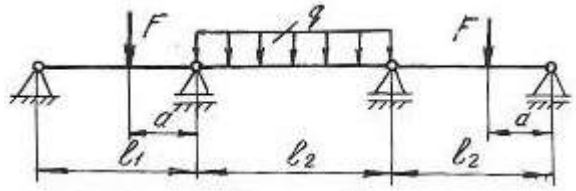
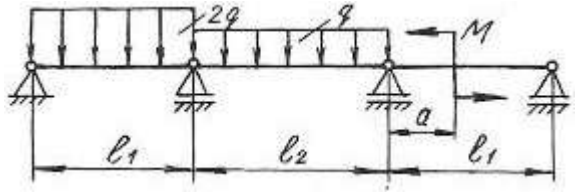
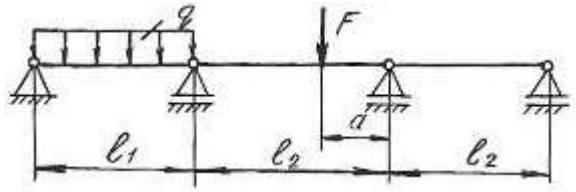
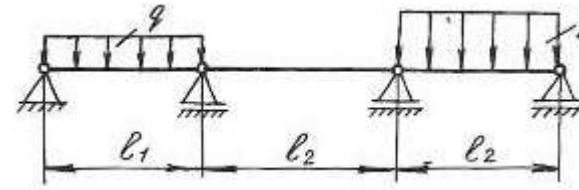
Продолжение табл. 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер вари-анта | $M$, кН·м | $F$, кН | $q$, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 49 | 30 | 25 | 12 | 5 | 6 | 0,5 |
| | 50 | 15 | 15 | 15 | 6 | 5 | 0,4 |
| | 51 | 10 | 20 | 20 | 2 | 4 | 0,6 |
|  | 52 | 10 | 20 | 10 | 4 | 5 | 0,5 |
| | 53 | 20 | 15 | 12 | 5 | 6 | 0,5 |
| | 54 | 30 | 40 | 14 | 4 | 6 | 0,5 |
|  | 55 | 25 | 20 | 16 | 3 | 4 | 0,4 |
| | 56 | 35 | 30 | 10 | 5 | 6 | 0,5 |
| | 57 | 40 | 15 | 12 | 4 | 5 | 0,6 |
|  | 58 | 10 | 20 | 14 | 5 | 6 | 0,6 |
| | 59 | 15 | 30 | 16 | 2 | 4 | 0,5 |
| | 60 | 20 | 40 | 10 | 4 | 5 | 0,4 |
|  | 61 | 25 | 10 | 12 | 3 | 5 | 0,3 |
| | 62 | 35 | 15 | 14 | 5 | 6 | 0,6 |
| | 63 | 40 | 20 | 16 | 6 | 4 | 0,5 |
|  | 64 | 10 | – | 10 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 65 | 20 | – | 15 | 4 | 5 | 0,6 |
| | 66 | 30 | – | 12 | 5 | 6 | 0,4 |
|  | 67 | – | 12 | 40 | 2 | 3 | 0,6 |
| | 68 | – | 14 | 30 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 69 | – | 16 | 25 | 4 | 5 | 0,4 |

Продолжение табл. 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер вари-анта | $M$, кН·м | $F$, кН | $q$, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 70 | 30 | – | 20 | 4 | 5 | 0,4 |
| | 71 | 20 | – | 15 | 3 | 4 | 0,6 |
| | 72 | 40 | – | 30 | 2 | 3 | 0,8 |
|  | 73 | – | 20 | 20 | 3 | 3 | 0,5 |
| | 74 | – | 15 | 15 | 4 | 5 | 0,5 |
| | 75 | – | 16 | 30 | 5 | 6 | 0,5 |
|  | 76 | – | 40 | 20 | 4 | 5 | 0,4 |
| | 77 | – | 30 | 10 | 3 | 5 | 0,5 |
| | 78 | – | 20 | 12 | 2 | 3 | 0,6 |
|  | 79 | – | 10 | 20 | 2 | 3 | 0,6 |
| | 80 | – | 12 | 15 | 4 | 5 | 0,8 |
| | 81 | – | 15 | 10 | 6 | 6 | 0,5 |
|  | 82 | – | 20 | 12 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 83 | – | 10 | 15 | 4 | 5 | 0,6 |
| | 84 | – | 15 | 20 | 5 | 6 | 0,8 |
|  | 85 | 20 | – | 12 | 3 | 5 | 0,5 |
| | 86 | 30 | – | 15 | 4 | 6 | 0,6 |
| | 87 | 40 | – | 20 | 5 | 6 | 0,8 |
|  | 88 | 10 | 20 | 12 | 3 | 4 | 0,4 |
| | 89 | 15 | 30 | 14 | 4 | 6 | 0,6 |
| | 90 | 20 | 40 | 16 | 5 | 5 | 0,5 |

Окончание табл. 5.2

| Схема закрепления и нагружения балки | Номер вари-анта | $M$, кН·м | $F$, кН | $q$, кН/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 91 | 12 | – | 20 | 5 | 6 | 0,5 |
| | 92 | 15 | – | 30 | 4 | 5 | 0,5 |
| | 93 | 20 | – | 40 | 6 | 4 | 0,4 |
|  | 94 | – | 20 | 12 | 5 | 6 | 0,5 |
| | 95 | – | 30 | 15 | 4 | 5 | 0,6 |
| | 96 | – | 40 | 16 | 6 | 4 | 0,4 |
|  | 97 | 20 | – | 20 | 3 | 4 | 0,5 |
| | 98 | 30 | – | 30 | 4 | 5 | 0,5 |
| | 99 | 40 | – | 40 | 5 | 6 | 0,6 |
|  | 100 | – | 12 | 10 | 6 | 4 | 0,4 |
| | 101 | – | 15 | 15 | 3 | 3 | 0,5 |
| | 102 | – | 20 | 20 | 4 | 5 | 0,6 |
|  | 103 | – | – | 20 | 5 | 5 | 0,8 |
| | 104 | – | – | 30 | 6 | 6 | 0,6 |
| | 105 | – | – | 40 | 4 | 8 | 0,5 |

## 5.3. Статически неопределимые рамы

*Плоской рамой* называется геометрически неизменяемая система, состоящая из стержней, лежащих в одной плоскости и жестко соединенных между собой. Горизонтальные стержни рам называются *ригелями*, вертикальные – *стойками.*

*Статически неопределимой* рамой называется такая геометрически неизменяемая система, у которой реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях ее элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений статики.

Расчет статически неопределимой рамы сводится к построению эпюр изгибающих моментов $M_x$, поперечных сил $Q_x$ и нормальных сил $N_x$, на основании которых подбираются сечения, или проверяются напряжения в опасных сечениях различных элементов, или определяется несущая способность системы.

В пособии рассмотрено только построение эпюр $M_x$, $Q_x$, $N_x$, а также подбор поперечного сечения, так как это наиболее трудоемкая часть расчета.

Степень статической неопределимости плоской рамы определяется следующим образом:

1. Замкнутый контур (рама, оба конца которой жестко защемлены) имеет степень статической неопределимости, равную трем.

2. Наличие шарнира в раме понижает степень статической неопределимости на единицу.

3. Наличие подвижной опоры также понижает степень статической неопределимости на единицу.

Определение усилий в статически неопределимой раме связано с необходимостью составления дополнительных уравнений – уравнений совместности деформаций. Число этих уравнений должно быть равно степени статической неопределимости рамы.

Прежде, чем составлять уравнение деформаций, следует превратить заданную статически неопределимую раму в статически определимую, геометрически неизменяемую, устранив из нее «лишние» связи. Такая система называется *основной* системой.

Если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции устраненных связей, то деформации этой системы и возникающие в ней внутренние усилия, будут такими же, как и в заданной системе. То есть, обе системы будут эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющихся связей перемещений быть не может. Поэтому, в основной системе перемещения в направлении отброшенных связей должны быть равны нулю.

Способ расчета статически неопределимых систем, при котором за «лишние» неизвестные принимаются силы и моменты, называется *методом сил.*

Данный метод рассмотрен при расчете статически неопределимых неразрезных балок в начале этой главы. Определение коэффициентов уравнений и грузовых членов и их проверки рассмотрены также при расчете балок.

**Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.**

При расчете рам на прочность в каждом поперечном сечении необходимо определять три силовых фактора: продольную силу $N_x$, поперечную силу $Q_x$, изгибающий момент $M_x$.

Продольная сила $N_x$ равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону от сечения на продольную ось бруса. Если сила вызывает растяжение, она положительна, сжатие – отрицательна.

При построении эпюр продольных сил их значения откладываются симметрично от оси бруса в обе стороны с указанием знака.

Поперечная сила $Q_x$ равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси бруса всех сил, действующих по одну сторону от сечения.

Если поперечная сила относительно сечения вращает часть бруса по часовой стрелке, то она положительна. Противоположное направление следует считать отрицательным. Условимся положительные ординаты откладывать снаружи контура, отрицательные – внутри.

При построении эпюр поперечных сил их значения откладываются по одну сторону от оси бруса с указанием знака.

Изгибающий момент $M_x$ равен сумме моментов всех сил, взятых по одну сторону от сечения, относительно оси, проходящей через центр сечения перпендикулярно плоскости рамы. Условно принято построение эпюр изгибающих моментов со стороны растянутых волокон.

Общий порядок расчета статически неопределимых рам по методу сил сводится к следующему.

1. Определяют степень статической неопределимости рамы.
2. Удаляют «лишние» связи. Полученную таким образом основную систему загружают заданными силами и реакциями отброшенных связей.
3. В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладывают единичные силы и строят эпюры изгибающих моментов от единичных сил, а также суммарную единичную эпюру.
4. Строят эпюры изгибающих моментов от действующих на основную систему внешних нагрузок.
5. Вычисляют главные, побочные коэффициенты и свободные члены канонических уравнений и проверяют правильность их определения.
6. Составляют и решают канонические уравнения, определяя «лишние» неизвестные.
7. Определяют остальные реакции с помощью уравнений статики.

8. Вычисляют значения изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил и строят эпюры.

9. Подбирают поперечное сечение заданного профиля.

**Пример 5.2.**

Для заданной схемы статически неопределимой рамы (рис. 5.4, *а*), при заданных значениях длин и нагрузок, построить эпюры изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил. Жесткости стоек и ригеля одинаковы.

*Решение.*

Заданная система освобождается от наложенных на нее связей. Действия связей заменяются реакциями. Установим степень статической неопределимости рамы: 3(замкнутый контур) − 2(наличие двух шарниров) = 1, т. е. рама однажды статически неопределима.

За «лишнюю» неизвестную $X_1$ принимаем реакцию $H_b$. Нагружаем основную систему (рис. 5.4, *б*) заданными внешними силами и реакцией отброшенной связи. Выбирая основную систему, необходимо помнить, что она должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

В месте действия «лишней» неизвестной и по направлению ее действия прикладываем единичную силу $X_1 = 1$ и строим единичную эпюру.

Рассмотрим подробно построение этой эпюры. Покажем реакции опор (рис. 5.5), их три. Определим эти реакции по уравнениям статики:

$$\sum X = 0; \qquad H'_a - X_1 = 0; \qquad H'_a = 1;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -X_1 \cdot 3 + R'_b \cdot 4 = 0; \qquad R'_b = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -H'_a \cdot 3 + R'_a \cdot 4 = 0; \quad R'_a = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Проверка правильности вычисления реакций:

$$\sum Y = 0; \qquad -R'_a + R'_b = 0; \qquad 0 = 0.$$

Получили тождество, следовательно, реакции определены правильно.

Разбиваем раму на участки, граница участка там, где приложены сосредоточенные силы и для рамы граница участка, где жестко соединяется стойка с ригелем. Участков три, находим значения изгибающих моментов на границах участков. На всех участках эпюра изгибающих моментов очерчена наклонной прямой, эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5.4, *в*.

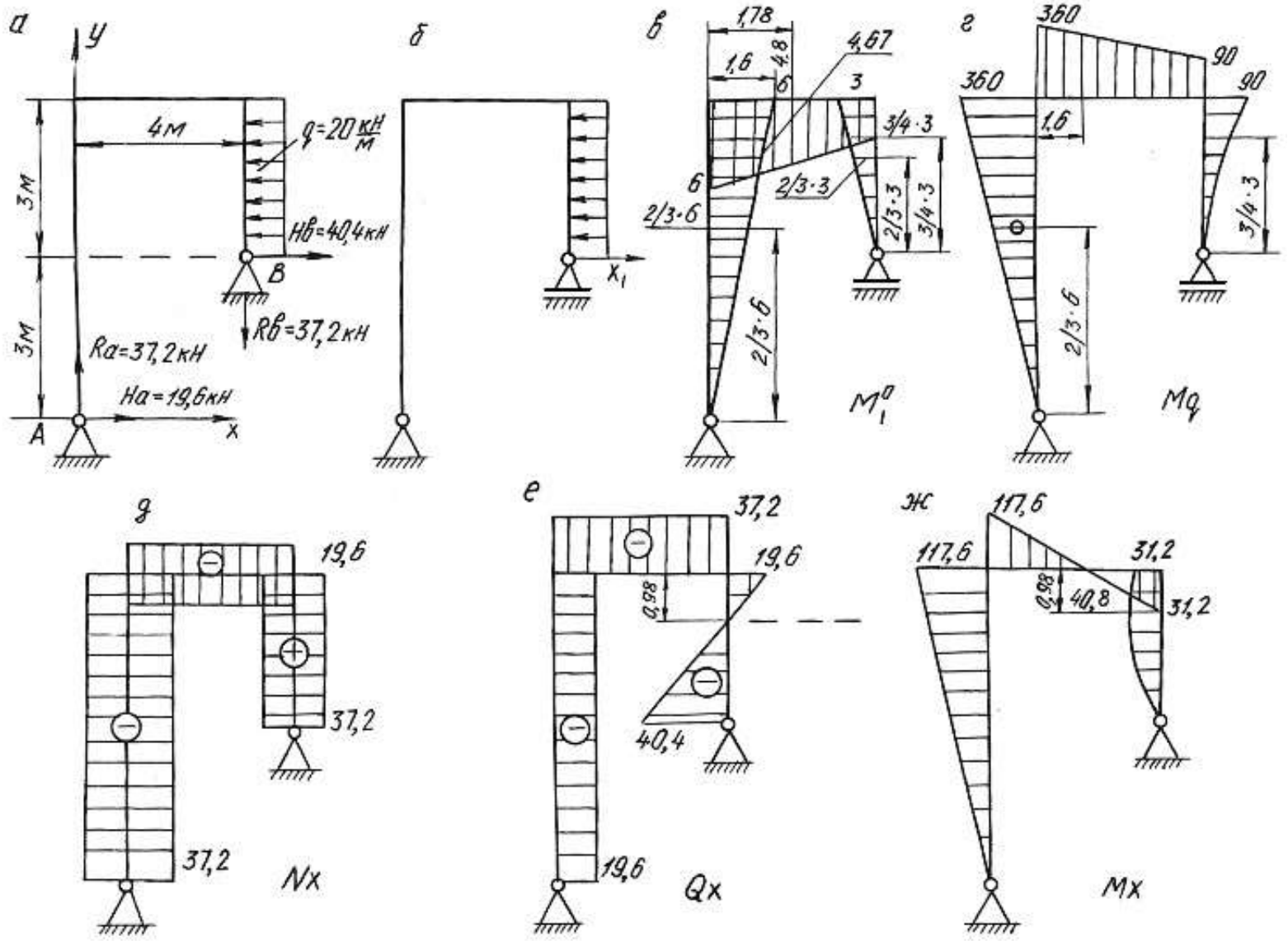

а
y
4м
q=20 кН/м
3м
3м
HB=40,4кН
B
RB=37,2кН
Ra=37,2кН
Ha=19,6кН
A
x
б
x1
в
1,78
1,6
4,8
4,67
6
3
3/4·3
6
2/3·6
2/3·3
2/3·3
3/4·3
2/3·6
M1q
г
360
90
360
90
1,6
3/4·3
2/3·6
Mq
д
19,6
37,2
37,2
Nx
е
37,2
19,6
0,98
40,4
19,6
Qx
ж
117,6
117,6
31,2
0,98
40,8
31,2
Mx

Рис. 5.4.

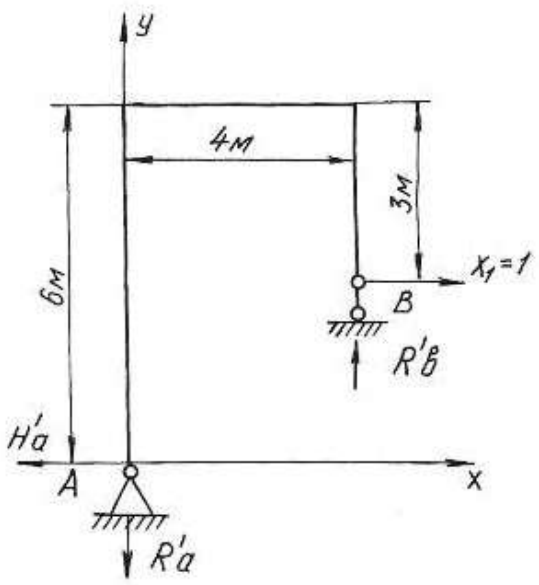



Рис. 5.5.

Строим эпюру изгибающих моментов от действия на основную систему внешней равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q$ (рис. 5.4, *г*). По приведенной выше методике определяем реакции опор, разбиваем раму на участки, определяем значения изгибающих моментов на границах участков и по контрольным правилам строим эпюру изгибающих моментов.

По числу «лишних» неизвестных записываем канонические уравнения метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0\,.$$

Перемещение $\delta_{11}$ определяется перемножением единичной эпюры самой на себя

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ},$$

где $\omega_1^0$ – площадь единичной эпюры; $M_{c1}^0$ – ордината единичной эпюры под ее центром тяжести.

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}6\cdot 6\right)\left[\frac{2}{3}\cdot 6\right] + \left(\frac{1}{2}3\cdot 3\right)\left[\frac{2}{3}\cdot 3\right] + \left(\frac{(3+6)}{2}4\right)[4{,}67]\right\} = \frac{165{,}06}{EJ}.$$

На участке по ригелю площадь эпюры изгибающих моментов представлена трапецией. Посмотрим подробнее как определить центр тяжести площади, площадь и ординату под ее центром тяжести (рис. 5.6).

$$C=\frac{4\left(2\cdot 3+6\right)}{3\left(3+6\right)}=1,78\text{ м};\quad \omega_0=\frac{1}{2}\left(3+6\right)\cdot 4=18\text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

где $\omega_0$ –площадь трапеции.

$$M_c^0=\left(3+1,67\right)=4,67\text{ кН}\cdot\text{м},$$

где $M_c^0$ – ордината под центром тяжести трапеции.

Отрезок $1,67$ определяем из подобия треугольников $3:4=x:2,22$.

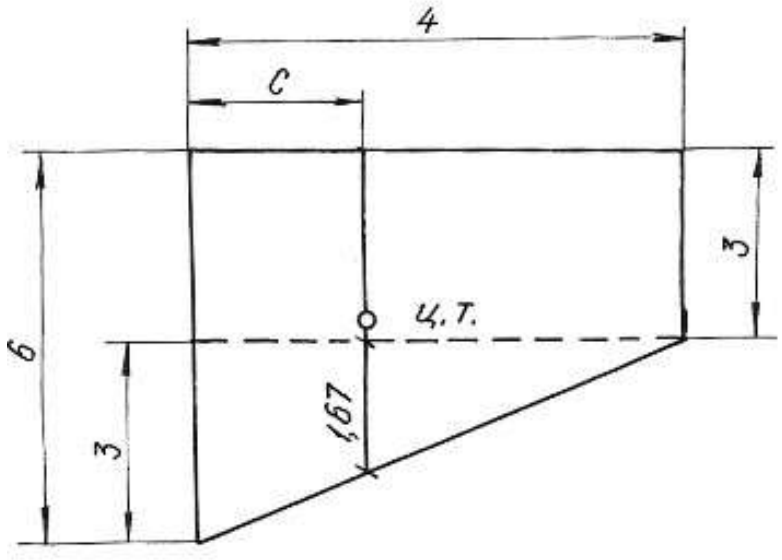



Рис. 5.6.

Перемещение $\Delta_{1p}$ получаем перемножением грузовой эпюры $M_q$ на единичную $M_1^0$

$$\Delta_{1p}=\sum\frac{\omega_p M_{c1}^0}{EJ},$$

где $\omega_p$ – площадь грузовой эпюры; $M_{c1}^0$ – ордината с первой единичной эпюры под центром тяжести грузовой.

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\left\{-\left(\frac{1}{2}360\cdot 6\right)\left[\frac{2}{3}6\right]-\left(\left(\frac{90+360}{2}\right)\cdot 4\right)[4,8]-\left(\frac{1}{3}90\cdot 3\right)\left[\frac{3}{4}3\right]\right\}=-\frac{6682,5}{EJ}.$$

Полученные значения $\delta_{11}$ и $\Delta_{1p}$ подставляем в уравнения, определяем $X_1$:

$$\frac{165,06 \cdot X_1}{EJ} - \frac{6682,5}{EJ} = 0, \quad X_1 = 40,4\,\text{кН}.$$

Зная реакцию $H_b = X_1$, по уравнениям статики определяем $R_a$, $H_a$, $R_b$:

$$\sum X = 0, \qquad H_b + H_a - q \cdot 3 = 0, \qquad H_a = 19,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_a = 0, \quad H_b \cdot 3 + R_b \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 4,5 = 0, \qquad R_b = 37,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_b = 0, \quad H_a \cdot 6 - R_a \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \qquad R_a = 37,2 \text{ кН}.$$

Проверка правильности вычисления реакций:

$$\sum Y = 0, \qquad R_a + R_b = 0.$$

Строим эпюры $M_x$, $Q_x$, $N_x$ известным способом. Эпюры приведены на рисунке 5.4, *д*, *е*, *ж*.

**Пример 5.3.**

Для заданной схемы статически неопределимой рамы (рис. 5.7, *а*)**,** при заданных значениях длин и нагрузок, построить эпюры изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил. Подобрать поперечное сечение двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа. Жесткости стойки и ригеля одинаковы.

*Решение.*

Заданная система освобождается от наложенных на нее связей. Действия связей заменяются реакциями. Установим степень статической неопределимости рамы: 3(замкнутый контур) – 1(наличие одного шарнира) = 2, т. е. рама дважды статически неопределима.

За «лишние» неизвестные принимаем $H_b = X_1$, $R_b = X_2$, тем самым выбираем основную систему. Нагружаем основную систему внешними силами (*q*, *M*) и реакциями отброшенных связей ($X_1$, $X_2$). Отбрасывая «лишние» связи, следует помнить, что основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладываем единичные силы $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ и строим эпюры изгибающих моментов от этих сил.

Строим эпюры изгибающих моментов от действия на основную систему внешних сил *q* и *M*.

Методика построения эпюр изгибающих моментов от единичных сил и внешних нагрузок, приложенных к основной системе, подробно рассмотрена при решении примера 5.1 и здесь не приводится.

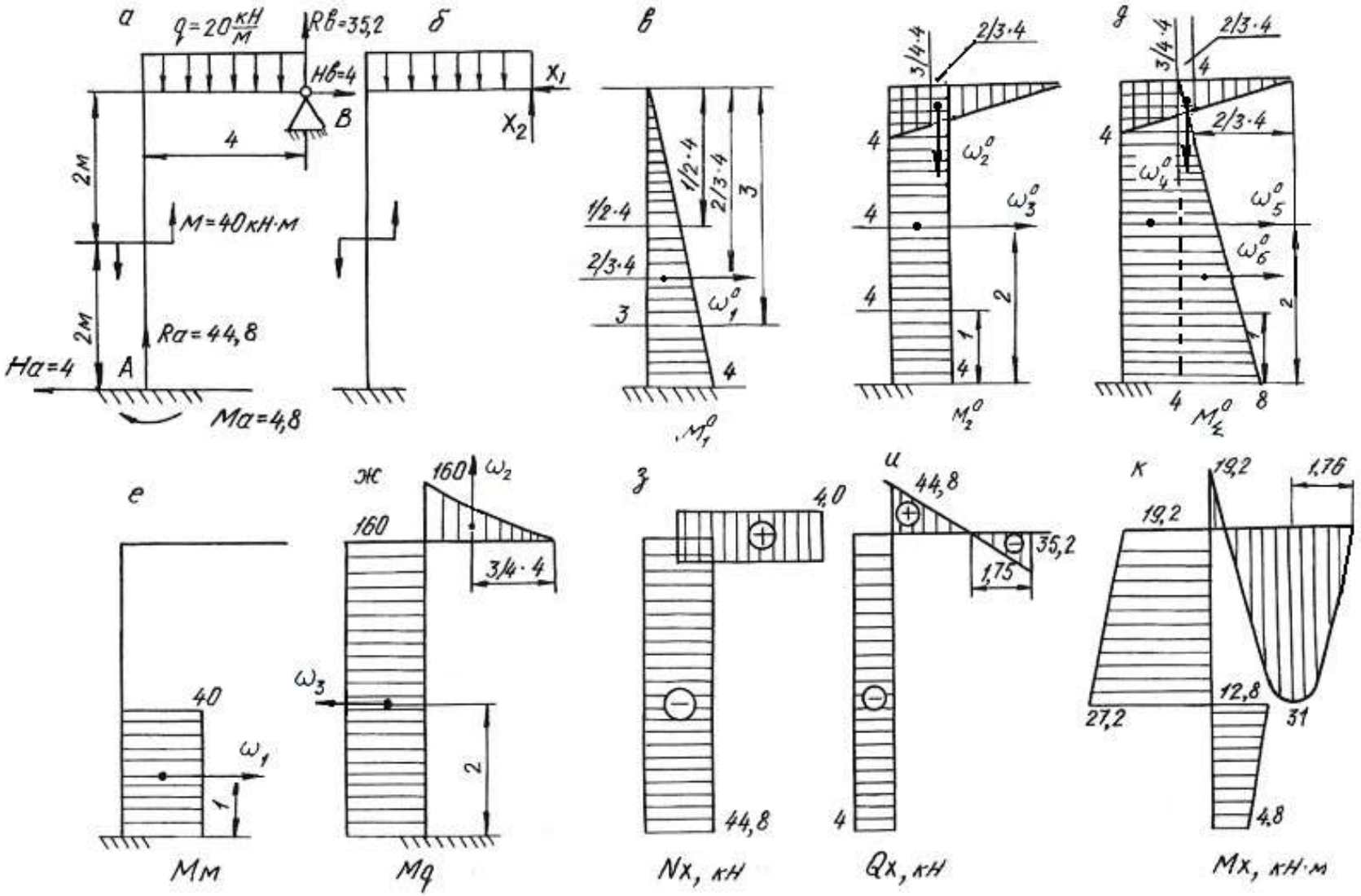

а
q=20 кН/м
RB=35,2
б
HB=4
B
X1
X2
4
2м
M=40кН·м
2м
Ra=44,8
Ha=4
A
Ma=4,8
в
1/2·4
2/3·4
1/2·4
2/3·4
3
3
4
ω1°
M1°
г
3/4·4
2/3·4
4
4
4
4
ω2°
ω3°
2
1
4
M2°
д
3/4·4
2/3·4
4
2/3·4
4
ω4°
ω5°
ω6°
2
1
4
8
M4°
е
40
ω1
1
Мм
ж
160
ω2
160
3/4·4
ω3
2
Mq
з
4,0
44,8
Nx, кН
и
44,8
35,2
1,75
4
Qx, кН
к
19,2
1,76
19,2
12,8
27,2
31
4,8
Mx, кН·м

Рис. 5.7.

Составляем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\left[\frac{2}{3}4\right]\right\} = \frac{21{,}3}{EJ},$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\omega_2^0 M_{c2}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\cdot\left[\frac{2}{3}4\right] + (4\cdot 4)[4]\right\} = \frac{85{,}3}{EJ},$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \frac{\omega_2^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\{(4\cdot 4)[2]\} = \frac{32}{EJ},$$

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\omega_p M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\{(40\cdot 2)[3] - (160\cdot 4)[2]\} = -\frac{1040}{EJ},$$

$$\Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p \cdot M_{c2}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{(40\cdot 2)[4] - (160\cdot 4)[4] - \left(\frac{1}{3}160\cdot 4\right)\left[\frac{3}{4}4\right]\right\} = -\frac{2880}{EJ}.$$

Проверяем правильность вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для этого строим суммарную единичную эпюру $M_\Sigma^0$.

Для проверки правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений применяем универсальную проверку:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{21} = \sum \frac{\omega_\Sigma^0 M_{C\Sigma}^0}{EJ};$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}(4+8)\cdot 4\right)[6{,}22] + \left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\left[\frac{2}{3}4\right]\right\} = \frac{170{,}6}{EJ}.$$

Поверяем правильность вычисления грузовых членов

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p M_{c\Sigma}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{(40\cdot 2)[7] - (160\cdot 4)[6] - \left(\frac{1}{3}160\cdot 4\right)\left[\frac{3}{4}4\right]\right\} =$$
$$= -\frac{3920}{EJ}.$$

В обоих случаях получили тождества, значит коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определены правильно.

Подставляем вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения, определяем неизвестные $X_1$ и $X_2$:

$$\left.\begin{aligned} 21{,}3 \cdot X_1 + 32 \cdot X_2 - 1040 = 0 \\ 32 \cdot X_1 + 85{,}3 \cdot X_2 - 2880 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$X_1 = -4$ кН; $X_2 = 35{,}2$ кН.

Сила $X_1$ получилась со знаком «минус», это говорит о том, что направление реакции будет противоположно единичной силе.

Зная реакции $H_b$ и $R_b$, по уравнениям статики определяем остальные реакции

$$\begin{aligned} &\sum X = 0, \quad H_b - H_a = 0, && H_a = 4 \text{ кН;} \\ &\sum M_a = 0, \quad M - M_a - q \cdot 4 \cdot 2 + R_b \cdot 4 - H_b \cdot 4 = 0, && M_a = 4{,}8 \text{ кН·м;} \\ &\sum M_в = 0, \quad M - M_a - H_a \cdot 4 - R_a \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, && R_a = 44{,}8 \text{ кН·м.} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0, \quad R_a + R_b - q \cdot 4 = 0, \quad 35{,}2 + 44{,}8 - 80 = 0.$$

Строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил по контрольным правилам. Эпюры приведены на рис. 5.7.

Выявляем опасное сечение рамы, где одновременно $M_x$ и $N_x$ имеют большие значения. Это сечение левой стойки, где $N_X = -44{,}8$ кН, $M_X = 27{,}2$ кН·м.

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \pm\frac{N_x}{A} \pm \frac{M_x}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

Выбираем сечение по моменту $M_x$

$$\frac{M_x}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}. \quad W_z \ge \frac{27{,}2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 170 \text{ см}^3.$$

По сортаменту проката выбираем двутавр № 20, $W_z = W_x^{\text{табл.}} = 184$ см$^3$, $A_{\text{табл.}} = 26{,}8$ см$^2$.

Производим проверку с учетом силы $N_x$:

$$\sigma_{\max} = -\frac{44{,}8 \cdot 10^3}{26{,}8 \cdot 10^{-4}} - \frac{27{,}2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = -1{,}67 \cdot 10^7 - 0{,}148 \cdot 10^9 \text{ Па} = 164{,}7 \text{ МПа},$$

$\sigma_{\max} = 164{,}7$ МПа> $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

Отклонение (перегруз) $\delta = \dfrac{164{,}7 - 160}{160} \cdot 100 = 2{,}93\,\% < 5\,\%$, что допустимо.

## 5.4. Задания для расчета плоских рам

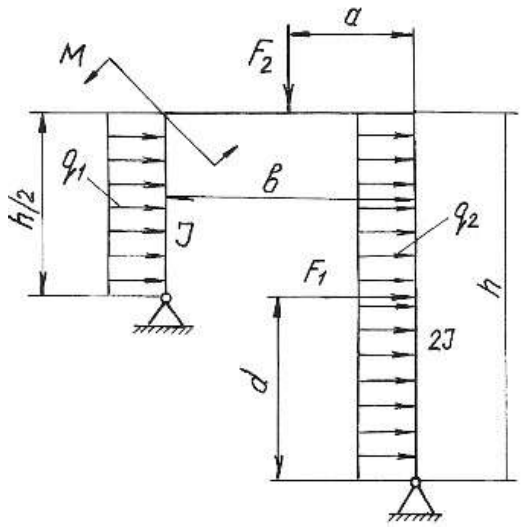
Для расчетной схемы статически неопределимой рамы при заданных значениях длин и нагрузок, определяемых в соответствии с указанным номером варианта, требуется:

1. Определить степень статической неопределимости рамы. Выбрать основную систему.
2. Составить канонические уравнения метода сил.
3. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений. Проверить правильность их вычисления.
4. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
5. Подобрать поперечное сечение элементов рамы в виде двутавра (см. табл. П. 1) при $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

Данные для расчета взять из табл. 5.3.

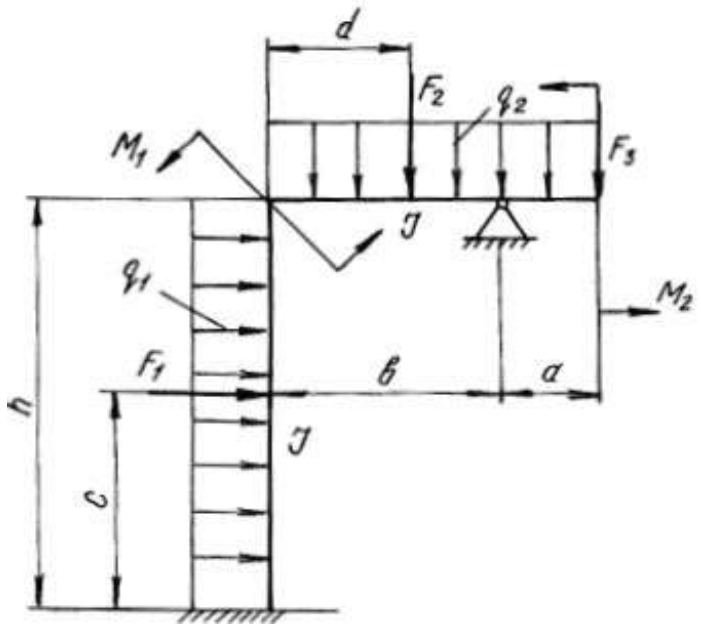
Таблица 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 | – | – | 20 | – | – | – | 80 |
| 2 | 9 | 5 | – | – | – | 15 | – | – | 10 |
| 3 | 9 | 6 | – | – | – | – | – | – | 60 |
| 4 | 9 | 4 | – | 5 | 15 | – | 40 | – | – |
| 5 | 10 | 4 | 2 | – | – | 20 | – | 30 | – |
| 6 | 8 | 5 | 3 | – | – | – | – | 60 | – |
| 7 | 8 | 6 | – | – | – | – | – | – | 10 |
| 8 | 8 | 5 | – | 5 | – | – | 40 | – | – |
| 9 | 9 | 6 | 3 | – | – | – | – | 50 | 80 |
| 10 | 9 | 6 | 5 | – | – | – | 40 | – | – |



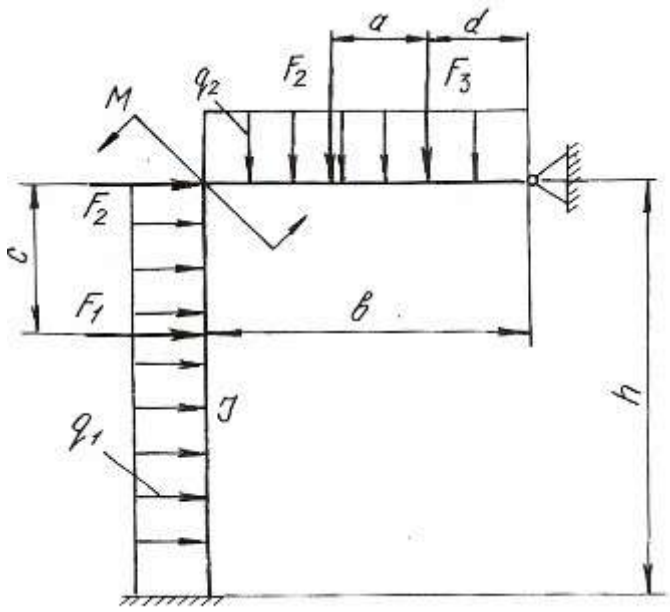
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M_1$, кН·м | $M_2$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 5 | 0,5 | 6 | – | 20 | – | 40 | – | – | – | – |
| 12 | 11 | 6 | 0,4 | 6 | – | – | 20 | 40 | – | – | – | – |
| 13 | 11 | 5 | 0,3 | 4 | – | – | – | 30 | – | – | – | 10 |
| 14 | 9 | 4 | 0,6 | – | – | – | 25 | – | – | – | – | 12 |
| 15 | 9 | 5 | 0,4 | – | 4 | 30 | – | – | 60 | – | – | – |
| 16 | 8 | 4 | 0,3 | – | 3 | – | – | – | 30 | 20 | – | – |
| 17 | 8 | 4 | 0,3 | – | – | – | – | – | – | 30 | 10 | – |
| 18 | 6 | 3 | 0,2 | – | – | 25 | – | – | – | – | 15 | 80 |
| 19 | 7 | 4 | 0,6 | – | 3 | – | – | – | 30 | 20 | 12 | – |
| 20 | 10 | 6 | 0,6 | – | – | – | 30 | – | – | – | 10 | – |



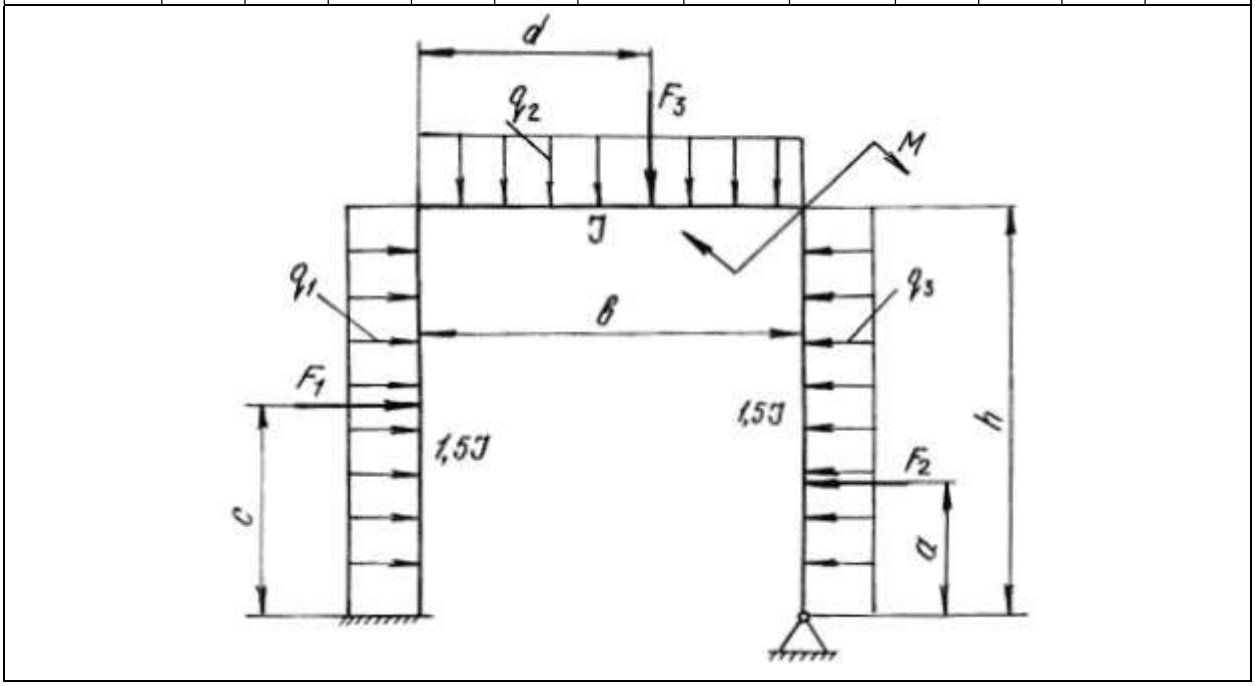
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M_1$, кНм | $M_2$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 10 | 8 | – | – | – | 20 | – | – | – | – | – | 20 |
| 22 | 10 | 7 | 2 | – | 2 | 30 | – | – | – | – | 20 | – |
| 23 | 10 | 6 | – | 2 | – | – | – | – | 30 | 20 | – | – |
| 24 | 8 | 6 | – | – | – | 20 | 30 | – | – | – | – | – |
| 25 | 8 | 6 | – | 3 | – | – | 20 | – | 20 | – | – | – |
| 26 | 9 | 5 | – | – | – | – | 20 | – | – | – | – | 15 |
| 27 | 9 | 6 | 2 | – | 1 | – | – | – | – | 40 | 20 | – |
| 28 | 7 | 5 | 2 | – | 1 | – | – | – | – | – | 30 | – |
| 29 | 8 | 4 | 2 | – | 1 | – | – | – | – | – | 20 | 20 |
| 30 | 8 | 6 | – | – | – | – | – | – | 50 | 20 | – | 10 |



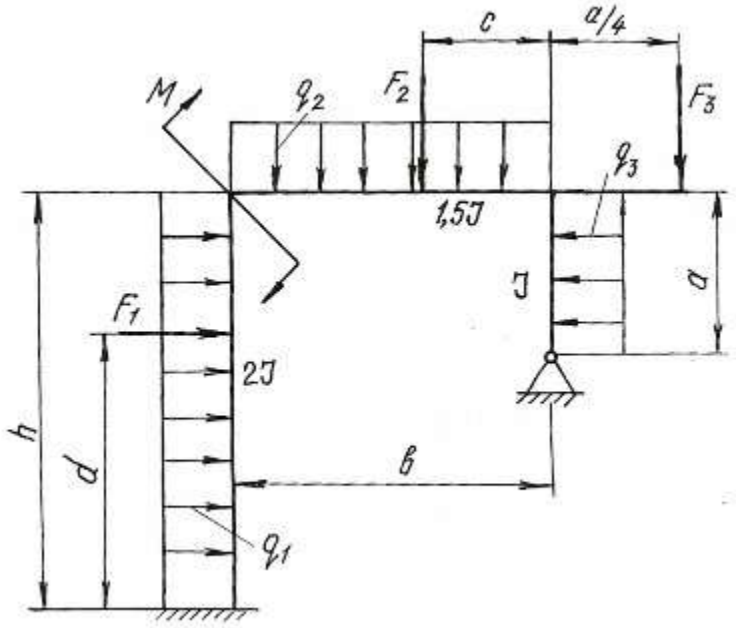
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 10 | 4 | 0,5 | – | – | 12 | – | – | – | – | – | 10 |
| 32 | 9 | 5 | 0,4 | – | – | – | 20 | – | – | – | – | 15 |
| 33 | 8 | 4 | 0,3 | – | – | – | – | 20 | – | 30 | – | – |
| 34 | 8 | 6 | 0,3 | – | 4 | 20 | – | – | – | – | 40 | – |
| 35 | 8 | 4 | 0,4 | – | – | – | 20 | – | – | 30 | – | – |
| 36 | 6 | 5 | 0,3 | 5 | – | – | – | 20 | 60 | – | – | – |
| 37 | 10 | 5 | 0,4 | – | 4 | – | – | – | – | 40 | 50 | – |
| 38 | 8 | 4 | 0,3 | – | – | – | – | – | – | 30 | – | 12 |
| 39 | 12 | 6 | 0,5 | – | 4 | – | – | – | – | – | 40 | 15 |
| 40 | 12 | 6 | 0,6 | 3 | – | – | – | 25 | 10 | – | – | – |



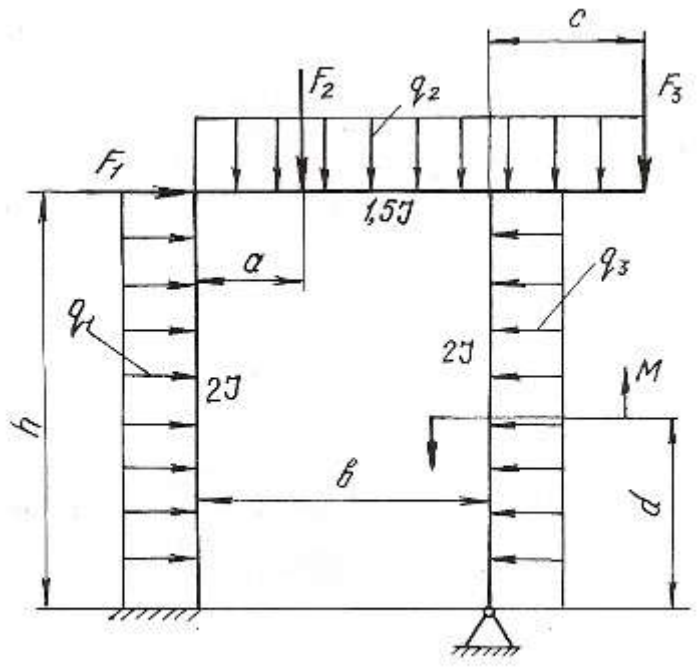
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | *h*, м | *b*, м | *a*, м | *c*, м | *d*, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | *M*, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 10 | 5 | 4 | – | – | 20 | – | – | – | – | – | 50 |
| 42 | 9 | 6 | 4 | – | – | – | 15 | – | – | – | – | 10 |
| 43 | 8 | 6 | 5 | – | – | – | – | 20 | – | – | 30 | – |
| 44 | 8 | 5 | 6 | – | 2 | 15 | – | – | 30 | – | – | – |
| 45 | 8 | 4 | 5 | 2 | – | – | 20 | – | – | 40 | – | – |
| 46 | 9 | 6 | 3 | – | 5 | – | – | 15 | 40 | – | – | – |
| 47 | 9 | 8 | 4 | 2 | – | – | – | – | – | 10 | – | 60 |
| 48 | 9 | 6 | 6 | – | – | – | – | – | – | – | 40 | 10 |
| 49 | 10 | 8 | 5 | 3 | – | – | – | – | – | 20 | 40 | – |
| 50 | 10 | 6 | 4 | 1 | 4 | – | – | – | 10 | 25 | – | – |



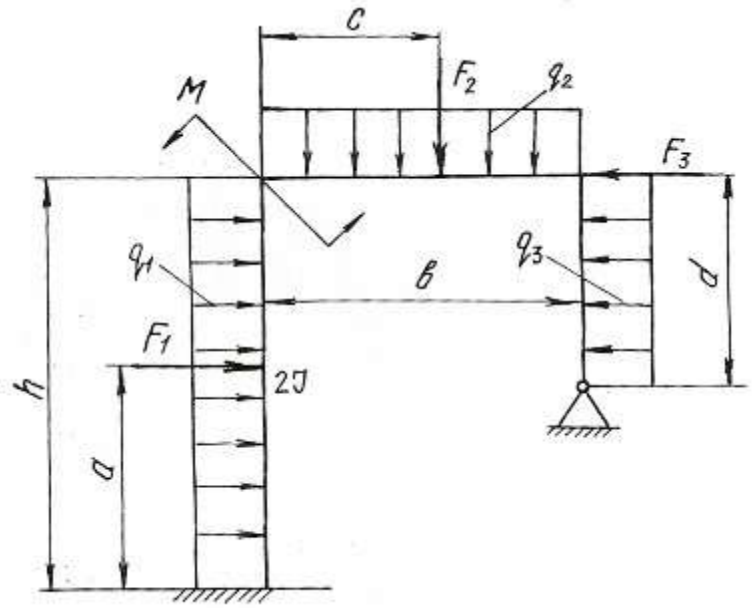
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 8 | 4 | 0,6 | 0,5 | 5 | 20 | – | – | – | – | – | 50 |
| 52 | 10 | 5 | 0,5 | 0,6 | – | – | 20 | – | 20 | 30 | – | – |
| 53 | 8 | 4 | 0,4 | 0,4 | – | – | – | 25 | – | 20 | – | – |
| 54 | 6 | 4 | 0,3 | 0,4 | 4 | – | – | – | – | – | 30 | 14 |
| 55 | 12 | 6 | 0,6 | 0,5 | – | – | – | – | 40 | 20 | – | – |
| 56 | 10 | 4 | 0,4 | 0,3 | 2 | 15 | – | – | – | – | – | 10 |
| 57 | 8 | 5 | 0,3 | 0,3 | 2 | – | 15 | – | – | – | – | 12 |
| 58 | 8 | 5 | 0,4 | 0,4 | – | – | – | 20 | 30 | – | – | – |
| 59 | 9 | 5 | 0,5 | 0,6 | – | – | – | – | – | 30 | 40 | – |
| 60 | 9 | 4 | 0,6 | 0,5 | – | – | 30 | – | – | 20 | – | – |



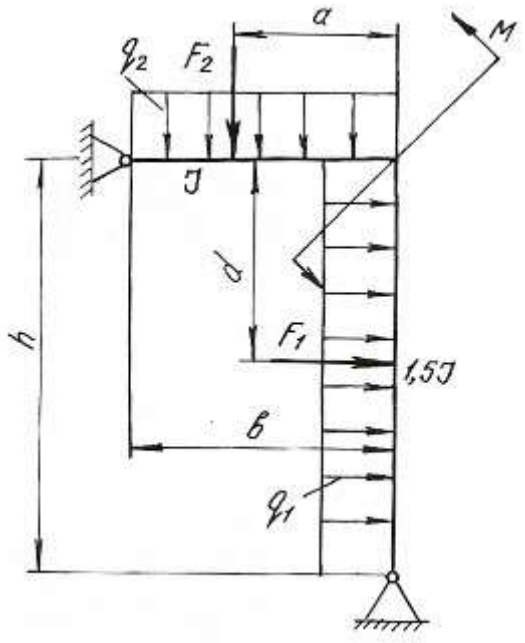
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 8 | 4 | 4 | – | 4 | 20 | – | – | 50 | – | – | – |
| 62 | 10 | 5 | – | 2,5 | 5 | – | 20 | – | – | 30 | – | – |
| 63 | 6 | 3 | – | – | 3 | – | – | 20 | – | – | 30 | – |
| 64 | 12 | 6 | 5 | – | 6 | – | – | 20 | 50 | – | – | – |
| 65 | 10 | 4 | – | – | 5 | – | 20 | – | – | – | – | 80 |
| 66 | 8 | 4 | – | – | 5 | 15 | – | – | – | – | 20 | – |
| 67 | 8 | 5 | – | 2 | 5 | 20 | – | – | – | 40 | – | – |
| 68 | 8 | 4 | – | – | 4 | – | – | – | – | – | 80 | 40 |
| 69 | 9 | 4 | – | 3 | 5 | – | – | – | – | 60 | – | 40 |
| 70 | 10 | 5 | 8 | – | 5 | – | 15 | – | 60 | – | – | – |



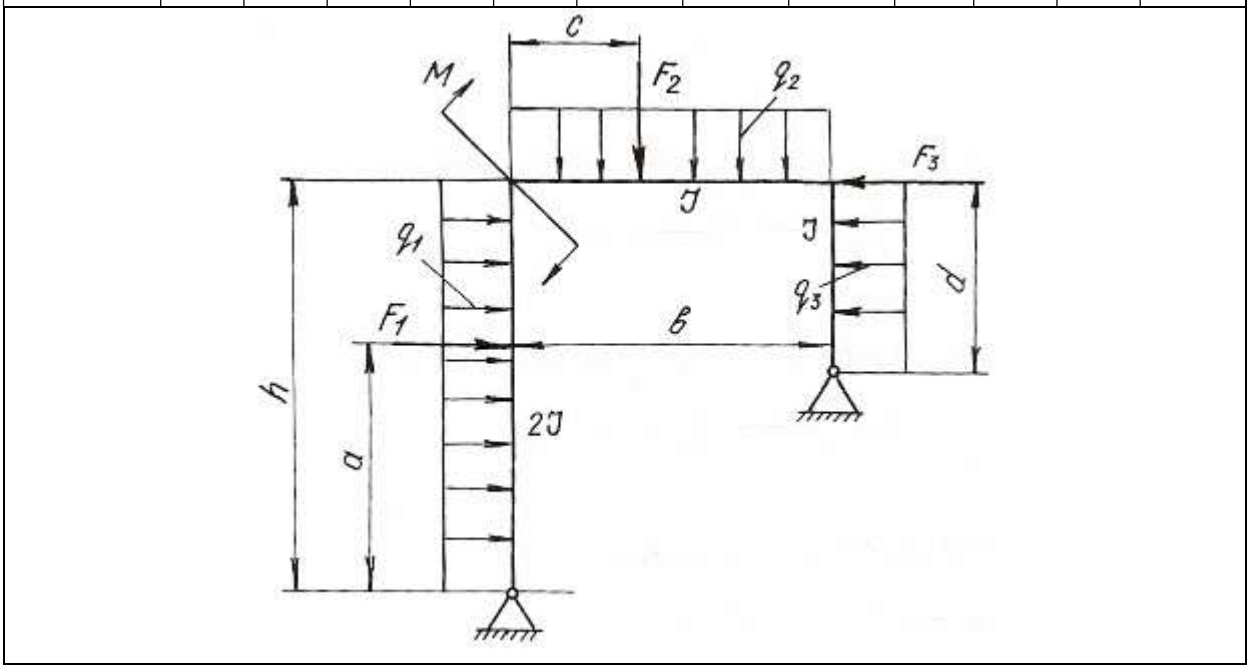
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 71 | 10 | 5 | 2,5 | – | 20 | – | – | 80 | – |
| 72 | 10 | 6 | – | – | – | 15 | – | – | – |
| 73 | 10 | 4 | 2 | – | – | – | – | – | – |
| 74 | 10 | 5 | – | – | 15 | – | – | 80 | – |
| 75 | 9 | 5 | – | – | – | 20 | – | – | – |
| 76 | 9 | 6 | – | – | – | – | – | – | 60 |
| 77 | 9 | 4 | 2 | – | – | – | – | 10 | – |
| 78 | 8 | 6 | 3 | – | – | – | – | 80 | 10 |
| 79 | 8 | 6 | 3 | 4 | – | – | 40 | 60 | – |
| 80 | 8 | 5 | – | 4 | – | – | 30 | – | – |



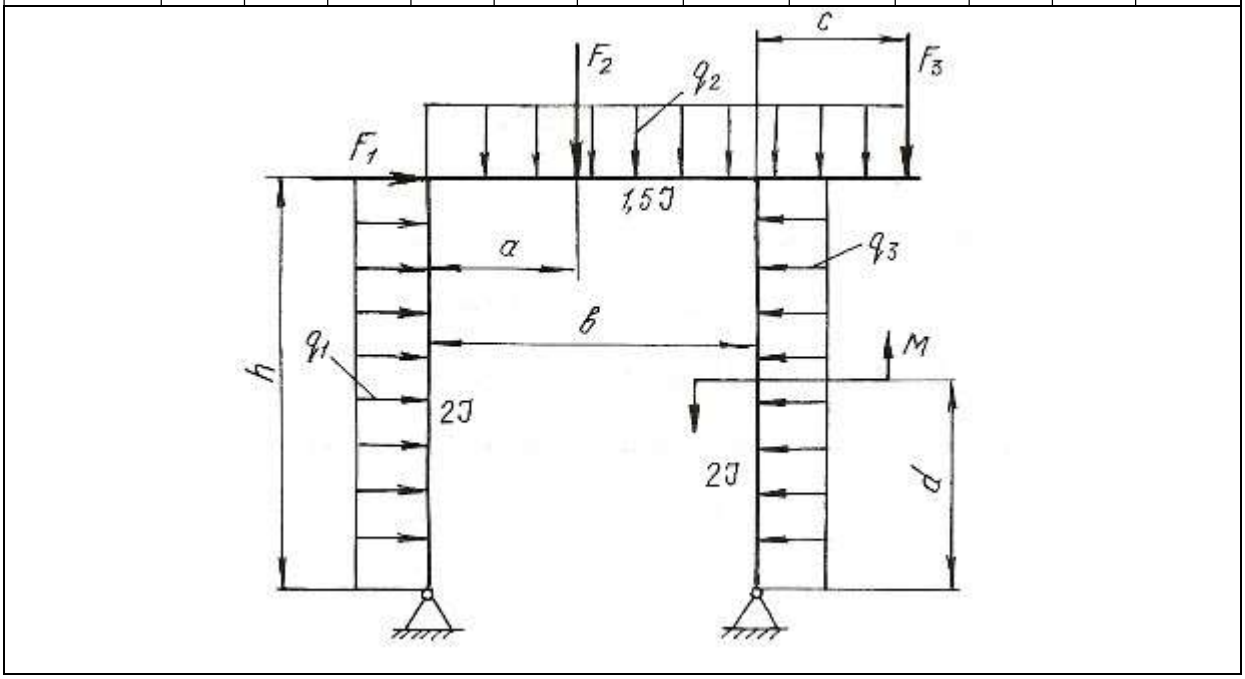
Продолжение табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | 8 | 4 | 4 | – | 4 | 20 | – | – | 50 | – | – | – |
| 82 | 10 | 5 | – | 2,5 | 5 | – | 20 | – | – | 30 | – | – |
| 83 | 8 | 4 | – | – | 3 | – | – | 20 | – | – | 30 | – |
| 84 | 6 | 4 | 5 | – | 6 | – | – | 20 | 50 | – | – | – |
| 85 | 12 | 6 | – | – | 5 | – | 20 | – | – | – | – | 80 |
| 86 | 10 | 4 | – | – | 5 | 15 | – | – | – | – | 20 | – |
| 87 | 8 | 5 | – | 2 | 5 | 20 | – | – | – | 40 | – | – |
| 88 | 8 | 5 | – | – | 4 | – | – | – | – | – | 80 | 40 |
| 89 | 9 | 5 | – | 3 | 5 | – | – | – | – | 60 | – | 40 |
| 90 | 9 | 4 | 8 | – | 5 | – | 15 | – | 60 | – | – | – |



Окончание табл. 5.3

| Номер варианта | $h$, м | $b$, м | $a$, м | $c$, м | $d$, м | $q_1$, кН/м | $q_2$, кН/м | $q_3$, кН/м | $F_1$, кН | $F_2$, кН | $F_3$, кН | $M$, кН·м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 8 | 4 | 0,6 | 0,5 | 5 | 20 | – | – | – | – | – | 50 |
| 92 | 10 | 5 | 0,5 | 0,6 | – | – | 20 | – | 20 | 30 | – | – |
| 93 | 8 | 4 | 0,4 | 0,4 | – | – | – | 25 | – | 20 | – | – |
| 94 | 6 | 4 | 0,3 | 0,4 | 4 | – | – | – | – | – | 30 | 14 |
| 95 | 12 | 6 | 0,6 | 0,5 | – | – | – | – | 40 | 20 | – | – |
| 96 | 10 | 4 | 0,4 | 0,3 | 2 | 15 | – | – | – | – | – | 10 |
| 97 | 8 | 5 | 0,3 | 0,3 | 2 | – | 15 | – | – | – | – | 12 |
| 98 | 8 | 5 | 0,4 | 0,4 | – | – | – | 20 | 30 | – | – | – |
| 99 | 9 | 5 | 0,5 | 0,6 | – | – | – | – | – | 30 | 40 | – |
| 100 | 9 | 4 | 0,6 | 0,5 | – | – | 30 | – | – | 20 | – | – |



# Глава 6
# ВИДЫ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сочетание простейших видов деформаций называется сложным сопротивлением. При расчете элементов конструкций, испытывающих сложные сопротивления, используют принцип независимости действия сил, т. е. определяют деформации и напряжения для каждого простейшего вида сопротивления, а затем результаты суммируют алгебраически, геометрически или согласно одной из теорий прочности. При этом задача сводится к определению опасного сечения по длине бруса и опасной точки в этом сечении.

В данной главе приведены методики решения задач на косой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие, совместное действие изгиба с кручением.

## 6.1. Косой изгиб

Косой изгиб – вид сложного сопротивления, который возникает при действии внешних нагрузок, перпендикулярных продольной оси бруса, но расположенных вне главных плоскостей инерции. Поэтому косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях, разложив все силы по направлению главных центральных осей инерции поперечных сечений.

При косом изгибе балки нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения с координатами $y$ и $z$ определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M^{в}}{J_z} y + \frac{M^{г}}{J_y} z, \qquad (6.1)$$

где $J_z$ и $J_y$ – главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки относительно осей $z$ и $y$; $M^{в}$ и $M^{г}$ – изгибающие моменты в поперечном сечении в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Положение нейтральной оси поперечного сечения определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M^{г}}{M^{в}} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \qquad (6.2)$$

где $\alpha$ - угол наклона нейтральной оси к горизонтальной главной центральной оси инерции.

Максимальные и минимальные нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от обеих главных центральных осей инерции и для симметричных сечений определяются по формуле:

$$\sigma_{max} = \pm\frac{M^{г}}{W_y} \pm \frac{M^{в}}{W_z}, \qquad (6.3)$$

где $W_z$ и $W_y$ – моменты сопротивления поперечного сечения изгибу относительно осей $z$ и $y$.

Если внешние нагрузки лежат в одной плоскости, то положение нейтральной оси определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{J_z}{J_y}, \qquad (6.4)$$

где $\varphi$ – угол между силовой плоскостью, в которой действуют внешние нагрузки, и главной вертикальной осью инерции поперечного сечения балки.

Напряжения в этом случае определяются по формуле:

$$\sigma_{max/min} = \pm M\left(\frac{\cos\varphi}{W_z} \pm \frac{\sin\varphi}{W_y}\right), \qquad (6.5)$$

где $M$ – результирующий момент, действующий в силовой плоскости.

Прогиб $f$ и угол поворота $\theta$ сечения балки при косом изгибе определяются как геометрические суммы прогибов и углов поворота от составляющих изгибающего момента, действующих в главных плоскостях инерции балки

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \text{ и } \theta = \sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}, \qquad (6.6)$$

где $f_z$ и $f_y$ – прогибы в направлении осей $z$ и $y$; $\theta_z$ и $\theta_y$ – углы поворота сечения вокруг осей $z$ и $y$.

**Пример 6.1.**

Для балки (рис. 6.1) построить эпюры нормальных напряжений по сторонам поперечного сечения (см. табл. П. 1) в защемлении, определить наибольшее нормальное напряжение и полный прогиб свободного конца балки при $F = 2$ кН, $\varphi = 15^{o}$.

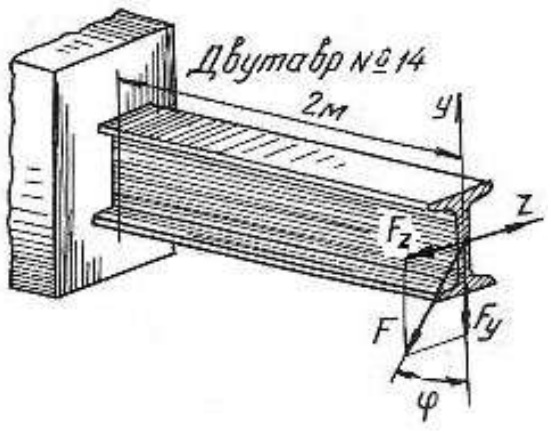



Рис. 6.1.

*Решение.*

Раскладываем силу $F$ на ее составляющие, действующие в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$F_y = F \cdot \cos 15^\circ = 2000 \cdot 0,96 = 1920 \text{ Н};$$

$$F_z = F \cdot \sin 15^\circ = 2000 \cdot 0,26 = 520 \text{ Н}.$$

Максимальные изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях будут в защемленном сечении балки:

$$M^{\text{в}}_{\max} = F_y l = 1920 \cdot 2 = 3840 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M^{\text{г}}_{\max} = F_z l = 520 \cdot 2 = 1040 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По ГОСТ 8239-89 (см. табл. П. 1)для заданного профиля находим моменты инерции и моменты сопротивления сечения:

$$J_z = 572 \text{ см}^4; \quad J_y = 41,9 \text{ см}^4; \quad W_z = 81,7 \text{ см}^3; \quad W_y = 11,5 \text{ см}^3,$$

что при переводе в единицы СИ соответствует:

$$J_z = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \; J_y = 41,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \; W_z = 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3; \; W_y = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости:

$$\sigma^{\text{в}}_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} = \frac{3840}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа},$$

а наибольшие нормальные напряжения от изгиба в горизонтальной плоскости:

$$\sigma^{\text{г}}_{\max} = \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} = \frac{1040}{11,5 \cdot 10^{-6}} = 90,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,4 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений даны на рис. 6.2. Таким образом, наибольшие нормальные напряжение будут в крайних угловых точка поперечного сечения. Как видно по эпюрам нормальных напряжений

$$\sigma_{\max} = 47 + 90,4 = 137,4 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{\min} = -47 - 90,4 = -137,4 \text{ МПа}.$$

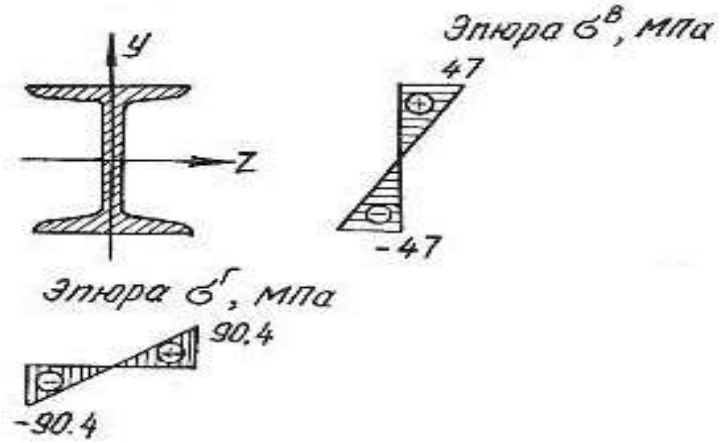



Рис. 6.2.

Прогиб свободного конца балки в вертикальной плоскости [10]

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EJ_z} = \frac{1920 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad \text{или} \quad f_y = 4{,}5 \text{ мм},$$

а величина прогиба в горизонтальной плоскости

$$f_z = \frac{F_z l^3}{3EJ_y} = \frac{520 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 41{,}9 \cdot 10^{-8}} = 16{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad \text{или} \quad f_z = 16{,}5 \text{ мм}.$$

Полный прогиб свободного конца балки

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 16{,}5^2} = 17{,}1 \text{ мм}.$$

**Пример 6.2.**

Для бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.3) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях; определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения, принимая $\sigma_{adm}$=160 МПа и отношение сторон $\frac{h}{b} = 2$;

2. Для опасного поперечного сечения построить эпюры нормальных напряжений от каждого из изгибающих моментов и суммарную эпюру нормальных напряжений.

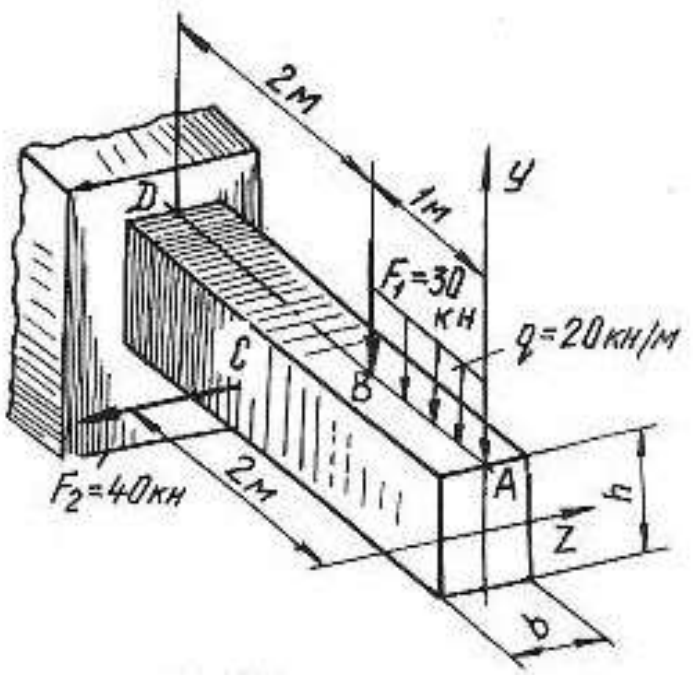



Рис. 6.3.

*Решение.*

Согласно принципу независимости действия сил рассмотрим отдельно действие сил, вызывающих изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Изгиб в вертикальной плоскости вызывается действием силы $F_1$ и равномерно распределенной нагрузкой. Определим величину изгибающих моментов в характерных точках:

$$M_A^{\text{в}} = 0;$$

$$M_B^{\text{в}} = -q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -10 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{\text{в}} = -q \cdot 1 \cdot 2{,}5 - F_1 \cdot 2 = -20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2{,}5 - 30 \cdot 10^3 \cdot 2 = -110 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = -110 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Изгиб в горизонтальной плоскости вызывается силой $F_2$. Определим величину изгибающих моментов в характерных точках:

$$M_A^{\text{г}} = 0; \quad M_B^{\text{г}} = 0; \quad M_C^{\text{г}} = 0;$$

$$M_D^{\text{г}} = F_2 \cdot 1 = 40 \cdot 10^3 \cdot 1 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 6.4, *а.* Максимальные изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях будут в сечении $D$:

$$M_{\max}^{\text{в}} = M_D^{\text{в}} = 110 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{\max}^{\text{г}} = M_D^{\text{г}} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

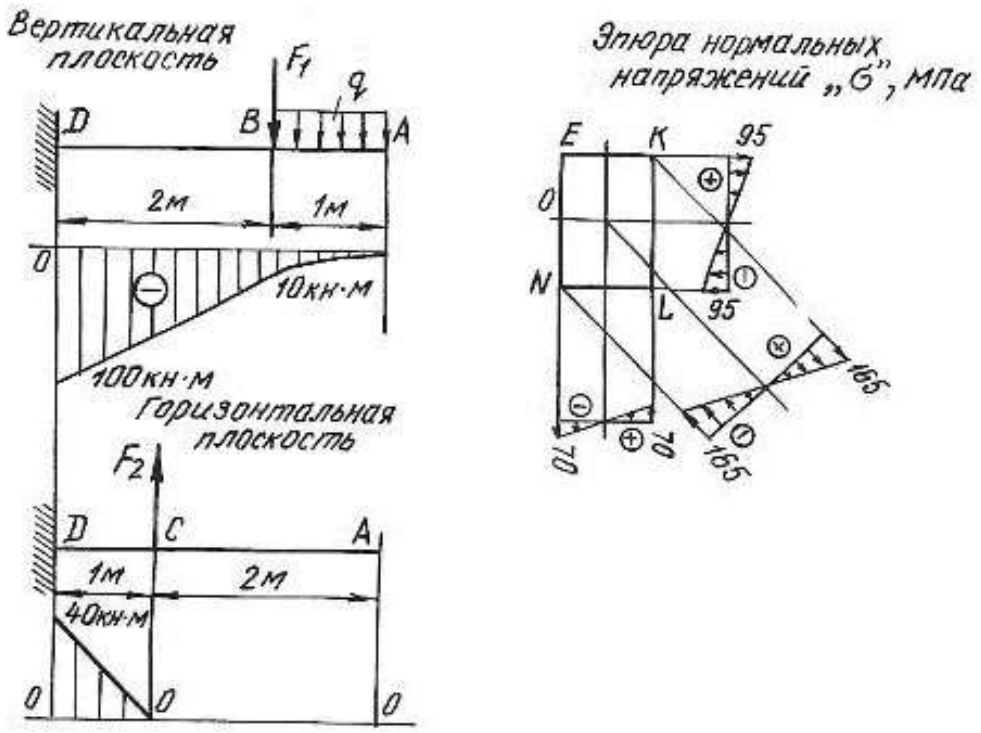



Рис. 6.4.

Опасное сечение балки будет в защемлении. Запишем условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} + \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

Для бруса прямоугольного сечения моменты сопротивления равны:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad \text{и} \quad W_y = \frac{b^2 h}{6};$$

при $h = 2 \cdot b$ получим

$$W_z = \frac{b(2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \quad \text{и} \quad W_y = \frac{b^2 \cdot 2 \cdot b}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Подставляя значение величин в условие прочности, получим

$$\sigma_{\max} = \frac{110 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot b^3} + \frac{40 \cdot 10^3}{\frac{1}{3} \cdot b^3} \le 160 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Решая уравнение относительно $b$, получим $b = 0{,}12$ м $= 120$ мм и $h = 2b = 240$ мм. Для построения эпюр нормальных напряжений определяем наибольшие напряжения, для чего вычислим моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 10^{-2} \cdot (24 \cdot 10^{-2})^2}{6} = 1152 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{b^2 h}{6} = \frac{(12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 24 \cdot 10^{-2}}{6} = 576 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости:

$$\sigma^{\text{в}}_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} = \frac{110 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = 95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 95 \text{ МПа}.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в горизонтальной плоскости:

$$\sigma^{\text{г}}_{\max} = \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = 70 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70 \text{ МПа}.$$

Наибольшие нормальные напряжения будут в точках $K$ и $N$:

$$\sigma_K = 95 + 70 = 165 \text{ МПа};$$
$$\sigma_N = -95 - 70 = -165 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 6.4, *б*

## 6.2. Задания для расчета на косой изгиб

Для расчетной схемы балки при заданных значениях геометрических размеров и нагрузок необходимо:

1) определить положение нейтральной оси;

2) вычислить наибольшие и наименьшие напряжения в опасном сечении балки;

3) построить эпюры напряжений;

4) найти прогиб балки в середине пролета или на свободном конце консольной балки.

Данные для расчета взять из таблиц 6.1, 6.2, 6.3 и табл. П. 1.

Таблица 6.1

| Схема балки | Схема сечения | Материал | Пролет *l*, м | Размеры сечения, см | Угол φ,град | Нагрузка | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | *F*, кН | *M*, кН·м | *q*, кН/м |
| 1 | А | дерево | 1,5 | *b*×*h*=12×20 | 60 | – | 4 | – |
| | Б | Ст 3 | 1,4 | двутавр № 24 | 30 | – | 3 | – |
| | В | Ст 3 | 1,3 | швеллер № 24 | 45 | – | 5 | – |
| | Г | Ст 3 | 1,6 | 2 швеллера № 8 | 60 | – | 6 | – |
| | Д | Ст 3 | 1,7 | 2 швеллера № 10 | 30 | – | 7 | – |
| | Е | Ст 3 | 1,8 | 2 двутавра № 10 | 60 | – | 8 | – |
| 2 | А | дерево | 1,2 | *b*×*h*=15×25 | 45 | 3 | – | – |
| | Б | Ст 3 | 1,4 | двутавр № 22 | 30 | 2 | – | – |
| | В | Ст 3 | 1,5 | швеллер № 27 | 60 | 4 | – | – |
| | Г | Ст 3 | 1,6 | 2 швеллера № 18 | 30 | 8 | – | – |
| | Д | Ст 3 | 1,8 | 2 швеллера № 20 | 60 | 10 | – | – |
| | Е | Ст 3 | 1,7 | 2 двутавра № 12 | 45 | 9 | – | – |
| 3 | А | дерево | 1,2 | *b*×*h*=14×28 | 30 | – | – | 4 |
| | Б | Ст 3 | 1,3 | двутавр № 24 | 60 | – | – | 3 |
| | В | Ст 3 | 1,5 | швеллер № 27 | 45 | – | – | 2 |
| | Г | Ст 3 | 1,4 | 2 швеллера № 16 | 20 | – | – | 6 |
| | Д | Ст 3 | 1,7 | 2 швеллера № 14 | 30 | – | – | 5 |
| | Е | Ст 3 | 1,6 | 2 двутавра № 14 | 40 | – | – | 7 |

Продолжение табл. 6.1

| Схема балки | Схема сечения | Материал | Пролет $l$,м | Размеры сечения, см | Угол φ, град | Нагрузка | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $F$, кН | $M$, кН·м | $q$, кН/м |
| 4 | А | дерево | 2,5 | $b \times h$=12×30 | 30 | – | 6 | – |
| | Б | Ст 3 | 4 | двутавр № 55 | 40 | – | 5 | – |
| | В | Ст 3 | 5 | швеллер № 30 | 50 | – | 7 | – |
| | Г | Ст 3 | 6 | 2 швеллера № 10 | 60 | – | 8 | – |
| | Д | Ст 3 | 4 | 2 швеллера № 12 | 30 | – | 9 | – |
| | Е | Ст 3 | 6 | 2 двутавра № 14 | 40 | – | 10 | – |
| 5 | А | дерево | 3 | $b \times h$=18×30 | 40 | 6 | – | – |
| | Б | Ст 3 | 4 | двутавр № 36 | 60 | 2,5 | – | – |
| | В | Ст 3 | 5 | швеллер № 24 | 30 | 3 | – | – |
| | Г | Ст 3 | 6 | 2 швеллера № 10 | 20 | 4 | – | – |
| | Д | Ст 3 | 5,5 | 2 швеллера № 12 | 40 | 3 | – | – |
| | Е | Ст 3 | 4,5 | 2 двутавра № 14 | 50 | 5 | – | – |
| 6 | А | дерево | 4 | $b \times h$=16×28 | 60 | – | – | 2 |
| | Б | Ст 3 | 6 | двутавр № 20 | 50 | – | – | 4 |
| | В | Ст 3 | 3 | швеллер № 16 | 30 | – | – | 3 |
| | Г | Ст 3 | 4 | 2 швеллера № 14 | 40 | – | – | 5 |
| | Д | Ст 3 | 5 | 2 швеллера № 16 | 45 | – | – | 6 |
| | Е | Ст 3 | 5,5 | 2 двутавра № 18 | 20 | – | – | 7 |
| 7 | А | дерево | 2 | $b \times h$=16×24 | – | 1 | – | – |
| | Б | Ст 3 | 2,5 | двутавр № 28 | – | 3 | – | – |
| | В | Ст 3 | 2,4 | швеллер № 16 | – | 4 | – | – |
| | Г | Ст 3 | 2,6 | 2 швеллера № 14 | – | 6 | – | – |
| | Д | Ст 3 | 2,3 | 2 швеллера № 16 | – | 8 | – | – |
| | Е | Ст 3 | 2,7 | 2 двутавра № 20 | – | 10 | – | – |
| 8 | А | дерево | 1,5 | $b \times h$=15×25 | – | 2 | 3 | – |
| | Б | Ст 3 | 1,8 | двутавр № 18 | – | 3 | 4 | – |
| | В | Ст 3 | 1,6 | швеллер № 24 | – | 5 | 3 | – |
| | Г | Ст 3 | 1,7 | 2 швеллера № 12 | – | 6 | 6 | – |
| | Д | Ст 3 | 1,9 | 2 швеллера № 14 | – | 7 | 7 | – |
| | Е | Ст 3 | 2 | 2 двутавра № 16 | – | 8 | 5 | – |

Продолжение табл. 6.1

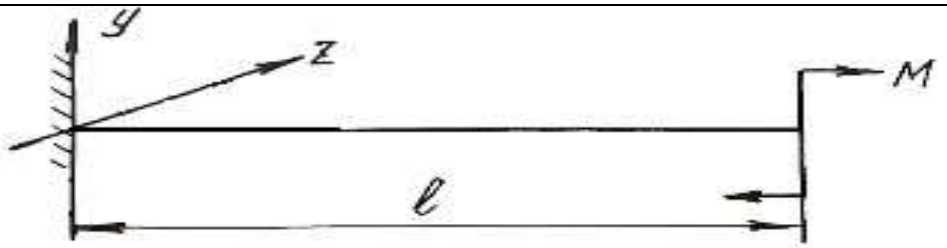
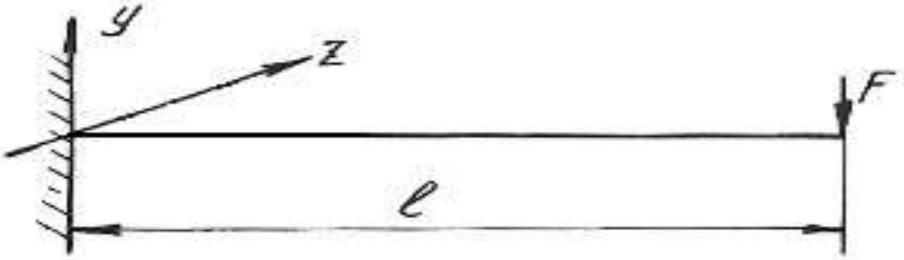
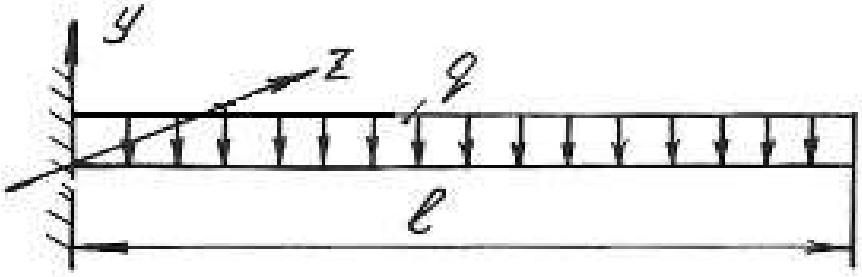
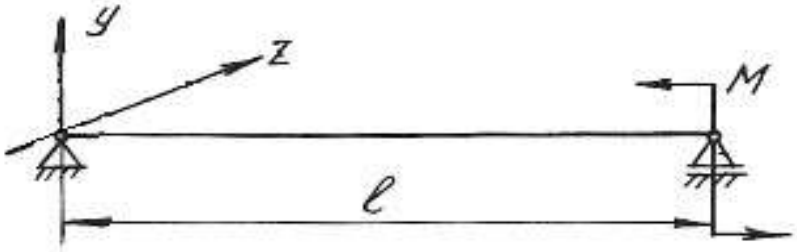
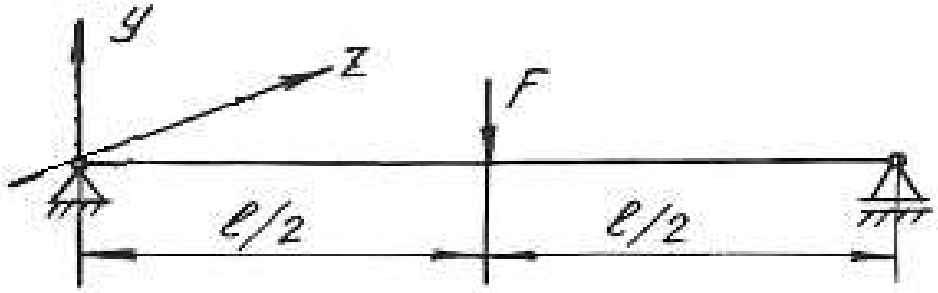
| Схема балки | Схема сечения | Материал | Пролет $l$, м | Размеры сечения,см | Угол φ, град | Нагрузка | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $F$, кН | $M$, кН·м | $q$, кН/м |
| 9 | А | дерево | 2,5 | $b \times h$=17×27 | – | 4 | – | 30 |
| | Б | Ст 3 | 4 | двутавр № 30 | – | 6 | – | 20 |
| | В | Ст 3 | 3 | швеллер № 27 | – | 5 | – | 40 |
| | Г | Ст 3 | 5 | 2 швеллера № 14 | – | 7 | – | 50 |
| | Д | Ст 3 | 6 | 2 швеллера № 16 | – | 8 | – | 60 |
| | Е | Ст 3 | 4,6 | 2 двутавра № 18 | – | 9 | – | 70 |
| 10 | А | дерево | 1,6 | $b \times h$=18×24 | – | – | 5 | 10 |
| | Б | Ст 3 | 1,8 | двутавр № 27 | – | – | 4 | 20 |
| | В | Ст 3 | 1,9 | швеллер № 20 | – | – | 3 | 30 |
| | Г | Ст 3 | 2 | 2 швеллера № 14 | – | – | 6 | 40 |
| | Д | Ст 3 | 2,1 | 2 швеллера № 16 | – | – | 7 | 50 |
| | Е | Ст 3 | 2,2 | 2 двутавра № 20 | – | – | 8 | 60 |
| 11 | А | дерево | 1,5 | $b \times h$=19×30 | – | 2 | 30 | – |
| | Б | Ст 3 | 1,7 | двутавр № 24 | – | 3 | 40 | – |
| | В | Ст 3 | 1,9 | швеллер № 24 | – | 5 | 60 | – |
| | Г | Ст 3 | 1,8 | 2 швеллера № 18 | – | 7 | 80 | – |
| | Д | Ст 3 | 2,3 | 2 швеллера № 20 | – | 6 | 70 | – |
| | Е | Ст 3 | 2,4 | 2 двутавра № 14 | – | 4 | 50 | – |
| 12 | А | дерево | 1,2 | $b \times h$=20×29 | – | 2 | – | 20 |
| | Б | Ст 3 | 1,3 | двутавр № 22 | – | 4 | – | 30 |
| | В | Ст 3 | 1,4 | швеллер № 24 | – | 5 | – | 40 |
| | Г | Ст 3 | 1,5 | 2 швеллера № 22 | – | 7 | – | 50 |
| | Д | Ст 3 | 1,6 | 2 швеллера № 20 | – | 6 | – | 60 |
| | Е | Ст 3 | 1,7 | 2 двутавра № 20 | – | 7 | – | 70 |

Окончание табл. 6.1

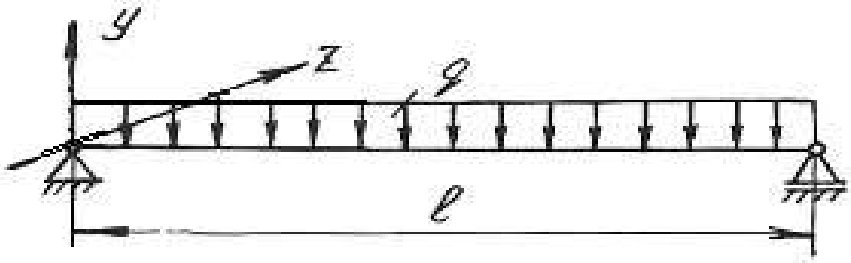
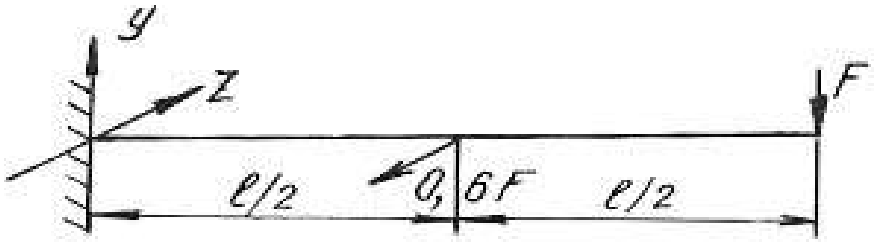
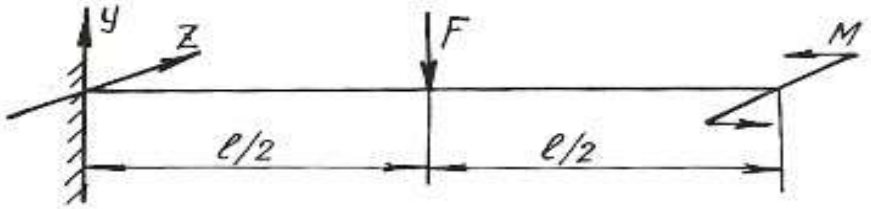
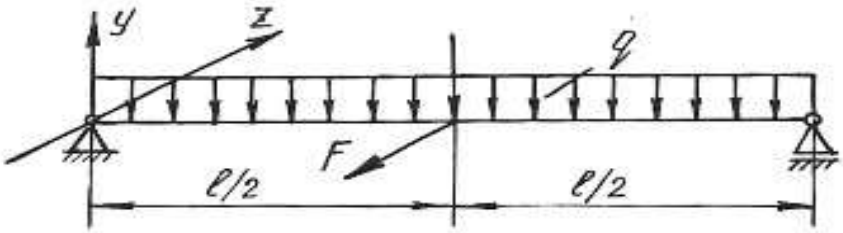
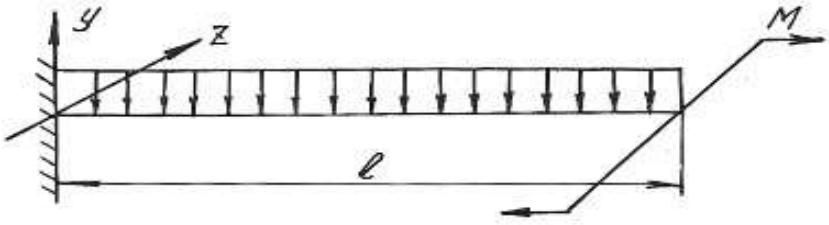
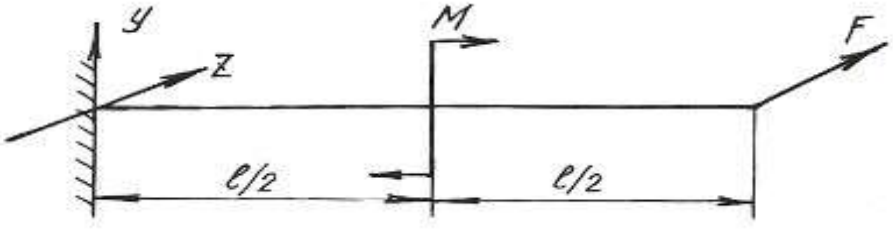
| Схема балки | Схема сечения | Материал | Пролет $l$,м | Размеры сечения, см | Угол φ, град | Нагрузка | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $F$, кН | $M$, кН·м | $q$, кН/м |
| 13 | А | дерево | 1,5 | $b \times h$=18×32 | – | 3 | – | 10 |
| | Б | Ст 3 | 1,6 | двутавр № 36 | – | 4 | – | 20 |
| | В | Ст 3 | 1,7 | швеллер № 36 | – | 5 | – | 30 |
| | Г | Ст 3 | 1,8 | 2 швеллера № 18 | – | 6 | – | 40 |
| | Д | Ст 3 | 1,9 | 2 швеллера № 20 | – | 7 | – | 50 |
| | Е | Ст 3 | 2 | 2 двутавра № 24 | – | 8 | – | 60 |
| 14 | А | дерево | 1,3 | $b \times h$=19×30 | – | 20 | 3 | – |
| | Б | Ст 3 | 1,4 | двутавр № 40 | – | 40 | 4 | – |
| | В | Ст 3 | 1,5 | швеллер № 30 | – | 60 | 5 | – |
| | Г | Ст 3 | 1,6 | 2 швеллера № 16 | – | 50 | 6 | – |
| | Д | Ст 3 | 1,7 | 2 швеллера № 20 | – | 60 | 7 | – |
| | Е | Ст 3 | 1,8 | 2 двутавра № 18 | – | 70 | 8 | – |
| 15 | А | дерево | 1,4 | $b \times h$=17×32 | – | 1 | 40 | – |
| | Б | Ст 3 | 1,6 | двутавр № 24 | – | 2 | 50 | – |
| | В | Ст 3 | 1,8 | швеллер № 20 | – | 3 | 60 | – |
| | Г | Ст 3 | 1,9 | 2 швеллера № 22 | – | 4 | 70 | – |
| | Д | Ст 3 | 2,1 | 2 швеллера № 18 | – | 5 | 80 | – |
| | Е | Ст 3 | 2,2 | 2 двутавра № 20 | – | 6 | 60 | – |
| 16 | А | дерево | 1,6 | $b \times h$=19×32 | – | – | 2 | 20 |
| | Б | Ст 3 | 1,7 | двутавр № 22 | – | – | 3 | 30 |
| | В | Ст 3 | 1,9 | швеллер № 27 | – | – | 4 | 40 |
| | Г | Ст 3 | 1,8 | 2 швеллера № 16 | – | – | 5 | 50 |
| | Д | Ст 3 | 2,3 | 2 швеллера № 20 | – | – | 6 | 40 |
| | Е | Ст 3 | 2,4 | 2 двутавра № 22 | – | – | 7 | 50 |

Таблица 6.2

**Схемы закрепления и нагружения балок**

| Номер схемы | Схема балки |
|---|---|
| 1 |   |
| 2 |   |
| 3 |   |
| 4 |   |
| 5 |   |

Продолжение табл. 6.2

| Номер схемы | Схема балки |
|---|---|
| 6 |   |
| 7 |   |
| 8 |   |
| 9 |   |
| 10 |   |
| 11 |   |

Окончание табл. 6.2

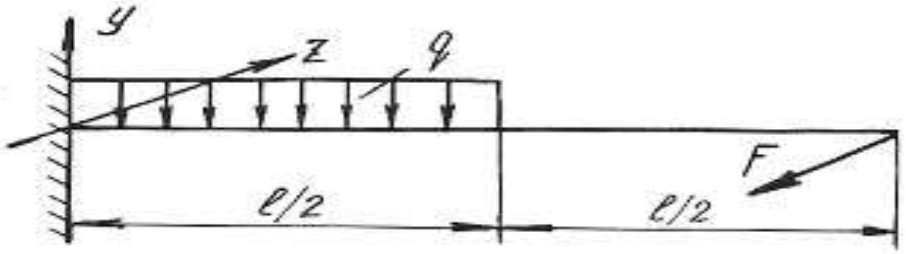
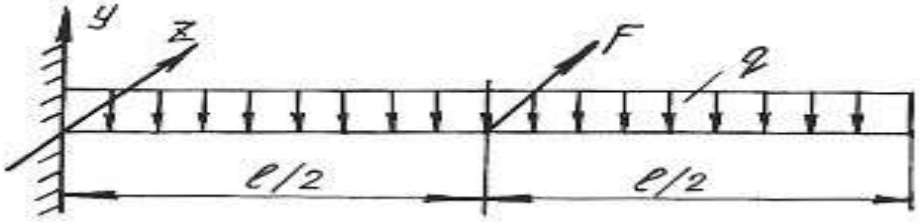
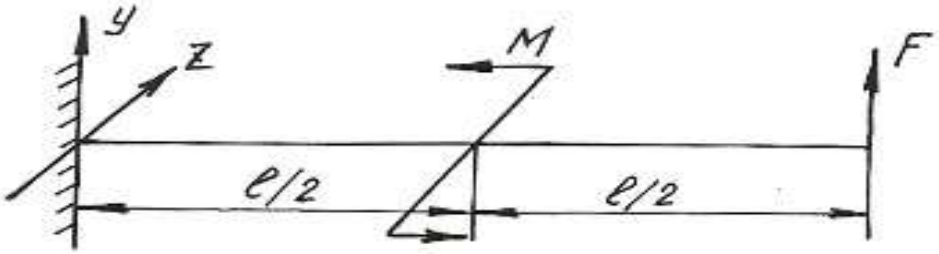
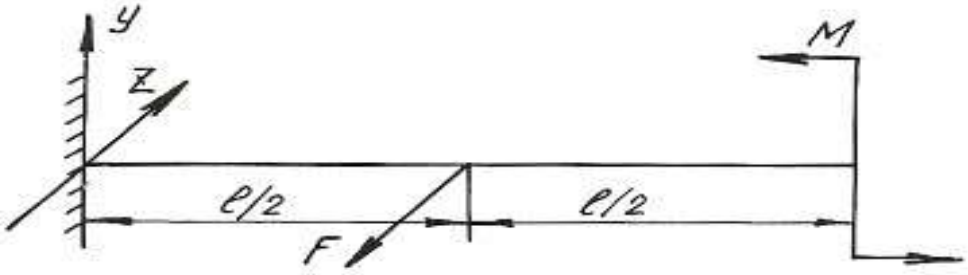
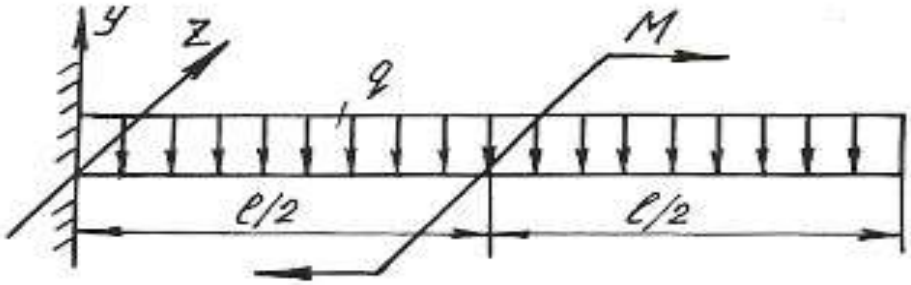
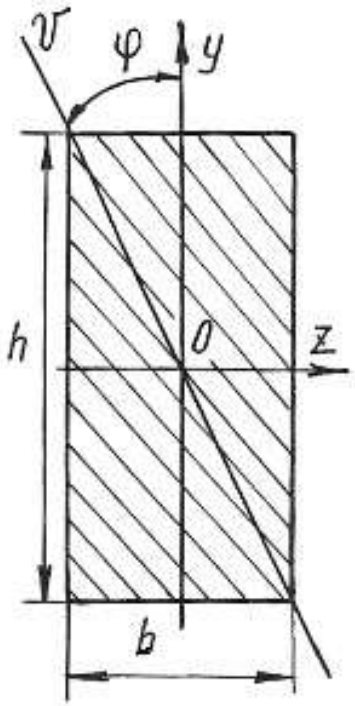
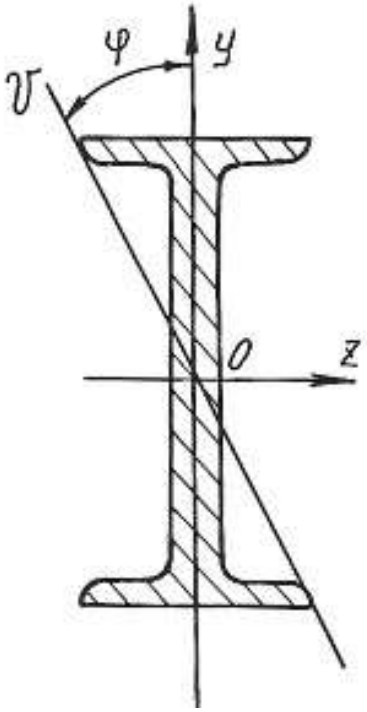
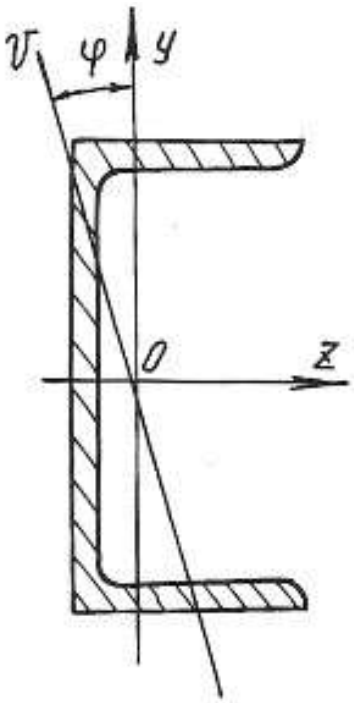
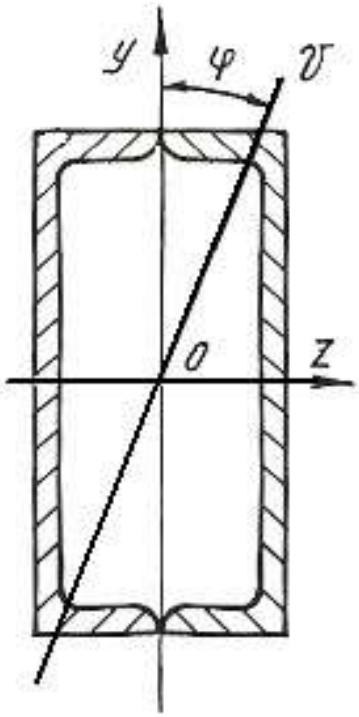
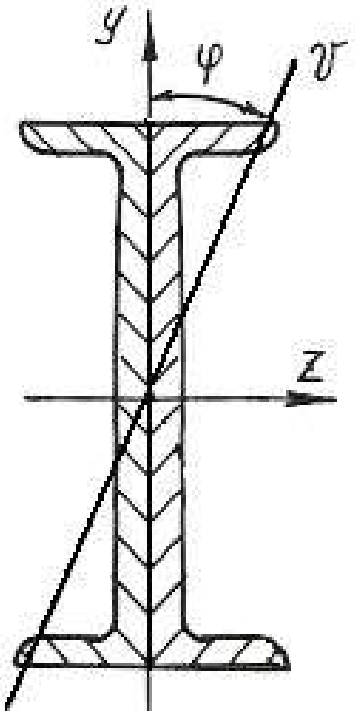
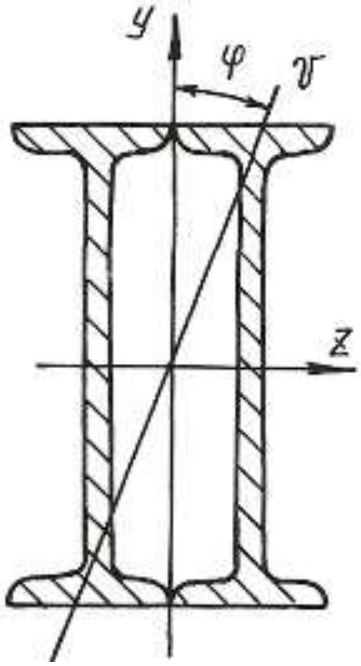
| Номер схемы | Схема балки |
|---|---|
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |

Таблица 6.3

**Схемы поперечных сечений балок**

| А | Б | В |
|---|---|---|
|  |  |  |
| **Г** | **Д** | **Е** |
|  |  |  |

## 6.3. Внецентренное растяжение или сжатие

Если действующая на брус продольная растягивающая или сжимающая сила приложена на некотором расстоянии от центра тяжести сечения, то возникает внецентренное растяжение или сжатие. Расстояние между точкой приложения силы и центром тяжести сечения бруса называется эксцентриситетом. Для практики весьма важны случаи внецентренного сжатия, например, для каменных и кирпичных столбов, бетонных колонн и др.

Внецентренное приложение сжимающей силы можно привести к случаю сжатия центральной силой $F$ и чистому изгибу моментом $M = Fe$, если перенести силу $F$ в центр тяжести поперечного сечения и уравновесить ее (рис. 6.5).

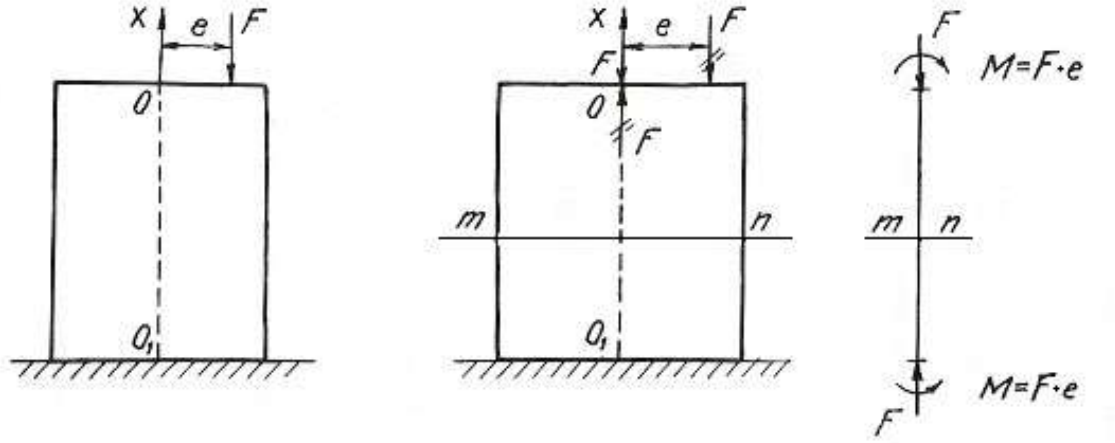



Рис. 6.5.

Так как изгибающий момент во всех сечениях постоянен, то проверку прочности можно производить по любому сечению бруса. Если отбросить верхнюю часть бруса по сечению *m-n* и рассмотреть нижнюю **(**рис. 6.6**),** то для любой точки $A$ поперечного сечения с координатами $y$, $z$ нормальное напряжение будет равно алгебраической сумме напряжений

$$\sigma_A = \sigma_F + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}, \qquad (6.7)$$

где $\sigma_F = -\dfrac{F}{A}$ – напряжение от сжимающей центрально приложенной силы $F$;

$\sigma_{M_y} = -M_y \dfrac{z}{J_y}$ – напряжение от изгибающего момента относительно главной оси сечения $y$; $\sigma_{M_z} = -M_z \dfrac{y}{J_z}$ – напряжение от изгибающего момента относительно главной оси сечения $z$.

Знак минус указывает на то, что данные нагрузки вызывают в точке $A$ деформацию сжатия.

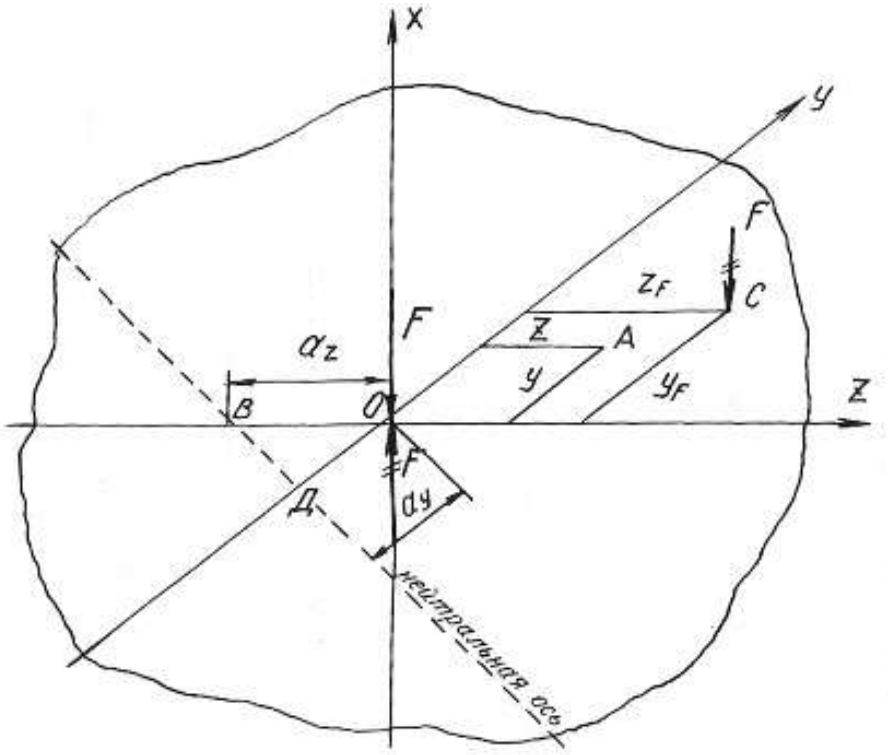



Рис. 6.6.

Изгибающие моменты определяются

$$M_y = Fz_F; \qquad M_z = Fy_F;$$

где $z_F$ и $y_F$ - координаты точки $C$ приложения силы $F$.

После подстановки имеем:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} - Fz_F \frac{z}{J_y} - Fy_F \frac{y}{J_z}.$$

Окончательный вид формулы для определения напряжений в любой точке поперечного сечения получаем после простых преобразований

$$\sigma = F\left( \pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z}{J_y} \pm y_F \frac{y}{J_z} \right), \tag{6.8}$$

где $J_y, J_z$ – моменты инерции поперечного сечения; $y_F, z_F$ – координаты точки приложения силы $F$.

У каждого из слагаемых данного уравнения знак плюс берется для растягивающего, а знак минус – для сжимающего напряжения.

Условие прочности при внецентренном растяжении или сжатии имеет вид:

$$\sigma_{\max} = F\left(\pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z_{\max}}{J_y} \pm y_F \frac{y_{\max}}{J_z}\right) \le \sigma_{\text{adm}}, \qquad (6.9)$$

где $z_{\max}$, $y_{\max}$ – координаты наиболее удаленных точек сечения от его центра тяжести.

Уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении или сжатии имеет вид:

$$\pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z_0}{J_y} \pm y_F \frac{y_0}{J_z} = 0, \qquad (6.10)$$

где $z_0$, $y_0$ – координаты точек, лежащих на нейтральной оси.

Это уравнение является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Величины отрезков, отсекаемых на координатных осях $y$ и $z$ нейтральной осью, определяются из уравнения:

$$\pm 1 \pm z_F \frac{a_z}{i_y^2} \pm y_F \frac{a_y}{i_z^2} = 0, \qquad (6.11)$$

где $a_z = z_0$, $a_y = y_0$ - отрезки, определяющие положение нейтральной оси.

Величины отрезков определяются по формулам:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \qquad (6.12)$$

где $i_z$, $i_y$ - радиусы инерции поперечного сечения относительно осей $y$ и $z$.

Знак минус в этих формулах указывает на то, что нейтральная ось располагается по другую сторону центра тяжести сечения, по сравнению с точкой приложения силы $F$, действующей на брус.

Если поперечное сечение имеет сложную форму, то необходимо найти центр тяжести сечения, положение главных центральных осей и главные моменты инерции, пользуясь формулами и указаниями, приведенными в главе 2. В формулы, содержащие моменты инерции, необходимо подставлять значения главных моментов инерции сечения.

**Пример 6.3.**

Короткий чугунный стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 6.7, сжимается продольной силой $F$, приложенной в точке $A$**.**

Требуется:

1. Вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через $F$ и размеры сечений.

2. Найти допускаемую нагрузку $F$ при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $\sigma^{c}_{adm}$ и на растяжение $\sigma^{p}_{adm}$: $\sigma^{c}_{adm} = 110$ МПа, $\sigma^{p}_{adm} = 24$ МПа.

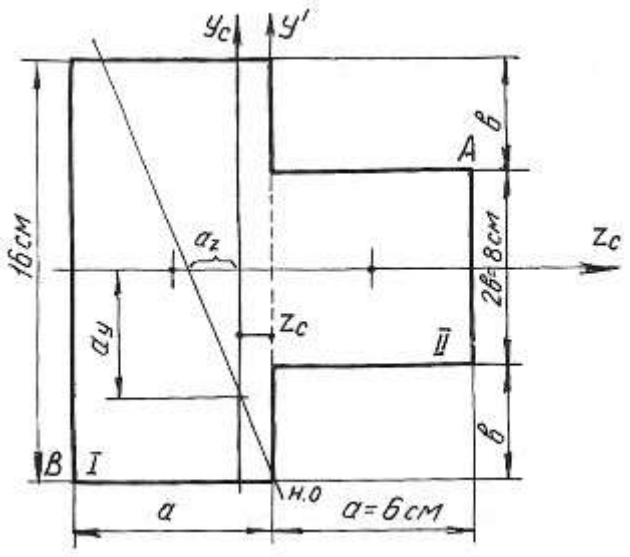



Рис. 6.7.

Определяем координату центра тяжести сечения. Проведем вспомогательную ось $y'$:

$$z_c = \frac{\sum Sy'}{\sum A} = \frac{(A_1 z_1 + A_2 z_2)}{A_1 + A_2} = \frac{[16 \cdot 6 \cdot (-3) + 6 \cdot 8 \cdot 3]}{16 \cdot 6 + 6 \cdot 8} = \frac{-144}{144} = -1 \text{ см}.$$

Для определения положения нейтральной оси находим геометрические характеристики сечения.

Моменты инерции:

$$J_{y_c} = 16\frac{6^3}{12} + 6 \cdot 16 \cdot 2^2 + 8 \cdot \frac{6^3}{12} + 6 \cdot 8 \cdot 4^2 = 1584 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_c} = 16^3 \frac{6}{12} + 6\frac{8^3}{12} = 2304 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{1584}{144}} = \sqrt{11} = 3{,}31 \text{ см};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_{z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{2304}{144}} = \sqrt{16} = 4 \text{ см}.$$

Нейтральная ось пересекает оси $z_c$ и $y_c$ в точках:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; \qquad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad z_F = 7\,\text{см}; \quad y_F = 4\,\text{см}.$$

$$a_y = \frac{-4^2}{4} = -4\ \text{см}; \quad a_z = \frac{-3{,}31^2}{7} = -1{,}57\ \text{см}.$$

Максимальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, т. е. в точках *A* и *B*. Определяются они по формуле:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F z_F z_{\max}}{J_{y_c}} \pm \frac{F y_F y_{\max}}{J_{z_c}},$$

где $z_{\max}$, $y_{\max}$ – координаты точек *A* и *B*.

Наибольшее сжимающее напряжение:

$$\sigma_A = -F\left[\frac{1}{144} + 7\frac{7}{1584} + 4\frac{4}{2304}\right] = -0{,}044 \cdot F\,.$$

Наибольшее растягивающее напряжение:

$$\sigma_B = -F\left[\frac{1}{144} + 7\frac{(-5)}{1584} + 4\frac{(-8)}{2304}\right] = 0{,}028 \cdot F.$$

Находим допускаемую нагрузку:

$$\sigma_A \le \sigma^{\text{c}}_{\text{adm}} = 110\ \text{МПа}; \qquad 0{,}044 \cdot F \le 110; \quad F \le 0{,}25\ \text{МН}.$$

$$\sigma_B \le \sigma^{\text{p}}_{\text{adm}} = 24\ \text{МПа}; \qquad 0{,}028 \cdot F \le 24; \quad F \le 0{,}09\ \text{МН}.$$

Допускаемая нагрузка $F = 0{,}09$ МН.

## 6.4. Задания для расчета на внецентренное растяжение или сжатие

Колонна заданного поперечного сечения с известными размерами нагружена сжимающей силой $F$, приложенной вне центра тяжести сечения в указанной точке. Требуется:

1) Определить положение нейтральной оси;
2) Вычислить наибольшие напряжения в опасном сечении колонны;
3) Построить эпюры напряжений в опасном сечении.

Данные для расчета взять из таблиц 6.4, 6.5 и табл. П. 1.

Примечание: собственным весом колонны при расчетах пренебречь.

Таблица 6.4

| Вариант | Схема сечения | Материал | Размеры сечения, см | Точка приложения силы $F$ | Нагрузка $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | А | дерево | $b$ x $h$ = 15 x 25 | 1 | 20 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 16 | 2 | 30 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 16 | 3 | 40 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 14 | 4 | 50 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 12 | 5 | 60 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 14 | 6 | 70 |
| | Ж | чугун | $b$ = 20 | 7 | 35 |
| | З | чугун | $b$ x $h$ = 20 x 30, $D$ = 10 | 8 | 45 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 12, $a$ = 10 | 1 | 75 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 14, $a$ = 10 | 2 | 80 |
| 2 | А | дерево | $b$ x $h$ = 16 x 27 | 2 | 25 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 18 | 3 | 35 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 18 | 4 | 45 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 16 | 5 | 50 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 18 | 6 | 60 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 16 | 7 | 70 |
| | Ж | чугун | $b$ = 30 | 8 | 55 |
| | З | чугун | $b$ x $h$ = 25 x 35 , $D$ = 12 | 1 | 65 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 14, $a$ = 10 | 2 | 65 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 16, $a$ = 10 | 3 | 75 |

Продолжение табл. 6.4

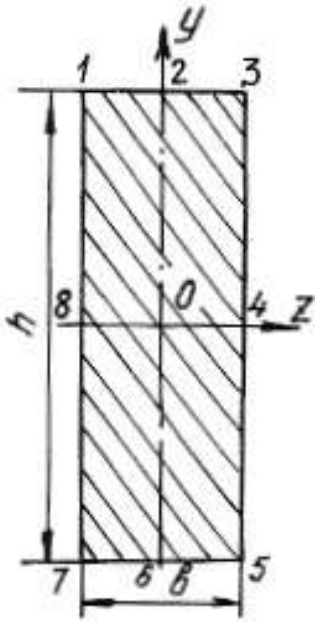
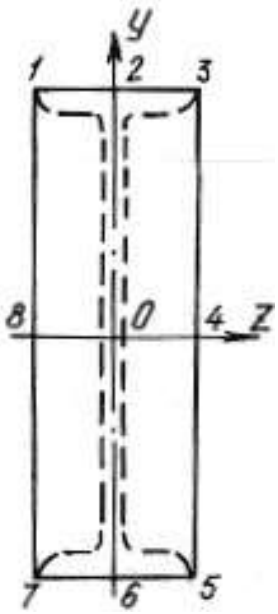
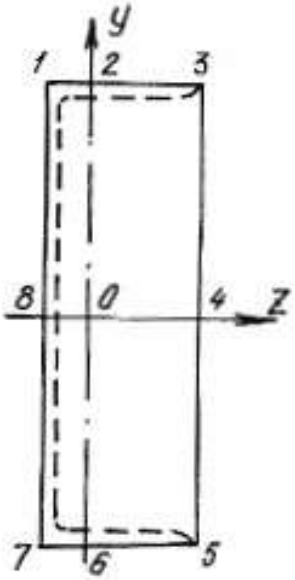
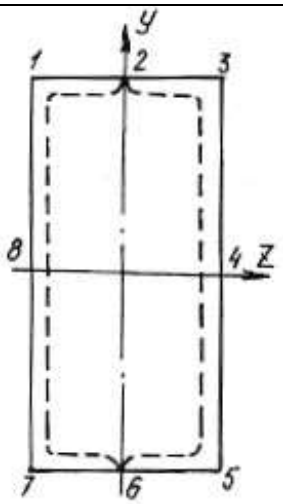
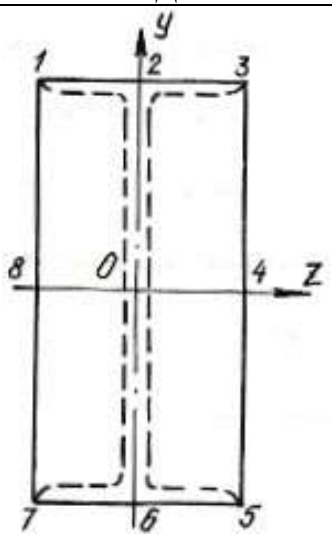
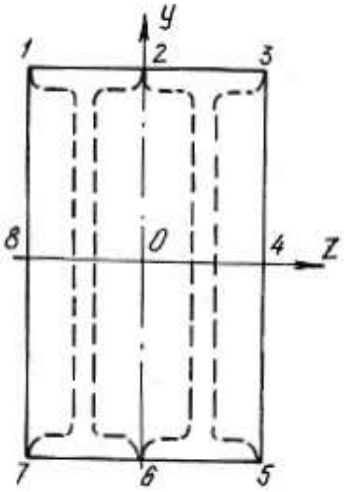
| Вариант | Схема сечения | Материал | Размеры сечения | Точка приложения силы $F$ | Нагрузка $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | А | дерево | $b$ х $h$ = 17 х 28 | 3 | 30 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 14 | 4 | 40 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 20 | 5 | 48 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 14 | 6 | 52 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 16 | 7 | 62 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 18 | 8 | 72 |
| | Ж | чугун | $b$ = 32 | 1 | 60 |
| | З | чугун | $b$ х $h$ = 24 х 32, $D$ = 8 | 2 | 70 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 18, $a$ = 14 | 3 | 66 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 12, $a$ = 8 | 4 | 74 |
| 4 | А | дерево | $b$ х $h$ = 18 х 36 | 4 | 40 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 20 | 5 | 44 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 20 | 6 | 54 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 18 | 7 | 64 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 16 | 8 | 74 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 14 | 1 | 46 |
| | Ж | чугун | $b$ = 34 | 2 | 38 |
| | З | чугун | $b$ х $h$ = 28 х 36, $D$ = 14 | 3 | 48 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 16, $a$ = 8 | 4 | 58 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 18, $a$ = 12 | 5 | 72 |
| 5 | А | дерево | $b$ х $h$ = 20 х 24 | 5 | 28 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 22 | 6 | 38 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 22 | 7 | 48 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 20 | 8 | 62 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 22 | 1 | 76 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 20 | 2 | 78 |
| | Ж | чугун | $b$ = 28 | 3 | 46 |
| | З | чугун | $b$ х $h$ = 22 х 34, $D$ = 6 | 4 | 56 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 20, $a$ = 6 | 5 | 80 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 20, $a$ = 12 | 6 | 82 |

Продолжение табл. 6.4

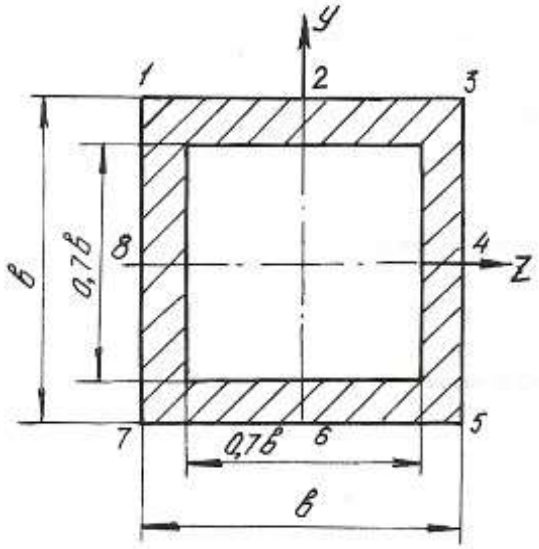
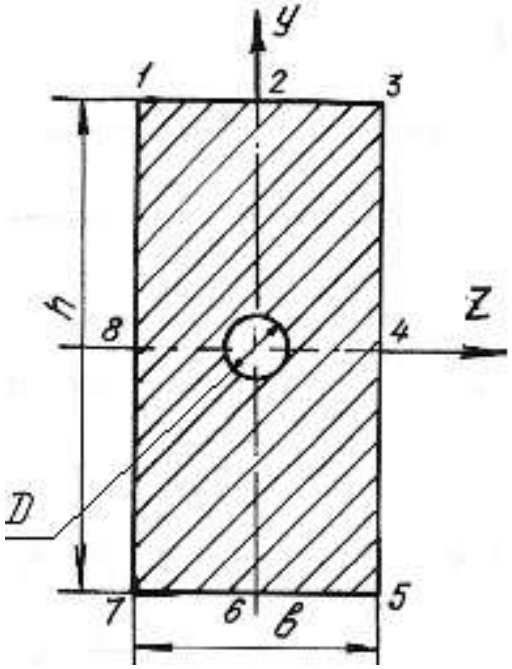
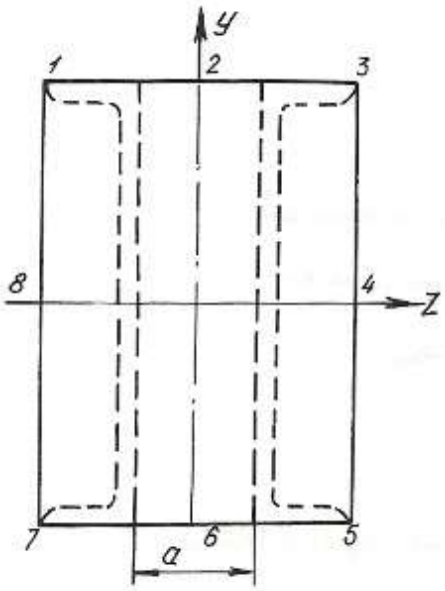
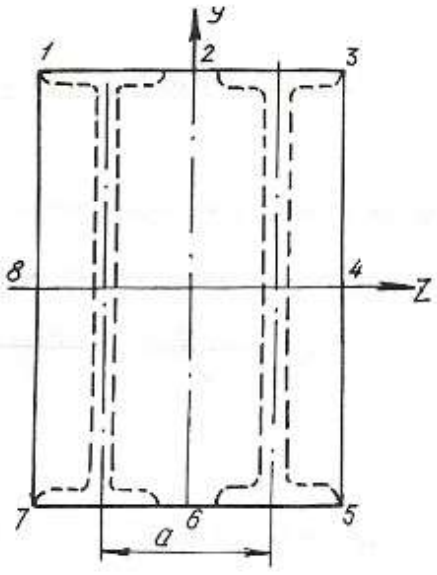
| Вариант | Схема сечения | Материал | Размеры сечения, см | Точка приложения силы $F$ | Нагрузка $F$, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | А | дерево | $b$ x $h$ = 22 x 38 | 6 | 36 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 22 | 7 | 46 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 22 | 8 | 48 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 22 | 1 | 68 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 20 | 2 | 72 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 22 | 3 | 74 |
| | Ж | чугун | $b$ = 24 | 4 | 50 |
| | З | чугун | $b$ x $h$ = 24 x 34, $D$ = 8 | 5 | 60 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 22, $a$ = 8 | 6 | 74 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 22, $a$ = 12 | 7 | 69 |
| 7 | А | дерево | $b$ x $h$ = 22 x 30 | 7 | 25 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 24 | 8 | 48 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 24 | 1 | 52 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 24 | 2 | 63 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 22 | 3 | 68 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 20 | 4 | 64 |
| | Ж | чугун | $b$ = 22 | 5 | 43 |
| | З | чугун | $b$ x $h$ = 26 x 36, $D$ = 6 | 6 | 49 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 24, $a$ = 4 | 7 | 78 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 24, $a$ = 13 | 8 | 84 |
| 8 | А | дерево | $b$ x $h$ = 18 x 32 | 8 | 35 |
| | Б | Ст 3 | двутавр № 27 | 1 | 62 |
| | В | Ст 3 | швеллер № 27 | 2 | 68 |
| | Г | Ст 3 | 2 швеллера № 22 | 3 | 85 |
| | Д | Ст 3 | 2 швеллера № 24 | 4 | 87 |
| | Е | Ст 3 | 2 двутавра № 22 | 5 | 78 |
| | Ж | чугун | $b$ = 26 | 6 | 52 |
| | З | чугун | $b$ x $h$ = 26 x 36, $D$ = 9 | 7 | 58 |
| | И | Ст 3 | 2 швеллера № 27, $a$ = 5 | 8 | 86 |
| | К | Ст 3 | 2 двутавра № 27, $a$ = 14 | 1 | 88 |

Таблица 6.5

**Схемы поперечных сечений колонны**

| А | Б | В |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Г | Д | Е |
|  |  |  |

Окончание табл. 6.5

| Ж | З |
|---|---|
|  |  |
| И | К |
|  |  |

## 6.5. Изгиб с кручением

Помимо крутящих моментов валы могут испытывать воздействие изгибающих моментов. Последние возникают от действия собственного веса вала, усилий натяжения приводных ремней, весов шкивов, усилий зацепления в зубьях зубчатых передач и т. п.

Крутящий момент на валу или его участке определяется по формулам:

$$T = 9550\frac{N}{n}, \tag{6.13}$$

где $T$ – крутящий момент, Нм; $N$ – мощность двигателя, кВт; $n$ – число оборотов вала в минуту, или

$$T = \frac{D}{2}\cdot(t_1 - t_1'), \tag{6.14}$$

где $D$ – диаметр ведущего шкива, соединенного с двигателем приводным ремнем; $t_1$ – усилие натяжения в набегающей ветви приводного ремня; $t_1'$ – усилие натяжения в сбегающей ветви приводного ремня.

Определив крутящий момент по формуле (6.13) и, зная соотношение между усилиями $t_1$ и $t_1'$, определяют эти усилия из формулы (6.14) при известном диаметре шкива. Если усилия $t_1$, $t_1'$ последовательно перенести в центр тяжести сечения вала и уравновесить их, то получим два момента пар сил, направленных в противоположные стороны. Равнодействующий момент этих моментов и будет равен крутящему моменту в том сечении, где находится шкив. Вместе с этим в центре этого сечения вала возникнет нагрузка, $S = t_1 + t_1'$, которая может быть направлена под углом к горизонту. В этом случае ее раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие: $S_y = S\cdot\sin\alpha$; $S_z = S\cdot\cos\alpha$.

При наличии на валу нескольких ведомых шкивов крутящие моменты и изгибающие нагрузки определяются аналогичным способом. Таким образом, вал будет испытывать одновременно деформацию кручения от крутящих моментов и деформацию поперечного изгиба в двух плоскостях – вертикальной и горизонтальной. Дальнейший расчет вала на изгиб с кручением осуществляется в таком порядке:

1. Строится эпюра крутящих моментов $T$.
2. Вычерчивается схема вала в виде балки на двух опорах и загружается только вертикальными изгибающими нагрузками. С помощью уравнений статики определяются реакции на опорах, и строится эпюра изгибающих моментов от этих нагрузок $M_{\text{и}}^{\text{в}}$.

3. Вал загружается только горизонтальными изгибающими нагрузками, от них определяются реакции на опорах, и строится эпюра изгибающих моментов от горизонтальных нагрузок $M_{\text{и}}^{\text{г}}$.

4. В характерных сечениях вала определяются суммарные изгибающие моменты в виде геометрической суммы изгибающих моментов, возникающих в этих сечениях от вертикальных и горизонтальных нагрузок: $M_{\text{и}} = \sqrt{(M_{\text{и}}^{\text{в}})^2 + (M_{\text{и}}^{\text{г}})^2}$. Строится суммарная эпюра изгибающих моментов $M_{\text{и}}$. При построении эпюр выбирается необходимый масштаб, и применяются знаки, принятые в сопротивлении материалов при построении эпюр крутящих и изгибающих моментов.

5. Выбирается опасное сечение по длине вала, где одновременно крутящий и суммарный моменты достаточно большие – на основании эпюр $M_{\text{и}}$ и $T$.

6. На основании третьей или четвертой теории прочности для опасного сечения определяется расчетный (эквивалентный) момент по формулам:

$$M_{\text{р}}^{\text{III}} = \sqrt{T^2 + M_{\text{и}}^2}; \quad M_{\text{р}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75T^2}. \tag{6.15}$$

7. Определяется диаметр сечения вала на основании условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{Р}}}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}}, \tag{6.16}$$

где $W_z = \dfrac{J_z}{d/2} = \pi \dfrac{d^4/64}{d/2} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ – момент сопротивления поперечного сечения вала изгибу.

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{Р}}}{\pi\sigma_{\text{adm}}}}. \tag{6.17}$$

Величина диаметра округляется до ближайшего целого.

**Пример 6.4.**

Шкив с диаметром $D_1$ и с углом наклона ветвей ремня к горизонту $\alpha_1$ делает $n$ оборотов в минуту и передает мощность $N$. Два других шкива имеют одинаковый диаметр $D_2$ и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту $\alpha_2$ и, каждый из них передает мощность $N/2$ **(**рис. 6.8).

Требуется:

1. Определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным $N$ и $n$ ;

2. Построить эпюру крутящих моментов $T$;

3. Определить окружные усилия $t_1$ и $t_2$ действующие на шкивы, по данным моментам и заданным диаметрам шкивов $D_1$ и $D_2$;

4. Принять $t_1 = 2 \cdot t_2$;

5. Определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);

6. Построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных и вертикальных сил $M_{\text{верт.}}$, $M_{\text{гор.}}$;

7. Построить эпюры суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{\text{и}} = \sqrt{M_{\text{гор}}{}^2 + M_{\text{верт}}{}^2}$;

8. При помощи эпюр $T$ и $M_{\text{и}}$ найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент (по третьей теории прочности);

9. Подобрать диаметр вала $d$ при $\sigma_{\text{adm}} = 70$ МПа и округлить его значение.

*Решение.*

1. Определяем крутящие моменты:

$$T_1 = \frac{9{,}55 \cdot N_1}{650} = \frac{9{,}55 \cdot 90}{650} = 1{,}32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{9{,}55 \cdot N_2}{n} = \frac{9{,}55 \cdot 45}{650} = 0{,}66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 6.8).

3. Определяем усилия натяжения в ветвях ремней:

$$t_1 = \frac{2 \cdot T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1{,}32}{1} = 2{,}64 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2 \cdot T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0{,}66}{0{,}6} = 2{,}2 \text{ кН}.$$

4. Определяем изгибающие нагрузки:

$$S_1 = t_1 + 2 \cdot t_2 = 7{,}92 \text{ кН}; \quad S_2 = t_2 + 2 \cdot t_2 = 6{,}60 \text{ кН}.$$

5. Определяем изгибающие нагрузки в вертикальной плоскости и реакции от этих нагрузок:

$$S_1^y = S_1 \cdot \sin\alpha_1 = 7{,}92 \cdot \sin 75^\circ = 7{,}92 \cdot 0{,}9659 = 7{,}65 \text{ кН};$$

$$S_2^y = S_2 \cdot \sin\alpha_2 = 6{,}6 \cdot \sin 80^\circ = 6{,}6 \cdot 0{,}9848 = 6{,}49 \text{ кН}.$$

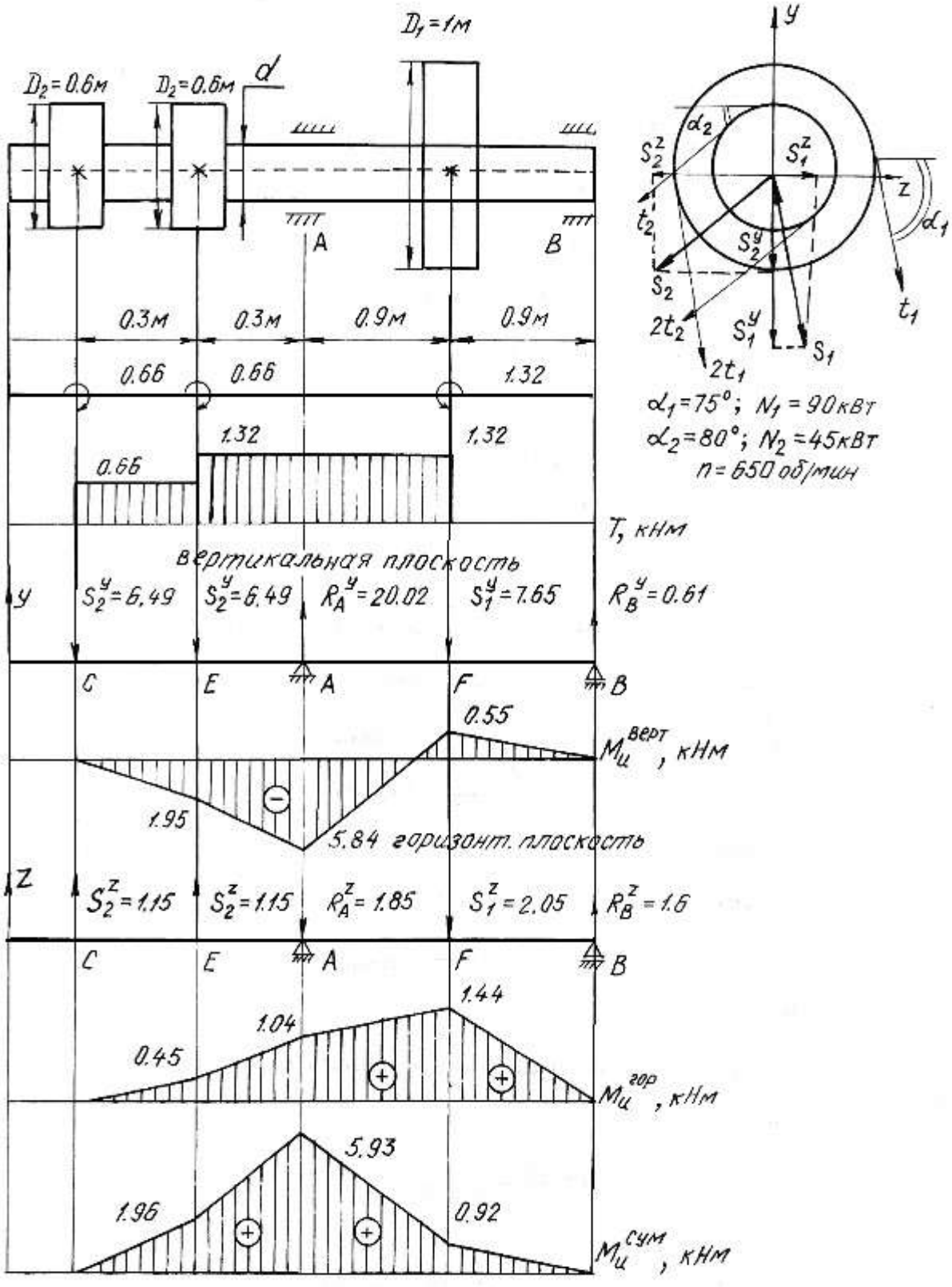

D1 = 1м
D2 = 0.6м
D2 = 0.6м
d
A
B
0.3м
0.3м
0.9м
0.9м
0.66
0.66
1.32
1.32
1.32
0.66
T, кНм
вертикальная плоскость
y
S2y = 6.49
S2y = 6.49
RAy = 20.02
S1y = 7.65
RBy = 0.61
C
E
A
F
B
0.55
Mцверт, кНм
1.95
5.84
горизонт. плоскость
z
S2z = 1.15
S2z = 1.15
RAz = 1.85
S1z = 2.05
RBz = 1.6
C
E
A
F
B
1.44
1.04
0.45
Mцгор, кНм
5.93
1.96
0.92
Mцсум, кНм
y
z
α2
S2z
S1z
t2
S2y
S2
2t2
S1y
S1
2t1
t1
α1
α1 = 75°; N1 = 90кВт
α2 = 80°; N2 = 45кВт
n = 650 об/мин

Рис. 6.8.

$$\sum M_A = 0; \quad S_2^y \cdot 0,6 - S_1^y \cdot 0,9 + R_B^y \cdot 1,8 + S_2^y \cdot 0,3 = 0;$$

$$6,49 \cdot 0,6 + 6,49 \cdot 0,3 - 7,65 \cdot 0,9 + R_B^y \cdot 1,8 = 0;$$

$$R_B^y = 0,61 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \; S_2^y \cdot 2,4 + S_2^y \cdot 2,1 - R_A^y \cdot 1,8 + S_1^y \cdot 0,9 = 0;$$

$$6,49 \cdot 2,4 + 6,49 \cdot 2,1 - R_A^y \cdot 1,8 + 7,65 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_A^y = 20,02 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; \quad -S_2^y - S_2^y + R_A^y - S_1^y + R_B^y = 0;$$

$$-6,49 - 6,49 + 20,02 - 7,65 + 0,61 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости:

$$M_{\text{и}}^E = -6,49 \cdot 0,3 = -1,95 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{и}}^A = -6,49 \cdot 0,6 - 6,49 \cdot 0,3 = -5,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{и}}^F = R_B^y \cdot 0,9 = 0,61 \cdot 0,9 = 0,55 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определяем изгибающие нагрузки в горизонтальной плоскости и реакции от этих нагрузок:

$$S_1^z = S_1 \cdot \cos\alpha_1 = 7,92 \cdot \cos 75^\circ = 2,05 \text{ кН};$$

$$S_2^z = S_2 \cdot \cos\alpha_2 = 6,6 \cdot \cos 80^\circ = 1,15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$S_2^z \cdot 0,6 - S_1^z \cdot 0,9 + R_B^z \cdot 1,8 - S_2^z \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_B^z = 1,6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$-S_2^z \cdot 2,4 - S_2^z \cdot 2,1 + R_A^z \cdot 1,8 + S_1^z \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_A^z = 1,85 \text{ кН}.$$

$$\sum Z = 0; \quad S_2^z + S_2^z - R_A^z - S_1^z + R_B^z = 0;$$

$$1,15 + 1,15 - 1,85 - 2,05 + 1,6 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости:

$$M_{\text{и}}^{E} = 1{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{A} = 1{,}15 \cdot 0{,}6 + 1{,}15 \cdot 0{,}3 = 1{,}04 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{F} = 1{,}6 \cdot 0{,}9 = 1{,}44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Строим эпюру суммарных изгибающих моментов:

$$M_{\text{и}}^{E} = \sqrt{1{,}95^2 + 0{,}45^2} = 1{,}96 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{A} = \sqrt{5{,}84^2 + 1{,}04^2} = 5{,}93 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{F} = \sqrt{0{,}55^2 + 1{,}44^2} = 0{,}92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

8. Опасным сечением будет сечение $A$:

$$M_{\text{и}}^{A} = 5{,}93 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad T = 1{,}32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетный момент для сечения $A$:

$$M_{\text{р}}^{\text{III}} = \sqrt{5{,}93^2 + 1{,}32^2} = 6{,}08 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Определяем диаметр сечения вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{р}}}{\pi\sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}08 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 70}} = 0{,}096 \text{ м} = 96 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 100$ мм.

### 6.6. Задания для расчета на изгиб с кручением

Трансмиссионный вал делает $n$ оборотов в минуту при мощности $N$. На шкив с диаметром $D_1$ с углом наклона ремней ветвей ремня к горизонту $\alpha_1$ передается мощность $N$ кВт от электродвигателя. Два других шкива имеют одинаковый диаметр $D_2$ и одинаковые углы $\alpha_2$ наклона ветвей ремня к горизонту, и каждый из них передает мощность $0{,}5N$ на станки. Для заданной расчетной схемы и данных размеров и нагрузок требуется:

1) определить окружные моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам $N$ и $n$;

2) построить эпюру крутящих моментов $T$;

3) определить окружные усилия, действующие на шкивы;

4) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкива и вала не учитывать);

5) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{\text{гор}}$ и от вертикальных сил $M_{\text{верт}}$;

6) построить эпюру суммарных изгибающих моментов;

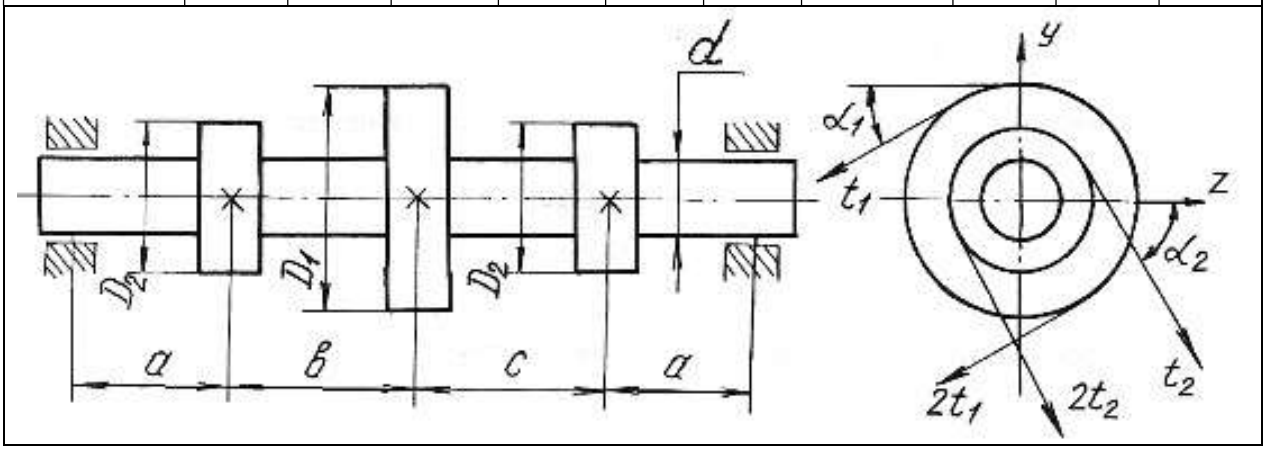
7) найти опасное сечение и определить величину максимально-расчетного момента по третьей теории прочности;

8) подобрать диаметр сечения вала при $\sigma_{adm}$=80 МПа.

Данные для расчета и схемы взять из табл. 6.6.

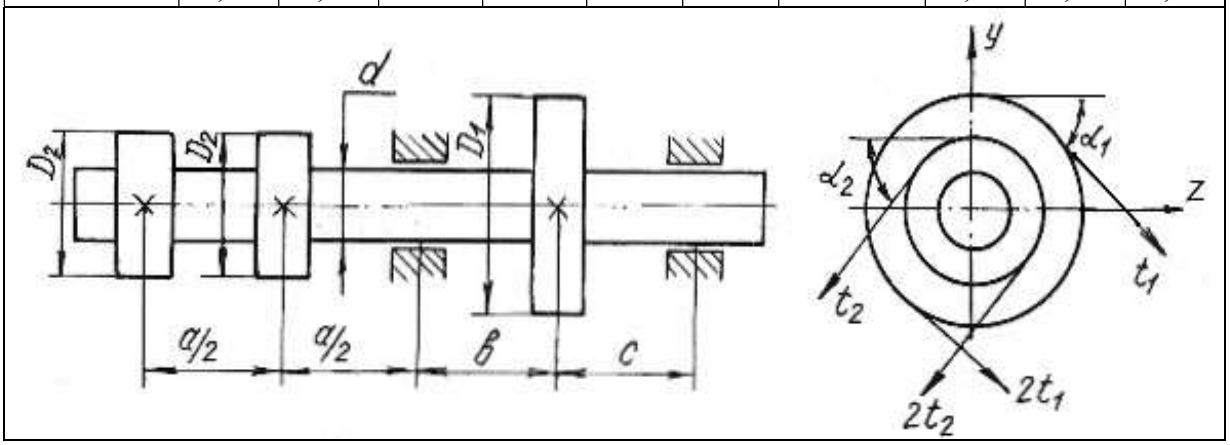
Таблица 6.6

| Номер варианта | Числовые значения | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
| 1 | 1,00 | 0,30 | 45 | 40 | 30 | 15 | 250 | 0,50 | 1,00 | 1,00 |
| 2 | 0,80 | 0,40 | 15 | 10 | 40 | 20 | 200 | 0,50 | 1,30 | 1,20 |
| 3 | 1,00 | 0,40 | 30 | 35 | 30 | 15 | 250 | 0,40 | 1,25 | 2,00 |
| 4 | 1,20 | 0,50 | 60 | 55 | 50 | 25 | 200 | 0,40 | 1,00 | 2,50 |
| 5 | 1,40 | 0,40 | 45 | 45 | 60 | 30 | 300 | 0,60 | 1,20 | 1,80 |



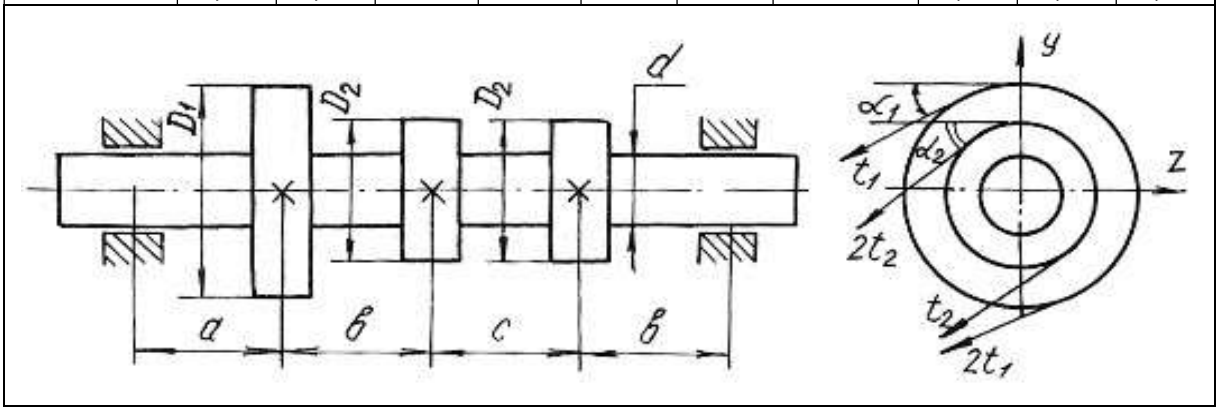
Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1,00 | 0,30 | 45 | 40 | 70 | 35 | 400 | 0,70 | 1,20 | 1,30 |
| 7 | 0,90 | 0,60 | 55 | 50 | 75 | 38 | 400 | 0,50 | 1,00 | 1,00 |
| 8 | 1,00 | 0,70 | 60 | 35 | 80 | 40 | 500 | 0,60 | 1,00 | 1,10 |
| 9 | 1,20 | 0,80 | 65 | 30 | 85 | 42 | 550 | 0,70 | 1,10 | 1,20 |
| 10 | 1,20 | 0,90 | 70 | 45 | 90 | 45 | 600 | 0,70 | 1,00 | 1,00 |



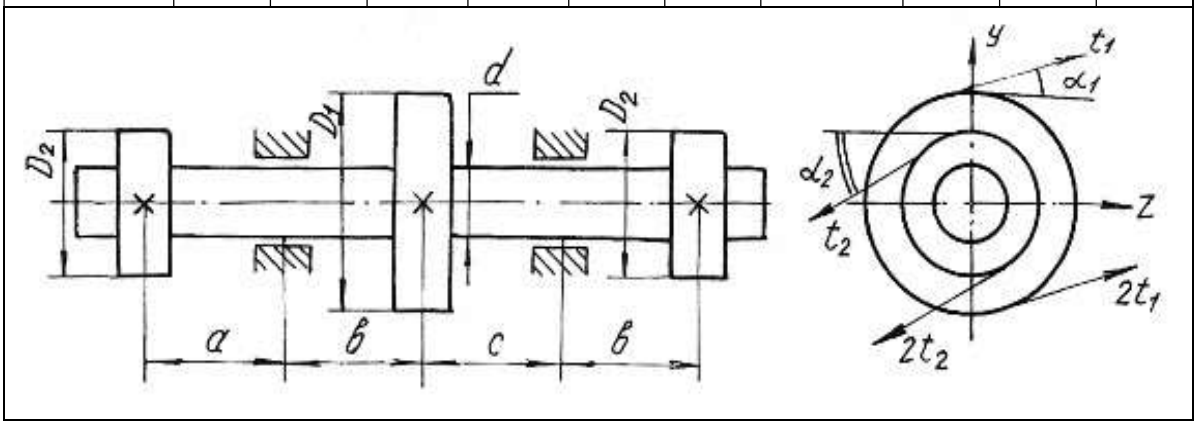

Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 1,00 | 0,60 | 75 | 80 | 90 | 45 | 650 | 0,60 | 0,90 | 0,90 |
| 12 | 1,20 | 0,80 | 80 | 75 | 100 | 50 | 700 | 0,50 | 1,00 | 1,00 |
| 13 | 1,20 | 0,70 | 85 | 30 | 110 | 55 | 750 | 0,60 | 1,10 | 1,20 |
| 14 | 1,20 | 0,60 | 30 | 85 | 120 | 60 | 800 | 0,50 | 1,00 | 1,00 |
| 15 | 1,00 | 0,80 | 35 | 40 | 130 | 65 | 360 | 0,60 | 1,20 | 1,00 |



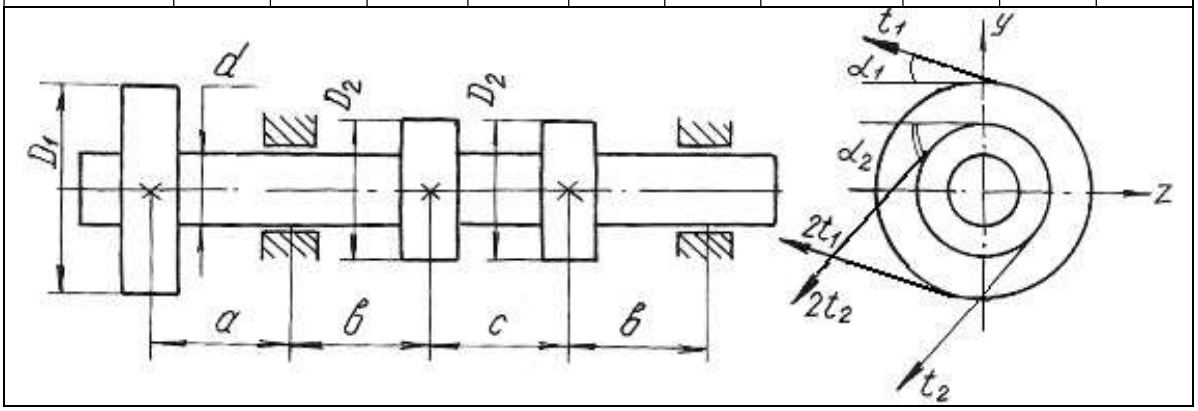
Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 1,20 | 0,60 | 40 | 35 | 140 | 70 | 400 | 0,50 | 1,00 | 1,00 |
| 17 | 1,40 | 0,70 | 45 | 50 | 150 | 75 | 450 | 0,50 | 0,50 | 1,00 |
| 18 | 1,20 | 0,60 | 50 | 45 | 160 | 80 | 500 | 0,60 | 1,00 | 1,00 |
| 19 | 1,20 | 0,70 | 60 | 65 | 170 | 85 | 550 | 0,50 | 0,90 | 0,90 |
| 20 | 1,00 | 0,60 | 65 | 60 | 180 | 90 | 600 | 0,60 | 1,00 | 0,90 |



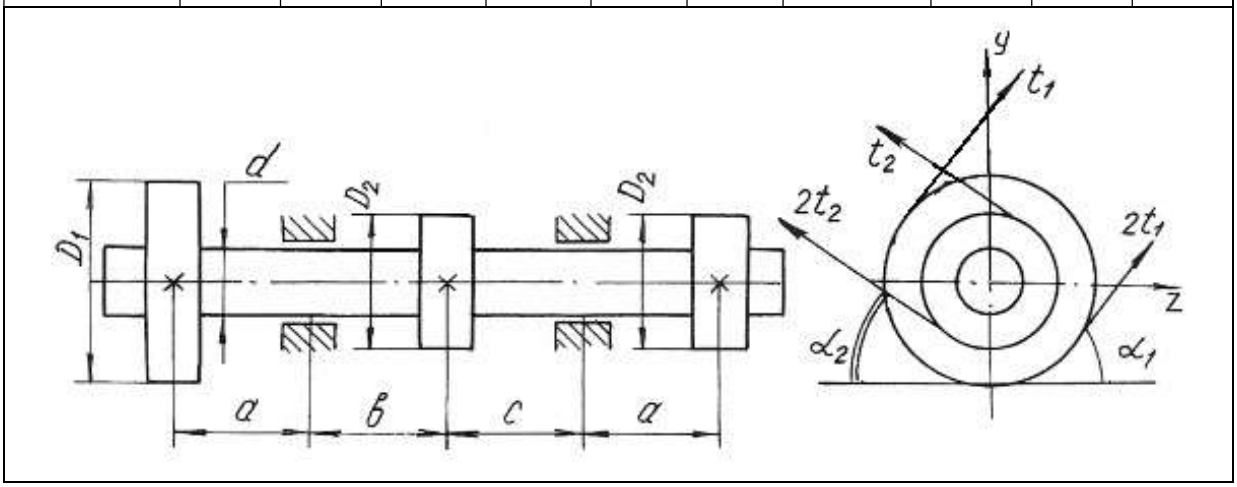

Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 1,20 | 0,80 | 15 | 25 | 30 | 15 | 250 | 1,00 | 0,80 | 1,20 |
| 22 | 1,00 | 0,60 | 25 | 15 | 40 | 20 | 280 | 1,20 | 1,20 | 1,30 |
| 23 | 0,80 | 0,50 | 30 | 45 | 50 | 25 | 300 | 1,30 | 1,30 | 1,40 |
| 24 | 1,00 | 0,65 | 45 | 60 | 60 | 30 | 450 | 1,25 | 1,40 | 1,50 |
| 25 | 1,20 | 0,75 | 60 | 30 | 70 | 35 | 500 | 1,40 | 1,00 | 1,60 |



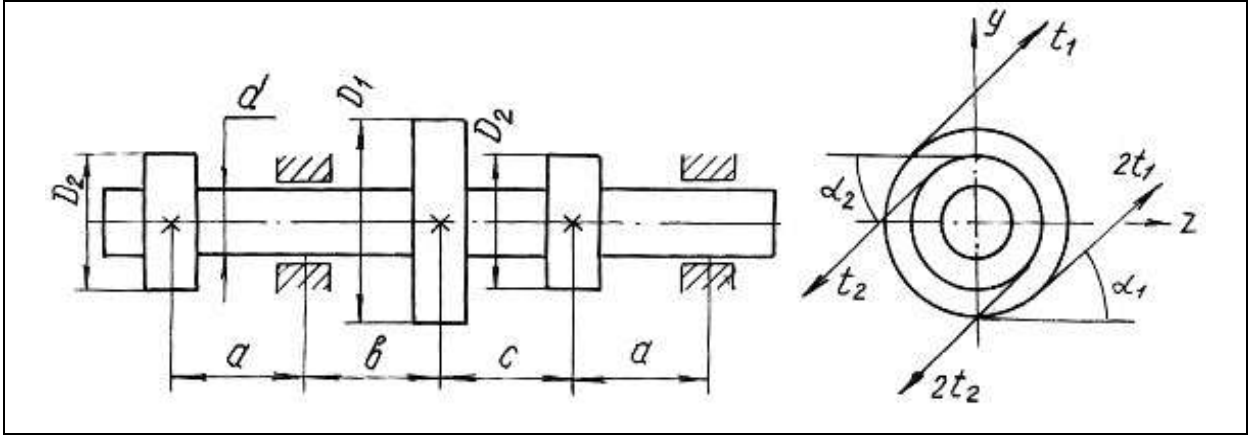
Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 1,20 | 0,80 | 75 | 15 | 60 | 30 | 500 | 1,20 | 1,20 | 1,40 |
| 27 | 1,00 | 0,90 | 30 | 45 | 64 | 32 | 550 | 1,00 | 0,80 | 1,00 |
| 28 | 0,90 | 0,80 | 35 | 55 | 70 | 35 | 600 | 0,60 | 1,00 | 0,90 |
| 29 | 0,80 | 0,70 | 40 | 50 | 74 | 37 | 650 | 0,60 | 0,90 | 0,80 |
| 30 | 1,10 | 0,75 | 55 | 65 | 80 | 40 | 700 | 0,80 | 1,00 | 0,65 |



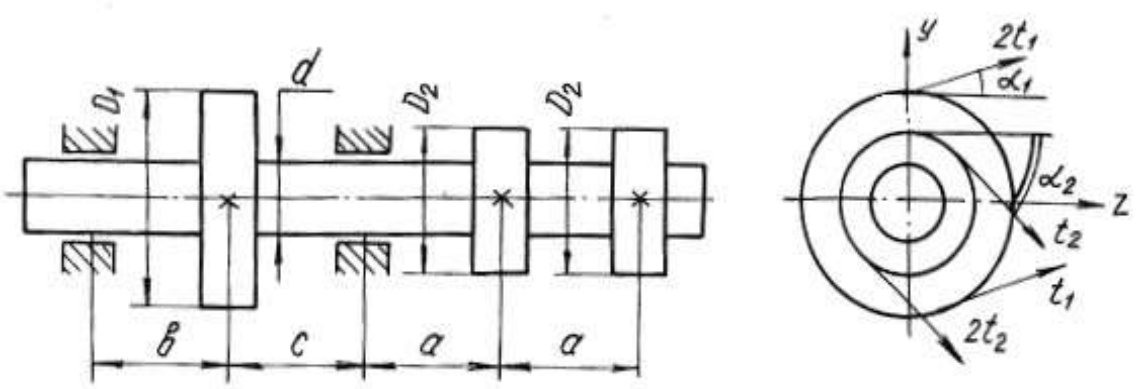

Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 1,10 | 0,75 | 45 | 45 | 170 | 85 | 500 | 1,00 | 0,90 | 1,10 |
| 32 | 1,20 | 0,90 | 60 | 30 | 90 | 45 | 400 | 0,90 | 1,00 | 0,80 |
| 33 | 0,90 | 0,70 | 75 | 15 | 95 | 47 | 450 | 0,80 | 0,90 | 1,00 |
| 34 | 1,00 | 0,80 | 30 | 45 | 100 | 50 | 500 | 1,00 | 1,20 | 0,90 |
| 35 | 1,20 | 0,90 | 25 | 15 | 110 | 55 | 550 | 0,90 | 1,00 | 1,20 |



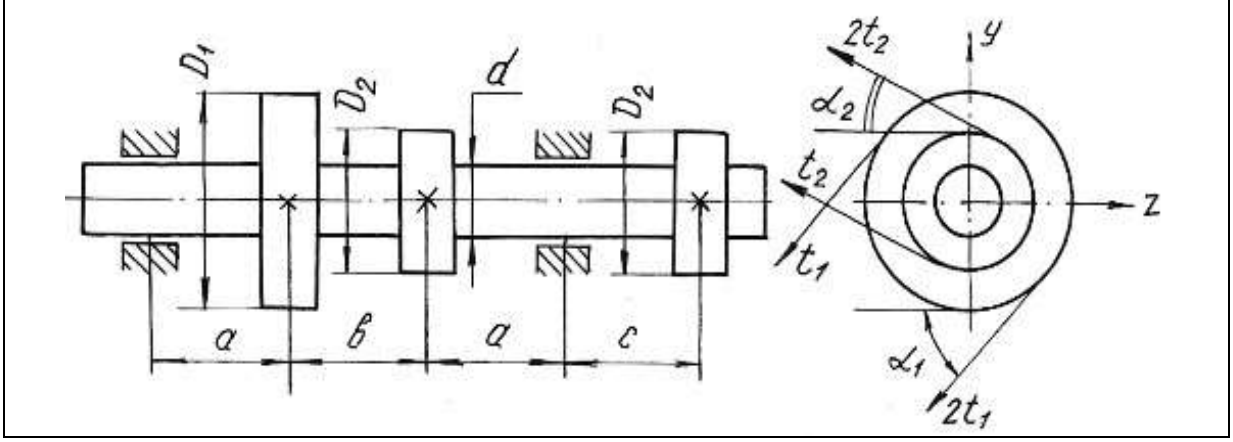
Продолжение табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 1,00 | 0,80 | 30 | 20 | 120 | 60 | 600 | 0,80 | 1,20 | 0,90 |
| 37 | 1,20 | 0,90 | 35 | 45 | 130 | 65 | 650 | 1,00 | 0,80 | 0,90 |
| 38 | 1,10 | 0,80 | 60 | 50 | 140 | 70 | 700 | 0,90 | 1,00 | 0,90 |
| 39 | 1,00 | 0,70 | 75 | 15 | 150 | 75 | 300 | 0,80 | 1,00 | 0,70 |
| 40 | 1,00 | 0,60 | 60 | 40 | 160 | 80 | 300 | 1,00 | 1,20 | 1,30 |




Окончание табл. 6.6

| Номер варианта | $D_1$, м | $D_2$, м | $\alpha_1$, град | $\alpha_2$, град | $N_1$, кВт | $N_2$, кВт | $n$, об/мин | $a$, м | $b$, м | $c$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 1,00 | 0,40 | 40 | 20 | 40 | 20 | 200 | 0,50 | 1,00 | 0,40 |
| 42 | 0,80 | 0,50 | 45 | 25 | 50 | 25 | 250 | 0,40 | 1,10 | 0,50 |
| 43 | 1,00 | 0,60 | 50 | 30 | 60 | 30 | 300 | 0,60 | 0,90 | 0,40 |
| 44 | 1,20 | 0,80 | 55 | 35 | 70 | 35 | 200 | 0,40 | 1,00 | 0,60 |
| 45 | 1,10 | 0,50 | 60 | 40 | 80 | 40 | 350 | 0,70 | 1,20 | 0,70 |



# Глава 7

# УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКИХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Стержни, длина которых относительно невелика по сравнению с их поперечными размерами, рассчитываются на сжатие, исходя из условия прочности:

$$\frac{F}{A} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

При этом полагается, что вплоть до разрушения стержень работает на осевое сжатие и продольная ось его остаётся прямолинейной.

Иная картина наблюдается при сжатии стержней, длина которых значительно больше размеров поперечного сечения. В этих случаях прямолинейная продольная ось стержней может искривляться. Искривление происходит в плоскости наименьшей жесткости стержня.

Деформация, которая возникает при сжатии стерня и сопровождается искривлением продольной оси стержня, называется продольным изгибом, а переход прямолинейной формы продольной оси стержня в криволинейную носит название потери устойчивости. Нагрузка, при которой стержень теряет устойчивость, называется критической силой $F_{cr}$.

Напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня от критической силы, называется критическим напряжением $\sigma_{cr}$.

Критические напряжения весьма опасны для сжатых стержней, поэтому необходимо проводить расчёты на устойчивость.

Для стержней, закрепленных на одной или двух опорах, величина критической силы может быть определена по формуле Эйлера:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, J_{\min}}{(\mu l)^2}, \qquad (7.1)$$

где $E$ − модуль продольной упругости материала; $J_{\min}$ − минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня; $l$ − длина стержня; $\mu$ − коэффициент приведенной длины стержня, отражающий способ закрепления концов стержня (рис. 7.1); $\mu l$ − приведенная длина стержня.

Критические напряжения

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \qquad (7.2)$$

где $\lambda$ − гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \tag{7.3}$$

где $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}, \tag{7.4}$$

Формула Эйлера применима для стержней с гибкостью более гибкости, предельной для данного материала стержня

$$\lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}, \tag{7.5}$$

где $\sigma_{pr}$ – предел пропорциональности материала стержня (напряжение, при котором сохраняется прямая пропорциональность между $\sigma$ и $\varepsilon$).

Для расчёта сжатых стержней любой гибкости применяется способ, основанный на применении коэффициентов $\varphi$. Этот способ расчёта сжатых стержней на устойчивость сводится к расчёту стержня как бы на простое сжатие, только по заниженному допускаемому напряжению с использованием формулы:

$$\sigma^{\text{у}}_{\text{adm}} = \varphi\, \sigma_{\text{adm}}, \tag{7.6}$$

где $\sigma^{\text{у}}_{\text{adm}}$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость; $\varphi$ – коэффициент продольного изгиба (коэффициент понижения основного допускаемого напряжения $\sigma_{\text{adm}}$ на простое сжатие), значения коэффициентов $\varphi$ для различных материалов приведены в табл. 7.1.

Величина допускаемой нагрузки на устойчивость $F^{\text{у}}_{\text{adm}}$ сжатого стержня соответственно будет равна

$$F^{\text{у}}_{\text{adm}} = \sigma^{\text{у}}_{\text{adm}} A = \varphi \sigma_{\text{adm}} A, \tag{7.7}$$

где $A$ – площадь поперечного сечения сжатого стержня.

Между критической и допускаемой нагрузкой на устойчивость существует следующая связь

$$F_{cr} = K_{\text{у}} F^{\text{у}}_{\text{adm}}, \tag{7.8}$$

где $K_{\text{у}}$ – коэффициент запаса на устойчивость.

Таблица 7.1

| Гибкость, λ | Значение коэффициента φ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Материал | | | | |
| | Ст. 4, Ст. 3 | Ст. 5 | Ст. СПБ | чугун | дерево |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,89 | 0,87 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,86 | 0,83 | 0,57 | 0,8 |
| 60 | 0,86 | 0,82 | 0,79 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,76 | 0,72 | 0,34 | 0,6 |
| 80 | 0,75 | 0,7 | 0,65 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,62 | 0,55 | 0,2 | 0,38 |
| 100 | 0,6 | 0,51 | 0,43 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | 0,35 | – | 0,25 |
| 120 | 0,45 | 0,36 | 0,3 | – | 0,22 |
| 130 | 0,4 | 0,33 | 0,26 | – | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,29 | 0,23 | – | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,26 | 0,21 | – | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,24 | 0,19 | – | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | 0,17 | – | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | 0,15 | – | 0,1 |
| 190 | 0,21 | 0,17 | 0,14 | – | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,16 | 0,13 | – | 0,08 |

В зависимости от исходных данных для расчета на устойчивость решение сводится к определению допускаемой нагрузки $F_{\text{adm}}^{\text{у}}$ из условий устойчивости сжатого стержня или к подбору площади поперечного сечения сжатого стержня.

Рассмотрим возможные варианты решения на устойчивость сжатых стержней с помощью коэффициента φ на следующих примерах.

**Пример 7.1.**

Определить допускаемую нагрузку для стойки, изготовленной из Ст. 3 в виде трубы с наружным диаметром $d_1 = 0{,}04$ м и внутренним $d_2 = 0{,}03$ м, длиной $l = 1$ м. Концы стойки защемлены. Допускаемое напряжение для материала стержня $\sigma_{\text{adm}} = 120$ МПа, предел пропорциональности материала $\sigma_{pr} = 200$ МПа. Коэффициент запаса на устойчивость $K_{\text{у}} = 2$. Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

*Решение.*

Выявим возможность решения данной задачи с помощью формулы Эйлера. Для этого находим предельную гибкость для данного материала стойки

$$\lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}5.$$

Для определения действительной гибкости данной стойки находим минимальный момент инерции поперечного сечения

$$J_{\min} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) = \frac{3{,}14}{64}(0{,}04^4 - 0{,}03^4) = 8{,}586 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) = \frac{3{,}14}{4}(0{,}04^2 - 0{,}03^2) = 5{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{8{,}586 \cdot 10^{-8}}{5{,}5 \cdot 10^{-4}}} = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \text{м}.$$

Тогда гибкость стойки при $\mu = 0{,}5$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}5 \cdot 1}{1{,}25 \cdot 10^{-2}} = 40.$$

Сравнивая полученные значения гибкостей, приходим к выводу, что расчет с помощью формулы Эйлера в данном случае не применим, так как $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$.

Расчет производим с помощью коэффициента $\varphi$. Для данной стальной стойки при $\lambda = 40$ коэффициент $\varphi = 0{,}92$.

Найдем допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm}}^{\text{у}} = \varphi\sigma_{\text{adm}} = 0{,}92 \cdot 120 = 110{,}4 \text{ МПа},$$

а допускаемая нагрузка на устойчивость

$$F_{\text{adm}}^{\text{у}} = \sigma_{\text{adm}}^{\text{у}} A = 110{,}4 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-4} = 60{,}72 \cdot 10^3 \text{ Н} = 60{,}72 \text{ кН}.$$

Критическая нагрузка

$$F_{cr} = K_{\text{у}} F_{\text{adm}}^{\text{у}} = 2 \cdot 60{,}72 = 121{,}44 \text{ кН}.$$

**Пример 7.2.**

Подобрать двутавровое сечение стойки с одним защемленным, а другим свободным концом. Осевая сжимающая сила $F = 400$ кН, длина стойки $l = 1{,}5$ м. Основное допускаемое напряжение на сжатие $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

*Решение.*

Решаем задачу методом последовательных приближений. Примем для первого приближения коэффициент $\varphi_1 = 0{,}5$. В этом случае необходимая площадь поперечного сечения стойки:

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi_1 \sigma_{adm}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По сортаменту выбираем двутавр № 33 (см. табл. П. 1) с площадью $A_2 = 53{,}8 \cdot 10^{-4}$ м$^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\min_1} = 2{,}79 \cdot 10^{-2}$ м.

Соответствующая гибкость стойки при коэффициенте $\mu = 2$

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min_1}} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}79 \cdot 10^{-2}} = 107.$$

С помощью линейной интерполяции находим коэффициент $\varphi_2$ между его значениями по табл. 7.1 при $\lambda = 100$ и при $\lambda = 110$. При $\lambda = 100$, $\varphi = 0{,}60$; при $\lambda = 110$, $\varphi = 0{,}52$, следовательно, $\Delta\lambda = 10$, $\Delta\varphi = 0{,}08$:

$$\varphi_2 = \varphi_{\lambda=100} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}\left[(\lambda{=}107) - (\lambda{=}100)\right] = 0{,}544.$$

Следовательно, при $\lambda = 107$ коэффициент $\varphi_2 = 0{,}544$.

Проводим проверку по условию

$$F_{\text{расч}_1} = \varphi_2 A_2 \sigma_{adm} = F \pm 5\ \%,$$

в нашем случае $F_{\text{расч}_1} = 0{,}544 \cdot 53{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 468270$ Н $= 468{,}27$ кН $> F$.

Находим величину расхождения между заданной и расчетной нагрузками

$$\delta = \frac{468{,}27 - 400}{400} 100 = 17\ \% > 5\ \%.$$

Делаем новый расчет (приближение)

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}544}{2} = 0{,}522 .$$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \sigma_{adm}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}522 \cdot 160 \cdot 10^6} = 48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

По сортаменту проката найденной площади соответствует двутавр № 30а (см. табл. П. 1) площадью сечения $A_4 = 49{,}9 \cdot 10^{-4}$ м$^2$ и $i_{\min_2} = 2{,}95 \cdot 10^{-2}$ м. Тогда гибкость

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min_2}} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}95 \cdot 10^{-2}} = 101{,}7 \approx 102 .$$

После интерполяции получаем

$$\varphi_4 = 0{,}6 - \frac{0{,}08}{10}(102 - 100) = 0{,}584 .$$

Проводим проверку

$$F_{\text{расч}_2} = 0{,}584 \cdot 49{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 466265 \text{ Н} = 466{,}265 \text{ кН} > F .$$

Величина расхождения между заданной и расчетной нагрузками составляет:

$$\delta = \frac{466{,}265 - 400}{400} 100 = 16{,}6 \text{ \%} > 5 \text{ \%} .$$

Проверяем двутавр № 30 площадью сечения $A_5 = 46{,}5 \cdot 10^{-4}$ м$^2$, $i_{\min_3} = 2{,}69 \cdot 10^{-2}$ м.

Гибкость $\lambda_3 = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}69 \cdot 10^{-2}} \approx 112$.

Коэффициент $\varphi_5$ находим линейной интерполяцией между значениями $\lambda = 110$ и $\lambda = 120$. Получим $\varphi_5 = 0{,}506$.

Проверка

$F_{\text{расч}_3} = \varphi_5 A_5 \sigma_{adm} = 0{,}506 \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 376500 \text{ Н} = 376{,}5 \text{ кН}.$

Величина расхождения между заданной и расчетной нагрузками составляет

$$\delta = \frac{400 - 376{,}5}{400} 100 = 5{,}87 \text{ \%} > 5 \text{ \%} .$$

Следовательно, из трех рассмотренных номеров двутавров к практическому применению необходимо принять двутавр № 30а с площадью поперечного сечения $A = 49{,}9 \cdot 10^{-4}$ м$^2$, так как нагрузка, которую воспринимает двутавр № 30 меньше заданной нагрузки более чем 5 %.

## 7.1. Задания для расчета стержней на устойчивость

Подобрать поперечное сечение заданного профиля гибкого стержня при действии осевой сжимающей силы. Решение выполнить методом последовательных приближений с помощью коэффициентов $\varphi$. Допускаемые напряжения для материалов стержней на сжатие принять: для стали $\sigma_{adm} = 160$ МПа; для чугуна $\sigma_{adm} = 130$ МПа; для дерева $\sigma_{adm} = 10$ МПа.

Данные для расчетов взять из рис. 7.1, табл. 7.2 и П. 1.

Примечания:

1. Для сечения прямоугольного профиля принять соотношение между размерами как $b:h = 1:2$.
2. Для кольцеобразного сечения принять соотношение между внутренним и наружным диаметрами как $d/D = 0{,}85$.

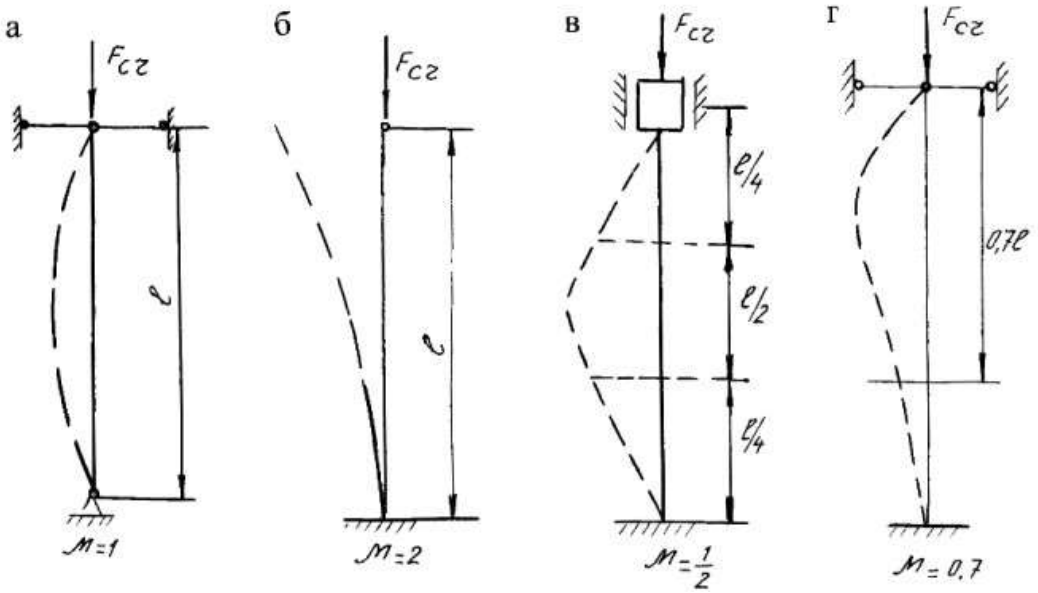
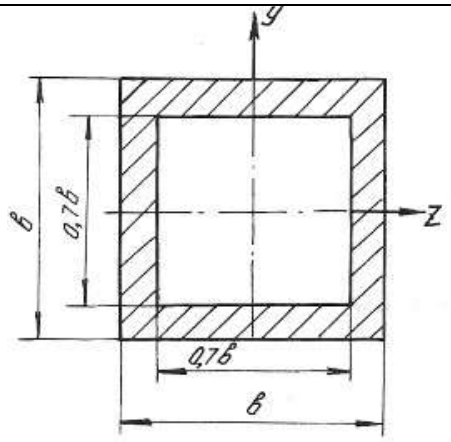
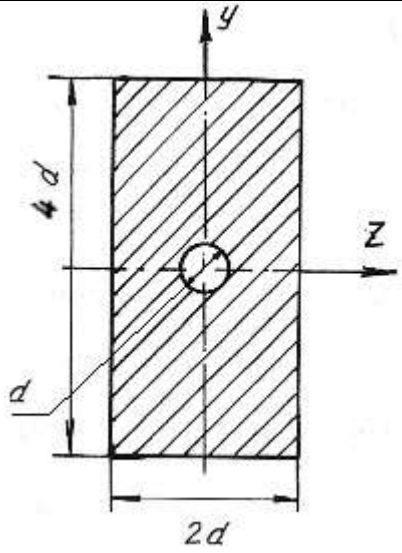
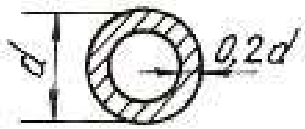
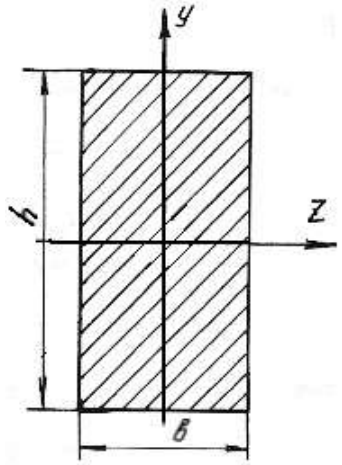
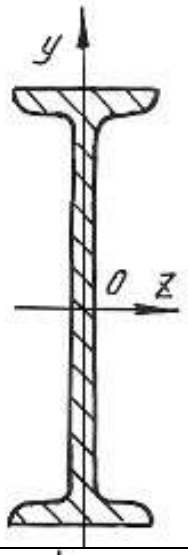
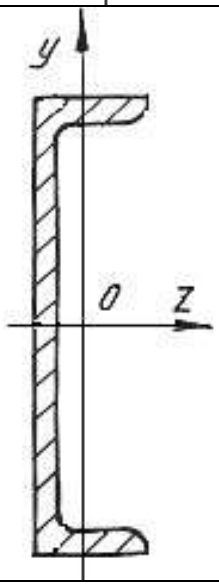



Рис. 7.1.

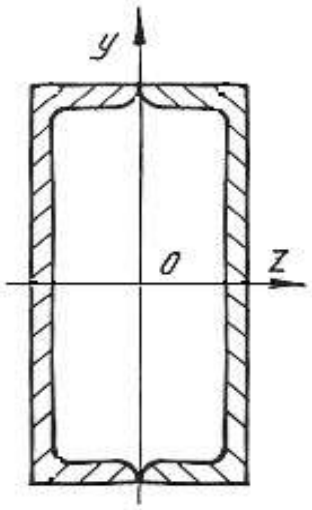
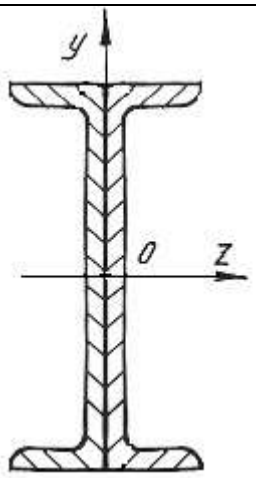
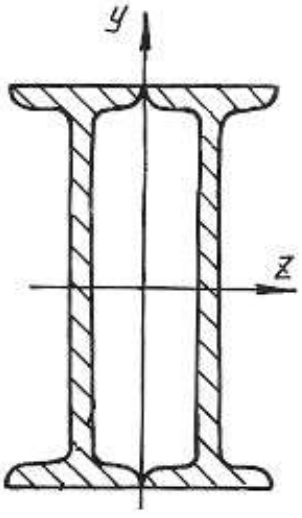
Таблица 7.2

| Номер варианта | Схема поперечного сечения | Материал | Способ закрепления | Длина стержня, м | Сжимающая нагрузка, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 |  | Дерево | а<br>б<br>в<br>г | 3<br>4<br>4<br>1,6 | 90<br>120<br>150<br>60 |
| 2 |  | Дерево | а<br>б<br>в<br>г | 3,6<br>5<br>5<br>2 | 140<br>250<br>400<br>180 |
| 3 |  | Чугун | а<br>б<br>в<br>г | 5,2<br>4,8<br>4,5<br>2,8 | 600<br>800<br>900<br>700 |

Продолжение табл. 7.2

| Номер варианта | Схема поперечного сечения | Материал | Способ закрепления | Длина стержня, м | Сжимающая нагрузка, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 |  | Чугун | а<br>б<br>в<br>г | 4,6<br>3,8<br>4,2<br>3,2 | 850<br>600<br>700<br>900 |
| 5 |  | Сталь 5 | а<br>б<br>в<br>г | 3,2<br>3,6<br>8<br>2,4 | 380<br>700<br>800<br>600 |
| 6 |  | Сталь 3 | а<br>б<br>в<br>г | 3,6<br>4,5<br>5<br>2,2 | 280<br>650<br>450<br>250 |

Окончание табл. 7.2

| Номер варианта | Схема поперечного сечения | Материал | Способ закрепления | Длина стержня, м | Сжимающая нагрузка, кН |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 |  | Сталь 3 | а<br>б<br>в<br>г | 3<br>4<br>5,5<br>4,8 | 300<br>400<br>250<br>350 |
| 8 |  | Сталь 3 | а<br>б<br>в<br>г | 5,5<br>6,6<br>7<br>3,5 | 960<br>500<br>800<br>750 |
| 9 |  | Сталь 3 | а<br>б<br>в<br>г | 3<br>7<br>6<br>4 | 930<br>740<br>830<br>980 |

**МИНОБРНАУКИ РФ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный горный университет»**

**М. Е. Садовников**

# НАДЁЖНОСТЬ, ДИАГНОСТИКА И ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

***Методические указания по организации самостоятельной работы для обучающихся специальности 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»***

**Екатеринбург**
**2021**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение . . . . . 3
1. Тематический план дисциплины . . . . . 4
2. Тематика практических работ. . . . . 5
3. Вопросы к зачёту по дисциплине . . . . . 5
4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины . . . . . 7
4.1. Основная литература . . . . . 7
4.2. Дополнительная литература . . . . . 7
5. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....7

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчётно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| 1 | Предмет науки о надёжности. Основные понятия, термины и определения | 2 | 8 | [1] с. 9…12, [2] с. 3...16 |
| 2 | Этапы анализа и показатели надёжности технических систем (ТС) | 6 | 10 | [1] с. 13…30, [2] с. 17...34 |
| 3 | Математические модели в теории надёжности ТС | 7 | 12 | [1] с. 35...103 |
| 4 | Мероприятия по формированию надёжности на различных стадиях проектирования | 6 | 10 | [1] с. 107...111 |
| 5 | Расчёт надёжности ТС. Методы расчёта надёжности | 8 | 12 | [1] с. 112...166 |

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| 6 | Методы повышения надёжности ТС | 7 | 10 | [1] с. 370...390, [2] с. 63...78 |
| 7 | Техническая диагностика электрооборудования | 7 | 12 | [2] с. 159...174 |
| 8 | Идентификация эксплуатационных отказов электрооборудования | 7 | 12 | Конспект лекций |

## 2. ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень практических работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 5 | Расчёт надёжности по методу среднегрупповых показателей интенсивностей отказов. *Литература:* [1] с. 113...115 | 4 | 4 |
| 5 | Расчёт надёжности по методу коэффициентов надёжности *Литература:* [1] с. 115...117 | 4 | 4 |
| 6 | Разработка рекомендаций по повышению надёжности заданного электротехнического устройства (группы устройств). *Литература:* [1] с. 370...390 | 4 | - |
| 7 | Испытания изоляции повышенным напряжением. *Литература:* Конспект лекций | 4 | - |
| Итого: | | 16 | 8 |

## 3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Предмет науки о надёжности.
2. Технический объект, элемент, система, подсистема.
3. Ремонтопригодные, неремонтопригодные, восстанавливаемые, невосстанавливаемые, самовосстанавливаемые объекты.
4. Эффективность, надёжность (безотказность, долговечность, ремонтопригодность, восстанавливаемость, сохраняемость, готовность).
5. Этапы жизни технического объекта, на которых формируется его надёжность.
6. Состояния объекта.
7. Повреждения, дефекты и отказы.
8. Классификация отказов.
9. Критерии и показатели надёжности.
10. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Плотность распределения наработки до отказа.
11. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Вероятность безотказной работы, вероятность отказа.
12. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Частота отказов.
13. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Интенсивность отказов.
14. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Наработка до отказа, средняя наработка до отказа.

15. Основные единичные количественные показатели безотказности восстанавливаемых систем. Параметр потока отказов.
16. Основные единичные количественные показатели безотказности восстанавливаемых систем. Средняя наработка между отказами.
17. Комплексные показатели надёжности. Коэффициенты готовности и неготовности.
18. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент оперативной готовности.
19. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент технического использования.
20. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент сохранения эффективности.
21. Показатели ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели ремонтопригодности.
22. Показатели ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели долговечности.
23. Показатели ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели сохраняемости.
24. Постановка задачи расчёта надёжности.
25. Типы задач расчёта надёжности.
26. Порядок расчёта надёжности.
27. Расчёт надёжности по среднегрупповым значениям интенсивности отказов.
28. Расчёт надёжности по коэффициентам надёжности.
29. Расчёт надёжности с учётом условий эксплуатации.
30. Способы повышения надёжности. Повышение надёжности путём упрощения технической системы, улучшение организации и качества обслуживания.
31. Способы повышения надёжности. Внутриэлементная избыточность.
32. Способы повышения надёжности. Структурное резервирование.
33. Способы повышения надёжности. Временное резервирование, информационное резервирование, повышение ремонтопригодности.
34. Способы повышения надёжности.
35. Идентификация отказов.
36. Испытание изоляции повышенным напряжением постоянного тока.
37. Испытание изоляции повышенным напряжением переменного тока.
38. Разница в испытании изоляции повышенным напряжением постоянного и переменного тока.
39. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь нормальным высоковольтным мостом.
40. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь перевёрнутым высоковольтным мостом.
41. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь ёмкостным мостом с заземлённой диагональю.
42. Метод частичных разрядов.
43. Измерение сопротивления заземляющих устройств.
44. Измерение сопротивления металлосвязи между заземляющим устройством и заземляемым оборудованием.
45. Измерение сопротивления петля «фаза-нуль».
46. Измерение сопротивление грунта.
47. Определение сопротивления эквивалентного грунта в двухслойных грунтах.
48. Прожигание изоляции кабелей на постоянном токе.
49. Прожигание изоляции на переменном токе.
50. Методы определения расстояния до мест повреждения в кабелях.
51. Определение расстояния до места повреждения в кабеле импульсным методом.
52. Определение расстояния до места повреждения в кабеле методом

колебательного разряда.
53. Определение расстояния до места повреждения в кабеле петлевым методом.
54. Определение расстояния до места повреждения в кабеле индукционным методом.
55. Определение расстояния до места повреждения в кабеле акустическим методом.
56. Определение расстояния до места повреждения в кабеле методом измерения потенциалов.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 1 | Теория надёжности [Текст]: учебник для вузов / Острейковский В. А. - М.: Высш. шк., 2003. - 463 с.: ил. |
| 2 | Надёжность, оптимизация и диагностика автоматизированных систем [Текст]: учебник/ М. Л. Хазин. – Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. - 225 с. |

### 4.2 Дополнительная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 3 | Надёжность и диагностика систем управления [Текст]: учеб. пособие / Хазин М. Л., Боярских Г. А. - Екатеринбург: УГГГА, 2001. - 170 с.: рис.; табл. - Библиогр.: с. 157-158. |
| 4 | Надёжность технических систем [Текст]: учебное пособие / Г. А. Боярских, М. Л. Хазин; Уральская государственная горно-геологическая академия. - Екатеринбург: УГГГА, 2002. - 180 с.: рис., табл. - Библиогр.: с. 162. |
| 5 | Надёжность электрических машин [Текст]: учебное пособие / Н. Л. Кузнецов. - М.: Издательский дом МЭИ, 2006. - 432 с.: ил. |

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

1. Microsoft Windows 8 Professional.
2. Microsoft Office Standard 2013.

Информационные справочные системы

ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri
E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

**МИНОБРНАУКИ РФ**
**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный университет»**

М. Е. Садовников

# ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЕ И ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЕ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

## Методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»

**Екатеринбург**

**2021**

## Задание

1. Построить модель заданного преподавателем помещения (сооружения) в программе DIALux и рассчитать для него рабочее освещение.
2. При выполнении работы использовать методику, приведённую в п. 2 [1] и каталоги изготовителей светильников, файлы моделей светильников, приведённые на сайтах их изготовителей.
3. К работе, в обязательном порядке, отчёт должен включать все необходимые расчёты, в качестве приложения, добавить копии каталожных данных по выбираемым светильникам. К отчёту приложить файл-модель DIALux.
4. Отчёт оформить в соответствии с требованиями [2].

## Список литературы


1. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 229 с.
2. Садовников М. Е. Единые требования по оформлению текстовых и графических документов на кафедре ЭГП [Текст]: учебно-метод. пособие для студентов очного и заочного обучения / сост.: М. Е. Садовников, А. Л. Карякин, Х. Б. Юнусов; Уральский гос. горный ун-т. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 31 с.

**МИНОБРНАУКИ РФ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный горный университет»**

**М. Е. Садовников**

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ АППАРАТЫ

***Методические указания по организации самостоятельной работы для обучающихся специальности 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»***

**Екатеринбург**
**2021**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение . . . . . 3
1. Тематический план дисциплины . . . . . 4
2. Тематика лабораторных, практических работ. . . . . 5
3. Теоретические вопросы к экзамену по дисциплине . . . . . 7
4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины . . . . . 8
4.1. Основная литература . . . . . 8
4.2. Дополнительная литература . . . . . 9
5. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. . . . . 9
6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем ……9

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| 1 | Условия эксплуатации электрооборудования на горных предприятиях. Исполнение электрооборудования | 6 | 11 | [1] с. 21…45, [3] с. 7...10, 14...23, [5] с. 25...28 |
| 2 | Уровни напряжения, качество электроэнергии, режимы нейтрали | 6 | 11 | [1] с. 45…55, 175...182, [3] с. 10...14, [5] с. 16...20, 39....43, |

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| | | | | [6] с. 53...97 |
| 3 | Электрооборудование технологических установок горных предприятий | 6 | 11 | [1] с. 455...484, [2] с. 215…263, 505...588, [5] с. 305...369, [6] с. 97...107 |
| 4 | Электрооборудование распределительных сетей горных предприятий | 6 | 11 | [1] с. 420...434, 444...455, [2] с. 23...33, 133...142, [3] с. 143…151, [5] с. 207...305, [6] с. 179...220 |
| 5 | Электрооборудование для управления электроприводами на горных предприятиях | 6 | 11 | [1] с. 142...178, [2] с. 23...33, 133...142 [3] с. 143…151 |
| 6 | Правила выполнения чертежей раздела проекта «Силовое электрооборудование» | 6 | 11 | Конспект лекций, ГОСТ 21.614-88, ГОСТ 2.856-75 |
| 7 | Электрическое освещение | 6 | 11 | [1] с. 118...167, [3] с. 23…118, [5] с. 129...171, [6] с. 463...475 |
| 8 | Расчёт электрических нагрузок и компенсация реактивной мощности | 4 | 11 | [1] с. 76...94, [2] с. 369...373, [3] с. 118…137, [6] с. 411...430, РТМ 36.18.32.4-92 |
| 9 | Выбор числа трансформаторов и трансформаторных подстанций горных предприятий | 6 | 10 | [1] с. 411...417, 420...441, [2] с. 55…59, 69...76, 80...86, [3] с. 140...163, [6] с. 251...267 |
| 10 | Низковольтные распределительные устройства горных предприятий | 6 | 10 | [1] с. 23...33, 133...142, [3] с. 163…217, [6] с. 267...281 |
| 11 | Электрические связи | 8 | 10 | [1] с. 369...371, [2] с. 178...215, [4] с. 4...78, [6] с. 286...325 |
| 12 | Расчёт токов короткого замыкания | 6 | 13 | [2] с. 78...137 |
| 13 | Проверка электрооборудования, электроаппаратов и проводок по действию токов короткого замыкания | 6 | 10 | [4] с. 137...149 |
| 14 | Проектирование мер защиты от поражения человека | 5 | 10 | [1] с. 167...249, |

| № | Наименование, раздела и темы | Самостоятельная работа, часов | | Литература (страницы) |
|---|---|---|---|---|
| | | очная | заочная | |
| | электрическим током на горных предприятиях | | | [4] с. 149...179, [5] с. 33...129 |
| 15 | Молниезащита электроустановок горных предприятий | 6 | 10 | [6] с. 495...500, СО 153-34.21.122-2003, РД 34.21.122-87 |
| 16 | Управления электрооборудованием | 6 | 10 | [2] с. 94...133, ГОСТ Р МЭК 60204-1-2007 |

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем лабораторных работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 5 | Рудничная аппаратура дистанционного управления во взрывозащищённом исполнении *Литература:* [2] с. 94...133, 142...161, 167...175 | 4 | - |
| 11 | Изучение силовых кабелей напряжением до 35 кВ включительно *Литература:* [1] с. 369...371, [2] с. 178...215, [4] с. 4...78, [6] с. 286...325 | 4 | - |
| 14 | Изучение устройств непрерывного контроля изоляции в сетях напряжением до 1140 В *Литература:* [1] с. 167...207, [5] с. 48...91 | 4 | - |
| 16 | Изучение релейно-контакторных схем управления электроприводами. *Литература:* [7] с. 4...25 | 4 | - |
| Итого: | | 16 | - |

Таблица 3 – Перечень практических работ

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| 4 | Изучение электрооборудования в рудничном нормальном исполнении для распределения электроэнергии в сетях до 1140 В на подземных горных работах *Литература:* РЭ на изучаемую аппаратуру | 4 | 4 |
| 10 | Изучение аппаратуры ручного управления в рудничном нормальном исполнении *Литература:* [2] с. 133...142, 161...167, РЭ на изучаемую аппаратуру | 4 | 4 |
| 10 | Изучение электрооборудования дистанционного управления в рудничном нормальном исполнении *Литература:* [2] с. 94...133, 142...161, РЭ на изучаемую аппаратуру | 4 | 4 |
| 7 | Изучение электрооборудования в рудничном нормальном исполнении для питания ручного электроинструмента и освещения на подземных горных работах *Литература:* | 4 | - |

| Номер раздела и темы | Наименование тем практических работ | Трудоёмкость, час | |
|---|---|---|---|
| | | очная | заочная |
| | [1] с. 136...138, [2] с. 167...175, РЭ на изучаемую аппаратуру | | |
| Итого: | | 16 | 16 |

## 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Исполнение электрооборудования (категория размещения, климатическое исполнение).
2. Исполнение электрооборудования (степень защиты от внешних воздействий).
3. Исполнение электрооборудования (рудничное нормальное исполнение).
4. Исполнение электрооборудования (взрывозащищённое исполнение).
5. Режимы нейтрали источников питания электроприёмников, их особенности и области применения на горных предприятиях.
6. Различия режимов нейтрали с точки зрения электро- и пожаробезопасности.
7. Электрооборудование технологических установок горных предприятий на ПГР, ОГР, ОФ и ДСФ (особенности, режимы работы).
8. Электрооборудование распределительных сетей горных предприятий (особенности конструкции электрооборудования для ПГР, ОГР ОФ и ДСФ; защиты, блокировки).
9. Электрооборудование для управления электроприводами на горных предприятиях (особенности конструкции электрооборудования для ПГР, ОГР ОФ и ДСФ; защиты, блокировки).
10. Правила черчения электрических схем.
11. Правила черчения планов расположения электрооборудования и прокладки электрических сетей.
12. Вспомогательные элементы чертежей (спецификации, экспликации, виды, разрезы и т. п.)
13. Выбор источников света и световых приборов.
14. Метод удельной мощности для расчёта освещения.
15. Метод светового потока для расчёта освещения.
16. Точечный метод для расчёта освещения.
17. Резервирование осветительной нагрузки.
18. Как выбирается структура распределительной сети горных предприятий?
19. Особенности расчёта электрических нагрузок на ПГР, ОГР и ОФ и ДСФ.
20. Как производится выбор числа трансформаторов трансформаторных подстанций?
21. Как производится выбор числа трансформаторных подстанций для различных видов горных работ.
22. Виды низковольтных распределительных устройств (НКУ),
23. Как производится выбор автоматических выключателей, включая выбор уставок защит. Особенности выбора автоматических выключателей для разных горных работ.
24. Как производится выбор контакторов и пускателей, особенности выбора данных аппаратов для разных горных работ.
25. Выбор типа, сечения и способа прокладки электрических связей распределительных сетей горных предприятий.
26. Как составляются схемы замещения для расчёта токов КЗ.
27. Как производится расчёт сопротивлений схем замещения.

28. Как выполняется расчёт максимальных токов КЗ.
29. Как учитывается при расчёте максимальных токов КЗ подпитка от электроприёмников.
30. Как выполнить расчёт минимальных токов КЗ.
31. Как производится проверка электрооборудования, электроаппаратов и проводок по действию токов короткого замыкания.
32. Как производится расчёт главного заземляющего устройства?
33. Что такое местные заземлители; как устроены сети заземления внутри зданий, на ПГР и ОГР?
34. Как выполняются заземляющие устройства в грунтах с высоким удельным сопротивлением?
35. Что такое пассивная и активная молниезащита.
36. Общие требования к построению схем управления (защиты, блокировки, принципы построения схем управления).
37. Режимы управления (местный/дистанционный; сблокированный/деблокированный);
38. Маркировка электрических цепей.
39. Требования к цветам и местам размещения органов управления и световой сигнализации.
40. Типовые схемы управления электроприводами.
41. Технологические блокировки и блокировки безопасности. Как обеспечивается местное и дистанционное управление.
42. Как обеспечивается защита от потери управляемости в цепях дистанционного управления электрооборудования для ПГР и ОГР.
43. Как обеспечивается защита цепей управления.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 1 | Электрификация горного производства [Текст]: учебник для вузов: В 2-х т. Т.1. / А. В. Ляхомский [и др.]; ред. Л. А. Пучков, Г. Г. Пивняк; Московский государственный горный университет. - М.: МГГУ, 2007.- 511 с.: ил. |
| 2 | Электрификация горного производства [Текст]: учебник для вузов: В 2-х т. Т.2. / А. В. Ляхомский [и др.]; ред. Л. А. Пучков, Г. Г. Пивняк; Московский государственный горный университет. - М.: МГГУ, 2007.- 595 с.: ил. |
| 3 | Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 229 с. |
| 4 | Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 2 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 191 с. |

### 4.2 Дополнительная литература

| № п/п | Наименование |
|---|---|
| 1 | Электрооборудование и электроснабжение открытых горных работ [Текст]: учебник для вузов / Н. И. Чеботаев. - М.: Горная книга, 2006. - 474 с.: ил. |
| 2 | Электроснабжение промышленных предприятий [Текст]: учебник / Б. И. Кудрин. - М.: Интермет Инжиниринг, 2007. - 672 с.: ил. |
| 3 | Садовников М. Е. Контакторы, пускатели, электротепловые реле и предохранители [Текст]: учебн. пособие по дисциплине «Электрические и электронные аппараты» для студентов специальности 140604 - "Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов" (ЭГП) очного и заочного обучения / М.Е. Садовников.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010.- 64 с. |
| 4 | Юнусов Х.Б. Электроснабжение: методические указания по выполнению раздела ВКРИ / Х. Б. Юнусов; Уральский государственный горный университет. - 2-е изд., перераб. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2010. - 36 с. |

## 5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Сайт компании DIAL GmbH - http://www.dial.de/DIAL/en/dialux-international-download/russkii.html
Сайт Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии (Росстандарт) - https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts/catalognational
Сайт компании ОАО «ВЭЛАН» - http://velan.ru/
Сайт компании ООО "Производственное предприятие шахтной электроаппаратуры" (ШЭЛА) - http://www.shela71.ru/
Сайт компании «ЕХС» - http://www.oaoex.ru/
Сайт компании Becker Mining Systems http://www.ru.becker-mining.com/ru/products

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

Бесплатное свободно распространяемое версия программное обеспечение для расчёта освещения - пакет DIALux.
Microsoft Windows 8 Professional.
Microsoft Office Standard 2013.

Информационные справочные системы

ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri
E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

## Б1.О.01 ФИЛОСОФИЯ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация

***Электрификация и автоматизация горного производства***

формы обучения: **очная, заочная**

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
|---|---|
| Философии и культурологии | ГМФ |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Беляев В.П. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 29.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по работе с текстом лекций | 5 |
| 2 | Методические рекомендации по подготовке к опросу | 8 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации) | 9 |
| 4 | Методические рекомендации по написанию эссе | 11 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям | 14 |
| 6 | Методические рекомендации по подготовке к дискуссии | 15 |
| 7 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 17 |
| | Заключение | 20 |
| | Список использованных источников | 21 |

## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

***Самостоятельная работа студента*** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям*:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

***Вступление***.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

***Основная часть.***

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

***Заключение.***

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

| *Критерии оценки доклада, сообщения* | *Количество баллов* |
|---|---|
| Содержательность, информационная насыщенность доклада | 1 |
| Наличие аргументов | 1 |
| Наличие выводов | 1 |
| Наличие презентации доклада | 1 |
| Владение профессиональной лексикой | 1 |
| Итого: | 5 |

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

## 4. Методические рекомендации по написанию эссе

***Эссе*** - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

*Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

***Дискуссия*** (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении** дискуссии выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.02.01 ВСЕОБЩАЯ ИСТОРИЯ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 4 |
| 2 | Методические указания по подготовке к опросу | 8 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 9 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 10 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 11 |
| | Заключение | 14 |
| | Список использованных источников | 15 |

# ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия,

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в

качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;
- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю; групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим метода

## 2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной

дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения

воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;

- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.02.02 ИСТОРИЯ РОССИИ

специальность
***21.05.04 Горное дело***

специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

Автор: Железникова А.В.

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 4 |
| 2 | Методические указания по подготовке к опросу | 8 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 9 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 10 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 11 |
| | Заключение | 14 |
| | Список использованных источников | 15 |

# ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия,

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в

качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;
- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю; групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим метода

## 2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной

дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения

воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;

- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

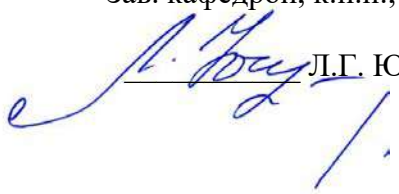
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Зав. кафедрой, к.п.н., доцент



Л.Г. Юсупова

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

*по дисциплине*
## Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрен на заседании кафедры
*Иностранных языков и деловой коммуникации*
*(название кафедры)*
Протокол № 1 от 28.09.2021 г.
*(Дата)*

Екатеринбург

**Содержание**

Цели и задачи дисциплины …….…….....3
Требования к оформлению контрольной работы ……..……..4
Содержание контрольной работы…….....4
Выполнение работы над ошибками……...…8
Критерии оценивания контрольной работы ……8
Образец титульного листа ……..…10

## Цель и задачи дисциплины

**Цель дисциплины**: повышение исходного уровня владения иностранным языком, достигнутого на предыдущей ступени образования, и достижение уровня иноязычной коммуникативной компетенции достаточного для общения в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах, а также для дальнейшего самообразования.

**Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:**

*универсальные:*

- способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия (УК-4).

*Для достижения указанной цели необходимо* (задачи курса):

- владение иностранным языком как средством коммуникации в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах;
- развитие когнитивных и исследовательских умений с использованием ресурсов на иностранном языке;
- развитие информационной культуры;
- расширение кругозора и повышение общей гуманитарной культуры студентов;
- воспитание толерантности и уважения к духовным ценностям разных стран и народов.

Методические указания по выполнению контрольной работы предназначены для студентов очной и заочной формы обучения, обучающихся по специальности.

Письменная контрольная работа является обязательной формой *промежуточной аттестации.* Она отражает степень освоения студентом учебного материала по дисциплине Б1.О.04 Иностранный язык. А именно, в результате освоения дисциплины студент должен:

*Знать:*

- особенности фонетического строя иностранного языка;
- лексические единицы социально-бытовой и академической тематики, основы терминосистемы соответствующего направления подготовки;
- основные правила грамматической системы иностранного языка;
- особенности построения устных высказываний и письменных текстов разных стилей речи;
- правила речевого этикета в соответствии с ситуациями межличностного и межкультурного общения в социально-бытовой, академической и деловой сферах;
- основную страноведческую информацию о странах изучаемого языка;
- лексико-грамматические явления иностранного языка профессиональной сферы для решения задач профессиональной деятельности;

*Уметь:*

- вести диалог/полилог и строить монологическое высказывание в пределах изученных тем;
- понимать на слух иноязычные тексты монологического и диалогического характера с различной степенью понимания в зависимости от коммуникативной задачи;
- читать аутентичные тексты прагматического, публицистического, художественного и научного характера с целью получения значимой информации;
- передавать основное содержание прослушанного/прочитанного текста;
- записывать тезисы устного сообщения, писать эссе по изученной тематике, составлять аннотации текстов, вести личную и деловую переписку;
- использовать компенсаторные умения в процессе общения на иностранном языке;
- пользоваться иностранным языком в устной и письменной формах, как средством

профессионального общения;

*Владеть:*

- основными приёмами организации самостоятельной работы с языковым материалом с использованием учебной и справочной литературы, электронных ресурсов;
- навыками выполнения проектных заданий на иностранном языке в соответствии с уровнем языковой подготовки;
- умением применять полученные знания иностранного языка в своей будущей профессиональной деятельности.

## Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «Иностранный язык (английский)» представлено три варианта контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется для студентов в соответствии с начальными буквами их фамилий в алфавитном порядке. Например, студенты, у которых фамилии начинаются с букв А, выполняют контрольную работу № 1 и т.д. (см. таблицу №1).

Таблица №1

| ***начальная буква фамилии студента*** | ***№ варианта контрольной работы*** |
|---|---|
| А, Г, Ж, К, Н, Р, У, Ц, Щ | №1 |
| Б, Д, З, Л, О, С, Ф, Ч, Э, Я | №2 |
| В, Е, И, М, П, Т, Х, Ш, Ю | №3 |

## Содержание контрольной работы №1

Контрольная работа проводится по теме *1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)* и *теме 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

| ***Название темы*** | ***Страницы учебников*** | |
|---|---|---|
| | *Агабекян И. П.* | *Журавлева Р.И.* |
| Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях | 148 | 9 |
| Порядок слов в вопросительном предложении | 163-170 | 10, 24 |
| Безличные предложения | 149 | 440 |
| Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные) | 41-55 | 101, 439 |
| Имя существительное | 66-78 | 435 |
| Артикли (определенный, неопределенный, нулевой) | 78-84 | 433 |
| Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have* | 102-104 | 6-8 |
| Оборот *there+be* | 105-107 | 100 |
| Имя прилагательное и наречие | 115 | 83 |
| Степени сравнения, сравнительные конструкции | 115-121 | 143 |
| Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат) | 261-271 | - |
| Образование видовременных форм глагола в активном залоге | 193-209 | 10, 36, 69 |

## *АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК*

**Вариант №1**

***Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.***

***Пример:*** Michael _____ everyone he meets because he is very sociable and easygoing. He has five brothers and two sisters, so that probably helped him learn how to deal with people.

A. gets divorced; **B. gets along well with;** C. gets married;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Заполните пропуски местоимениями some, any, no или их производными.***

***Пример:*** A: Is ***anything*** the matter with Dawn? She looks upset.

B: She had an argument with her friend today.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неопределённые местоимения».*

***Задание 3. Заполните пропуски личными местоимениями (I, we, you, he, she, it, they, me, us, him, her, them).***

***Пример:*** My teacher is very nice. I like … . – I like **him**.

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «личные и притяжательные местоимения».*

***Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках, обращая при этом внимание на использованные в предложениях маркеры.***

***Пример:*** Every morning George **eats** (to eat) cereals, and his wife only **drinks** (to drink) a cup of coffee.

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».*

***Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.***

***Пример:*** Paul was tired when he got home. – ***Was Paul tired when he got home? Yes, he was.***

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».*

**Контрольная работа**
**Вариант №2**

***Задание 1. Заполните пропуск, выбрав один вариант ответа.***

***Пример:*** A British university year is divided into three _____.

1) conferences; 2) sessions; **3) terms**; 4) periods;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Выберите правильную форму глагола.***

***Пример:*** A: I have a Physics exam tomorrow.

B: Oh dear. Physics **is/**are a very difficult subject.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя существительное, функции и спряжение глаголов to be и to have».*

***Задание 3. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Continuous, Past Continuous или Future Continuous.***

***Пример:*** I **shall be studying** (study) Japanese online from 5 till 6 tomorrow evening.

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».*

***Задание 4. Составьте вопросы к словам, выделенным жирным шрифтом.***

***Пример:*** **The Petersons** have bought a dog. – *Who has bought a dog?*

The Petersons have bought **a dog. –** *What have the Petersons bought?*

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».*

***Задание 5. Подчеркните правильный вариант ответа.***

***Пример:*** A: You haven't seen my bag anywhere, haven't you/**have you**?

B: No. You didn't leave it in the car, **did you**/didn't you?

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».*

**Контрольная работа**
**Вариант № 3**

***Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.***

***Пример:*** The University accepts around 2000 new ____ every year.

**1) students;** 2) teachers; 3) pupils; 4) groups;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Поставьте в предложения подходящие по смыслу фразы:***

as red as a beet (свекла), as slow as a turtle, as sweet as honey, as busy as a bee, as clumsy as a bear (неуклюжий), as black as coal, as cold as ice, as slippery as an eel (изворотливый как угорь), as free as a bird, as smooth as silk (гладкий)

***Пример:*** Your friend is so unemotional, he is **as cold as ice**.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя прилагательное и наречие».*

***Задание 3. Переведите следующие предложения на английский язык.***

***Пример:*** Это самая ценная картина в Русском музее. **This is the most valuable picture in Russian Museum.**

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «степени сравнения имени прилагательного и наречий».*

***Задание 4. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Perfect, Past Perfect или Future Perfect.***

***Пример:*** Sam **has lost** (lose) his keys. So he can't open the door.

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».*

***Задание 5. Задайте вопросы к предложениям.***

***Пример:*** There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which *book is Sue's*?' 'The one on the table.'

b) 'Whose *book is on the table*?' 'Sue's.'

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».*

## *НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК*

***Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.***

***Пример:*** Mein Bruder ... Arzt geworden

A. hat; **B. ist**; C. wird;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Пассивный залог».*

***Задание 2. Вставьте подходящее вопросительное слово.***

***Пример:*** **Was** machen Sie am Wochenende?

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные местоимения».*

***Задание 3. Заполните пропуски возвратными местоимениями в нужной форме.***

***Пример:*** Wo wohnen d**eine** Eltern?

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные местоимения».*

***Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках.***

***Пример:*** **Kannst** du mir bitte die Marmelade geben? (können)

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».*

***Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.***

***Пример:*** Sie wohnen in Berlin.

**Ответ: Wo wohnen Sie? Wer wohnt in Berlin?**

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по*

*теме «Вопросительные предложения».*

**Содержание контрольной работы №2**

Контрольная работа проводится по теме 3. *Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) и теме 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: модальные глаголы и их эквиваленты, образование видовременных форм глагола в пассивном залоге, основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь, неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий, основные сведения о сослагательном наклонении.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

| ***Название темы*** | ***Страницы учебников*** | |
|---|---|---|
| | *Агабекян И. П.* | *Журавлева Р.И.* |
| Модальные глаголы и их эквиваленты | 295 | 47 |
| Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге | 236 | 71, 115 |
| Основные сведения о согласовании времён | 323-328 | 269 |
| Прямая и косвенная речь | 324 | 268 |
| Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий | 311-322 | 132, 162, 173, 192, 193 |
| Основные сведения о сослагательном наклонении | 329 | 224 |

## *АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК*

**Вариант №1**

***Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.***

***Пример:*** You: “Are you engaged?” Taxi driver: “_____”.

***Варианты ответов:***

1) Yes, I am having a rest.

2) Sorry, but I don’t.

**3) No, sir. Where do you wish me to take you?**

4) Yes, thank you.

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Перепишите предложения в страдательном залоге.***

***Пример:*** The people are discussing politics. **Politics is being discussed.**

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».*

***Задание 3. Вставьте модальные глаголы may (might) или can (could).***

***Пример: Can*** you help me?

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по*

*теме «модальные глаголы».*

***Задание 4. Употребите правильную форму глагола в пассивном залоге.***

***Пример:*** The roads **are covered** (cover) with the snow.

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».*

***Задание 5. Вставьте модальный глагол may или might. Раскройте скобки, употребляя требующуюся форму инфинитива.***

***Пример:*** **May I ask** (to ask) you to take off your hat?

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «модальные глаголы, инфинитив».*

**Вариант №2**

***Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.***

***Пример:*** The … of shafts is very expensive.

a) making; **b) driving;** c) building;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Выберите подходящую форму глагола в каждом предложении.***

***Пример:*** If we **leave** (will leave/leave/leaves) at 7 o'clock, we **will arrive** (will arrive/arrive/arrives) on time.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «сослагательное наклонение».*

***Задание 3. Выберите из скобок требующуюся форму причастия.***

***Пример:*** We listened to the girls **singing** (singing, sung) folk songs.

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «причастие».*

***Задание 4. Перепишите предложения в страдательном залоге.***

***Пример:*** The child has broken the crystal vase. The crystal vase has been broken by the child.

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».*

***Задание 5. Перефразируйте следующие предложения, употребляя модальный глагол need.***

***Пример:*** 1) It is not necessary to go there. **You need not go there.**

2) It was not necessary to go there. **You need not have gone there.**

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «модальные глаголы, инфинитив».*

**Вариант №3**

***Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.***

***Пример:*** A certain amount of ore … in incline sinking.

**a) is extracted;** b) is got; c) is mined;

*Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.*

***Задание 2. Выберите из скобок требующуюся форму причастия.***

***Пример:*** I picked up the pencil **lying** (lying, lain) on the floor.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неличные формы глагола: причастие».*

***Задание 3. Раскройте скобки, употребляя требующуюся форму инфинитива.***

***Пример:*** He seems **to read** (to read) a lot.

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неличные формы глагола: инфинитив».*

***Задание 4. Перепишите предложения в косвенной речи.***

***Пример:*** He said, 'I'm going to the station.' - ***He said (that) he was going to the station.***

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «прямая и косвенная речь, согласование времен».*

***Задание 5. Переведите на английский язык.***

***Пример:*** Если бы я знал французский, я бы уже давно поговорил с ней.

**If I had known French, I would have spoken with her.**

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «сослагательное наклонение».*

## *НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК*

***Задание 1. Заполните пропуски, поставив существительное из скобок в нужную форму во множественном числе.***

***Пример:*** Unsere (Gast) **Gäste** haben mehrere (Stunde) **Stunden** gebraucht, um uns zu finden.

*Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Множественное число имен существительных».*

***Задание 2. Вставьте правильное окончание глаголов.***

***Пример:*** Ich komm**e** meistens gegen acht Uhr ins Büro und schalt**e** erst einmal den Computer ein.

*Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глагола».*

***Задание 3. Вставьте модальные глаголы müssen, können, dürfen, möchten или wollen. Возможно несколько правильных вариантов:***

***Пример:*** In der Bibliothek: Sie **können** Bücher leihen.

*Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».*

***Задание 4. Составьте Ja/Nein вопросы к данным ответам.***

***Пример:*** Nein, ich spreche kein Französisch.

**Sprechen Sie Französisch? / Sprichst du Französisch?**

*Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные предложения».*

***Задание 5. Составьте вопросы и ответьте на них.***

***Пример:*** wie • Sie •heißen •? **Wie heißen Sie?**

*Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Порядок слов в вопросительном предложении».*

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Работа с оценкой «неудовлетворительно» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

**Выполнение работы над ошибками**

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

**Критерии оценивания контрольной работы**

***Оценка за контрольную работу*** определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 1 балл. Максимум 44 балла.

**Результат контрольной работы**

*Контрольная работа оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:*

35-44 балла (80-100%) - оценка «отлично»;

29-34 балла (65-79%) - оценка «хорошо»;

22-28 баллов (50-64%) - оценка «удовлетворительно»;

0-21 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

*Образец оформления титульного листа*

**Министерство науки и высшего образования РФ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра иностранных языков и деловой коммуникации

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1**

**по дисциплине**
**ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК**

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

формы обучения: очная, заочная

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ЭГП-22

Преподаватель: Петров Петр Петрович,
к.т.н, доцент

**Екатеринбург**
**2022**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров
13.10.2021 г.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

# Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

год набора: 2022

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрена на заседании кафедры
Иностранных языков и деловой коммуникации
*(название кафедры)*
Зав.кафедрой _____
*(подпись)*
к.п.н., доц. Юсупова Л. Г.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 28.09.2021 г.
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией
горно-механического факультета
*(название факультета)*
Председатель _____
*(подпись)*
Осипов П.А.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 12.10.2021 г.
*(Дата)*

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)……..... 3
*1.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы …….....* 3
*1.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции …….....* 5
*1.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……...* 6

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование) ……..... 35
*2.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы …….....* 35
*2.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции …….....* 36
*2.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……...* 38

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) ……..... 53
*3.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы …….....* 53
*3.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции …….....* 54
*3.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……...* 58

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность) ……..... 74
*4.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы …….....* 74
*4.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции …….....* 82
*4.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……...* 82

## *ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)*

***Тематика общения:***

1. Я и моя семья.
2. Дом, жилищные условия.
3. Мой рабочий день.
4. Досуг и развлечения.

***Проблематика общения:***

1. Взаимоотношения в семье, семейные традиции.
2. Устройство квартиры/загородного дома.
3. Рабочий день студента.
4. Досуг в будние и выходные дни, активный и пассивный отдых.

### *1.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:*

**родственник** relative, relation
**родители** parents
**мать (мама)** mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
**отец (папа)** father (dad, daddy, papa, pa)
**жена** wife
**муж** husband
**супруг(а)** spouse
**ребенок, дети** child, children
**дочь** daughter
**сын** son
**сестра** sister
**брат** brother
**единственный ребенок** only child
**близнец** twin
**близнецы, двойняшки** twins
**брат-близнец** twin brother
**сестра-близнец** twin sister
**однояйцевые близнецы** identical twins
**тройняшки** triplets
**бабушка и дедушка** grandparents
**бабушка** grandmother (grandma, granny, grandmamma)
**дедушка** grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
**внуки** grandchildren
**внучка** granddaughter
**внук** grandson
**прабабушка** great-grandmother
**прадедушка** great-grandfather
**прабабушка и прадедушка** great-grandparents
**правнуки** great-grandchildren
**тётя** aunt
**дядя** uncle
**крестный (отец)** godfather
**крестная (мать)** godmother
**отчим, приемный отец** stepfather
**мачеха, приемная мать** stepmother
**сводный брат** stepbrother
**сводная сестра** stepsister
**брат по одному из родителей** half-brother
**сестра по одному из родителей** half-sister

**приемный, усыновленный сын** adopted son
**приемная, удочеренная дочь** adopted daughter
**приемный ребенок** adopted child
**патронатная семья, приемная семья** foster family
**приемный отец** foster father
**приемная мать** foster mother
**приемные родители** foster parents
**приемный сын** foster son
**приемная дочь** foster daughter
**приемный ребенок** foster child
**неполная семья (с одним родителем)** single-parent family
**родня** the kin, the folks
**племянница** niece
**племянник** nephew
**двоюродный брат** cousin (male)
**двоюродная сестра** cousin (female)
**двоюродный брат (сестра), кузен (кузина)** first cousin
**троюродный брат (сестра)** second cousin
**четвероюродный брат (сестра)** third cousin
**родня со стороны мужа или жены** in-laws
**свекровь** mother-in-law (husband's mother)
**свёкор** father-in-law (husband's father)
**тёща** mother-in-law (wife's mother)
**тесть** father-in-law (wife's father)
**невестка, сноха** daughter-in-law
**зять** son-in-law
**шурин, свояк, зять, деверь** brother-in-law
**свояченица, золовка, невестка** sister-in-law
**семейное положение** marital status
**холостой, неженатый, незамужняя** single
**женатый, замужняя** married
**брак** marriage
**помолвка** engagement
**помолвленный, обрученный** engaged
**развод** divorce
**разведенный** divorced
**бывший муж** ex-husband
**бывшая жена** ex-wife
**расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей** separated
**вдова** widow
**вдовец** widower
**подружка, невеста** girlfriend
**друг, парень, ухажер** boyfriend
**любовник, любовница** lover
**ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный** fiance
**свадьба** wedding
**невеста на свадьбе** bride
**жених на свадьбе** (bride)groom
**медовый месяц** honeymoon

***1.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**My family**

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

***My student's life***

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV

programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

***My flat***

I live in Ekaterinburg in a sixteen-storied dwelling house in the center of the city.
Five years ago our old wooden house was pulled down & we moved here into three-room flat with all modern conveniences.

Now we have running water, gas, electricity, central heating & a refuse chute. We live on the top floor & from the balcony we have a good view of the park. Besides we needn't mount the staircase because there is a lift to take us up.

The entrance hall is rather small. There is a hallstand & a mirror-stand there.

The sitting-room is a spacious simply furnished room. The floor spacious is about 15 square meters. It is not overcrowded with furniture. Everything fits in well. Nothing is out of place here. Next to the window there is a sofa with a stand – lamp. The bookcase in the corner of the room is full of books. On the left there are two comfortable arm-chairs opposite the TV-set & leaf – table.

In the bedroom we have dark brown suite of furniture of the latest model & thick carpet. Near the wall there is a divan-bed. In the built-in-wardrobe we keep our clothes & bed linen.
The adjoining room is the children's room. The bright pattern of the curtains & of wall paper makes the room look gay. There is a writing desk with a desk lamp, a small sofa & a lot of toys there.

In the kitchen there is a fridge, a cupboard, a kitchen table & a gas-stove. Over the sink there is a plate-rack. All kitchen utensils are close at hand.

In the corridor there is a built-in-closet, where we keep our vacuum-cleaner, electric iron & other household objects.

In the bathroom there is a bath-tub & a shower, a towel-rack & a wash-basin with a shelf above it. There tooth-brushes, a cake of soap & some shaving articles on it. Near the bath-room there is a lavatory.

There is nothing special about our flat, no rich decorations but we are accustomed to it & cannot compare it to the old one.

***1.3 Систематизация грамматического материала:***

1. Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях. Порядок слов в вопросительном предложении. Безличные предложения.
2. Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные).
3. Имя существительное. Артикли (определенный, неопределенный, нулевой).
4. Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have.* Оборот *there+be*.
5. Имя прилагательное и наречие. Степени сравнения. Сравнительные конструкции.
6. Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат).

**Порядок слов в английском предложении**

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

| I | II | III Дополнение | IV |
|---|---|---|---|

| | | | | | Обстоятельство |
|---|---|---|---|---|---|
| **Подлежащее** | **Сказуемое** | **Косвенное без предлога** | **Прямое** | **Косвенное с предлогом** | |
| We<br>Мы | study<br>изучаем | | math<br>математику | | |
| He<br>Он | gives<br>дает | us<br>нам | lessons<br>уроки | | in this room.<br>в этой комнате |
| She<br>Она | reads<br>читает | | her notes<br>свои заметки | to Peter<br>Петру | every day.<br>каждый день |

***Вопросительное предложение***

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

**Общие вопросы**

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.

Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?

Примеры с модальными глаголами:

She can drive a car. – Она умеет водить машину.

Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot )

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.

Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?

Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

***Ответы на общие вопросы***

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not

Например: Are you a student? - Ты студент?

Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.

Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

**Специальные вопросы**

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.

Специальные вопросы могут начинаться словами:

who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?

when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?

how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?

how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

**Вопрос к прямому дополнению:**

What are you reading? Что ты читаешь?

What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

**Вопрос к обстоятельству**

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.

When will he come back? – Когда он вернется?

What did he do it for? Зачем он это сделал?

Where are you from?

**Вопрос к определению**

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?

Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

**Вопрос к сказуемому**

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: "Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?", например:

What does he do? Что он делает?

**Специальные вопросы к подлежащему**

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)

what - что (для неодушевленных существительных)

The teacher read an interesting story to the students yesterday.

Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):
Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

**Альтернативные вопросы**

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

**Разделительные вопросы**

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:
You speak French, don’t you? You are looking for something, aren’t you? Pete works at a plant, doesn’t he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:
It is not very warm today, is it? John doesn’t live in London, does he?

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Write questions and answers for the following statements, as in the example.***

1 Paul was tired when he got home.
*…Was Paul tired when he got home? Yes, he was…*
2 They live in London.
3 She can't play the piano.
4 The film starts at nine o'clock.
5 You had an English lesson last night.
6 She has got blue eyes.
7 We didn't want to go to the beach.
8 He should follow the doctor's advice.

***2. Write the short form of the following negative questions***

1 Can they not decide where to go on holiday?

*...Can't they decide where to go on holiday?...*

2 Did Claire not invite you to her party?

3 Do you not enjoy watching horror films?

4 Have you not finished your homework yet?

5 Can she not go to town on her own?

6 Does he not know where we live?

7 Has Sue not done the shopping for you?

8 Did he not give you any details?

***3. Fill in the gaps with the correct question word(s).***

A: Now for the general knowledge part of the quiz.

1) ...*What*... is the capital of Egypt?

B: Cairo.

A: That's correct. 2) … can you see the Mona Lisa?

B: In the Louvre, in Paris.

A: Well done, that's right. 3) … wrote 'Romeo and Juliet'?

B: Charles Dickens.

A: No, that's incorrect. It was Shakespeare. 4) … are the Olympic Games held?

B: Every four years.

A: Correct. 5) … did the Second World War begin?

B: I think it was in 1939.

A: Yes, you're right. And the final question in this round is: 6) … players are there in a hockey team?

B: Eleven.

A: Correct. Well, at the end of that round, Contestant 2 has the most points, so he goes through to the final round to play for our star prize.

***4. Fill in who, whose, what, which, where, when, how long, how often, what time, why, how much or how many.***

is your jacket?' 'It's the red one.'

1. '...*Which*... is your jacket?' 'It's the red one.'

2. '…is your birthday?' 'It's next week.'

3. '… is Mary?' 'She's in her bedroom.'

4. '… have you been waiting?' Only five minutes.'

5. '… do you go shopping?' Once a week.'

6. '… are you doing at the moment?' I'm watching TV.'

7. ' … are you writing to?' 'Uncle Tom.'

8. '…do you start work?' At nine o'clock in the morning.'

9. '… pieces of toast do you want?' Two, please.'

10. '… isn't she at work today?' Because she's ill.'

11. '… did you spend last month?' About £500.'

12. ' … party are you going tonight?' 'Alison's'

***5. Fill in the gaps with what, which or how.***

1 A: ...*What*... do you want to do when you leave school?
B: I'm not really sure. I'd like to be a vet.

2 A: … bag do you prefer - the black one or the brown one?
B: I like the black one best.

3 A: … old are you?
B: It was my birthday last week. Now I'm fifteen.

4 A: … did you get my telephone number?
B: I looked in the staff address book.

5 A: … shall we do on Saturday?
B: Let's just stay at home and watch a video.

6 A: … house did you prefer — the one we saw first or second?
B: I didn't like either. We'll have to keep looking.
7 A: … many pairs of shoes did you buy last year?
B: Only two. One in the summer and one in the winter.
8 A: … is your favourite food?
B: Roast chicken.

***6. Write questions to which the words in bold are the answers.***

1 **The tiger** is the largest member of the cat family.
*…Which is the largest member of the cat family?...*
2 A mature male tiger weighs **between 160 and 230 kg**.
3 Tigers are usually **orange with black stripes**.
4 Tigers live **in Russia, China, India and South-East Asia.**
5 **The Javan tiger, the Bali tiger and the Caspian tiger** are extinct.
6 Tigers eat **a variety of smaller animals, including deer.**
7 Tigers can produce young **at any time of year.**
8 Tigers usually have **two or three** cubs at a time.
9 Tigers live **for an average of eleven years.**
10 Tigers are hunted **for sport or for their fur**.

***7. Write questions to which the words in bold are the answers.***

Claudette is **32 years old**. She lives **in Paris, France**, and has lived there **since she was 5 years old.** Claudette works as **a lawyer** for a successful law firm, and she travels to work **by car** every day. Claudette is married. Her husband's name is **Jean**. They have **two** dogs. She loves **to take the dogs for long walks** every evening **after work.** Claudette has several hobbies, such as **reading and playing the piano**, but her **favourite hobby is cooking**. Jean thinks this is good, too, **because he gets to eat the wonderful meals she makes.**

***8. Write questions to which the words in bold are the answers.***

1 **The Petersons** have bought a dog.
*…Who has bought a dog?...*
2 The Petersons have bought **a dog.**
*…What have the Petersons bought?...*
3 Rachel is writing **a letter**.
4 **Rachel** is writing a letter.
5 **Brian** likes this car.
6 Brian likes **this car**.
7 Dad broke **the window**.
8 **Dad** broke the window.
9 **Mother** will make a birthday cake.
10 Mother will make **a birthday cake**.
11 **Robin** is going to bake some biscuits.
12 Robin is going to bake **some biscuits**.

***9. Write questions to which the words in bold are the answers.***

1 Wendy doesn't agree with **her friend's decision**.
*…What doesn't Wendy agree with?...*
2 James is listening to **some old records**.
3 Sharon is waiting for **the bus**.
4 The boys were talking about **football**.
5 She has got a letter from **her pen-friend**.
6 Martin is thinking about **his holiday**.
7 This jacket belongs to **Stacey.**
8 Pauline was married to **Nigel.**

***10. Complete the questions.***

1 There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which …*book is Sue's*...?' 'The one on the table.'
b) 'Whose …*book is on the table*…?' 'Sue's.'
2 Steven wrote four letters.
a) 'Who … ?' 'Steven.'
b) 'How many … ?' 'Four.'
3 Teresa is going to wash the car.
a) 'Who … ?' Teresa.'
b) 'What … ?' 'The car.'
4 Kate visited John in hospital yesterday.
a) 'Who … ?' 'Kate.'
b) 'Who … ?' 'John.'
5 David has taken Frank's new CD.
a) 'Whose …?' 'Frank's.'
b) 'Who …?' 'David.'
6 Alice is going to the cinema tonight.
a) 'Who …?' 'Alice.'
b) 'Where …?'The cinema.'

**Безличные предложения**

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

**Местоимение. The Pronoun.**
**Классификации местоимений.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | **personal** | личные |
| 2 | **possessive** | притяжательные |
| 3 | **demonstrative** | указательные |
| 4 | **indefinite and negative** | неопределенные и отрицательные |
| 5 | **quantifiers** | количественные |
| 6 | **reflexive** | возвратные |
| 7 | **reciprocal** | взаимные |
| 8 | **relative** | относительные |
| 9 | **defining** | определительные |
| 10 | **interrogative** | вопросительные |

***I. Личные (personal) местоимения***

| **Общий падеж** | | **Объектный падеж** | |
|---|---|---|---|
| **I** | я | **me** | мне, меня |
| **he** | он | **him** | его, ему |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **she** | она | **her** | ей, о ней |
| **it** | оно, это | **it** | ей, ему, этому |
| **we** | мы | **us** | нам, нас |
| **they** | они | **them** | им, их |
| **you** | ты, вы | **you** | тебе, вам |

**Внимание! He (он**) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

| **he** | **she** | **it** |
|---|---|---|
| **a boy –** мальчик | **a girl –** девочка | **a cat –** кот |
| **a man –** мужчина | **a woman –** женщина | **a wall –** стена |
| **brother –** брат | **sister – с**естра | **rain –** дождь |
| **father –** отец | **motherч–** мама | **love –** любовь |
| **Nick –** Николай | **Kate –** Катя | **a hand –** рука |
| **Mr Grey –** мистер Грей | **Mrs Grey –** миссис Грей | **an apple -** яблоко |

**Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).**

### *II. Притяжательные (possessive) местоимения*

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы** - **основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
**Whose pen is it?** - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

| **Личное местоимение** | **Основная форма** | **Абсолютная форма** |
|---|---|---|
| **I –** я | **my (toy) -** моя (игрушка) | **his -** его |
| **he –** он | **his (toy) -** его (игрушка) | **hers -** ее |
| **she –** она | **her (toy) -** ее (игрушка) | **its -** его (этого) |
| **it – оно,** это | **its (toy) -** его (не о человеке) | **ours -** наша |
| **we –** мы | **our (toy) -** наша (игрушка) | **yours -** ваша, твоя |
| **you –** ты, вы | **your (toy) -** ваша, твоя (игрушка) | **theirs -** их |
| **they -** они | **their (toy) -** их (игрушка) | |

### *III. Указательные (demonstrative) местоимения*

**this** (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

### *IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения*

**Местоимения some, any, every, и их производные**

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
**I have/l have got three apples.** *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

### *Производные от неопределенных местоимений*

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

**Thing используется для неодушевленных (что-то):**

**some** **something –** *что-то, что-нибудь*

| | |
|---|---|
| **any** | **anything -** *что-то, что-нибудь* |
| **thing** | |
| **no** | **nothing -** *ничего, ничто* |
| **every** | **everything -** *все* |
| **Body/one - для одушевленных (кто-то):** | |
| **some** | **somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь* |
| **any** | **anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь* |
| **body/one** | |
| **no** | **nobody / no one -** *никого, никто* |
| **every** | **everybody /everyone –** *все, каждый* |

Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*

| | |
|---|---|
| **somewhere -** *где-нибудь, куда-нибудь* | **anywhere -** *где угодно* |
| **nowhere -** *нигде* | **everywhere -** *везде* |

### *V. Количественные (quantifiers) местоимения*

**Many и much -** оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.

| | |
|---|---|
| **many girls -** *много девочек* | **much snow -** *много снега* |
| **many boys -** *много мальчиков* | **much money -** *много денег* |
| **many books -** *много книжек* | **much time -** *много времени* |

| | |
|---|---|
| **How many?** } **сколько?** | **How many girls? -** *Сколько девочек?* |
| | **How much sugar? -** *Сколько сахара?* |
| **How much?** | **How much sugar? -** *Сколько сахара?* |

**a lot of... -** много - используется и с исчисляемыми, girls – много девочек
и с неисчисляемыми существительными **a lot of**
a lot без (of) используется и без существительного. sugar - много сахара
**Сравните**: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.*
He writes **a lot.** *Он много пишет.*

<u>В утвердительных</u> предложениях используйте **a lot of.**
<u>В отрицательных</u> и в вопросительных **many/much,**
**Сравните:**
(+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*.
(-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?*
Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":**
Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.

**Few, little, a few, a little**
**С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало), а с исчисляемыми - few (мало).**

| | |
|---|---|
| **few books -** мало книг | **little time -** мало времени |
| **few girls -** мало девочек | **little money -** мало денег |
| **few boys -** мало мальчиков | **little snow -** мало снега |
| **little** } **мало (т.е. надо еще)** | **a little** } **немного (т.е. пока хватает)** |

| few | a few |
|---|---|

### *VI. Возвратные (reflexive) местоимения*

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

| Личное местоимение | Возвратное местоимение | Пример | Перевод |
|---|---|---|---|
| I | myself | I did it myself. | Я сделал это сам |
| he | himself | He did it himself. | Он сделал это сам. |
| she | herself | She did it herself. | Она сделала это сама |
| you | yourself | You did it yourself. | Вы сделали это сами. |
| they | themselves | They did it themselves. | Они сделали это сами. |
| we | ourselves | We did it ourselves. | Мы сделали это сами. |

### *VII. Взаимные (reciprocal) местоимения*

**Each other -** друг друга (относится к двум лицам или предметам).
**One another -** друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
**They spoke to <u>each other</u> rather friendly.** *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
**They always help <u>one another</u>.** *Они всегда помогают друг другу.*

### *VIII. Относительные (relative) местоимения*

**Who (whom), whose, which, that**

| | |
|---|---|
| **who** | **Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)**<br>**The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.* |
| | **Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение)**<br>**The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.* |
| **which** | **Для неодушевленных предметов и животных**<br>**The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.* |
| **whose** | **Для одушевленных существительных**<br>**This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.* |
| | **Для неодушевленных существительных**<br>**We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.* |
| **that** | **Для одушевленных существительных**<br>**This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.* |
| | **Для неодушевленных существительных**<br>**This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.* |

## *IX. Определительные (defining) местоимения*

**all**

| Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|
| **определяет неисчисляемые существительные** | He spent **all his** time fishing on the lake**.** | Он провел все свое время, ловя рыбу на озере. |
| **определяет исчисляемые существительные** | **All the** boys like football. **(the после all!)** | Все мальчишки любят футбол. |
| **all = everything** | I know **all/everything.** | Я знаю всё. |
| **all = everybody** | **All** were hungry. **Everybody** was hungry. | Все были голодны. Все были голодны. |
| **we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them** | We **all** love you very much = **All** of us love you very much. | Мы все тебя очень любим |

**both**

| Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|
| определяет существительные | **Both (the/my) friends like football.** | Оба моих друга любят футбол |
| допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both | **Both these/the men are Russian.** | Оба (эти) мужчины - русские. |
| употребляется вместо существительного | **He gave me two apples. Both were sweet.** | Он дал мне два яблока. Оба были сладкими. |
| they both = both of them you both = both of you we both = both of us | **They both (both of them) came to visit us.** | Они оба пришли навестить нас. |
| в устойчивой конструкции **both...and.** | **Both mother father were at home** | И мама, и папа были дома. |
| в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither** | **Both of them know English. Neither of them know English.** | Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского. |

**either/neither**

| | Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|---|
| **either** | любой из двух (артикль не ставится) | **I've got 2 cakes. Take either cake.** | У меня 2 пирожных. Возьми любое. |
| | каждый, оба, и тот, и другой | **There are windows on either side of the house.** | С обеих сторон дома есть окна. |
| | заменяет существительное (глагол в ед. числе) | **Either of dogs is always hungry.** | Любая из собак вечно голодная. |
| **neither** | отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой) | **Neither of examples is correct.** | Ни один из примеров не верен. |
| | в констр. neither.. .nor (ни.. .ни) | **I like neither tea, nor coffee.** | Я не люблю ни чай, ни кофе. |

**other, another, the other, the others (другой, другие)**

| | Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|---|
| **the other** | другой (второй), другой из двух | **You've got 2 balls: one and the other.** | У тебя 2 мяча: один и другой. |
| **another** | другой из многих, еще один | **Take another ball.** | Возьми другой мяч. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | (Любой, но не этот.) |
| **other** | другие (любые), не последние | **Take other 2 balls.** | Возьми другие 2 мяча. (Из многих.) |
| **the others** | другие (определенные) | **There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.** | Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие. |

***X. Вопросительные (interrogative) местоимения***

| | | | |
|---|---|---|---|
| **what** | что | **What's this?** | Что это? |
| **which** | который | **Which of them?** | Который из них? |
| **who** | кто, кого | **Who was that?** | Кто это был? |
| **whom** | кого | **Whom did you meet?** | Кого ты встретил? |
| **whose** | чей | **Whose book is it?** | Чья это книга? |

Имя существительное. The Noun

| Категории | Существительное в русском языке | Существительное в английском языке |
|---|---|---|
| Число | **Изменяется** | **Изменяется** |
| Падеж | **Изменяется** | **Не изменяется** |

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***. Fill in the gaps with the correct subject or object pronoun.***

1 A: Do your brothers play football?
B: Yes, ...*they*... play … all the time … think …'s a brilliant game.
2 A: Does Susan eat chocolate?
B: Yes … eats … all the time … says …'s her favourite food.
3 A: Do your parents know Mr. Jones?
B: Yes, … know … very well … lives next door to … .
4 A: Does Claire like David?
B: No, … doesn't like … very much. … says …'s too noisy.
5 A: Do you listen to rock music?
B: Yes, … listen to … all the time. … think …'s fantastic.
6 A: Does Tony enjoy fishing?
B: Oh, yes … enjoys … very much. .... says … relaxes him.

***2. Fill in the gaps with there or it.***

1 By the time I got home, ...*it*… was nearly ten o'clock.
2 'Is … your birthday today?" No, … was last week.'
3 Come here, Simon … is someone here to see you. I think … is your friend, Rod.
4 … wasn't warm enough to go to the beach, so we went to the cinema.
5 … wasn't very much money left after I had paid for the shopping.

***3. Fill in the gaps with one or it.***

1 A: I need a loaf of bread.
B: I'll buy ...*one*... this afternoon.
2 A: Is the phone ringing?
B: I can't hear … .
3 A: 'Titanic' is an amazing film.
B: I know. I've seen … twice.
4 A: When was the last time you read a book?
B: I haven't read … for months.

5 A: Have you got a car?
B: No. I can't afford … .
6 A: Do you like the new Rolling Stones CD?
B: I haven't heard … yet.
7 A: I need a dress for the party.
B: I'll lend you … .

***4. Fill in the correct possessive adjective or pronoun.***

1 A: Have you met ...*your*... new neighbours yet?
B: No. I've seen … children in the garden, though.
2 A: You took … coat home last night.
B: I know, I'm sorry. I thought it was … because they're both black.
3 A: What's wrong with Rosie?
B: Oh, she's been having problems with … back recently.
4 A: James is doing well at school.
B: I know … teacher says he's very advanced for his age.
5 A: Is this bag … ?
B: Oh, yes, thank you. I nearly forgot it.
6 A: Julie and Frank are so lucky … house is beautiful.
B: Yes, and it's so much bigger than … I envy them.
7 A: I like … shirt. It's like Sandra's.
B: Actually, it is … I borrowed it from her yesterday.
8 A: Why did you lend Tom … car?
B: Because … is being repaired at the moment.

***5. Fill in its or it's.***

1 The car is nice to drive, but I don't like ...its... colour.
2 This town is wonderful … got lots of shops!
3 I'm staying at home today because … cold outside.
4 Let's go in here … my favourite restaurant.
5 A bird has built … nest in our garden.
6 The company I work for has changed … name.

***6. Fill in a possessive adjective or the.***

1 A dog bit him on ...*the*... leg.
2 I banged … head on the cupboard door.
3 Karen put … arm around Jane's shoulder.
4 Don't put … feet on the tablel
5 You shouldn't have punched Tom in … stomach.
6 Paul patted Lisa on … shoulder.

***7. Fill in the gaps with of where necessary, and my, your, etc. own.***

1 John doesn't live with his parents any more. He's got a flat ...*of his own*...
2 She doesn't travel by bus any more because she's got … car.
3 I don't need to borrow your umbrella. I've got one … .
4 Haven't you got … pen? You're always borrowing mine.
5 My job includes doing research in … time.
6 Sam is tired of using his friend's computer, so he is going to buy one… .
7 The couple moved into … house after they got married.
8 Don't let the dog sleep on your bed. It's got a bed … .

***8. Connect the nouns using -'s, -' or ...of…***

1 car/Helen ...*Helen's car*…
2 the manager/the restaurant
3 shoes/women
4 the results/the test
5 bicycles/my daughters

6 secretary/the assistant manager
7 the corner/the room
8 house/their parents
9 the back/the classroom
10 shoes/William
11 walk/an hour
12 partner/Jim
13 Rome/the streets
14 UN/headquarters

***9. Rewrite the sentences using the correct possessive form.***

1 Nobody went to **the meeting last week**.

*...Nobody went to last week's meeting....*

2 The **drive** to the airport takes **two hours**.
3 They will get their exam results **six weeks from now**.
4 I look after **James - Karen — children**.
5 I received the letter in **the post - yesterday**.
6 It's autumn. **The tree - the leaves** are falling off.
7 Graham never listens to **his doctor - the advice.**
8 Are you going to **Jane - Paula - the party**?
9 He has never done a hard **day of work** in his life.
10 At the moment I'm staying with **a friend - my**.
11 I think I'll order **the special of today**.
12 The man knocked on **the house - the door**.
13 The ticket inspector looked at **the people – the tickets.**
14 **Mrs Jones - Miss Smith - cars** are being serviced.
15 **The sales target this month** is two million pounds.

***10. Fill in the gaps with the correct reflexive pronoun.***

1 The girl has hurt … *herself... .*
2 He put the fire out by …
3 She is looking at … in the mirror.
4 They are serving …
5 He cooked the food by …
6 They bought this house for …
7 They are enjoying …
8 He introduced …

## The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

| Способ образования | Примеры | Перевод |
|---|---|---|
| **после глухих согласных** | **a book - books**<br>**a cup - cups** | **книга - книги**<br>**чашка - чашки** |
| **после звонких согласных и гласных -** | a name - names<br>a girl - girls | **имя - имена**<br>**девочка - девочки** |
| после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es | a palace - palaces<br>a bush - bushes<br>a box - boxes<br>a church - churches | дворец - дворцы<br>куст - кусты<br>коробка - коробки церковь - церкви |
| слово заканчивается на -y: 1) гласная +y | **a toy - toys**<br>**a boy - boys** | игрушка - игрушки мальчик - мальчики |

| | | |
|---|---|---|
| **2)** согласная + y | **a family - families**<br>**a story - stories** | **семья - семьи**<br>**история - истории** |
| слово заканчивается на *-file* | **a leaf - leaves**<br>**a shelf - shelves** | лист - листья<br>полка - полки |

Особые случаи образования множественного числа

| **Ед. число** | **Мн. число** | **Перевод** |
|---|---|---|
| man | men | мужчина - мужчины |
| woman | women | женщина - женщины |
| foot | feet | нога (стопа) - ноги (стопы) |
| child | children | ребенок - дети |
| goose | geese | гусь - гуси |
| mouse | mice | мышь - мыши |
| **ox** | oxen | **бык - быки** |
| **tooth** | teeth | **зуб - зубы** |

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):
This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

| **Со словами** one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.** | |
|---|---|
| **What apple do you want?**<br>**Какое ты хочешь яблоко?**<br>**The red one. Красное.** | **What apples do you want?**<br>**Какие яблоки ты хочешь?**<br>**The red ones. Красные.** |

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

| | |
|---|---|
| И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски. | This girl speaks English well. |
| Р. п. Это собака той девочки. | It’s a dog of that girl. |
| Д. п. Я дал яблоко той девочке. . | I gave an apple to that girl. |
| В. п. Я вижу маленькую девочку. . | 1 can see a little girl. |
| Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой. | 1 like to play with this girl. |
| П. п. Я часто думаю об этой девочке. | 1 often think about this girl. |

**Притяжательный падеж. The Possessive Case**
**Образование притяжательного падежа**

| | **Образование** | **Примеры** | **Перевод** |
|---|---|---|---|
| существительные в единственном числе | **’s** | **bird’s house**<br>**child’s ball** | домик птички<br>мячик ребенка |
| существительные во множественном числе (группа исключений} | **’s** | **children’s bail**<br>**women’s rights** | мячик детей<br>права женщин |
| существительное во множественном числе | **’** | **girls’ toy**<br>**birds’ house** | игрушка девочек<br>домик птичек |

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother’s book - мамина книга,

this girl’s bail - мячик девочки,

the bird’s house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Fill in the gaps with an appropriate noun + of to indicate quantity.***

1 a ... carton/glass/jug of ... orange juice
2 a … cheese
3 a … bread
4 a … coffee
5 a … water
6 a … wine
7 a … chocolate
8 a … crisps
9 a … honey
10 a … meat
11 a … spaghetti
12 a … flour

***2. Fill the gaps with a, an, or some where necessary.***

1 a) We had ...some... delicious food last night,
b) We had ...a... delicious meal last night.
2 a) There is … beautiful furniture in that shop,
b) There is … beautiful table in that shop.
3 a) I'm thirsty. I need … drink.
b) I'm thirsty. I need … water.
4 a) She's just bought … expensive clothes.
b) She's just bought … expensive dress.
5 a) They booked … room in advance.
b) They booked … accommodation in advance
6 a) The band played … lovely song.
b) The band played … lovely music.
7 a) We had … heatwave last week.
b) We had … hot weather last week.
8 a) I can't do this job alone. I need … assistant
b) I can't do this job alone. I need … help.
9 a) He has got … heavy luggage to carry.
b) He has got … heavy suitcase to carry.
10 a) I need … cutlery to eat this food with.
b) I need … knife and fork to eat this food with.
11 a) She has got … important job to do.
b) She has got … important work to do.
12 a) He found … coin on the ground.
b) He found … money on the ground.

***3. Complete the sentences using the noun in brackets in the singular or plural form and a/an where necessary.***

1. He gave me a box' of my favourite ...chocolates.... (chocolate)
2. His favourite food is … . (chocolate)
3. She bought … on her way to work. (paper)
4. He placed all the important … in his briefcase. (paper)
5. I need some … to write this message on. (paper)
6. Hurry up! We don't have much …. (time)
7. She has visited us several … this month. (time)
8. He has no … but he is keen to learn. (experience)
9. She had a lot of exciting … during her travels. (experience)
10. We went far a walk in the … after lunch. (wood)
11. His desk is made of ……. . (wood)
12. Jane is in her… reading a book. (room)
13. We have got plenty of … for a party in here. (room)
14. I am going to have my … cut tomorrow. (hair)
15. There was …in my soup. (hair)
16. I'm thirsty. I need … of water. (glass)
17. Susan only wears her … when she reads. (glass)
18. This ornament is made of coloured …. . (glass)
19. Helen bought … in the sale at the electrical store. (iron)
20. The old gate was made of … .(iron)

***4. Cross out the expressions which cannot be used with the nouns, as in the example.***

1 There are **several, many, <u>much,</u> plenty of, <u>too little</u>** things you can do to help.
2 He has met **a couple of, a few, very little, plenty of, too much** interesting people.
3 She earns **few, hardly any, plenty of, several, a great deal** of money.
4 We have got **no, many, lots of, a great deal of, a few** work to do.
5 Don't worry, there's **a little, plenty of, a couple of, many, a lot of** time.
6 **Both, Several, A large quantity of, Plenty of, Too much** students applied for the course.
7 He's got **no, hardly any, a little, some, a small amount of** qualifications.
8 She's got **hardly any, several, a little, a few, a lot of** experience in dealing with customers.
9 There is **too much, a lot of, hardly any, few, several** salt in this soup.
10 There is **a little, many, too much, a great number of, some** traffic on the roads today.

***5. Underline the correct word.***

1 A: I have a Physics exam tomorrow.
B: Oh dear. Physics **<u>is</u>/are** a very difficult subject.
2 A: My office is three miles from my house.
B: Three miles **is/are** a long way to walk to work.
3 A: My little brother has got measles.
B: Oh dear. Measles **is/are** quite a serious illness.
4 A: Jane looked nice today, didn't she?
B: Yes. Her clothes **were/was** very smart.
5 A: I've got two pounds. I'm going to buy a CD.
B: Two pounds **is/are** not enough to buy a CD.
6 A: The classroom was empty when I walked past.
B: Yes. The class **was/were** all on a school outing.
7 A: Have you just cleaned the stairs?
B: Yes, so be careful. They **is/are** very slippery.
8 A: Did you ask John to fix your car?
B: Yes. His advice **was/were** that I take it to a garage.

9 A: Did you enjoy your holiday?
B: Yes, thank you. The weather **was/were** wonderful.
10 A: These trousers **is/are** very old.
B: You should buy a new pair.
11 A: How **is/are** the company doing lately?
B: Great. We opened up two more branches.
12 A:' I am going to travel for two years when I finish school.
B: Two years **is/are** a long time to be away from home.

***6. Finish the sentences, as in the example.***

1 You need a lot of experience to do this job. A lot of experience ...is needed to do this job...
2 They gave us some interesting information. The information …
3 She likes Maths more than any other subject. Maths …
4 We had mild weather this winter. The weather …
5 We called the police immediately. The police …
6 I told them some exciting news. The news …
7 He was irritated because of the bad traffic. He was irritated because the …
8 I stayed in very luxurious accommodation. The accommodation …
9 The driver took the luggage out of the car. The luggage …
10 She gave me very sensible advice. The advice she gave me …
11 These shorts are too big for me. This pair of shorts …
12 The hotel is in magnificent surroundings. The hotel surroundings …
13 She's got long blonde hair. Her hair …

## Артикль. The Article

**1. Неопределенный a/an (**используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

**2. Определенный the (**может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово “an hour” (час) начинается с согласной буквы “h”, но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю “a” также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

**Использование неопределенного артикля a**

| | |
|---|---|
| один из множества (любой) | This is a cat. |
| первое упоминание в тексте | I see a bird. |
| при упоминании профессии | My brother is a pilot. |
| в восклицательных предложениях | What a good girl!<br>What a surprise! |

| | |
|---|---|
| | Such a fine room! |
| вместо слова один | She is coming for a weak. |
| в определенных конструкциях<br>there is a...<br>I have a…<br>he has a...<br>I see a...<br>this is a...<br>that is a…<br>It is a...<br>Iama…<br>he/she is a… | There is a book here.<br>I have got a nice coat.<br>He has a kind smile.<br>I see a wolf.<br>This is a dog.<br>That is a doctor.<br>It is a red pen.<br>I am a good swimmer.<br>He/she is a tourist |
| в ряде устойчивых словосочетаний<br>at a quarter..,<br>in a loud, (a low, an angry voice)<br>to have a good time<br>a lot of<br>to go for a walk<br>such a...<br>after a while<br>in a day (a month, a week, a year) | Come at a quarter to 8.<br>Don't speak to him in an angry voice.<br>We had a good time in the country.<br>She has got a lot of presents.<br>Let's go for a walk.<br>He is such a clever boy.<br>You'll see them after a while.<br>We are living in a day. |

**Использование определенного артикля the**

| | |
|---|---|
| если речь идет о конкретном лице или предмете | The pen is on the table. |
| при повторном упоминании того же самого объекта | I see a cat. The cat is black. |
| если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света | the sun, the moon, the Earth |
| со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный) | The only man I love<br>the main road<br>to the left, to the right<br>It was the right answer. the final test |
| с порядковыми числительными | the first, the tenth |
| с прилагательными в превосходной степени | the kindest, the most interesting<br>the best |
| с музыкальными инструментами и танцами | to play the piano, to dance the tango |
| с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры) | The Britons keep their traditions. |
| с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов | the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street |
| с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of | the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard |

**Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний**

| | |
|---|---|
| in the middle, in the corner | The table is in the middle of the room. |
| in the morning, In the evening, in the afternoon | I never drink coffee in the evening. |
| what’s the use? | What's the use of going there so late? |
| to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market | Do you like going to the theatre?<br>He works at the shop. |

| | |
|---|---|
| at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market<br>the fact is (was) that...<br>where is the…?<br>in the country, to the country | The fact is that I have no money at all.<br>Where is the doctor?<br>We always spend summer in the country. |

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

**Случаи, когда артикль не употребляется**

| | |
|---|---|
| если, перед существительным стоит притяжательное местоимение | a pen - my pen<br>a dog - his dog<br>the teacher - our teacher<br>the apple - her apple |
| если перед существительным стоит указательное местоимение | the cats - those cats<br>the books - these books<br>a mouse - this mouse |
| если стоит другое существительное в притяжательном падеже | a car - father's car<br>the horse - farmer's horse<br>a bike - brother's bike<br>the doll - sister's doll |
| если перед существительным стоит, количественное числительное | 5 balls, 7 bananas, 2 cats |
| если перед существительным стоит отрицание “no” | She has no children.<br>I see no birds. |
| перед именами | Mike, Kate, Jim, etc |
| с названиями дней недели | Sunday, Monday, etc. |
| с названиями месяцев | May, December, etc. |
| с названиями времен года | in spring, in winter |
| с названиями цветов | white, etc.<br>I like green |
| с названиями спортивных игр | football, chess, etc. |
| с названиями блюд, напитков | tea, coffee, soup, etc, |
| с названиями праздников | Easter, Christmas, etc. |
| с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the | English, etc. I learn English, the English language |
| с названиями стран | Russia, France, etc HO: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo |
| с названиями городов | Moscow, Paris, etc. |
| с названиями улиц, площадей | Trafalgar Square |
| с названиями парков | St James’ Park, Hyde Park |
| с названиями мостов | Tower Bridge |
| с названиями одиночных гор | Kilimanjaro |
| с названиями озер | Loch Ness |
| с названиями континентов | Asia, Australia, etc. |
| с названиями одиночных островов | Cyprus |
| если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное | what animals can swim? I know what thing you have lost! |

| | |
|---|---|
| местоимение | |

## ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

**По своей структуре** глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

**По значению** глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

**Все формы глагола в английском языке делятся на** личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

**Глаголы в изъявительном наклонении** выражают реальное действие, передают факты: His son goes to school. Его сын учится в школе.
She has written an interesting article. Она написала интересную статью.
A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

**Глаголы в повелительном наклонении** выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:
"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.
Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

**Глаголы в сослагательном наклонении** выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

**Глаголы в действительном залоге** выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

**Глаголы в страдательном залоге** выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида**. **Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:
Он прочитал эту статью с интересом.

**Глаголы несовершенного вида** обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

## Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

| Утверждение | | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|---|
| Полная форма | Краткая форма | Полная форма | Краткая форма | Am I? |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I am | I'm | I am not | I'm not | Are you? |
| You are | You're | You are not | You aren't | Is he? |
| He is | He's | He is not | He isn't | Is she? |
| She is | She's | She is not | She isn't | Is it? |
| It is | It's | It is not | It isn't | Are we? |
| We are | We're | We are not | We aren't | Are you? |
| You are | You're | You are not | You aren't | Are they? |
| They are | They're | They are not | They aren't | |

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

**WAS/WERE**

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| I was | I was not | I wasn’t | Was I? |
| You were | You were not | You weren’t | Were you? |
| He was | He was not | He wasn’t | Was he? |
| She was | She was not | She wasn’t | Was she? |
| It was | It was not | It wasn’t | Was it? |
| We were | We were not | We weren’t | Were we? |
| You were | You were not | You weren’t | Were you? |
| They were | They were not | They weren’t | Were they? |

**ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE**

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there’s. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn’t …/There aren’t … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.
Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.
It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)
There are three books on the desk.
They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

**Конструкция There was/There were**

This is a modern town today.
There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.
This is the same town fifty years ago.
There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| There was | There was not | There wasn't | Was there? |
| There were | There were not | There weren't | Were there? |

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

**Глагол Have got**

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.

б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.

в) в следующих высказываниях: I’ve got a headache. I’ve got a temperature. I’ve got a cough, I’ve got a toothache, I’ve got a cold, I’ve got a problem.

| Утверждение | | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|---|
| Полная форма | Краткая форма | Полная форма | Краткая форма | Have I (got)? |
| I have (got) | I've (got) | I have not (got) | I haven't (got) | Have you (got)? |
| You have (got) | You've (got) | You have not (got) | You haven't (got) | Has he (got)? |
| He has (got) | He's (got) | He has not (got) | He hasn't (got) | Has she (got)? |
| She has (got) | She's (got) | She has not (got) | She hasn't (got) | Has it (got)? |
| It has (got) | It's (got) | It has not (got) | It hasn't (got) | Have we (got)? |
| We have (got) | We've (got) | We have not (got) | We haven't (got) | Have you (got)? |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| You have (got)<br>They have (got) | You've (got)<br>They've (got) | You have not (got)<br>They have not (got) | You haven't (got)<br>They haven't (got) | Have they (got)? |

**Had**

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| I had | I did not have | I didn't have | Did I have? |
| You had | You did not have | You didn't have | Did you have? |
| He had | He did not have | He didn't have | Did he have? |
| She had | She did not have | She didn't have | Did she have? |
| It had | It did not have | It didn't have | Did it have? |
| We had | We did not have | We didn't have | Did we have? |
| You had | You did not have | You didn't have | Did you have? |
| They had | They did not have | They didn't have | Did they have? |

**Имя прилагательное. The Adjective**

| **Категории** | **Прилагательное в русском языке** | **Прилагательное в английском языке** |
|---|---|---|
| **Число** | изменяется | не изменяется |
| **Род** | изменяется | не изменяется |
| **Падеж** | изменяется | не изменяется |

**Образование имен прилагательных**

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе **ни приставок, ни суффиксов: small -** *маленький*, **long -** *длинный*, **white -** *белый*.

К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

**Суффиксальное образование имен прилагательных**

| **Суффикс** | **Пример** | **Перевод** |
|---|---|---|
| **- ful** | use**ful**<br>doubt**ful** | **полезный**<br>**сомневающийся** |
| **- less** | help**less**<br>use**less** | **беспомощный**<br>**бесполезный** |
| **- ous** | fam**ous**<br>danger**ous** | **известный**<br>**опасный** |
| **- al** | form**al**<br>centr**al** | **формальный**<br>**центральный** |
| **- able** | eat**able**<br>cap**able** | **съедобный**<br>**способный** |

**Приставочный способ образования имен прилагательных**

| Приставка | Пример | Перевод |
|---|---|---|
| **un -** | **un**cooked<br>**un**imaginable | **невареный**<br>**невообразимый** |
| **in -** | **in**capable<br>**in**human | **неспособный**<br>**негуманный** |
| **il -** | **il**legal<br>**il**liberal | **нелегальный**<br>**необразованный** |
| **im -** | **im**possible<br>**im**practical | **невозможный**<br>**непрактичный** |
| **dis -** | **dis**honest<br>**dis**agreeble | **бесчестный**<br>**неприятный** |
| **ir -** | **ir**regular<br>**ir**responsible | **неправильный**<br>**безответственный** |
| Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый,<br>**snow-white –** белоснежный. | | |

**Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing**

| **- ed** | **- ing** |
|---|---|
| **Описывают чувства и состояния** | **Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства** |
| **interested** – интересующийся, заинтересованный | **interesting -** интересный |
| **bored -** скучающий | **boring -** скучный |
| **surprised -** удивленный | **surprising -** удивительный |

**Степени сравнения прилагательных**

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**

Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:

**- положительная** степень сравнения **(Positive Degree);**

**- сравнительная** степень сравнения **(Comparative Degree);**

**- превосходная** степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

**1. -er. -est**

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке **-** добавляем “е” (большой - больше, холодный - холоднее).

**Превосходная степень** образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **cold -** холодный | cold**er -** холоднее | the cold**est -** самый холодный |
| **big -** большой | bigg**er -** больше | the bigg**est -** самый большой |
| **kind -** добрый | kind**er -** добрее | the kind**est -** самый добрый |

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| **clever —** умный<br>**easy -** простой<br>**able -** способный<br>**busy -** занятой | clever**er - умнее**<br>eas**ier - проще**<br>abl**er - способнее**<br>bus**ier - более занятой** | **the** clever**est - самый умный**<br>**the** easi**est - самый простой**<br>**the** abl**est - самый способный**<br>**the** busi**est - самый занятой** |

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **“e” ,** то при прибавлении **– er и – est немое “e” опускается:**

large **– large**r **- the** large**st /** большой – больше – самый большой

brave **– brave**r **– the** brave**st /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

**big –** bigg**er –** bigg**est /** большой – больше – самый большой

**hot –** hott**er –** hott**est /** горячий – горячее – самый горячий

**thin –** thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на “y” с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **“y” переходит в “i”:**

**busy –** bus**ier – bus****iest / занятой – более занятой – самый занятой**

**easy –** eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

**2. more, the most**

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **beautiful - красивый**<br>**interesting – интересный**<br>**important - важный** | **more beautiful -** красивее<br>**more interesting -** интереснее<br>**more important -** важнее | **the most beautiful** - самый красивый<br>**the most interesting** - самый интересный<br>**the most important** - самый важный |

**Особые формы**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **good -** хороший<br>**bad -** плохой<br>**little -** маленький<br>**much/many -** много<br>**far -** далекий/далеко<br>**old -** старый | **better -** лучше<br>**worse -** хуже<br>**less -** меньше<br>**more -** больше<br>**farther/further -** дальше<br>**older/elder -** старше | **the best -** самый лучший<br>**the worst -** самый плохой<br>**the least -** самый маленький, меньше всего<br>**the most -** больше всего<br>**the farthest/furthest -** самый дальний<br>**the oldest/eldest -** самый старый |

**3. less. the least**

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **beautiful –** красивый<br>**interesting -** интересный | **less beautiful -** менее красивый | **the least beautiful –** самый некрасивый |

| | | |
|---|---|---|
| **important -** важный | **less interesting –** менее интересный<br>**less important -** менее важный | **the least interesting –** самый неинтересный<br>**the least important –** самый неважный |

**Другие средства сравнения двух предметов или лиц**

| Конструкция | Комментарий | Примеры |
|---|---|---|
| **As…as (такой же, так же)** | **Для сравнения двух объектов одинакового качества** | He is **as** a strong **as** a lion<br>Он такой же сильный, как лев.<br>She is **as** clever **as** an owl**.**<br>Она такая же умная, как сова. |
| **Not so…as (не такой, как)** | **в отрицательных предложениях** | He is **not so** strong **as** a lion.<br>Он не такой сильный, как лев**.**<br>She is **not so** clever **as** an owl.<br>Она не такая умная, как сова. |
| **The…the (с двумя сравнительными степенями)** | **показывает зависимость одного действия от другого** | **The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся.<br>**The more** I learn this rule **the less** I understand it.<br>Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю. |

**Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:**

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

**Числительное. The numeral**

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

**126 – one hundred twenty six**

**1139 – one thousand one hundred and thirty nine**

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

**НО:** окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **“of”:**

**hundreds <u>of</u> children –** сотни детей

**thousands <u>of</u> birds-** тысячи птиц

**millions <u>of</u> insects –** миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

**20+1=21** (twenty + one = **twenty one**)

**60+7=67** (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

**Как читать даты**

| | |
|---|---|
| **1043** | ten forty-three |
| **1956** | nineteen fifty-six |
| **1601** | sixteen o one |
| **2003** | two thousand three |
| **В 2003 году** | in two thousand three |
| **1 сентября** | the first of September |
| **23 февраля** | the twenty-third of February |

## ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:

224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

***ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)***

***Тематика общения:***

1. Высшее образование в России и за рубежом.
2. Мой вуз.
3. Студенческая жизнь.

***Проблематика общения:***

1. Уровни высшего образования.
2. Уральский государственный горный университет.
3. Учебная и научная работа студентов.
4. Культурная и спортивная жизнь студентов.

***2.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

**The Ural State Mining University**

| | |
|---|---|
| **Mining University** – Горный университет;<br>**higher educational institution** - высшее учебное заведение;<br>**to provide** - зд. Предоставлять;<br>**full-time education** - очное образование;<br>**extramural education** - заочное образование;<br>**to award** – награждать;<br>**post-graduate courses** – аспирантура; | **scientific research centre** - центр научных исследований;<br>**master of science** - кандидат наук;<br>**capable** – способный;<br>**to take part in** - принимать участие;<br>**graduate** – выпускник;<br>**to dedicate** – посвящать;<br>**to carry out scientific work** - выполнять научную работу; |

| | |
|---|---|
| **Faculty of Mining Technology** - горно – технологический;<br>**Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический;<br>**Institute of World Economics** – Институт мировой экономики;<br>**Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический;<br>**Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты;<br>**Faculty of City Economy** – городского хозяйства; | **Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики;<br>**Faculty of extramural education** – заочный;<br>**department** – кафедра;<br>**dean** – декан;<br>**to train specialists in** - готовить специалистов;<br>**to consist of** - состоять из;<br>**preparatory** – подготовительный;<br>**additional** – дополнительный;<br>**to offer** – предлагать; |

| | |
|---|---|
| **to house** - размещать /ся/;<br>**building** – здание;<br>**Rector's office** – ректорат;<br>**Dean's office** – деканат;<br>**department** – кафедра;<br>**library** – библиотека;<br>**reading hall** - читальный зал;<br>**assembly hall** - актовый зал;<br>**layout** - расположение, план;<br>**administrative offices** - административные отделы; | **computation centre** - вычислительный центр;<br>**canteen** – столовая;<br>**to have meals** – питаться;<br>**hostel** – общежитие;<br>**to go in for sports** - заниматься спортом;<br>**wrestling** – борьба;<br>**weight lifting** - тяжелая атлетика;<br>**skiing** - катание на лыжах;<br>**skating** - катание на коньках;<br>**chess** – шахматы; |

| | |
|---|---|
| **academic work** - учебный процесс;<br>**academic year** - учебный год;<br>**to consist of** - состоять из;<br>**bachelor's degree** - степень бакалавра; | **general geology** - общая геология;<br>**foreign language** - иностранный язык;<br>**to operate a computer** - работать на компьютере; |

| | |
|---|---|
| **course of studies** - курс обучения;<br>**to last** - длиться;<br>**term** - семестр;<br>**to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия;<br>**period** - пара, 2 – х часовое занятие;<br>**break** - перерыв;<br>**subject** - предмет;<br>**descriptive geometry** - начертательная геометрия; | **to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен;<br>**to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен;<br>**to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен;<br>**to fail in chemistry** - не сдать химию;<br>**holidays, vacations** - каникулы;<br>**to present graduation paper** - представлять дипломные работы;<br>**for approval** - к защите; |

***The Faculty of Mining Technology*** trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining ) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

***The Institute of World Economics*** trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

***The Faculty of Mining Mechanics*** trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

***The Faculty of Geology & Geophysics*** trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

***2.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

This text is dedicated to the history of the Ural State Mining University formerly called the Sverdlovsk Mining Institute. It was founded in 1917. It is the oldest higher technical educational institution in the Urals. In 1920 the Mining Institute became a faculty of the Ural State University and in 1925 of the Ural Polytechnical Institute. In 1930 this faculty was reorganized into the Mining Institute. The Institute was named after V.V. Vakhrushev the USSR Coal Industry Minister in 1947. It was awarded the Order of the Red Banner of Labour in 1967.

In 1993 the Sverdlovsk Mining Institute was reorganized into The Ural State Academy of Wining and Geology. In 2004 The Ural State Academy of Mining and Geology was reorganized into The Ural State Mining University. The University provides full-time and extramural education in many specialities. There are post graduate courses at the University as well.

The University is an important scientific research center. Many doctors and masters of Science teach and carry out scientific work at the University. Capable students take part in research projects. The graduates of the University work all over the country.

There are six faculties at the Ural State Mining University: Faculty of Mining Technology; Faculty of Mining Mechanics; Faculty of Geology & Geophysics; Faculty of Civil Protection; Faculty of City Economy; Faculty of Extramural Education; and The Institute of World Economics.

Besides there is a Preparatory faculty where young people get special training before taking entrance exams. The Faculty of Additional Education offers an opportunity to get the second higher education.

Each faculty trains mining engineers in different specialities.

There are many specialities at the Faculty of Extramural Education where students have to combine work with studies. Very often the Ural State Mining University organizes training specialists in new modern specialities.

Faculties consist of Departments. Each faculty is headed by the Dean. The head of the Academy is the Rector.

The University is housed in four buildings. Building, One houses - the Rector's office, the Deans' offices, number of administrative offices, Faculty of City Economy, the Faculty or Mining Mechanics with its numerous departments and laboratories (labs).

Building Two houses the Faculty of Mining Technology, Faculty of Civil Protection, the Deans' offices, many departments, labs and the computation centre.

Building Three houses the Faculty of Geology & of Geophysics, the Faculty of Extramural Education, the Dean's offices, many departments and labs. The Ural Geological Museum, the Museum of the History of the Ural State Mining University and some administrative offices are also housed in this building.

Building Four houses The Institute of World Economics, the Dean's office, departments and labs, the library, reading halls, the Assembly hail, the students cultural centre and a large canteen where students can have their meals.

The library and the reading halls provide students with all kinds of reading: textbooks, reference books / справочники/ dictionaries, magazines and fiction/ художественная литература/.

Besides not far from the University there are four five-storied buildings of the student hostel, where most students live. Near the hostels there is a House of Sports. There students can go in for- different kinds of sports: chess, badminton, table tennis, boxing, wrestling, weight lifting, basketball, volleyball, handball.

The Ural State Mining University offers students three different programs of higher education such as: Bachelors, Diplomate Engineers and Magisters.

The course of studies for a bachelor's degree lasts four years. The academic year begins in September and ends in June. It consists of two terms - September to January and February to June. Students attend lectures and practical classes. As a rule, there are three or four periods of lectures and Classes a day with 20 minutes break between them.

During their first two years students take the following subjects: higher mathematics, physics, chemistry, theoretical air-mechanics, descriptive geometry, general geology, mineralogy, geodesy, history, a foreign language (English, French or German). Besides all the students learn to operate a computer.

Students take their tests and exams at the end of each term. After exams students have their holidays or vacations. At the end of the academic year the students of the academy have practical work at mines, mineral dressing plants, geological & geophysical parties. At the end of the final year students present their graduation papers for approval. After getting the Bachelor's degree the graduates have a possibility to continue their education. They can enter a Diplomate Engineer's course or studies

which lasts one academic year or the graduates can take a two-year program of Magister's degree. After defending final papers these graduates can enter the post-graduate courses.

***2.3 Систематизация грамматического материала:***

1. Образование видовременных форм глагола в активном залоге.

**Образование видовременных форм глагола в активном залоге**

**Present Simple** употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

**Present Continuous** употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],

Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

**Present perfect** употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

**Present perfect continuous** употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.
Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Put the verbs in brackets into the present simple or the present continuous.***

1 A: *Do you know* (you/know) that man over there?
B: Actually, I do. He's Muriel's husband.

2 A: Are you doing anything tomorrow evening?
B: Yes. I … (see) Jack at nine o'clock.

3 A: I … (see) you're feeling better.
B: Yes, I am, thank you.

4 A: What's that noise?
B: The people next door … (have) a party.

5 A: Graham … (have) a new computer.
B: I know. I've already seen it.

6 A: This dress …. (not/fit) me any more.
B: Why don't you buy a new one?

7 A: Your perfume … (smell) nice. What is it?
B: It's a new perfume called Sunshine.

8 A: What is Jane doing?
B: She … (smell) the flowers in the garden.

9 A: What … (you/look) at?
B: Some photos I took during my holidays. They aren't very good, though.

10 A: You … (look) very pretty today.
B: Thank you. I've just had my hair cut.

11 A: I … (think) we're being followed.
B: Don't be silly! It's just your imagination.

12 A: Is anything wrong?
B: No. I … (just/think) about the party tonight.

13 A: This fabric … (feel) like silk.
B: It is silk, and it was very expensive.

14 A: What are you doing?

B: I … (feel) the radiator to see if it's getting warm.
15 A: She … (be) generous, isn't she?
B: Yes, she has never been a mean person.
16 A: He … (be) very quiet today, isn't he?
B: Yes, I think he has some problems.
17 A: Would you like some cherries?
B: Yes, please. I … (love) cherries. They're my favourite fruit.
18 A: I'm sorry, but I … (not understand) what you mean.
B: Shall I explain it again?
19 A: The children are making lots of noise today.
B: I know, but they … (have) fun.
20 A: This cake … (taste) awful.
B: I think I forgot to put the sugar in it!

***2. Fill in the gaps with recently, how long, yet, for, always, ever, already, since, so far or just. Sometimes more than one answer is possible.***

1 A: Has Tom finished his exams ...yet...?
B: No. He finishes them next Thursday.
2 A: … has Janet been working at the hospital?
B: She has been working there … she left school.
3 A: How are you finding your new job?
B: Great. I haven't had any problems … .
4 A: Is John at home, please?
B: No, I'm afraid he's … gone out.
5 A: Have you been waiting long?
B: Yes, I've been here … two hours.
6 A: Has Martin … been to Spain?
B: No. I don't think so.
7 A: Have you spoken to Matthew … ?
B: Yes. I phoned him last night.
8 A: Can you do the washing-up for me, please?
B: Don't worry. Mike has … done it.
9 A: Lucy has … been musical, hasn't she?
B: Yes, she started playing the piano when she was five years old.
10 A: Shall we go to that new restaurant tonight?
B: Yes. I have … been there. It's really nice.
11 A: Your dog's been barking … three hours!
B: I'm sorry. I'll take him inside.
12 A: Have you finished reading that bodk yet?
B: No. I've … started it.

***3. Put the verbs in brackets into the present perfect or continuous, using short forms where appropriate.***

1 A: How long ...*have you known*... (you/know) Alison?
B: We ... (be) friends since we were children.
2 A: Who … (use) the car?
B: I was. Is there a problem?
3 A: What are Andrew and David doing?
B: They … (work) in the garden for three hours.
4 A: Why is Sally upset?
B: She … (lose) her bag.
5 A: I … (always/believe) that exercise is good for you.

B: Of course, it's good to keep fit.

6 A: Emily … (teach) maths since she left university.
B: Yes, and she's a very good teacher, too.

7 A: Fred … (open) a new shop.
B: Really? Where is it?

8 A: This pie is delicious.
B: Is it? I … (not/taste) it yet.

9 A: Have you found your umbrella yet?
B: No, I … (look) for it for an hour now.

10 A: You look exhausted.
B: Well, I … (clean) the windows since 8 o'clock this morning.

11 A: Can I have some more lemonade, please?
B: Sorry, your brother … (just/drink) it all.

12 A: Have you got new neighbours?
B: Yes, they … (just/move) to the area.

***4. Put the verbs in brackets into the present perfect or the present perfect continuous.***

Dear Connie,

I hope you are enjoying yourself at university. I'm sure you 1)...*'ve been studying*... (study) hard. Everything is fine here at home. Billly 2) … (just/receive) his school report. It was bad, as usual. He 3) … (decide) to leave school next year and find a job. Fiona 4) … (go) to the gym every day for the past two weeks. She 5) … (try) to get in shape for the summer. She 6) … (already/plan) her holiday in the sun. Your father 7) … (sell) the old car and he 8) … (buy) a new one. It's lovely — much nicer than the old one.

Anyway, write soon.

Love, Mum

***5. Fill in the gaps with have/has been (to) or have/has gone (to).***

Jack: Hi, Jill. Where's Paul?

Jill: Oh, he 1) ...*has gone to*... London for a few days.

Jack: Really! I 2) … London recently. I came back yesterday. 3) … you … there?

Jill: No, I haven't. Paul 4) … twice before, though. Where's Sarah?

Jack: She 5) … Spain for two weeks with her parents. They 6) … there to visit some friends.

Jill: When is she coming back?

Jack: They'll all be back next weekend.

***6. Choose the correct answer.***

1 'What time does the train leave?'
'I think it ..*A*... at 2 o'clock.'
A leaves
B has been leaving
C has left

2 'Where are Tom and Pauline?'
They … e supermarket.'
A have just gone
B have been going
C go

3 What is Jill doing these days?'
She … for a job for six months.'
A is looking
B has been looking
C looks

4 Is Mandy watching TV?'
No. She … her homework right now.'
A is always doing
B is doing
C does

5 'Have you been for a walk?'
'Yes. I often … for walks in the evenings.'
A have gone
B am going
C go

6 'Have you seen any films lately?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have seen
B am seeing
C see

7 'What … ?'
'It's a piece of cherry pie. Mum made it yesterday.'
A are you eating
B do you eat
C have you eaten

8 'Are you going on holiday this summer?'
'Yes. I … enough money.'
A am saving
B have already saved
C save

9 'Is Todd reading the newspaper?'
'No. He … dinner at the moment.'
A has been making
B makes
C is making

10 'Have you bought any new CDs recently?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have bought
B have been buying
C am buying

11 'What time does the play start?'
'I think it … at 8 o'clock.'
A has been starting
B starts
C has started

12 'Where is Mark?'
'He … to the library to return some books.'
A has gone
B has been
C is going

13 'What … ?'
'It's a letter to my pen-friend. I'm telling her my news.'
A have'you written
B do you write
C are you writing

***7. Underline the correct tense.***

1. Liz and I are good friends. We **know/<u>have known</u>** each other for four years.
2. Sarah is very tired. She **has been working / is working** hard all day.
3. Where is John?' 'He's upstairs. He **does/is doing** his homework.'
4. I can't go to the party on Saturday. I **am leaving/ have been leaving** for Spain on Friday night.
5. Jane **has finished/is finishing** cleaning her room, and now she is going out with her friends.
6. I didn't recognise Tom. He **looks/is looking** so different in a suit.
7. I don't need to wash my car. Jim **washes/has washed** it for me already.
8. Ian **has been talking/is talking** to his boss for an hour now.
9. Claire's train **arrives/has arrived** at 3 o'clock. I must go and meet her at the station.
10. 'Would you like to borrow this book?' 'No, thanks. I **have read/have been reading** it before.'
11. 'Where **are you going/do you go**?' To the cinema. Would you like to come with me?'
12. Have you seen my bag? I **am searching/have been searching** for it all morning.
13. 'Is Colin here?' 'I don't know. I **haven't seen/ haven't been seeing** him all day.'
14. Sophie is very clever. She **is speaking/speaks** seven different languages.
15. We **are moving/have moved** house tomorrow. Everything is packed.

***8. Put the verbs in brackets into the correct tense.***

1 Who …*has been using* … (use) my toothbrush?
2 'What … (you/do)?' 'I … (write) a letter.'
3 Samantha … (play) tennis with friends every weekend.
4 Tim and Matilda … (be) married since 1991.
5 Uncle Bill … (just/decorate) the bathroom.
6 Pauline and Tom … (sing) in the school choir twice a week.
7 Who … (you/speak) to?
8 Sarah is very happy. She … (win) a poetry competition.
9 He … (drink) two cups of coffee this morning.
10 My friend … (live) in America at the moment.
11 They … (usually/change) jobs every five years.
12 I … (normally/cut) my hair myself.
13 Linda … (study) in the library for three hours.
14 We … (play) in a concert next weekend.
15 Who … (read) my diary?
16 Tim … (leave) the house at 7 o'clock every morning.
17 … (your mother/work) in a bank?
18 … (you/drink) coffee with your breakfast every day?
19 We … (make) plans for our summer holidays right now.
20 They… (move) house in September.

***9. Put the verbs in brackets into the correct tense.***

1 A: What ...*are you doing*... (you/do)?
B: Nothing. I … (just/finish) my lunch.
2 A: Where … (you/be) all morning?
B: I … (clean) my house since 8 o'clock.
3 A: … (you/do) anything next weekend?
B: No, I … (not/make) any plans yet.
4 A: Jane looks great. … (she/lose) weight?
B: Yes, she … (exercise) a lot recently.
5 A: … (be/you) busy right now?
B: Yes, I … (just/start) typing this report.
6 A: Where is Peter?
B: He … (wash) the car at the moment.
7 A: Who … (be) your favourite actor?

B: I … (like) Sean Connery since I was a child.

8 A: … (you/do) your homework yet?

B: Almost; I … (do) it now.

***10. Put the verbs in brackets into the correct tense.***

Dear Nick,

This is just a short note to tell you I 1) *...'m arriving/arrive...* (arrive) at the airport at 5 pm on Saturday, 10th December. I 2) … (be) very busy recently, and that's why I 3) … (not/write) to you for a while. I 4) … (plan) this trip for months, so now I 5) … (look forward) to spending some time with you and your family. I 6) … (hope) you will be able to meet me at the airport. Please give my love to your wife and the children.

See you soon,
James

**Past simple** употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn’t use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

**Past continuous** употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

**Past perfect** употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,
They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,
She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous. Which was the longer action in each sentence?***

1. They ...*were cleaning*... (clean) the windows when it …*started*... (start) to rain.
*Cleaning the windows was the longer action.*
2. As he … (drive) to work, he … (remember) that his briefcase was still at home.
3. Melanie … (cook) dinner when her husband … (come) home.
4. I … (hear) a loud crash as I … (sit) in the garden.
5. She … (type) a letter when her boss … (arrive).
6. While the dog … (dig) in the garden, it … (find) a bone.
7. Mary … (ride) her bicycle when she … (notice) the tiny kitten.
8. While I … (do) my homework, the phone … (ring).

***2. A policeman is asking Mrs Hutchinson about a car accident she happened to see yesterday. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.***

P: What 1) ...*were you doing*... (you/do) when you 2) … (see) the accident, madam?
H: I … (walk) down the street.
P: What exactly 4) … (you/see)?
H: Well, the driver of the car 5)… (drive) down the road when suddenly the old man just 5) … (step) in front of him! It 6) … (be) terrible!
P: 8) … (the driver/speed)?
H: No, not really, but the old man 9) … (not/look) both ways before he ... (try) to cross the road.
P: 11) ... (anyone else/see) the accident?
H: Yes, the lady in the post office.
P: Thank you very much.

***3. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.***

**A** As soon as Margaret 1) ...*got*... (get) off the train, she 2) … (pull) her coat around her. Rain 3) … (fall) heavily and a cold wind 4) … (blow) across the platform. She 5) … (look) around, but no one 6)

… (wait) to meet her. She 7) … (turn) to leave when she 8) … (hear) footsteps. A man 9) … (walk) towards her. He 10) … (smile) at her, then he 11) … (say), 'You're finally here.'

**B** George 1) … (pick) up his bag then, 2) … (throw) it over his shoulder. It 3) … (get) dark and he 4) … (have) a long way to go. He wished that he had let someone know that he was coming. It 5) … (start) to rain, and he was feeling cold and tired from the long journey. Suddenly, he 6) … (hear) a noise, then he 7) … (see) two bright lights on the road ahead. A car 8) … (head) towards him. It slowed down and finally 9) … (stop) beside him. A man 10) … (sit) at the wheel. He 11) … (open) the door quickly and 12) … (say) 'Get in, George.'

**C** Andy 1) … (step) into the house and 2) … (close) the door behind him. Everything 3) … (be) quiet. His heart 4) … (beat) fast and his hands 5) … (shake) as he crept silently into the empty house, but he was trying not to panic. He soon 6) … (find) what he 7) … (look) for. He smiled with relief as he put on the clothes. The men who 8) … (follow) him would never recognise him now.

***4. Imagine that you were present when these things happened, then, in pairs, ask and answer questions, as in the example.***

SA: What were you doing when the burglar broke in?
SB: I was watching TV.
SA: What did you do?
SB: I called for help.

1 The burglar broke in.
2 The storm broke.
3 The lights went out.
4 The boat overturned.
5 The earthquake hit.
6 The building caught fire.

***5. Rewrite each person's comment using used to or didn't use to.***

1 Sally - 'I don't walk to work any more.'
*I used to walk to work.*
2 Gordon - 'I've got a dog now.'
3 Lisa - 'I don't eat junk food any more.'
4 Jane - 'I go to the gym every night now.'
5 Paul - 'I'm not shy any more.'
6 Edward - 'I live in a big house now.'
7 Helen - 'I haven't got long hair any more.'
8 Frank - 'I eat lots of vegetables now.'

***6. Choose the correct answer.***

1 'I find it hard to get up early.'
'You ...*3*... to getting up early once you start working.'
A are used
B will get used
C were used

2 'Do you often exercise now?'
'No, but I … to exercise a lot when I was at school.'
A used
B will get used
C am used

3 'Aren't you bothered by all that noise?'
'No, we … to noise. We live in the city centre.'
A were used
B will get used

C are used

4 'Does your sister travel a lot?'
'No, but she … to before she got married.'
A didn't use
B used
C wasn't used

5 'I don't like wearing a suit every day.'
'Don't worry, you … to it very soon.'
A are used
B will get used
C were used

6 'Sandra … to using a computer, but now she enjoys it.'
'It's a lot easier for her now.'
A isn't used
B will get used
C wasn't used

7 'Do you remember the things we … to do when we were kids?'
'Of course I do. How could I forget what fun we had!'
A used
B were used
C got used

8 'Do you like living in the city?'
'Well, I … to it yet, but it's okay.'
A am not used
B wasn't used
C am used

***7. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the correct form. Use each verb twice.***

wash, walk, play, work

1 I used to ...*work*... in a shop, but now I work in an office.
2 I can't concentrate. I'm not used to … in such a noisy office.
3 Tom lived in the country for years. He used to … miles every day.
4 I'm exhausted. I'm not used to … such long distances.
5 Mary used to … her clothes by hand, but now she uses a washing machine.
6 We haven't got a washing machine, so we're used to … our clothes by hand.
7 The children are bored with the bad weather. They're used to … outside.
8 When we were younger, we used to … cowboys and Indians.

***8. Put the verbs in brackets into the past simple or the present perfect.***

**1.** A: Do you know that man?
B: Oh yes. He's a very good friend of mine. I 1) ...*'ve known*... (know) him for about ten years.
A: I think I 2) … (meet) him at a business meeting last month.

**2**. A: Mum 1) … (lose) her purse.
B: Where 2) … (she/lose) it?
A: At the supermarket while she was shopping.

**3.** A: Who was on the telephone?
B: It 1) … (be) Jane.
A: Who is Jane?
B: Someone who 2) … (work) in my office for a few years. She's got a new job now, though.

**4.** A: Who is your favourite singer?
B: Freddie Mercury. He 1) … (have) a wonderful voice.
A: Yes, I agree. He 2) … (enjoy) performing live, too.

***9. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the past perfect continuous.***

read, scream, argue, try, eat, watch

1. Emily was angry. She ...*had been arguing*… with her parents for an hour.
2. Hannah felt sick. She … chocolates all afternoon.
3. Allan had a headache. His baby sister … for half an hour.
4. Emily was frightened. She … a horror film for half an hour.
5. Simon was confused. He … to win the game for hours.
6. John was very tired. He … all night.

***10. Put the verbs in brackets into the correct past tense.***

**A:** On Monday morning, Jo 1) ... *missed*... (miss) the bus and had to walk to school. When she 2) … (arrive), the bell 3) … (already/ring)', and lessons 4) … (start). The children 5) … (work) quietly when Jo 6) … (walk) into the'classroom.

**B:** When Jamie 1) … (get) to the party, a lot of people 2) … (dance) to pop music. Everyone 3) … (wear) jeans and T-shirts. Jamie 4) … (buy) a new suit for the party and he 5) … (wear) that. He 6) … (feel) quite silly because everyone 7) … (look) at him.

**Future simple** употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

**Be going to** употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,

Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
*No. Why?*
*I need to make some photocopies.*

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Tanya Smirnoff is a famous astrologer. She's been invited on a TV show to give her astrological predictions for next year. Using the prompts below, make sentences, as in the example.***
*e.g. An eartyhquake will strike Asia.*

1 earthquake/strike/Asia
2 Tom Murray/win/elections
3 economy/not improve/significantly
4 number of road accidents/increase
5 America/establish/colony/on Mars
6 scientists/not discover/cure for common cold

***2. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the examples.***

SA: Are you going to pay the bill?
SB: Yes, that's what I'm going to do.
SA: Are you going to complain to the manager?
SB: No, that's not what I'm going to do.

1. pay the bill (√)
2. complain to the manager (X)
3. take the skirt back to the shop (√)
4. buy the jumper (√)
5. ask the bank manager for a loan (X)
6. order the food (√)
7. book the airline tickets (X)

***3. Fill in the gaps with the correct form of will or be going to and the verb in brackets.***

1 A: Why are you buying flour and eggs?
B: Because I ...*'m going to make*... (make) a cake.
2 A: I have decided what to buy Mum for her birthday.
B: Really. What … (you/buy) for her?
3 A: Did you ask Jackie to the party?
B: Oh no! I forgot! I … (ask) her tonight.
4 A: Could I speak to Jim, please?
B: Wait a minute. I … (get) him for you.
5 A: What are your plans for the weekend?

B: I … (spend) some time with my friends.

6 A: What are you doing on Friday night?
B: Oh, I … (probably/stay) at home with my family.

7 A: Have you tidied your room yet?
B: No, but I promise I … (do) it this afternoon.

8 A: Look at that boy!
B: Oh yes! He … (climb) the tree.

9 A: Jason is very clever for his age.
B: Yes. He says he … (become) a doctor when he grows up.

10 A: I'm too tired to cut the grass.
B: Don't worry! I (cut) it for you.

***4. Fill in the gaps with shall, will or the correct form of be going to.***

1 A: It's too hot in here.
B: You're right. I ...*will...* open a window.

2 A: … I put the baby to bed, now?
B: Yes, he looks a little tired.

3 A: Have you seen Lucy recently?
B: No, but I … meet her for lunch later today.

4 A: Have you done the shopping yet?
B: No, but I … probably do it tomorrow, after work.

5 A: … we ask Mr Perkins for help with the project?
B: That's a good idea. Let's ask him now.

***5. Replace the words in bold with will/won't or shall I/we, as in the example.***

1 I've asked Paul to talk to the landlord, but he **refuses to** do it.
*I've asked Paul to talk to the landlord, but he won't do it.*

2 **Do you want me** to make a reservation for you?

3 **Can** you call Barry for me, please?

4 **Why don't we** try this new dish?

5 Where **do you want me** to put these flowers?

***6. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.***

SA: *When will you do the gardening?*
SB: *I'll do it after I've done the shopping.*

1 do the gardening / do the shopping

2 post the letters / buy the stamps

3 iron the clothes / tidy the bedroom

4 water the plants / make the bed

5 do your homework / have my dinner

6 pay the bills / take the car to the garage

***7. Put the verbs in brackets into the present simple or the future simple***.

1 A: I'm going to the gym tonight.
B: Well, while you ...*are*... (be) there, I … (do) the shopping.

2 A: … (you/call) me when you … (get) home?
B: Yes, of course.

3 A: As soon as John … (come) in, tell him to come to my office.
B: Certainly, sir.

4 A: I'm exhausted.
B: Me too. I wonder if David … (come) to help tonight.

5 A: Are you going to visit Aunt Mabel this afternoon?

B: Yes, I ... (visit) her before I … (do) the shopping.

6 A: Is George going to eat dinner with us?
B: No, by the time he … (get) home it … (be) very late.

7 A: When … (you/pay) the rent?
B: When I … (get) my pay cheque.

8 A: What are your plans for the future?
B: I want to go to university after I … (finish) school.

9 A: If you … (pay) for dinner, I … (pay) for the theatre.
B: Okay, that's a good idea.

10 A: Can you give this message to Mike, please?
B: Well, I'll try, but I doubt if I … (see) him today.

***8. Put the verbs in brackets into the future simple, the present simple or the present continuous.***

1 A: I ...*am seeing*... (see) Roger at seven o'clock tonight.
B: Really? I thought he was out of town.

2 A: … (you/do) anything on Friday morning?
B: No, I'm free.

3 A: I … (go) to the cinema. There's a new film on. Do you want to come with me?
B: What time … (the film/start)?

4 A: Helen … (have) a party the day after tomorrow. … (you/go)?
B: As a matter of fact, I haven't been invited.

5 A: The new exhibition … (open) on April 3rd and … (finish) on May 31st.
B: I know. I … (go) on the first day.

6 A: Aunt Maggie … (come) to visit us tomorrow.
B: I know. What time … (she/arrive)?

7 A: Excuse me, what time … (the train/leave)?
B: At half past three, madam.

8 A: Michael Jackson … (give) a concert at the Olympic Stadium next week.
B: I know. I … (want) to get a ticket.

9 A: I'm really thirsty.
B: I … (get) you a glass of water.

10 A: Are you looking forward to your party?
B: Yes. I hope everyone … (enjoy) it.

11 A: How old is your sister?
B: She .. (be) twelve next month.

12 A: What are you doing tonight?
B: I … (probably/watch) TV after dinner.

***9. A) Cliff Turner has his own business and it is doing well. He has already decided to expand. Look at the prompts and say what he is going to do, as in the example.***

1. employ more staff

*He's going to employ more staff.*

2. advertise in newspapers and magazines
3. equip the office with computers
4. increase production
5. move to bigger premises
6. open an office abroad

***B) Cliff is always busy. Look at his schedule and say what his arrangements are for the next few days. Make sentences, as in the example.***

Wednesday 12th: fly to Montreal

*He is flying to Montreal on Wednesday.*
Thursday 13th: give an interview to The Financial Times
Friday 14th: have lunch with sales representatives
Saturday 15th: have a meeting with Japanese ambassador
Sunday 16th: play tennis with Carol

***10. ln Pairs, ask and answer the following questions using I (don't) think/expect I will or I hope /'m sure/'m afraid I will/won't, as in the example.***
SA: *Do you think you will pass your exams?*
SB: *I hope I will/I'm afraid I won't.*
1 pass/exams
2 move house
3 take up / new hobby
4 make / new friends
5 start having music lessons
6 have / party on / birthday
7 learn/drive

***ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир)***

***Тематика общения:***

1. Екатеринбург – столица Урала.
2. Общее и различное в национальных культурах.

***Проблематика общения:***

1. Мой родной город.
2. Традиции и обычаи стран изучаемого языка.
3. Достопримечательности стран изучаемого языка.

***3.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

***My town***

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist's/a pharmacy/a drugstore - аптека
a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки

a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна
a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

***3.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**Ekaterinburg – an Industrial Centre**

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant

produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

## The History of Ekaterinburg

The famous Soviet poet V. Mayakovsky called out city "A Worker and a Fighter" and these words most fully reflect the features of Ekaterinburg.

Ekaterinburg is nowadays one of the leading industrial cities of Russia, an administrative & cultural centre of the Sverdlovsk region. It is the capital of the Urals.

Ekaterinburg has sprung up in the upper reaches of the Iset River in the middle part of the Urals Mountains near the border of Europe and Asia. It stretches from North to South for 25 km. and 15 km. from East to West.

The history of our city is very interesting. It was founded at the beginning of the XVIII century as a fortress-factory in connection with the construction of the Urals iron works. The works was constructed under the supervision of Tatishchev, a mining engineer, who was sent to the Urals by Peter the first. It was put into operation in November 1723. This date is considered to be the date of the birthday of city. It was named Ekaterinburg. On the place of the first works there is the Historical Square now.

The town grew and developed as the centre of an important mining area where the mining administration office was located. Ekaterinburg was an ordinary provincial town like many others in Russia before the October Revolution. It had only one theatre, four hospitals, one mining school and not a single higher school.

At the end of the XIX century Ekaterinburg became one of the centres of the revolutionary struggle. Many squares, streets and houses of the city keep the memory of the revolutionary events and the Civil War in the Urals. They are: the 1905 Square, a traditional place of the revolutionary demonstrations of the working people, the rocks "Kamenniye Palatki", a memorial park now, which was the place of illegal meetings of Ekaterinburg workers, the Opera House where the Soviet power was proclaimed in November 8, 1917 and many others.

Ekaterinburg is closely connected with the life and activities of many famous people. Here Y.M. Sverdlov, the leader of the Urals Party organization before the Revolution and the first President of the Soviet state, carried out his revolutionary work. In 1924 Ekaterinburg was renamed in his memory.

The name of such a famous scientist and inventor of the radio as Popov, and the names of such writers as Mamin-Sibiriyak and Bazhov are also connected with Ekaterinburg.

After the October Socialist Revolution the town has changed beyond recognition. It grew quickly in the years of the first five-year plan periods. Nowadays our city is constantly growing and

developing. Modern Ekaterinburg is a city of wide straight streets, multistoried blocks of flats, big shops, beautiful palaces of culture, cinemas, fine parks and squares.

The centre of the city is 1905 Square with the monument to V.I. Lenin and the building of the City Soviet. The main street is Lenin Avenue. The total area of the city is over 400 sq. km. The population is about two million.

In connection with its 250th anniversary and for its outstanding achievements in the development of the national economy of our country Ekaterinburg was awarded the Order of Lenin.

## Ekaterinburg – a Center of Science & Education

Ekaterinburg is one of the largest & most important centers of science & education in our country. The city has 15 higher schools. The oldest of them are the Mining & the Polytechnical Institutes, the Urals State University founded in 1920, the Medical & Pedagogical & many others. Ekaterinburg higher schools train specialists for practically all branches of industry, economy, education & science. The city has a student population of about 80 thousand. Besides, there are many secondary and vocational schools and over 50 technical schools (colleges). The oldest of them is the Mining Metallurgical College named after Polzunov, founded in 1847.

Much important scientific research work is carried on in Ekaterinburg. The Urals Branch of Sciences, now called the Urals Scientific Centre (UNZ), was founded in 1932. Its first chairman was the famous Soviet scientist, mineralogist and geochemist A.E. Fersman. UNZ is the main centre of scientific work now. It contains nine institutes which solve the most important theoretical and practical problems in the field of geology, mining, metallurgy, biology, economy and others.

The city has more than 120 research and designing institutions, among them Uralmechanobr, Unipromed, Nipigormash and others. It is worth mentioning that important scientific and research work is also carried on in educational establishments and at the industrial enterprises of the city, such as the Uralmash, Uralelectrotyazmash and others.

Thousands of research workers, among them 5 academicians, 10 Corresponding members of the Russian Academy of Sciences, many Doctors and Masters of Science are engaged in scientific and research work. Ekaterinburg has contributed greatly to the development of Russian science.

## Ekaterinburg - a Cultural Centre

Ekaterinburg is not only an industrial and educational, but also a large cultural centre. There is a lot to be seen in the city. There are many theatres, cinemas, museums, clubs, libraries, palaces of culture, the Art Gallery and the Circus in it.

The Art Gallery houses a splendid collection of paintings of Russian and Soviet artists such as Repin, Polenov, Levitan, Perov, Slusarev, Burak, Pimenov and many others. Here you will see one of the world famous collections of metal castings made in Kasli and especially a cast Iron pavilion. It was shown in Paris at the World Exhibition and awarded the Highest Prize.

Ekaterinburg is famous for its theaters. They are the Opera & Ballet House, the Drama Theatre, the Musical Comedy, the Children's and Puppet Theatres, the Cinema and Concert Hall "Cosmos". The Opera House was built in 1912. Many famous singers such as S. Lemeshev, I. Koslovsky, I. Arkhipova, B. Shtokolov and many others sang in that theatre. Ekaterinburg has a Philharmonic Society, film and television studios, the Urals Russian Folk Choir which is well known both at home and abroad.

There are many museums in the city: the Museum of Local Studies, the Sverdlov Museum, the Museum of Mamin-Sibiriyak, the Bazhov Museum, the Museum of Architecture. But the Urals Geological Museum is the most famous one. It is a real treasure-house of the Urals riches. The museum was opened in 1937.

Ekaterinburg is a green city with its squares, gardens and parks. The largest and the best of the parks is the Central Park of Culture and Rest. The Central Square of the City is the 1905 Square. Besides, there are some others: the Labor Square, one of the oldest of the city, located in front of the House of Trade Unions, the Komsomolskaya Square with the monument to the Urals Komsomol, the Paris Commune Square with the monument to Y.M. Sverdlov.

There are lots of monuments in the city. They are: the monument dedicated to the students and teachers of the Urals Polytechnical Institute who perished in the Great Patriotic War, the monument to the Urals Tank Corps, the monuments to Bazhov, Popov, Ordjonikidze, Malishev and many others.

There are a lot of places of interest in our city. Any visitor who comes to our city is invited to take sightseeing around it. We will be shown the historical places such as the rocks "Kamenniye Palatki", the Pupils' Creation Palace, the Historical Square, the 1905 Square.

There are several memorials to those who gave their lives in the struggle against fascism, the obelisk in the Square of Communards with the eternal flame. Such famous places of interest at the city pond with granite-lined embankment, the Palace of Youth, the lake Shartash, the Uktus Mountains and some others are most popular with the citizens of Ekaterinburg as well as with its visitors.

Ekaterinburg is a city of sports. There are a lot of sports grounds, stadiums, sports halls and a beautiful Palace of Sport in it. Ekaterinburg is often called the Winter Sports Capital. All sorts of important skiing & skating events are held in the Uktus Mountains.

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland**

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern

monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

***3.3 Систематизация грамматического материала:***

1. Модальные глаголы и их эквиваленты.
2. Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге.
3. Основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь.

**Модальные глаголы**

| **Глаголы** | **Значение** | **Примеры** |
|---|---|---|
| **CAN** | физическая или умственная возможность/умение | I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать. |
| | возможность | You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play football in the street. – На улице нельзя играть в футбол. |
| | вероятность | They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент. |
| | удивление | Can he have said that? – Неужели он это сказал? |
| | сомнение, недоверчивость | She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала. |
| | разрешение | Can we go home? — Нам можно пойти домой? |
| | вежливая просьба | Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час? |
| **MAY** | разрешение | May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу? |
| | предположение | She may not come. – Она, возможно, не придет. |
| | возможность | In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей. |
| | упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)** | You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать. |
| **MUST** | обязательство, необходимость | He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги. |
| | вероятность (сильная степень) | He must be sick. — Он, должно быть, заболел. |
| | запрет | Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке. |
| **SHOULD OUGHT TO** | моральное долженствование | You ought to be polite. – Вы должны быть любезными. |
| | совет | You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу. |
| | упрек, запрет | You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт. |
| **SHALL** | указ, обязанность | These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых |

| | | |
|---|---|---|
| | | обстоятельствах. |
| | угроза | You shall suffer. — Ты будешь страдать. |
| | просьба об указании | Shall I open the window? – Мне открыть окно? |
| **WILL** | готовность, нежелание/отказ | The door won't open. — Дверь не открывается. |
| | вежливая просьба | Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной? |
| **WOULD** | готовность, нежелание/отказ | He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос. |
| | вежливая просьба | Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной. |
| | повторяющееся/привычное действие | We would talk for hours. – Мы беседовали часами. |
| **NEED** | необходимость | Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать? |
| **NEEDN'T** | отсутствие необходимости | She needn't go there. — Ей не нужно туда идти. |
| **DARE** | Посметь | How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить? |

| **Модальные единицы эквивалентного типа** | | |
|---|---|---|
| **to be able (to) = can** | Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент | She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию). |
| **to be allowed (to) = may** | Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения | My sister **is allowed to** play outdoors. (Moей сестре разрешается играть на улице). |
| **to have (to)=** ought, must, should | Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах | They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело). |
| **to be (to)=** ought, must, should | Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д. | We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника |

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Rephrase the following sentences using must, mustn't, needn't, has to or doesn't have to.***

1 **You aren't allowed** to park your car in the college car park.

*...You mustn't park your car in the college car park...*

2 **I strongly advise** you to speak to your parents about your decision.

3 **It isn't necessary** for Emma to attend tomorrow's staff meeting.

4 **Jack is obliged** to wear a suit and a tie at work because the manager says so.

5 **I'm sure** Antonio is from Milan.

6 **It's necessary** for Roger to find a job soon.

7 **It's forbidden** to use mobile phones inside the hospital.

8 Susan **is obliged to** work overtime because her boss says so.

***2. Rephrase the following sentences using didn't need to or needn't have done.***

1 It wasn't necessary for him to wash the car. It wasn't dirty.

*...He didn't need to wash the car...*

2 It wasn't necessary for her to buy so many oranges, but she did.

3 It wasn't necessary for us to take an umbrella. It wasn't raining.

4 It wasn't necessary for us to turn on the light. It wasn't dark.

5 It wasn't necessary for him to call me today, but he did.
6 It wasn't necessary for you to make sandwiches for me, but you did.
7 It wasn't necessary for them to make reservations at the restaurant, but they did.

***3. Rewrite the sentences using the word in bold.***

1 It isn't necessary for Mark to buy new clothes for the reception.
**need** *...Mark doesn't need to/needn't buy new clothes for the reception…*
2 You aren't allowed to pick these flowers. **must**
3 Sarah is obliged to type her compositions at university. **has**
4 It wasn't necessary for Paula to make the beds. **need**
5 It is your duty to obey the law. **must**
6 It wasn't necessary for Bob to wait for me, but he did. **need**
7 It is forbidden to throw litter on the beach. **must**
8 I'm sure Ronald is at home. **must**
9 It wasn't necessary for Alice to bake a cake for the party. **need**
10 It wasn't necessary for George to stay at work late last night, but he did. **have**

***4. Fill in the gaps with an appropriate modal verb.***

1 A: ... *May/Can/Could*... I borrow your pen, please?
B: No, you … .I'm using it.
2 A: I'm bored. What shall we do?
B: We … go for a walk.
A: No, we … because it's raining.
B: Let's watch a video, then.
3 A: My parents told me I … go to the party tonight.
B: Never mind, I … go either. We … stay at home together, though.
4 A: Sir, … .I speak to you for a moment, please?
B: Certainly, but later today; I'm busy now.
5 A: Excuse me?
B: Yes?
A: … you tell me where the post office is, please?
B: Certainly. It's on the main road, next to the school.
6 A: Is anyone sitting on that chair?
B: No, you … take it if you want to.

***5. Choose the correct answer.***

1 " Todd was a very talented child.'
I know. He ..*B*... play the piano well when he was seven.'
A couldn't B could C can
2 I've just taken a loaf out of the oven.
Oh, that's why I … smell fresh bread when I came home.
A was able to B can't C could
3 'How was the test?'
Easy. All the children … pass it.'
A were able to B could C can't
4 What are you doing this summer?'
'I hope I'll … go on holiday with my friends.'
A could B be able to C can

***6 Rewrite the sentences using the words in bold.***

1 Do you mind if I leave the door open for a while?
**can** *...Can I leave the door open for a while?...*

2 You're obliged to take notes during the lecture. **have**
3 I'm sorry, but you aren't allowed to enter this room. **must**
4 Jack managed to unlock the door. **able**
5 It wasn't necessary for Ann to cook dinner, but she did. **need**
6 Let's play a game of chess. **could**
7 I'm certain Sarah is bored with her work. **must**
8 I strongly advise you to take up sport. **must**
9 I'm certain Liz isn't interested in your ideas. **can**
10 You may take the car tonight if you want. **can**

***7. Study the situations and respond to each one using an appropriate modal verb.***

1 You want to go on holiday with your friends this year. Ask your parents for **permission.**
*...Can I go on holiday with my friends this year?...*
2 You are at a job interview. You type fast, you use computers and you speak two foreign languages. Tell the interviewer about your **abilities**.
3 Your brother is trying to decide what to buy your mother for her birthday. You **suggest** a box of chocolates.
4 Your jacket is dirty and you want to wear it next week. It is **necessary** to take it to the dry cleaner's.
5 You want to have a day off work next week. Ask for your boss' **permission.**
6 You are in the car with your uncle. It's hot and you want him to open the window. Make a **request.**
7 Your mother is going to the shops. She asks you if you want anything. You tell her it **isn't necessary** to get anything for you.

***8. Complete the sentences using must or can't.***

1 I'm certain they go to bed early on Sunday nights. They *…must go to bed early on Sunday nights…*
2 I'm sure John didn't stay late at the office. John *...can't have stayed late at the office…*
3 I'm certain he hasn't arrived yet. He …
4 I'm certain they are working together. They …
5 I'm sure Amy hasn't finished her homework. Amy …
6 I'm certain she was having a bath when I rang. She …
7 I'm sure he hasn't won the prize. He …
8 I'm sure she is looking for a new house. She …
9 I'm certain Paul didn't invite Linda to the party. Paul …
10 I'm certain you have been planning the project. You …
11 I'm sure she was writing a letter. She …
12 I'm certain they hadn't paid the bill. They …
13 I'm sure he had been fixing the pipe. He …

***9. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.***

1 Perhaps Laura has left the phone off the hook. *...Laura may/might/could have left the phone off the hook…*
2 Surgeons are obliged to scrub their hands before operating on patients.
3 Do you mind if I open the window?
4 It wasn't necessary for Peter to wash the dog, so he didn't.
5 Emily managed to reach the top shelf, even though she didn't have a ladder.
6 It's forbidden to copy files without the manager's permission.
7 Why don't we spend this evening at home?
8 I'm certain Patrick misunderstood my instructions.
9 I'm sure Helen didn't know about her surprise party.

**10. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.**

1 Perhaps they are at work.

They ...*may/might/could be at work*…

2 Perhaps he is waiting outside. He …

3 It's possible she will work late tonight. She …

4 It's likely he was driving too fast. He …

5 It's possible they made a mistake. They …

6 Perhaps he has missed the bus. He …

7 It's possible she has been playing in the snow. She …

8 It's likely we will be leaving tomorrow. We …

9 It's likely he will stay there. He …

10 Perhaps she had been trying to call you. She …

11 It's likely they had seen the film already. They …

12 It's possible he is studying in the library. He …

## Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

### Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)

This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)

Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)

Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

**Прямой пассив (The Direct Passive)**

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.

My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.

to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.

to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:

Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

**Косвенный пассив (The Indirect Passive)**

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.

б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить

to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять

to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить

to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать

to teach учить to tell сказать и др.

Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.

Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)

A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:

John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.

The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):

He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать

to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать

to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

**Употребление Страдательного залога**

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия ( 70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:

He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:

The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:

The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:

The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)

The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:

The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:

The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:

He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

**Перевод глаголов в форме Passive**

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:

I am invited to a party.

Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):

Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.

Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.

I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):

They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:

The experiments were made last year.

1) Опыты были проведены в прошлом году.

2) Опыты проводились в прошлом году.

3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:

It is said… Говорят… It was said… Говорили…

It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…

It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. What happens to a car when it is taken for a service? Look at the prompts and make sentences using the present simple passive, as in the example.***

1. the oil / change

*The oil is changed.*

2. the brakes / test
3. the filters / replace
4. air / put / in the tyres
5. the battery / check

6. the lights / test
7. broken parts / repair
8. it / take / for a test drive
9. the radiator / fill / with water

***2. Mr Sullivan, who is a director, is preparing a scene for his new film. Read the orders and respond using the present continuous passive, as in the example.***

1. Move that scenery, please.
*It's being moved now, Mr Sullivan.*
2. Put those props in place, please.
3. Call the actors, please.
4. Check their costumes, please.
5. Turn on the lights, please.

***3. Detective Maguire is talking to a police officer about a burglary which happened early yesterday morning. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example***

1. Have you dusted the house for fingerprints yet?
the house / dust / for fingerprints yesterday
*Yes, the house was dusted for fingerprints yesterday.*
2. Have you found any evidence yet?
a piece of material / find / this morning
3. Have you interviewed the house owners yet?
they / interview / last night
4. Have you questioned the neighbours yet?
they / question / this morning
5. Have you arrested any suspects yet?
two men / arrest / yesterday evening
6. Have you interrogated the suspects yet?
they / interrogate / last night
7. Have you recovered the stolen goods yet?
they / recover / this morning
8. Have you written your report yet?
it / complete / an hour ago

***4. Helen and Chris moved house two years ago. Yesterday, they drove past their old house and saw that it looked very different. Describe the changes using the present perfect simple passive, as in the example.***

1. the outside walls / paint
*The outside walls have been painted.*
2. new windows / put in
3. a garden pond / make
4. the trees / cut down
5. a lot of flowers / plant
6. the old gate / replace

***5. A young actress is hoping to star in a new film. Her friend is asking her what is going to happen. Respond to her questions using the passive infinitive, as in the example.***

1. Will they audition you for the new film?
*Well, I hope to be auditioned.*
2. Will they give you a leading role?
3. Will they pay you a lot of money?
4. Will they send you to Hollywood?

5. Will they introduce you to all the stars?
6. Will they ask you to give a TV interview?
7. Will they give you an award?

***6. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.***

1. A: Who looks after your garden for you?
B: It ...*is looked after*... (look after) by my brother.
2. A: That's a beautiful dress. Where did you buy it?
B: Actually, it … (make) for me by my aunt.
3. A: Have you typed that letter yet, Miss Brown?
B: It … (type) right now, sir.
4. A: Did you make the coffee when you got to work this morning?
B: No, it …. (already/make) by the time I got there.
5. A: Are you going to pick up the children today?
B: No, they … (pick up) by Roger. I've already arranged it.
6. A: Where is your watch?
B: I broke it. It … (repair) at the moment.
7. A: Has the new furniture for my bedroom arrived?
B: No, it … (not/deliver) yet.
8. A: They are building a new sports centre in town.
B: I know. It … (open) by the mayor next month.

***7. Rewrite the sentences in the passive, where possible.***

1. John opened the door.
*...The door was opened by John.*
2. They didn't come home late last night.
*...It cannot be changed.*
3. Their nanny takes them to the park every day.
4. I left very early yesterday afternoon.
5. Meg asked the policeman for directions.
6. Charles is moving house next month.
7. The letter arrived two days ago.
8. Sam took these photographs.

***8. Fill in by or with.***

1. The lock was broken ...*with*... a hammer.
2. This book was written … my favourite author.
3. The cake was decorated… icing.
4. The tiger was shot … a gun.
5. Claire was shouted at … her teacher.
6. He was hit on the head … an umbrella.

***9. Rewrite the sentences in the passive.***

1. Someone is repairing the garden fence.
*...The garden fence is being repaired....*
2. Do they teach Latin at this school?
3. I don't like people pointing at me.
4. She hit him on the head with a tennis racquet.
5. Michael has made the preparations.
6. Is Tim cleaning the house?
7. Who built the Pyramids?
8. The boss is going to give us a pay rise.

9. I expect they will deliver my new car soon.
10. The police are questioning the suspects.
11. Did your next door neighbours see the thieves?
12. Paul remembers his teacher asking him to star in the school play.
13. A lot of children use computers nowadays.
14. Who smashed the kitchen window?
15. They won't have completed the work by the end of the month.
16. The children will post the letters.
17. People make wine from grapes.
18. Had Helen closed the windows before she left the house?
19. Jill hasn't done the housework yet.
20. They may not deliver the parcel today.

***10. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.***

A: Do you still work at Browns and Co?
B: Yes, I do. I 1) ...*have been employed*... (employ) by Mr Brown for five years now, you know.
A: Oh. Do you still enjoy it?
B: Oh yes! I 2) … (give) a promotion last year and I'm very happy.
A: A promotion? So, what is your job now?
B: I 3) … (make) Head of European Sales.
A: So, what do you do?
B: Well, sometimes I 4) … (send) to other countries on business.
A: I see. Do they pay you well?
B: Well, I 5) … (pay) quite well and I expect I 6) … (give) a pay rise soon.
A: Good for you!

**Согласование времен (Sequence of Tenses)**

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

***Правило 1:*** Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

***Правило 2:*** Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

| Переход из одного времени в другое | Примеры | |
|---|---|---|
| Present Simple » Past Simple | He **can speak** French – Он говорит по-французски. | Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски. |
| Present Continuous » Past Continuous | They **are listening** to him – Они слушают его | I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его. |
| Present Perfect » Past Perfect | Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему. | Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему. |

| | | |
|---|---|---|
| Past Simple » Past Perfect | I **invited** her – Я пригласил ее. | Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я пригласил ее. |
| Past Continuous » Past Perfect Continuous | She **was crying** – Она плакала | John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала. |
| Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous | It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час. | He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь. |
| Future Simple » Future in the Past | She **will show** us the map – Она покажет нам карту. | I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту. |

***Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.***

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

**Перевод прямой речи в косвенную в английском языке**

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

***3. Согласовываем время***

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

***4. Меняем некоторые слова***

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

**Вопросы в косвенной речи в английском языке**

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

***He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»***

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

***He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.***

Давайте рассмотрим еще один пример:

***She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»***

***She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.***

**Специальные вопросы в косвенной речи**

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

***She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»***

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

***She said when I would come. Она сказала, когда я приду.***

***He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»***

***He asked where she worked. Он спросил, где она работает.***

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Fill in the gaps with the correct pronoun or possessive adjective.***

1. James said, 'My boss wants me to go to London tomorrow.'
James said ...*his*... boss wanted to go to London the following day.
2. Mary said, 'I'm waiting for my son to come out of school.'
Mary said that … was waiting for … son to come out of school.
3. George said, 'I've bought a new car for my mum.'
George said … had bought a new car for … mum.
4. Julie said to me, 'I need you to help me with the shopping.'
Julie told me that … needed … to help … with the shopping.
5. John said, 'I'd like to take you out to dinner.'
John said … 'd like to take … out to dinner.
6. Helen said to Jane, 'I think your new haircut is lovely.'
Helen told Jane that … thought … new haircut was lovely.

***2. Turn the following sentences into reported speech.***

1. Robin said, These biscuits taste delicious.' ...
*Robin said (that) the biscuits tasted delicious....*

2. “I can't see you this afternoon because I've got a lot to do,' Ann told me.
3. She came into the room holding some letters in her hand and said, 'I found these while I was tidying the desk drawers.'
4. Fiona said, That picture was painted by my great-grandfather.'
5. “Those were good times for my family,' Jack said.
6. 'I received a parcel this morning, but I haven't opened it yet,' Tom said.
7. "You mustn't do that again,' Mum said to Bob.
8. “These shoes are worn out. You'd better throw them away,' Mum said to me.

***3. Turn the following sentences into reported speech.***

1 He said, 'I'm going to the station.'

*...He said (that) he was going to the station....*

2 Tina said, 'You should exercise regularly.'
3 They said, 'We had booked the room before we left.'
4 Tom said, This meal is delicious.'
5 'I've written you a letter,' she said to her friend.
6 'We've decided to spend our holidays in Jordan,' they told us.
7 Jill said, “I’ll go to the bank tomorrow.'
8 She said to him, 'We've been invited to a wedding.'
9 She told me, 'You must leave early tomorrow.'
10 They've gone out for the evening,' Jessie said to me.
11 They said, 'We may visit Joe tonight.'
12 She said, 'I can meet you on Tuesday.'
13 Keith said, There is a letter for you on the table.'
14 'We won't be visiting Tom this evening,' Sam told us.
15 Eric said, They had been talking on the phone for an hour before I interrupted them.'
16 'I haven't spoken to Mary since last week,' Gloria said.
17 They delivered the letters this morning,' she said.
18 He said, 'I'd like to buy this jumper.'
19 They aren't going on holiday this year,' he said.
20 Jane said, 'I haven't finished my homework yet.'
21 'I'm going to bed early tonight,' Caroline said.
22 'My mother is coming to visit us,' I said.
23 'We don't want to watch a film tonight,' the children said.
24 'He's playing in the garden now,' his mother said.
25 She said, 'You must do your homework now.'

***4. Turn the sentences into reported speech. In which of the following sentences do the tenses not change? In which do they not have to be changed? Why?***

1 The article says, “The artist only uses oil paints.'

*...The article says (that) the artist only uses oil paints....*

*... The tenses do not change because the introductory verb is in the present simple....*

2 'They are working hard today,' he said.
3 'I've done the things you asked me to do,' Mary said.
4 The sun rises in the east,' she said.
5 'He broke the window,' they said.
6 'We've never been on holiday abroad,' they said.
7 Mum says, 'Dinner is ready.'
8 “I’ll start cooking at six o'clock,' she said.
9 'We went to the supermarket yesterday,' he said.
10 Mrs Jones says, 'My daughter is going to have a baby.'
11 'You're never going to get a job,' Dad always says.

12 'Fish live in water,' he said.
13 'We went to the beach last weekend,' they said.
14 'He showed me his photographs,' she said.
15 'I'm working on my project now,' Billy said.

***5. Turn the following sentences into reported speech.***

1 'Seaweed grows in the sea,' the teacher said to the students.

*...The teacher said to the students/told the students (that) seaweed grows/grew in the sea....*

2 'I saw Amanda at the cinema,' she said, (up-to-date reporting)
3 They don't live here any more,' he said to me. (out-of-date reporting)
4 "Canada is a large country,' he said.
5 The Statue of Liberty is in America,' she said to us
6 “I’ll help you with your homework,' he said, (out-of-date reporting)
7 'I would go on holiday if I had enough money,' Bill said, (up-to-date reporting)
8 'If I'm free, I'll call you,' Tom said, (up-to-date reporting)
9 'You should make a decision,' he said to us.
10 'You can ask John for advice,' she said, (up-to-date reporting)

***6. Turn the following into reported questions.***

1 'Where do you live?' I asked her.

*...I asked her where she lived....*

2 'How old will you be on your next birthday?" he asked me.
3 'Where is your umbrella?' she asked her daughter.
4 'Do you like playing football?' John asked us.
5 The boss asked, 'What time are you going home today?'
6 'Will you take the children to school today?' he asked.
7 'Who called you today?' she asked.
8 'When will you decorate the kitchen?' Martha asked.
9 'Who broke my vase?' I asked.
10 Father asked, 'Will you help me lift these boxes, please?'
11 'Can you speak a foreign language?' she asked her.
12 'Where is the tourist information centre?' we asked.

***7. Yesterday, Marion met a couple who were on holiday in London. They were looking at a map. She asked them some questions. Turn them into reported questions.***

1 'Are you lost?'

*...Marion asked them if/whether they were lost....*

2 'Can you speak English?'
3 'Where are you from?'
4 'Is your hotel near here?'
5 'Where do you want to go?'
6 'Were you looking for Big Ben?'
7 'Have you been to the British Museum?'
8 'Have you visited Buckingham Palace?'
9 'Do you like London?'

***8. Fill in the gaps with the introductory verbs in the list in the correct form.***

order, tell, ask, beg, suggest

1 'Please visit me in hospital,' Joan said to Colin.

Joan ...*asked*... Colin to visit her in hospital.

2 'Let's eat out this evening,' Paul said to her.

Paul … eating out that evening.

3 'Please, please be careful,' she said to him.
She … him to be careful.
4 'Don't go near the fire,' Dad said to us.
Dad … us not to go near the fire.
5 'Be quiet!' the commander said to the troops.
The commander … the troops to be quiet

***9. Turn the following sentences into reported speech.***

1 'Let's try the exercise again.'
*The ballet teacher suggested trying the exercise again.*
2 'Lift your leg higher please, Rachel.'
3 'Turn your head a little more.'
4 'Don't lean back.'

***10. Turn the following sentences into reported speech.***

1 The doctor said to the patient, 'Come back to see me again next week.'
*... The doctor told the patient to go back and see him again the following week/the week after.*
2 The guard said to the driver, 'Stop!'
3 He said, 'Shall we go for a walk?'
4 She said to him, 'Please, please don't leave me!'
5 Jenny said to Dave, 'Please help me with this
6 She said to him, 'Open the window, please.'
7 Mother said, 'How about going for a drive?'
8 She said, 'Let's eat now.'

***ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)***

***Тематика общения:***

1. Избранное направление профессиональной деятельности.

***4.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

**My speciality**

**The Earth's Crust and Useful Minerals**

**cause -** v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

**clay** - *n* глина; глинозем

**consolidate -** v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

**crust -** *n* кора; *геол.* земная кора

**decay -** v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

**derive -** v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

**destroy -** v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

**dissolve** v растворять

**expose -** v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение

**external -** *a* внешний

**extrusive** - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

**force -** v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

**glacier -** *n* ледник, глетчер

**grain -** *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый

**gravel -** *n* гравий, крупный песок

**internal -** *a* внутренний

**intrusive -** *a* интрузивный, плутонический

**iron -** *n* железо

**layer -** *n* пласт

**like** - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

**lime -** *n* известь; **limestone -** *n* известняк

**loose -** *a* несвязанный, свободный; рыхлый

**make up -** v составлять; *n* состав *(вещества)*

**particle** - *n* частица; включение

**peat -** *n* торф; торфяник

**represent -** v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный

**rock** – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

**sand -** *n* песок

**sandstone -** *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

**sediment -** *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

**schist -** *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый

**shale -** *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …**, **oil …** - горючий сланец

**siltstone -** *n* алеврит

**stratification -** *n* напластование, залегание

**stratify -** v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

**substance -** *n* вещество, материал; сущность

**thickness -** *n* толщина, мощность

**value -** *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*

**vary** - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

**contain -** v содержать *(в себе),* вмещать

**crack -** *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

**contract -** v сжиматься; сокращаться

**dust -** *n* пыль

**expand -** v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

**fissure -** *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

**fracture -** *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

**freeze -** *v* замерзать; замораживать; застывать

**gradual -** *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

**hard -** *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

**hole -** *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

**influence -** *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

**lateral -** *a* боковой

**occur -** *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания

**penetrate -** *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

**phenomenon -** *n* явление; *pi* **phenomena**

**pressure -** *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

**rate -** *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

**refer -** v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

**resist -** *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

**size -** *n* размер; величина; класс *(угля)*

**solution –** *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий

**succession –** *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

**undergo** (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

**uniform –** *a* однородный; одинаковый

**weathering -** *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

**to be subjected to** подвергаться

## Rocks of Earth's Crust

**abyssal** - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

**adjacent** - *a* смежный, примыкающий

**ash** - *n* зола

**belt -** *n* пояс; лента; ремень

**body** - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

**common -** *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

**cool** - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

**dimension -** *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

**dust** - *n* пыль

**dyke –** *n* дайка

**extrusion** - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

**fine** - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь

**flow -** v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
**fragmentary -** *a* обломочный, пластический
**glass** - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
**gold** - *n* золото
**inclined** - *a* наклонный
**mica** - *n* слюда
**permit** - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
**probably** - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
**shallow** - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
**sill** - *n* силь, пластовая интрузия
**stock** - *n* шток, небольшой батолит
**vein** - *n* жила, прожилок, пропласток
**band -** *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
**cleave** - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
**constituent -** *n* составная часть, компонент
**define** - *v* определять, давать определение
**distribute** - v **(among)** распределять (между); раздавать;
**disturb** - *v* нарушать; смещать
**excess -** *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
**flaky** - *a* слоистый; похожий на хлопья
**fluid** - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
**foliate -** *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
**marble -** *n* мрамор
**mention** - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
**plate** - *n* пластина; полоса *(металла)*
**pressure** - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
**relate** - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
**run (ran, run) -** *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
**schistose** - *a* сланцеватый; слоистый
**sheet** - *n* полоса
**slate** - *n* сланец; *syn* **shale**
**split (split) -** *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
**trace** - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
**at least** по крайней мере
**to give an opportunity** (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
**in such a way** таким образом

## Fossil Fuels

**accumulate** - v накапливать; скопляться
**ancient** - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
**associate** - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
**burn (burnt**) - v сжигать; гореть; жечь
**charcoal -** *n* древесный уголь
**convenient** - *a* удобный, подходящий
**crude** - *a* сырой, неочищенный
**dig (dug**) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
**divide** - v делить; (from) отделять; разделять
**evidence -** *n* доказательство; очевидность; признак(и)
**fossil** - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость

**heat -** v нагревать; *n* теплота

**liquid -** *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

**manufacture** - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

**mudstone -** *n* аргиллит

**purpose** - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

**shale** - *n* глинистый сланец

**the former … the latter -** первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

**bench** - *n* слой, пачка *(пласта)*

**blend** - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

**combustion** - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

**continuity** - *n* непрерывность, неразрывность

**domestic** - *a* внутренний; отечественный

**estimate** - v оценивать; *n* оценка; смета

**fault** - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

**fold** - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

**inflame** - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

**intermediate** - *a* промежуточный; вспомогательный

**liable** - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

**luster -** *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий

**matter** - *n* вещество; материя

**moisture** - *n* влажность, сырость; влага

**parting** - *n* прослоек

**plane** - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

**rank** - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

**regular** - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

**similar** - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

**smelt** - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

**store** - v запасать, хранить на складе; вмещать

**strata** - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

**thickness** - *n* мощность *(пласта, жилы)*

**uniform** - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

**utilize** - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

**volatile** - *a* летучий, быстро испаряющийся

## Prospecting and Exploration

**aerial** - *a* воздушный; надземный

**certain** - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

**cost** - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

**crop** - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

**dredging** - *n* выемка грунта; драгирование

**drill** - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

**drive (drore**, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

**evidence** – *n* основание; признак(и); свидетельства

**expect -** v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

**explore** - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

**galena** - *n* галенит, свинцовый блеск

**indicate** - v указывать, показывать; служить признаком; означать

**lead** - *n* свинец

**look for** - v искать

**open up -** v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

**panning** - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

**processing** - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

**prove -** v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

**search** - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

**sign** - *n* знак, символ; признак, примета

**store** - v хранить, накапливать *(о запасах)*

**work -** v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

**adit** - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

**angle** - *n* угол

**approximate** - *a* приблизительный

**bit** - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

**borehole** - *n* скважина, буровая скважина

**crosscut** - *n* квершлаг

**dip** - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

**enable** - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

**exploit** - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

**measure** - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

**overburden -** *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

**pit** - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

**reliable** - *a* надежный; достоверный

**rig** - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

**sample** - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

**section** - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

**sequence** - *n* последовательность; порядок следования; ряд

**sink (sank, sunk**) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

**slope -** *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

**steep** - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

**strike** - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

**trench** - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

**to make use (of)** использовать, применять

**to take into consideration** принимать во внимание; *syn* **take into account**

## General Information on Mining

**access -** *n* доступ

**affect** - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

**barren** - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

**chute** - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

**compare** - v (with) сравнивать, проводить параллель

**contribute -** v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

**cross-section** - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

**develop** - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

**drift** - *n* штрек, горизонтальная выработка

**ensure** - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

**face** - *n* забой; лава

**floor** - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

**govern** - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

**inclination** - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

**incline** - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

**inclined** - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

**level** - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

**recover** - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

**remove** - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

**rib** - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

**roof** - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

**shaft** - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

**tabular -** *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

**waste** - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

**well** - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

**capital investment -** капитальные вложения

**gate road -** промежуточный штрек

**in bulk -** навалом, в виде крупных кусков

**metal-bearing -** содержащий металл

**production face/working -** очистной забой

**productive mining -** эксплуатационные работы

**in view of -** ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

**with a view to -** с целью

**advantage** - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

**caving** - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

**deliver** - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

**entry** - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

**giant** - *n* гидромонитор

**gravity** - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

**haul** - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

**longwall** - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

**lose (lost)** - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

**pillar** - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

**predominate** - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

**protect** - v охранять, защищать

**reach** - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

**satisfy** - v удовлетворятъ(ся)

**shield** - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

**room -** *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

**stowing** - *n* закладка *(выработанного пространства)*

**method of working** система разработки

**the sequence of working the seams -** последовательность отработки пластов

**goaf** — завал; обрушенное пространство

**double-ended drum bearer** — комбайн с двойным барабаном

**to identify** — опознавать

**appraisal** — оценка

**susceptibility** — чувствительность

**concealed** — скрытый, не выходящий на поверхность

**crusher** — дробилка

**concentration** — обогащение

**blending** — смешивание; составление шихты

**screen** — сортировать (обыден. уголь); просеивать

**froth floatation** — пенная флотация

**core drilling** — колонковое бурение

**to delineate** — обрисовывать, описывать

**lender** — заимодавец

**feasibility** — возможность

**in situ mining** — повторная разработка месторождения в массиве

**screening** — просеивание; грохочение

**processing** — обработка, разделение минералов

## Mining and Environment

**break** v **(broke**, **broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

*(руды .или породы);* расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

**drill -** *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение

**dump** -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

**dumper** опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

**environment -** *n* окружение; окружающая обстановка/среда

**explode -** v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive -** *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

**friable -** *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

**handle -** v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

**heap -** v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

**hydraulicklng -** *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

**load -** v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader -** *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader -** комбайн, комбинированная горная машина

**lorry** - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

**mention -** v упоминать

**overcasting -** *n* перелопачивание *(породы)*

**pump** - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

**reclamation -** *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

**sidecastiag** - *n* внешнее отвалообразование

**site** - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

**slice** - *n* слой; **slicing -** *n* выемка слоями, разработка слоями

**strip** - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper -** *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping -** *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

**unit -** *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

**washery** - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

**to attract smb's attention** привлекать чье-л. внимание

**backhoe** - *n* обратная лопата

**blast** - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

**block out** - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

**clearing** - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

**crash** - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

**earth-mover** - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

**excavator** - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket** ~ многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

**grab -** *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

**grabbing -** погрузка грейфером; захватывание

**hoist -** *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

**plough -** *n* струг

**power shovel** - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

**range -** *n* колебание в определенных пределах

**rate** - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

**remote** - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

**result** - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

**safety** - *n* безопасность; техника безопасности

**slope** - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(рудЫ)*

**support** - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

***4.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**My speciality is Geology**

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth’s surface and on its surface.
2. Petrology which studies the rocks of the Earth.
3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.
4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.
5. Historic Geology which treats of the Earth's history.
6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.
7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

***4.3 Систематизация грамматического материала:***

1. Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий.
2. Основные сведения о сослагательном наклонении.

**Инфинитив. The Infinitive**

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

**Формы инфинитива**

| | Active Voice | Passive Voice |
|---|---|---|
| Simple | to write | to be written |
| Continuous | to be writing | |
| Perfect | to have written | to have been written |
| Perfect Continuous | to have been writing | |

***Глаголы, после которых используется инфинитив:***

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать
to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть

*Например:*
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

***Значение разных форм инфинитива в таблице***

| Формы инфинитива | **Чему я рад?** | |
|---|---|---|
| Simple | I am glad **to speak** to you. | Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами). |
| Continuous | I am glad **to be speaking** to you. | Рад, что сейчас разговариваю с вами. |
| Perfect | I am glad **to have spoken** to you. | Рад, что поговорил с вами. |
| Perfect Continuous | I am glad **to have been speaking** to you. | Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами. |
| Simple Passive | I am (always) glad **to be told** the news. | Всегда рад, когда мне рассказывают новости. |

| | | |
|---|---|---|
| Perfect Passive | I am glad **to have been told** the news. | Рад, что мне рассказали новости. |

**Причастие. Participle**

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

**Формы причастия**

| | | Active (Активный залог) | Passive (Пассивный залог) |
|---|---|---|---|
| Participle I (Present Participle) | Simple | **writing** | **being written** |
| | Perfect | **having written** | **having been written** |
| Participle II (Past Participle) | | | **written** |

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

***Как переводить разные формы причастия на русский язык***

| Формы причастия | причастием | деепричастием |
|---|---|---|
| reading | читающий | читая |
| having read | | прочитав |
| being read | читаемый | будучи читаемым |
| having been read | | будучи прочитанным |
| read | прочитанный | |
| building | строящий | строя |
| having built | | построив |
| being built | строящийся | будучи строящимся |
| having been built | | будучи построенным |
| built | построенный | |

**Герундий. Gerund**

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

**Формы герундия**

| | Active (Активный залог) | Passive (Пассивный залог) |
|---|---|---|
| Simple | **writing** | **being written** |
| Perfect | **having written** | **having been written** |

***Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!***

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

***Герундий после глаголов с предлогами***

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),

keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

***to be + прилагательное / причастие + герундий***

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I'm tired of waiting. — *Я устал ждать.*

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Complete the sentences with the correct infinitive tense.***

1 She has grown taller. She seems ...*to have grown taller*.
2 He is getting used to his new job. He appears
3 Kate makes friends easily. She tends
4 He has finished the report. He claims
5 It is raining over there. It seems
6 He is on a diet. He appears
7 They have sailed round the world. They claim
8 She is feeling better. She seems

***2. Fill in the correct infinitive tense.***

1 A: What would you like ...*to do*... (do) tonight?
B: Let's … (go) to an Italian restaurant.
2 A: What's Liz doing?
B: She seems … (look) for something in her bag.
3 A: Alan has been offered a new job!
B: No, he hasn't. He just pretended … (offer) a new job.
4 A: Colin claims … (meet) lots of famous people.
B: I know, but I don't believe him.
5 A: Look at those two men outside. What are they doing?
B: They appear … (empty) the rubbish bins.
6 A: Would you like to go to the cinema tonight?
B: Not really. I would prefer … (go) to the theatre.
7 A: Tara seems … (work) hard all morning.
B: Yes, she hasn't even stopped for a cup of coffee.
8 A: Why is Tom at work so early this morning?
B: He wants … (finish) early so that he can go to the concert tonight.

***3. Rephrase the following sentences, as in the example.***

1 He must wash the car. I want ...*him to wash the car*...
2 You mustn't be late for work. I don't want …
3 Claire must tidy her bedroom. I want …

4 She mustn't go to the disco. I don't want …
5 They must go to school tomorrow. I want …
6 Gary mustn't make so much noise. I don't want …
7 You mustn't make a mess. I don't want …
8 He must mend his bike. I want …

***4. Complete the sentences with too or enough and the adjective in brackets.***

1 A: Would you like to come to the disco?
B: Oh no. I'm ...*too tired*... to go to a disco, (tired)
2 A: Can you reach that top shelf?
B: No, I'm not … to reach it. (tall)
3 A: Did they go on a picnic yesterday?
B: No. It was … to go on a picnic, (cold)
4 A: Did Jane enjoy the horror film?
B: No. She was … to enjoy it. (scared)
5 A: Does Tom go to school?
B: No. He isn't … to go to school yet. (old)
6 A: Will you go to London by bus?
B: No. The bus is … . I'll take the train, (slow)
7 A: Did she like the dress you bought?
B: Yes, but it was … .(big)
8 A: Take a photograph of me!
B: I can't. It isn't … in here, (bright)

***5. Rewrite the sentences using too.***

1 This music is so slow that I can't dance to it.
*...This music, is too slow for me to dance to…*
2 The bird is so weak that it can't fly.
3 She's so busy that she can't come out with us.
4 The car was so expensive that he couldn't buy it.
5 These shoes are so small that they don't fit me.
6 The book is so boring that she can't read it.
7 I was so tired that I couldn't keep my eyes open.
8 The coffee was so strong that he couldn't drink it.

***6. Underline the correct preposition and fill in the gaps with the -ing form of the verb in brackets.***

1 He is ill. He is complaining **with/<u>about</u>** ...*having*... (have) a headache.
2 Marcus went out instead **for/of** … (do) his homework.
3 Tracy was very excited **with/about** … (go) to the party.
4 I hope you have a good excuse **of/for** … (be) so late.
5 Sam is interested **in/for** … (take up)French lessons.
6 You can't stop him **to/from** … (take)the job if he wants to.
7 Susie ran because she was worried **about/of** … (miss) the bus.
8 Thank you **to/for** … (help) me with my homework.
9 She felt tired because she wasn't used **to/with** … (work) so hard.
10 His boss blamed him **for/of** … (lose) the deal.
11 I am in charge **in/of** … (make) the Christmas deliveries.
12 We are thinking **of/from** … (buy) a new car next month.
13 Sandra apologised **for/about** … (ruin) the performance.
14 Ian was talking **with/about** … (open) a shop in York.

***7. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.***

1 It's no use ...*talking*… (talk) to Bob; he won't change his mind.
2 She will … (return) the books next weekend.
3 It was good of you … (help) me fix my bicycle.
4 The man suggested … (call) the police in, to investigate.
5 I can't get used to … (live) in such a hot country.
6 He admitted … (rob) the bank.
7 You had better … (hurry), or you'll be late for work.
8 They refused … (give) me my money back.
9 She is too short … (become) a fashion model.
10 My parents let me … (stay) up late at weekends.
11 Our teacher makes us … (do) homework every evening.
12 The kitchen windows need … (clean).
13 They have begun … (make) preparations for the party.
14 He advised her … (speak) to her boss.
15 I dislike … (go) to the theatre alone.
16 Mr. Roberts was seen … (leave) his house at 12:15 last night.
17 My sister can't stand … (watch) horror films. She gets terribly scared.
18 Can you imagine … (spend) your holidays on the moon?
19 There's no point in … (call) again. There's no one at home.
20 I don't allow people … (smoke) in my house.
21 It was silly of you … (forget) to lock the door.
22 He risks … (lose) his wallet when he leaves it on his desk.

***8. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.***

1 A: Is Anne in the room?
B: Yes. I can see her ...dancing... (dance) with her husband over there.
2 A: Did you see the robber?
B: Yes. I saw him … (get) into the car and drive away.
3 A: Is John here today?
B: Yes. I heard him … (talk) on the phone as I walked past his office.
4 A: Colin is good at speaking in public, isn't he?
B: Yes. I heard him … (make) a speech last month. It was excellent.
5 A: I walked past the sports centre today.
B: So did I, and I stopped for a moment to watch some boys … (play) football.
6 A: Your hair looks great today.
B: Thanks. I watched the hairdresser … (dry) it so I could learn how to do it myself.
7 A: That's a music school, isn't it?
B: That's right. I often hear the students … (sing) as I walk past.
8 A: Did you stay until the end of the contest?
B: Yes. I listened to the chairman … (announce) the results before I went home.
9 A: How do you know Tim is at home?
B: I saw him … (cut) the grass as I was driving home.
10 A: How do you know that man stole the watch?
B: I saw him … (put) it in his pocket and leave the shop without paying.

***9. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.***

1 I'll never forget ...*sailing*... (sail) down the Danube on that warm spring night last year.
2 Please don't forget … (pay) the bill.
3 John said he remembers … (buy) the newspaper, but now he can't find it.
4 Did you remember … (post) my letters today?
5 Gloria regrets … (shout) at her sister.
6 I regret … (inform) you that we cannot give you your money back.

7 The students went on … (write) for another hour.
8 After cleaning the windows, he went on … (wash) the car.
9 We are sorry … (announce) that the 7:15 train to Liverpool has been cancelled.
10 I'm sorry for … (miss) your birth day party; I'll make it up to you.
11 She stopped … (go) to the gym after she had got back into shape.
12 They stopped … (have) a rest before they continued their journey.
13 They tried … (open) the door, but it was stuck.
14 You should try … (make) your own clothes. It's much cheaper.
15 I'm sorry. I didn't mean … (break) your vase.
16 Being a teacher means … (correct) a lot of homework.
17 I like … (tidy) my room at week ends because I don't have time during the week.
18 They like … (play) in the sea on hot days.

***10. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.***

My neighbour, Mr. Mason, loves 1) …*spending*… (spend) time in his garden. He would rather 2) … (work) outside than stay indoors, even when it is snowing! Early in the morning, you can 3) … (see) Mr. Mason 4) … (eat) breakfast in his garden, and late at night he is there again, with a cup of cocoa in his hand. I'd like 5) … (help) sometimes when there is lots of work to do, but Mr. Mason prefers 6) … (do) everything himself. He doesn't mind 7) … (get) cold and wet in the winter, and his wife says it's no use 8) … (try) to make him wear a waterproof jacket because he hates 9) … (wear) them! Mr. Mason says he will go on 10) … (garden) until he is too old 11) … (do) it!

**Основные сведения о сослагательном наклонении**

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

**Type 0 Conditionals:** They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

**Type 1 Conditionals:** They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

**Type 2 Conditionals:** They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

**Type 3 Conditionals:** They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

| | If-clause (hypothesis) | Main clause (result) | Use |
|---|---|---|---|
| Type 0<br>general truth | if + present simple | present simple | something which is always true |
| | If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice. | | |
| Type 1<br>real present | if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous | future/imperative<br>can/may/might/must/should/ could + bare infinitive | real - likely to happen in the present or future |
| | If he doesn't pay the fine, he will go to prison.<br>If you need help, come and see me.<br>If you have finished your work, we can have a break.<br>If you're ever in the area, you should come and visit us. | | |
| Type 2<br>unreal present | if + past simple or past continuous | would/could/might + bare infinitive | imaginary situation contrary |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | to facts in the present; also used to give advice |
| | If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice) | | |
| Type 3<br>unreal past | if + past perfect or past perfect continuous | would/could/might + have + past participle | imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism |
| | If she had studied harder, she would have passed the test.<br>If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished. | | |

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

*e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.*

*b) I'll give Tim his book if I see him.*

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

*e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)*

*b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)*

*c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)*

*d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)*

*e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)*

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

*e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus.* (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

*e.g. If Rick was/were here, we could have a party.*

We use If I were you ... when we want to give advice.

*e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.*

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

*e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)*

*b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)*

*c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)*

***Выполните упражнения на закрепление материала:***

***1. Look at the prompts and make Type 1 conditional sentences, as in the example.***
e.g. If we cut down all the forests, the world's climate will change.
1 cut down/ all forests / world's climate / change
2 not stop/use / aerosols /destroy / ozone layer
3 find / alternative sources of energy / solve / some of our environmental problems
4 temperatures / go up / by a few degrees /sea levels / rise
5 recycle / waste / save / natural resources
6 population / continue to increase / not be enough food for everyone

***2. Lisa is trying to decide where to go on holiday. She would like to go to one of these places. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.***
A) SPAIN FOR A WEEK
£180 Inclusive!!
2-star hotel beach
Free water sports

B) A TWO WEEK CAMPING HOLIDAY IN THE SOUTH OF FRANCE
ONLY £280 per person
Self-catering

1. How long / be away / choose / Spain?
SA: How long will she be away if she chooses Spain?
SB: If she chooses Spain, she'll be away for a week.
2. Where / go / like / camping?
3. How much / pay / go to / France?
4. What / do / go to / Spain?
5. Where / go / want / cheap holiday?

***3. Study the situations, then make Type 2 conditional sentences, as in the example.***
I don't have a car, so I have to wait for the bus every day.
1. If I ...had... (have) a car, I ...wouldn't have to... (not/have to) wait for the bus every day.
I never do my homework, so my teacher always gets angry with me.
2. If I … (do) my homework, my teacher … (not/get) angry with me.
I live in a small house, so I can't invite friends over.
3. If I … (live) in a bigger house, I … (be able to) invite friends over.
I never get up early, so I y am always late for school.
4. If I … (get up) earlier, I … (not/be) late for school.

***4. Complete the sentences to make Type 3 conditional sentences, as in the example.***
1. If he ...hadn't noticed... (not/notice) the mould in one of his glass dishes, Alexander Fleming ...would never have discovered... (never/discover) penicillin.
2. If he … (sell) some of his paintings, Van Gogh … (get) some recognition during his lifetime.
3. If Barbara Streisand … (change) the shape of her nose, her career … (never/be) the same.
4. If Anne Sullivan … (not/teach) her, Helen Keller … (not/be able to) communicate.
5. If Naomi Campbell … (not/be) so beautiful, she … (never/become) a supermodel.

***5. Read the story below and make Type 3 conditional sentences, as in the example.***
e.g. 1) ...if Sally hadn't been in a hurry, she would nave left some important notes at home....
Sally had a terrible day yesterday. She was in a hurry, so she left some important notes at home. She wasn't prepared for her meeting with a new client, so the meeting was a disaster. The client was

disappointed, and as a result he refused to do business with the company. The boss shouted at Sally, so she got upset.

***6. Match the items in column A with those in column B in order to make correct Type 0 conditional sentences, as in the example.***

e.g. 1 - c ...if you add sugar to a cup of coffee, the coffee tastes sweeter...

A

1. Add sugar to a cup of coffee.
2. Throw salt onto snow.
3. Put an apple in a bowl of water.
4. Water plants regularly.
5. Lie in the sun too long.
6. Take regular exercise.

B

a The apple floats.
b Your skin turns red.
c The coffee tastes sweeter.
d You feel healthy.
e The plants grow.
f The snow melts.

***7. Put the verbs in brackets into the correct tense.***

1 A: What time will you be home tonight?
B: I'm not sure. If I ...have to... (have to) work late. I ...'ll call... (call) you.
2 A: I felt very tired at work today.
B: Well, if you … (not/watch) the late film, you … (not/feel) so tired
3 A: Should I buy that car?
B: Why not? If I … (have) the money, I … (buy) it myself.
4 A: If you … (pass) a chemist's, … (you/get) me some cough medicine?
B: Yes, certainly.
5 A: My sister seems very upset at the moment.
B: Were I you, I … (talk) to her about it.
6 A: Unless you … (hurry), you … (be) late again.
B: No, I won't. There's plenty of time.
7 A: Oh! I forgot to ask Sarah over for dinner.
B: If I … (speak) to her today, I … (ask) her for you.
8 A: May I join the club, please?
B: Provided you … (be) over eighteen, you can join the club.
9 A: What a lovely restaurant! I'm glad we came here.
B: If you … (not/burn) the dinner, we … (not/come) here!
10 A: Just think. If I … (not/move) to York, I … (never/meet) you.
B: I know, wasn't it lucky?
11 A: Jo doesn't spend enough time with me.
B: Well, if she … (have) the time, I'm sure she … (try), but she's very busy.
12 A: Did you give Bill the message?
B: No, but when I … (see) him, I … (tell) him the news.

***8. Choose the correct answer.***

1 'If you ...C... that plate, you'll burn your fingers.'

'Why? Has it been in the oven?'
A would touch
B will touch
C touch
2 ‘ … you're busy, we'll talk now.'
‘That's fine. I'm not busy at the moment.'
A If
B Provided
C Unless
3 'If you watch the news, you … a lot.'
'I know. I watch it every day.'
A learn
B were learning
C would learn
4 '… you wear warm clothes, you won't get cold.'
'I'll wear an extra jumper.'
A Unless
B Providing
C Supposing
5 'Shall I invite John to the party?'
'Well, were I you, I … him.'
A would invite
B will invite
C am inviting
6 '… the teacher comes back now, what will you do?'
'I don't know.'
A When
B Providing
C Supposing
7 'Could I see the menu, please?'
'Yes, sir. If you … a seat, I will fetch it for you.'
A take
B had taken
C have taken
8 'Don't cry. Everything will be alright.'
'Yes, but if I … the bus, I wouldn't have been late for school.'
A didn't miss
B hadn't missed
C don't miss
9 'When water boils, it … steam.'
'Yes, I know; and the steam is hot, too.'
A would produce
B produce
C produces
10 'Can you help me, please?'
'Well, if I wasn't studying, I … you.'
A would help
B help
C will help
11 'John crashed his car yesterday.'
'I know, but if he hadn't been changing the cassette, he …'
A won't crash

B wouldn't crash
C wouldn't have crashed
12 'Can I have some chocolate, please?'
'If you behave yourself, I you some later.'
A would buy
B might buy
C buy
13 'Should you see Colin … and tell me.'
'I will.'
A come
B to come
C will come
14 'If we were rich, we … expensive clothes.'
'Well, unfortunately we aren't rich!'
A could afford
B can afford
C afford

***9. Put the verbs in brackets into the correct tense.***

1 If I ...were... (be) you, I wouldn't drive in the snow.
2 Peter … (be able to) help you if he was here.
3 If I had closed the window, the cat … (not/jump) out.
4 I … (call) for help if I got stuck in a lift.
5 Had I known him, I … (talk) to him.
6 John … (may/lose) his job if he is rude to the boss.
7 If you … (save) some money, you would have been able to go on holiday last year.
8 You may win if you … (take) part in the contest.
9 If I had toothache, I … (go) to the dentist.
10 They would have helped us move house if we … (ask) them.
11 If Jane … (be) older, she could live by herself.
12 We would have changed our plans if we … (hear) the weather forecast.
13 Emma … (send) a card if she had remembered it was their anniversary.
14 Robert … (feel) better if you talked to him.
15 If Sam was still living nearby, you … (can/invite) him for dinner.
16 If you … (put) your money in your wallet, you will not lose it.
17 If you … (like) chocolate, you will love this cake.
18 If Bill … (come) home early, he will eat dinner with us.
19 Sandra will join us later unless she … (have) a lot of work to do.

***10. Fill in the gaps using when or if.***

1 A: Have you phoned Paul yet?
B: No, I'll phone him ...when... I get home.
2 A: … I get a new job soon, I may have a party.
B: That's a good idea.
3 A: I really liked that dress we saw.
B: Well, you can buy it … you get paid.
4 A: Shall we go somewhere this weekend?
B: Yes … it's sunny, we could go to the beach.
5 A: Did you make this cake yourself?
B: Yes … you like it, I'll give you the recipe.
6 A: Is Jane still asleep?
B: Yes … she wakes up, I'll tell her you're here.

7 A: Have you done your homework?
B: No. I'll do it … we've finished dinner.
8 A: We've run out of milk.
B: Well, … I go to the shops, I'll buy some more.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров
13.10.2021 г.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

год набора: 2022

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| Иностранных языков и деловой коммуникации | горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Юсупова Л. Г. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 г. | Протокол № 2 от 12.10.2021 г. |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям……... 3
1.1 Повторение материала практических занятий……..... 3
1.2 Чтение и перевод учебных текстов……. 42
1.3 Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций) ..……..... 60
1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения) ……. 73
1.5 Подготовка к контрольной работе 73

II. Другие виды самостоятельной работы……. 73
2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания:
*2.1.1 Подготовка к ролевой игре*…….. 73
*2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию* ……. 74
*2.1.3 Подготовка к опросу* …… 75
2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного……. 75
2.3 Подготовка доклада…….. 94
2.4 Подготовка к тесту……..... 95
2.5 Подготовка к экзамену…….. 99

## I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям

### 1. Повторение материала практических занятий

Практические занятия направлены на развитие умений иноязычного говорения в рамках заданных РПД тем: бытовая сфера общения (Я и моя семья); учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование); социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир); профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность).

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**My family**

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

***My student's life***

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**Ekaterinburg – an Industrial Centre**

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland**

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern

Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

***Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:***

**My speciality is Geology**

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth's surface and on its surface.

2. Petrology which studies the rocks of the Earth.

3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.

4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.

5. Historic Geology which treats of the Earth's history.

6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.

7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

Практические занятия направлены также на формирование грамматического навыка по темам: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №1:

Таблица №1

| ***Название темы*** | ***Страницы учебников*** | |
|---|---|---|
| | *Агабекян И. П.* | *Журавлева Р.И.* |
| Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях | 148 | 9 |
| Порядок слов в вопросительном предложении | 163-170 | 10, 24 |
| Безличные предложения | 149 | 440 |
| Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные) | 41-55 | 101, 439 |
| Имя существительное | 66-78 | 435 |

| | | |
|---|---|---|
| Артикли (определенный, неопределенный, нулевой) | 78-84 | 433 |
| Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have* | 102-104 | 6-8 |
| Оборот *there+be* | 105-107 | 100 |
| Имя прилагательное и наречие | 115 | 83 |
| Степени сравнения, сравнительные конструкции | 115-121 | 143 |
| Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат) | 261-271 | - |
| Образование видовременных форм глагола в активном залоге | 193-209 | 10, 36, 69 |

***Повторите материал практических занятий!***

**Порядок слов в английском предложении**

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

| **I** | **II** | **III Дополнение** | | | **IV Обстоятельство** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Подлежащее** | **Сказуемое** | **Косвенное без предлога** | **Прямое** | **Косвенное с предлогом** | |
| We<br>Мы | study<br>изучаем | | math<br>математику | | |
| He<br>Он | gives<br>дает | us<br>нам | lessons<br>уроки | | in this room.<br>в этой комнате |
| She<br>Она | reads<br>читает | | her notes<br>свои заметки | to Peter<br>Петру | every day.<br>каждый день |

***Вопросительное предложение***

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

**Общие вопросы**

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing  letters to us. – Ты будешь писать нам письма.
Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?
Примеры с модальными глаголами:
She can drive a car. – Она умеет водить машину.
Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot )

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past  Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.
Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?
Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

***Ответы на общие вопросы***

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением  в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not
Например: Are you a student? - Ты студент?
Yes, I am. - Да.;  No, I am not. - Нет.
Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don’t. – Нет (не знаю).

**Специальные вопросы**

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.
Специальные вопросы могут начинаться словами:
who? – кто?  whom? – кого?  whose? - чей?  what? – что? какой?  which? – который?
when? – когда?  where? – где? куда?  why? – почему?  how? – как?
how much? – сколько?  how many? – сколько?  how long? – как долго? сколько времени?
how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

**Вопрос к прямому дополнению:**
What are you reading? Что ты читаешь?
What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

**Вопрос к обстоятельству**

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.
When will he come back? – Когда он вернется?
What did he do it for? Зачем он это сделал?
Where are you from?

**Вопрос к определению**

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?
Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

**Вопрос к сказуемому**

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: ”Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?”, например:
What does he do? Что он делает?

**Специальные вопросы к подлежащему**

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)
what - что (для неодушевленных существительных)
The teacher read an interesting story to the students yesterday.
Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):
Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

**Альтернативные вопросы**

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

**Разделительные вопросы**

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:

You speak French, don't you? You are looking for something, aren't you? Pete works at a plant, doesn't he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:

It is not very warm today, is it? John doesn't live in London, does he?

**Безличные предложения**

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

**Местоимение. The Pronoun.**
**Классификации местоимений.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | **personal** | личные |
| 2 | **possessive** | притяжательные |
| 3 | **demonstrative** | указательные |
| 4 | **indefinite and negative** | неопределенные и отрицательные |
| 5 | **quantifiers** | количественные |
| 6 | **reflexive** | возвратные |
| 7 | **reciprocal** | взаимные |
| 8 | **relative** | относительные |
| 9 | **defining** | определительные |
| 10 | **interrogative** | вопросительные |

***I. Личные (personal) местоимения***

| **Общий падеж** | | **Объектный падеж** | |
|---|---|---|---|
| **I** | я | **me** | мне, меня |
| **he** | он | **him** | его, ему |
| **she** | она | **her** | ей, о ней |
| **it** | оно, это | **it** | ей, ему, этому |
| **we** | мы | **us** | нам, нас |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **they** | они | **them** | им, их |
| **you** | ты, вы | **you** | тебе, вам |

**Внимание! He (он**) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

| **he** | **she** | **it** |
|---|---|---|
| **a boy –** мальчик<br>**a man –** мужчина<br>**brother –** брат<br>**father –** отец<br>**Nick –** Николай<br>**Mr Grey –** мистер Грей | **a girl –** девочка<br>**a woman –** женщина<br>**sister – с**естра<br>**motherч–** мама<br>**Kate –** Катя<br>**Mrs Grey –** миссис Грей | **a cat –** кот<br>**a wall –** стена<br>**rain –** дождь<br>**love –** любовь<br>**a hand –** рука<br>**an apple -** яблоко |

**Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).**

### *II. Притяжательные (possessive) местоимения*

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы** - **основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
**Whose pen is it?** - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

| **Личное местоимение** | **Основная форма** | **Абсолютная форма** |
|---|---|---|
| **I –** я<br>**he –** он<br>**she –** она<br>**it – оно,** это<br>**we –** мы<br>**you –** ты, вы<br>**they -** они | **my (toy) -** моя (игрушка)<br>**his (toy) -** его (игрушка)<br>**her (toy) -** ее (игрушка)<br>**its (toy) -** его (не о человеке)<br>**our (toy) -** наша (игрушка)<br>**your (toy) -** ваша, твоя (игрушка)<br>**their (toy) -** их (игрушка) | **his -** его<br>**hers -** ее<br>**its -** его (этого)<br>**ours -** наша<br>**yours -** ваша, твоя<br>**theirs -** их |

### *III. Указательные (demonstrative) местоимения*

**this** (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

### *IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения*

**Местоимения some, any, every, и их производные**

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
**I have/l have got three apples.** *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

### *Производные от неопределенных местоимений*

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

**Thing используется для неодушевленных (что-то):**

| | | |
|---|---|---|
| **some** | | **something –** *что-то, что-нибудь* |
| **any** | | **anything -** *что-то, что-нибудь* |
| | **thing** | |
| **no** | | **nothing -** *ничего, ничто* |

| | |
|---|---|
| **every** | **everything -** *все* |
| **Body/one - для одушевленных (кто-то):** | |
| **some** | **somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь* |
| **any** | **anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь* |
| **body/one** | |
| **no** | **nobody / no one -** *никого, никто* |
| **every** | **everybody /everyone –** *все, каждый* |
| Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно* | |

| | |
|---|---|
| **somewhere -** *где-нибудь, куда-нибудь* | **anywhere -** *где угодно* |
| **nowhere -** *нигде* | **everywhere -** *везде* |

### *V. Количественные (quantifiers) местоимения*

| | |
|---|---|
| **Many и much -** оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**. | |
| **many girls -** *много девочек*<br>**many boys -** *много мальчиков*<br>**many books -** *много книжек* | **much snow -** *много снега*<br>**much money -** *много денег*<br>**much time -** *много времени* |
| **How many?**<br>**How much?** } **сколько?** | **How many girls? -** *Сколько девочек?*<br>**How much sugar? -** *Сколько сахара?*<br>**How much sugar? -** *Сколько сахара?* |
| **a lot of... -** много - используется и с исчисляемыми, и с неисчисляемыми существительными a lot без (of) используется и без существительного. | girls – много девочек<br>**a lot of**<br>sugar - много сахара |
| **Сравните**: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.*<br>He writes **a lot.** *Он много пишет.* | |
| В утвердительных предложениях используйте **a lot of.**<br>В отрицательных и в вопросительных **many/much,**<br>**Сравните:**<br>(+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*.<br>(-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?*<br>Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":**<br>Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто. | |

**Few, little, a few, a little**
**С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало),**
**а с исчисляемыми - few (мало).**

| | |
|---|---|
| **few books -** мало книг<br>**few girls -** мало девочек<br>**few boys -** мало мальчиков | **little time -** мало времени<br>**little money -** мало денег<br>**little snow -** мало снега |
| **little**<br>**few** } **мало (т.е. надо еще)** | **a little**<br>**a few** } **немного (т.е. пока хватает)** |

### *VI. Возвратные (reflexive) местоимения*

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

| **Личное местоимение** | **Возвратное местоимение** | **Пример** | **Перевод** |
|---|---|---|---|
| I | myself | I did it myself. | Я сделал это сам |
| he | himself | He did it himself. | Он сделал это сам. |
| she | herself | She did it herself. | Она сделала это сама |
| you | yourself | You did it yourself. | Вы сделали это сами. |
| they | themselves | They did it themselves. | Они сделали это сами. |
| we | ourselves | We did it ourselves. | Мы сделали это сами. |

### *VII. Взаимные (reciprocal) местоимения*

**Each other -** друг друга (относится к двум лицам или предметам).
**One another -** друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
**They spoke to <u>each other</u> rather friendly.** *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
**They always help <u>one another</u>.** *Они всегда помогают друг другу.*

### *VIII. Относительные (relative) местоимения*

**Who (whom), whose, which, that**

| | |
|---|---|
| **who** | **Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)**<br>**The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.* |
| | **Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение)**<br>**The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.* |
| **which** | **Для неодушевленных предметов и животных**<br>**The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.* |
| **whose** | **Для одушевленных существительных**<br>**This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.* |
| | **Для неодушевленных существительных**<br>**We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.* |
| **that** | **Для одушевленных существительных**<br>**This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.* |
| | **Для неодушевленных существительных**<br>**This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.* |

### *IX. Определительные (defining) местоимения*

**all**

| **Употребление** | **Примеры** | **Перевод** |
|---|---|---|
| **определяет неисчисляемые** | He spent **all his** time fishing on the | Он провел все свое время, |

| | | |
|---|---|---|
| **существительные** | lake**.** | ловя рыбу на озере. |
| **определяет исчисляемые существительные** | **All the** boys like football. **(the после all!)** | Все мальчишки любят футбол. |
| **all = everything** | I know **all/everything.** | Я знаю всё. |
| **all = everybody** | **All** were hungry. **Everybody** was hungry. | Все были голодны. Все были голодны. |
| **we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them** | We **all** love you very much = **All** of us love you very much. | Мы все тебя очень любим |

**both**

| Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|
| определяет существительные | **Both (the/my) friends like football.** | Оба моих друга любят футбол |
| допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both | **Both these/the men are Russian.** | Оба (эти) мужчины - русские. |
| употребляется вместо существительного | **He gave me two apples. Both were sweet.** | Он дал мне два яблока. Оба были сладкими. |
| they both = both of them you both = both of you we both = both of us | **They both (both of them) came to visit us.** | Они оба пришли навестить нас. |
| в устойчивой конструкции **both...and.** | **Both mother father were at home** | И мама, и папа были дома. |
| в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither** | **Both of them know English. Neither of them know English.** | Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского. |

**either/neither**

| | Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|---|
| **either** | любой из двух (артикль не ставится) | **I've got 2 cakes. Take either cake.** | У меня 2 пирожных. Возьми любое. |
| | каждый, оба, и тот, и другой | **There are windows on either side of the house.** | С обеих сторон дома есть окна. |
| | заменяет существительное (глагол в ед. числе) | **Either of dogs is always hungry.** | Любая из собак вечно голодная. |
| **neither** | отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой) | **Neither of examples is correct.** | Ни один из примеров не верен. |
| | в констр. neither.. .nor (ни.. .ни) | **I like neither tea, nor coffee.** | Я не люблю ни чай, ни кофе. |

**other, another, the other, the others (другой, другие)**

| | Употребление | Примеры | Перевод |
|---|---|---|---|
| **the other** | другой (второй), другой из двух | **You've got 2 balls: one and the other.** | У тебя 2 мяча: один и другой. |
| **another** | другой из многих, еще один | **Take another ball.** | Возьми другой мяч. (Любой, но не этот.) |
| **other** | другие (любые), не последние | **Take other 2 balls.** | Возьми другие 2 мяча. (Из многих.) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **the others** | другие (определенные) | **There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.** | Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие. |

***X. Вопросительные (interrogative) местоимения***

| | | | |
|---|---|---|---|
| **what** | что | **What's this?** | Что это? |
| **which** | который | **Which of them?** | Который из них? |
| **who** | кто, кого | **Who was that?** | Кто это был? |
| **whom** | кого | **Whom did you meet?** | Кого ты встретил? |
| **whose** | чей | **Whose book is it?** | Чья это книга? |

Имя существительное. The Noun

| Категории | Существительное в русском языке | Существительное в английском языке |
|---|---|---|
| Число | **Изменяется** | **Изменяется** |
| Падеж | **Изменяется** | **Не изменяется** |

**The Plural Form of Nouns**

Образование множественного числа у английских существительных

| Способ образования | Примеры | Перевод |
|---|---|---|
| **после глухих согласных** | **a book - books**<br>**a cup - cups** | **книга - книги**<br>**чашка - чашки** |
| **после звонких согласных и гласных -** | a name - names<br>a girl - girls | **имя - имена**<br>**девочка - девочки** |
| после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es | a palace - palaces<br>a bush - bushes<br>a box - boxes<br>a church - churches | дворец - дворцы<br>куст - кусты<br>коробка - коробки церковь - церкви |
| слово заканчивается на -y: 1) гласная +y | **a toy - toys**<br>**a boy - boys** | игрушка - игрушки мальчик - мальчики |
| **2)** согласная + y | **a family - families**<br>**a story - stories** | **семья - семьи**<br>**история - истории** |
| слово заканчивается на *-file* | **a leaf - leaves**<br>**a shelf - shelves** | лист - листья<br>полка - полки |

Особые случаи образования множественного числа

| **Ед. число** | **Мн. число** | **Перевод** |
|---|---|---|
| man | men | мужчина - мужчины |
| woman | women | женщина - женщины |
| foot | feet | нога (стопа) - ноги (стопы) |
| child | children | ребенок - дети |
| goose | geese | гусь - гуси |
| mouse | mice | мышь - мыши |
| **ox** | oxen | **бык - быки** |
| **tooth** | teeth | **зуб - зубы** |

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):

This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

| **Со словами** one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.** | |
|---|---|
| **What apple do you want?**<br>**Какое ты хочешь яблоко?**<br>**The red one. Красное.** | **What apples do you want?**<br>**Какие яблоки ты хочешь?**<br>**The red ones. Красные.** |

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

| | |
|---|---|
| И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски. | This girl speaks English well. |
| Р. п. Это собака той девочки. | It's a dog of that girl. |
| Д. п. Я дал яблоко той девочке. . | I gave an apple to that girl. |
| В. п. Я вижу маленькую девочку. . | 1 can see a little girl. |
| Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой. | 1 like to play with this girl. |
| П. п. Я часто думаю об этой девочке. | 1 often think about this girl. |

**Притяжательный падеж. The Possessive Case**
**Образование притяжательного падежа**

| | **Образование** | **Примеры** | **Перевод** |
|---|---|---|---|
| существительные в единственном числе | **'s** | **bird's house**<br>**child's ball** | домик птички<br>мячик ребенка |
| существительные во множественном числе (группа исключений} | **'s** | **children's bail**<br>**women's rights** | мячик детей<br>права женщин |
| существительное во множественном числе | **'** | **girls' toy**<br>**birds' house** | игрушка девочек<br>домик птичек |

**Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,**

**my mother's book - мамина книга,**

**this girl's bail - мячик девочки,**

**the bird's house - домик птички**

**Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:**

**the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,**

**Артикль. The Article**

**1. Неопределенный a/an (**используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

**2. Определенный the (**может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово "an hour" (час) начинается с согласной буквы "h", но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю "a" также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)

- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

**Использование неопределенного артикля a**

| | |
|---|---|
| один из множества (любой) | This is a cat. |
| первое упоминание в тексте | I see a bird. |
| при упоминании профессии | My brother is a pilot. |
| в восклицательных предложениях | What a good girl!<br>What a surprise!<br>Such a fine room! |
| вместо слова один | She is coming for a weak. |
| в определенных конструкциях<br>there is a...<br>I have a…<br>he has a...<br>I see a...<br>this is a...<br>that is a…<br>It is a...<br>Iama…<br>he/she is a… | There is a book here.<br>I have got a nice coat.<br>He has a kind smile.<br>I see a wolf.<br>This is a dog.<br>That is a doctor.<br>It is a red pen.<br>I am a good swimmer.<br>He/she is a tourist |
| в ряде устойчивых словосочетаний<br>at a quarter..,<br>in a loud, (a low, an angry voice)<br>to have a good time<br>a lot of<br>to go for a walk<br>such a...<br>after a while<br>in a day (a month, a week, a year) | Come at a quarter to 8.<br>Don't speak to him in an angry voice.<br>We had a good time in the country.<br>She has got a lot of presents.<br>Let's go for a walk.<br>He is such a clever boy.<br>You'll see them after a while.<br>We are living in a day. |

**Использование определенного артикля the**

| | |
|---|---|
| если речь идет о конкретном лице или предмете | The pen is on the table. |
| при повторном упоминании того же самого объекта | I see a cat. The cat is black. |
| если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света | the sun, the moon, the Earth |
| со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный) | The only man I love<br>the main road<br>to the left, to the right<br>It was the right answer. the final test |
| с порядковыми числительными | the first, the tenth |

| | |
|---|---|
| с прилагательными в превосходной степени | the kindest, the most interesting<br>the best |
| с музыкальными инструментами и танцами | to play the piano, to dance the tango |
| с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры) | The Britons keep their traditions. |
| с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов | the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street |
| с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of | the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard |

**Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний**

| | |
|---|---|
| in the middle, in the corner | The table is in the middle of the room. |
| in the morning, In the evening, in the afternoon | I never drink coffee in the evening. |
| what's the use? | What's the use of going there so late? |
| to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market | Do you like going to the theatre?<br>He works at the shop. |
| at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market | The fact is that I have no money at all. |
| the fact is (was) that... | Where is the doctor? |
| where is the…? | We always spend summer in the country. |
| in the country, to the country | |

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

**Случаи, когда артикль не употребляется**

| | |
|---|---|
| если, перед существительным стоит притяжательное местоимение | a pen - my pen<br>a dog - his dog<br>the teacher - our teacher<br>the apple - her apple |
| если перед существительным стоит указательное местоимение | the cats - those cats<br>the books - these books<br>a mouse - this mouse |
| если стоит другое существительное в притяжательном падеже | a car - father's car<br>the horse - farmer's horse<br>a bike - brother's bike<br>the doll - sister's doll |
| если перед существительным стоит, количественное числительное | 5 balls, 7 bananas, 2 cats |
| если перед существительным стоит отрицание "no" | She has no children.<br>I see no birds. |
| перед именами | Mike, Kate, Jim, etc |
| с названиями дней недели | Sunday, Monday, etc. |
| с названиями месяцев | May, December, etc. |
| с названиями времен года | in spring, in winter |
| с названиями цветов | white, etc.<br>I like green |
| с названиями спортивных игр | football, chess, etc. |
| с названиями блюд, напитков | tea, coffee, soup, etc, |
| с названиями праздников | Easter, Christmas, etc. |

| | |
|---|---|
| с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the | English, etc. I learn English, the English language |
| с названиями стран | Russia, France, etc HO: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo |
| с названиями городов | Moscow, Paris, etc. |
| с названиями улиц, площадей | Trafalgar Square |
| с названиями парков | St James' Park, Hyde Park |
| с названиями мостов | Tower Bridge |
| с названиями одиночных гор | Kilimanjaro |
| с названиями озер | Loch Ness |
| с названиями континентов | Asia, Australia, etc. |
| с названиями одиночных островов | Cyprus |
| если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное местоимение | what animals can swim? I know what thing you have lost! |

## ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

**По своей структуре** глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

**По значению** глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

**Все формы глагола в английском языке делятся на** личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

**Глаголы в изъявительном наклонении** выражают реальное действие, передают факты:

His son goes to school. Его сын учится в школе.

She has written an interesting article. Она написала интересную статью.

A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

**Глаголы в повелительном наклонении** выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:

"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.

Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

**Глаголы в сослагательном наклонении** выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

**Глаголы в действительном залоге** выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

**Глаголы в страдательном залоге** выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида**. **Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:

Он прочитал эту статью с интересом.

**Глаголы несовершенного вида** обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

## Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

| Утверждение | | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|---|
| Полная форма | Краткая форма | Полная форма | Краткая форма | Am I? |
| I am | I'm | I am not | I'm not | Are you? |
| You are | You're | You are not | You aren't | Is he? |
| He is | He's | He is not | He isn't | Is she? |
| She is | She's | She is not | She isn't | Is it? |
| It is | It's | It is not | It isn't | Are we? |
| We are | We're | We are not | We aren't | Are you? |
| You are | You're | You are not | You aren't | Are they? |
| They are | They're | They are not | They aren't | |

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

## WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| I was | I was not | I wasn’t | Was I? |
| You were | You were not | You weren’t | Were you? |
| He was | He was not | He wasn’t | Was he? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| She was | She was not | She wasn't | Was she? |
| It was | It was not | It wasn't | Was it? |
| We were | We were not | We weren't | Were we? |
| You were | You were not | You weren't | Were you? |
| They were | They were not | They weren't | Were they? |

## ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there's. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn't …/There aren't … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.

Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.

It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)

There are three books on the desk.

They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

### Конструкция There was/There were

This is a modern town today.

There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.

This is the same town fifty years ago.

There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| There was | There was not | There wasn't | Was there? |
| There were | There were not | There weren't | Were there? |

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

## Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.
б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.
в) в следующих высказываниях: I've got a headache. I've got a temperature. I've got a cough, I've got a toothache, I've got a cold, I've got a problem.

| Утверждение | | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|---|
| Полная форма | Краткая форма | Полная форма | Краткая форма | Have I (got)? |
| I have (got) | I've (got) | I have not (got) | I haven't (got) | Have you (got)? |
| You have (got) | You've (got) | You have not (got) | You haven't (got) | Has he (got)? |
| He has (got) | He's (got) | He has not (got) | He hasn't (got) | Has she (got)? |
| She has (got) | She's (got) | She has not (got) | She hasn't (got) | Has it (got)? |
| It has (got) | It's (got) | It has not (got) | It hasn't (got) | Have we (got)? |
| We have (got) | We've (got) | We have not (got) | We haven't (got) | Have you (got)? |
| You have (got) | You've (got) | You have not (got) | You haven't (got) | Have they (got)? |
| They have (got) | They've (got) | They have not (got) | They haven't (got) | |

## Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

| Утверждение | Отрицание | | Вопрос |
|---|---|---|---|
| | Полная форма | Краткая форма | |
| I had | I did not have | I didn't have | Did I have? |
| You had | You did not have | You didn't have | Did you have? |
| He had | He did not have | He didn't have | Did he have? |
| She had | She did not have | She didn't have | Did she have? |
| It had | It did not have | It didn't have | Did it have? |
| We had | We did not have | We didn't have | Did we have? |
| You had | You did not have | You didn't have | Did you have? |
| They had | They did not have | They didn't have | Did they have? |

## Имя прилагательное. The Adjective

| **Категории** | **Прилагательное в русском языке** | **Прилагательное в английском языке** |
|---|---|---|
| **Число** | изменяется | не изменяется |
| **Род** | изменяется | не изменяется |
| **Падеж** | изменяется | не изменяется |

## Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе

**ни приставок, ни суффиксов: small -** *маленький***, long -** *длинный***, white -** *белый***.**
К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

**Суффиксальное образование имен прилагательных**

| Суффикс | Пример | Перевод |
|---|---|---|
| **- ful** | use**ful**<br>doubt**ful** | **полезный**<br>**сомневающийся** |
| **- less** | help**less**<br>use**less** | **беспомощный**<br>**бесполезный** |
| **- ous** | fam**ous**<br>danger**ous** | **известный**<br>**опасный** |
| **- al** | form**al**<br>centr**al** | **формальный**<br>**центральный** |
| **- able** | eat**able**<br>cap**able** | **съедобный**<br>**способный** |

**Приставочный способ образования имен прилагательных**

| Приставка | Пример | Перевод |
|---|---|---|
| **un -** | **un**cooked<br>**un**imaginable | **невареный**<br>**невообразимый** |
| **in -** | **in**capable<br>**in**human | **неспособный**<br>**негуманный** |
| **il -** | **il**legal<br>**il**liberal | **нелегальный**<br>**необразованный** |
| **im -** | **im**possible<br>**im**practical | **невозможный**<br>**непрактичный** |
| **dis -** | **dis**honest<br>**dis**agreeble | **бесчестный**<br>**неприятный** |
| **ir -** | **ir**regular<br>**ir**responsible | **неправильный**<br>**безответственный** |
| Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый,<br>**snow-white –** белоснежный. | | |

**Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing**

| **- ed** | **- ing** |
|---|---|
| **Описывают чувства и состояния** | **Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства** |
| **interested –** интересующийся, заинтересованный | **interesting -** интересный |
| **bored -** скучающий | **boring -** скучный |
| **surprised -** удивленный | **surprising -** удивительный |

**Степени сравнения прилагательных**

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**
Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:
**- положительная** степень сравнения **(Positive Degree);**
**- сравнительная** степень сравнения **(Comparative Degree);**
**- превосходная** степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и

превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

**1. -er. -est**

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке **-** добавляем "е" (большой - больше, холодный - холоднее).

**Превосходная степень** образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **cold -** холодный | cold**er -** холоднее | the cold**est -** самый холодный |
| **big -** большой | bigg**er -** больше | the bigg**est -** самый большой |
| **kind -** добрый | kind**er -** добрее | the kind**est -** самый добрый |

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **clever —** умный | clever**er - умнее** | **the** clever**est - самый умный** |
| **easy -** простой | eas**ier - проще** | **the** easi**est - самый простой** |
| **able -** способный | abl**er - способнее** | **the** abl**est - самый способный** |
| **busy -** занятой | bus**ier - более занятой** | **the** busi**est - самый занятой** |

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **"e" ,** то при прибавлении **– er и – est немое "e" опускается:**

large **–** larg**er - the** larg**est /** большой – больше – самый большой

brav**e – brav**er **– the** brav**est /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

**big –** bigg**er –** bigg**est /** большой – больше – самый большой

**hot –** hott**er –** hott**est /** горячий – горячее – самый горячий

**thin –** thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на "y" с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **"y" переходит в "i":**

**busy –** bus**ier –** bus**iest / занятой – более занятой – самый занятой**

**easy –** eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

**2. more, the most**

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **beautiful - красивый** | **more beautiful -** красивее | **the most beautiful** - самый красивый |
| **interesting – интересный** | **more interesting -** интереснее | **the most interesting** - самый интересный |
| **important - важный** | **more important -** важнее | **the most important** - самый важный |

**Особые формы**

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| **good -** хороший<br>**bad -** плохой<br>**little -** маленький<br>**much/many -** много<br>**far -** далекий/далеко<br>**old -** старый | **better -** лучше<br>**worse -** хуже<br>**less -** меньше<br>**more -** больше<br>**farther/further -** дальше<br>**older/elder -** старше | **the best -** самый лучший<br>**the worst -** самый плохой<br>**the least -** самый маленький, меньше всего<br>**the most -** больше всего<br>**the farthest/furthest -** самый дальний<br>**the oldest/eldest -** самый старый |

**3. less. the least**

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

| Положительная степень | Сравнительная степень | Превосходная степень |
|---|---|---|
| **beautiful –** красивый<br>**interesting -** интересный<br>**important -** важный | **less beautiful -** менее красивый<br>**less interesting –** менее интересный<br>**less important -** менее важный | **the least beautiful –** самый некрасивый<br>**the least interesting –** самый неинтересный<br>**the least important –** самый неважный |

**Другие средства сравнения двух предметов или лиц**

| Конструкция | Комментарий | Примеры |
|---|---|---|
| **As…as (такой же, так же)** | **Для сравнения двух объектов одинакового качества** | He is **as** a strong **as** a lion<br>Он такой же сильный, как лев.<br>She is **as** clever **as** an owl**.**<br>Она такая же умная, как сова. |
| **Not so…as (не такой, как)** | **в отрицательных предложениях** | He is **not so** strong **as** a lion.<br>Он не такой сильный, как лев**.**<br>She is **not so** clever **as** an owl.<br>Она не такая умная, как сова. |
| **The…the (с двумя сравнительными степенями)** | **показывает зависимость одного действия от другого** | **The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся.<br>**The more** I learn this rule **the less** I understand it.<br>Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю. |

**Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:**

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

**Числительное. The numeral**

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

**126 – one hundred twenty six**

**1139 – one thousand one hundred and thirty nine**

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

**НО:** окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **"of":**

**hundreds of children –** сотни детей

**thousands of birds-** тысячи птиц

**millions of insects –** миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

**20+1=21** (twenty + one = **twenty one**)

**60+7=67** (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

**Как читать даты**

| | |
|---|---|
| **1043** | ten forty-three |
| **1956** | nineteen fifty-six |
| **1601** | sixteen o one |
| **2003** | two thousand three |
| **В 2003 году** | in two thousand three |
| **1 сентября** | the first of September |
| **23 февраля** | the twenty-third of February |

**ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)**

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:
224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

**Образование видовременных форм глагола в активном залоге**

**Present Simple** употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

**Present Continuous** употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],
Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

**Present perfect** употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

**Present perfect continuous** употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.
Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

**Past simple** употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.
They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.
Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn't use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

**Past continuous** употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday

afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

**Past perfect** употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,
They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,
She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

**Future simple** употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

**Be going to** употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,
Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
*No. Why?*
*I need to make some photocopies.*

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

Практическая работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: модальные глаголы и их эквиваленты, образование видовременных форм глагола в пассивном залоге, основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь, неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий, основные сведения о сослагательном наклонении.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице:

| ***Название темы*** | ***Страницы учебников*** | |
|---|---|---|
| | *Агабекян И. П.* | *Журавлева Р.И.* |
| Модальные глаголы и их эквиваленты | 295 | 47 |
| Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге | 236 | 71, 115 |
| Основные сведения о согласовании времён | 323-328 | 269 |
| Прямая и косвенная речь | 324 | 268 |
| Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий | 311-322 | 132, 162, 173, 192, 193 |
| Основные сведения о сослагательном наклонении | 329 | 224 |

**Модальные глаголы**

| **Глаголы** | **Значение** | **Примеры** |
|---|---|---|
| **CAN** | физическая или умственная возможность/умение | I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать. |
| | возможность | You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play |

| | | |
|---|---|---|
| | | football in the street. – На улице нельзя играть в футбол. |
| | вероятность | They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент. |
| | удивление | Can he have said that? – Неужели он это сказал? |
| | сомнение, недоверчивость | She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала. |
| | разрешение | Can we go home? — Нам можно пойти домой? |
| | вежливая просьба | Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час? |
| **MAY** | разрешение | May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу? |
| | предположение | She may not come. – Она, возможно, не придет. |
| | возможность | In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей. |
| | упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)** | You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать. |
| **MUST** | обязательство, необходимость | He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги. |
| | вероятность (сильная степень) | He must be sick. — Он, должно быть, заболел. |
| | запрет | Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке. |
| **SHOULD OUGHT TO** | моральное долженствование | You ought to be polite. – Вы должны быть любезными. |
| | совет | You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу. |
| | упрек, запрет | You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт. |
| **SHALL** | указ, обязанность | These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых обстоятельствах. |
| | угроза | You shall suffer. — Ты будешь страдать. |
| | просьба об указании | Shall I open the window? – Мне открыть окно? |
| **WILL** | готовность, нежелание/отказ | The door won't open. — Дверь не открывается. |
| | вежливая просьба | Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной? |
| **WOULD** | готовность, нежелание/отказ | He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос. |
| | вежливая просьба | Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной. |
| | повторяющееся/привычное действие | We would talk for hours. – Мы беседовали часами. |
| **NEED** | необходимость | Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать? |
| **NEEDN'T** | отсутствие необходимости | She needn't go there. — Ей не нужно туда идти. |
| **DARE** | Посметь | How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить? |

| **Модальные единицы эквивалентного типа** | | |
|---|---|---|
| **to be able (to) = can** | Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент | She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию). |
| **to be allowed (to) = may** | Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения | My sister **is allowed to** play outdoors. (Моей сестре разрешается играть на улице). |
| **to have (to)=** ought, must, should | Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах | They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело). |
| **to be (to)=** ought, must, should | Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д. | We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника) |

## Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

### Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)
This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)
Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)
Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

### Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.
My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.
to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.
to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:
Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

**Косвенный пассив (The Indirect Passive)**

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.
б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить
to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять
to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить
to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать
to teach учить to tell сказать и др.
Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.
Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)
A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:
John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.
The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):
He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать
to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать
to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

**Употребление Страдательного залога**

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия ( 70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:
He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:
The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:
The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:
The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)
The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:
The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:
The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:
He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

**Перевод глаголов в форме Passive**

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:
I am invited to a party.
Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):
Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.
Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.
I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):
They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:
The experiments were made last year.
1) Опыты были проведены в прошлом году.
2) Опыты проводились в прошлом году.
3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:
It is said… Говорят… It was said… Говорили…
It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…
It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

## Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

***Правило 1:*** Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

***Правило 2:*** Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

| Переход из одного времени в другое | Примеры | |
|---|---|---|
| Present Simple » Past Simple | He **can speak** French – Он говорит по-французски. | Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски. |
| Present Continuous » Past Continuous | They **are listening** to him – Они слушают его | I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его. |
| Present Perfect » Past Perfect | Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему. | Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему. |
| Past Simple » Past Perfect | I **invited** her – Я пригласил ее. | Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я |

| | | |
|---|---|---|
| | | пригласил ее. |
| Past Continuous » Past Perfect Continuous | She **was crying** – Она плакала | John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала. |
| Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous | It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час. | He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь. |
| Future Simple » Future in the Past | She **will show** us the map – Она покажет нам карту. | I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту. |

***Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.***

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

**Перевод прямой речи в косвенную в английском языке**

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

***3. Согласовываем время***

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

***4. Меняем некоторые слова***

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

### Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

***He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»***

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

***He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.***

Давайте рассмотрим еще один пример:

***She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»***

***She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.***

### Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

***She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»***

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

***She said when I would come. Она сказала, когда я приду.***

***He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»***

***He asked where she worked. Он спросил, где она работает.***

### Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

**Формы инфинитива**

| | Active Voice | Passive Voice |
|---|---|---|
| Simple | to write | to be written |
| Continuous | to be writing | |
| Perfect | to have written | to have been written |
| Perfect Continuous | to have been writing | |

***Глаголы, после которых используется инфинитив:***

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать

to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть
*Например:*
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

***Значение разных форм инфинитива в таблице***

| Формы инфинитива | **Чему я рад?** | |
|---|---|---|
| Simple | I am glad **to speak** to you. | Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами). |
| Continuous | I am glad **to be speaking** to you. | Рад, что сейчас разговариваю с вами. |
| Perfect | I am glad **to have spoken** to you. | Рад, что поговорил с вами. |
| Perfect Continuous | I am glad **to have been speaking** to you. | Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами. |
| Simple Passive | I am (always) glad **to be told** the news. | Всегда рад, когда мне рассказывают новости. |
| Perfect Passive | I am glad **to have been told** the news. | Рад, что мне рассказали новости. |

**Причастие. Participle**

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

**Формы причастия**

| | | Active (Активный залог) | Passive (Пассивный залог) |
|---|---|---|---|
| Participle I (Present Participle) | Simple | **writing** | **being written** |
| | Perfect | **having written** | **having been written** |
| Participle II (Past Participle) | | | **written** |

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

***Как переводить разные формы причастия на русский язык***

| Формы причастия | причастием | деепричастием |
|---|---|---|
| reading | читающий | читая |

| | | |
|---|---|---|
| having read | | прочитав |
| being read | читаемый | будучи читаемым |
| having been read | | будучи прочитанным |
| read | прочитанный | |
| building | строящий | строя |
| having built | | построив |
| being built | строящийся | будучи строящимся |
| having been built | | будучи построенным |
| built | построенный | |

## Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

**Формы герундия**

| | Active (Активный залог) | Passive (Пассивный залог) |
|---|---|---|
| Simple | **writing** | **being written** |
| Perfect | **having written** | **having been written** |

***Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!***

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

***Герундий после глаголов с предлогами***

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),
keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

***to be + прилагательное / причастие + герундий***

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I’m tired of waiting. — *Я устал ждать.*

**Основные сведения о сослагательном наклонении**

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

**Type 0 Conditionals:** They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

**Type 1 Conditionals:** They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

**Type 2 Conditionals:** They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

**Type 3 Conditionals:** They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

| | If-clause (hypothesis) | Main clause (result) | Use |
|---|---|---|---|
| Type 0<br>general truth | if + present simple | present simple | something which is always true |
| | If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice. | | |
| Type 1<br>real present | if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous | future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive | real - likely to happen in the present or future |
| | If he doesn't pay the fine, he will go to prison.<br>If you need help, come and see me.<br>If you have finished your work, we can have a break.<br>If you're ever in the area, you should come and visit us. | | |
| Type 2<br>unreal present | if + past simple or past continuous | would/could/might + bare infinitive | imaginary situation contrary to facts in the present; also used to give advice |
| | If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice) | | |
| Type 3<br>unreal past | if + past perfect or past perfect continuous | would/could/might + have + past participle | imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism |
| | If she had studied harder, she would have passed the test.<br>If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished. | | |

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

*e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.*

*b) I'll give Tim his book if I see him.*

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

*e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)*

*b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)*

*c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)*

*d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)*

*e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)*

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

*e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus.* (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

*e.g. If Rick was/were here, we could have a party.*

We use If I were you ... when we want to give advice.

*e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.*

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

*e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)*

*b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)*

*c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)*

## 2. Чтение и перевод учебных текстов (по 2 текста на тему)

***№1***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**appear -** v появляться; казаться; *ant* **disappear -** исчезать

**bed -** *n* пласт, слой, подстилающие породы; *syn* **layer, seam; bedded -** *a* пластовый

**call for** - v требовать; *syn* **demand, require**

**carry out** - v проводить *(исследование, эксперимент);* выполнять *(план);* завершать; *syn* **conduct, make**

**colliery -** каменноугольная шахта

**concentration (dressing) plant -** обогатительная фабрика, обогатительная установка

**department -** *n* отделение, факультет, кафедра; *syn* **faculty**

**direct -** v руководить; направлять; управлять; *a* прямой, точный; **directly -** *adv* прямо, непосредственно

**education -** *n* образование; просвещение; **get an education** получать образование

**establish -** v основывать, создавать, учреждать; *syn* **found, set up**

**ferrous metals -** чёрные металлы **(non-ferrous metals** цветные металлы)

**iron -** *n* железо; **pig iron** чугун; **cast iron** чугун, чугунная отливка

**open-cast mines -** открытые разработки

**ore -** *n* руда; **iron ore -** железная руда; **ore mining –** разработка рудных месторождений

**process** - v обрабатывать; *syn* **work, treat; processing -** n обработка; разделение минералов

**rapid** - *a* быстрый

**research -** *n* научное исследование

**technique -** *n* техника, способ, метод, технический прием; **mining technique -** горная техника, методы ведения горных работ

**train -** v обучать, готовить *(к чему-л.);***training** - обучение; подготовка

**to be in need of -** нуждаться в

**to take part in -** участвовать в

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 1: The First Mining School in Russia**

The Moscow Mining Academy was established in 1918. The main task of the Academy was to train mining engineers and technicians, to popularize technological achievements among miners, to work on important problems of mining and metallurgical engineering arid to direct scientific research.

There were three departments in the Academy: mining, geological prospecting and metallurgy. The Moscow Mining Academy introduced a new course in coal mining mechanization which provided the basis for the development of mining engineering. The two scientists A.M. Terpigorev and M.M. Protodyakonov wrote the first textbook on machinery for mining bedded deposits.

Much credit for the establishment of the Moscow Mining Academy and the development of co-operation among outstanding scientists and educators is due to Academician I.M. Gubkin, a prominent geologist and oil expert.

In 1925 the Moscow Mining Academy was one of the best-known educational institutions in Russia. It had well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of Russian and foreign scientific books and journals.

The Academy established close contacts with the coal and ore mining industries. The scientists carried out scientific research and worked on important mining problems.

The rapid growth of the mining industry called for the training of more highly-qualified specialists and the establishment of new educational institutions.

New collieries and open-cast mines, concentration plants, metallurgical works and metal-working factories for processing non-ferrous and ferrous metals appeared in the country. The people took an active part in the construction of new industrial enterprises.

The Academy alone could not cope with the problem of training specialists. In 1930 the Moscow Mining Academy was transformed into six independent institutes. Among the new colleges which grew out of the Academy's departments were the Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting. Later, the scientific research Institute of Mining appeared near Moscow.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. There were four departments in the Academy.
2. The Academy introduced a new course in coal mining mechanization.
3. In 1925 the Academy had only several well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of books.
4. The Academy established close contacts with the coal industry.
5. In 1930 the Academy was transformed into six independent institutes.
6. The Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting were among the new colleges which grew out of the Academy's departments.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What was the main task of the Academy?
2. What new course did the Academy introduce?
3. Were there three or four departments at the Academy?
4. What industries did the Academy establish contacts with?
5. Who wrote the first textbook on machinery' for mining bedded deposits?
6. Why was the Academy transformed into six independent institutes?
7. Why was the Academy transformed?

***3. Переведите следующие сочетания слов.***

а) обогатительная фабрика
б) подготовка горных инженеров
в) разведка нефти
г) обработка цветных металлов

д) техническое образование
е) новый (учебный) курс по
ж) принимать активное участие
з) проводить исследования
и) направлять научную деятельность
к) горное оборудование
л) пластовые месторождения

***№2***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**change -** v изменяться, менять(ся); *syn.* **transform, alter;** *n* изменение, перемена; превращение

**determine -** v определить, устанавливать

**engineering -** *n* техника; технология; машиностроение**;** *syn.* **technics, technology, technique; machinery**

**composition -** *n* структура, состав

**connect -** v соединяться; *syn* **combine, link**

**enterprise -** *n* предприятие; предприимчивость

**deal (dealt)** v **(with) -** иметь дело с; рассматривать

**environment -** *n* окружающая обстановка**,** среда

**demand -** *n* спрос

**field -** *n* область, сфера деятельности; поле, участок, месторождение; бассейн; *syn* **basin, branch**

**design -** *n* проект; план, чертеж; конструкция; v проектировать, планировать; конструировать

**graduate -** v окончить (высшее учебное заведение), *амер.* окончить любое учебное заведение; *n* лицо, окончившее высшее учебное заведение; **undergraduate (student) -** студент последнего курса; **postgraduate (student) -** аспирант; **graduation paper -** дипломная работа

**hardware -** *n* аппаратура, (аппаратное) оборудование, аппаратные средства; техническое обеспечение

**hydraulic** - *a* гидравлический, гидротехнический

**introduction -** *n* введение, вступление

**management -** *n* управление, заведование; *syn.* **administration; direction**

**offer -** *v* предлагать *(помощь, работу);* предоставлять; *n* предложение

**property -** *n* свойство

**protection -** *n* защита, охрана

**range -** *n* область, сфера; предел; диапазон; радиус действия; ряд; серия

**recreation** - *n* отдых, восстановление сил; развлечение

**reveal -** v показывать, обнаруживать

**rock -** *n* горная порода

**shape -** *n* форма

**software -** *n* программное обеспечение; программные средства

**skill** - *n* мастерство; умение; **skilled -** *a* квалифицированный; опытный; умелый

**survey** - *n* съемка, маркшейдерская съемка; v производить маркшейдерскую или топографическую съемку, производить изыскания; *n* **surveying** съемка, маркшейдерские работы

**value -** *n* ценность, стоимость; величина; v ценить, оценивать; **valuable** *a* ценный

**workshop** - *n* мастерская, цех; семинар

**to be of importance -** иметь значение

**to give an opportunity of -** дать возможность

**to meet the requirements -** удовлетворять требованиям (потребности)

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

## TEXT 2: Mining and Geological Higher Education in Russia

In Russia young people get mining education at special institutes which train geologists and mining engineers for coal and ore mining. The total number of students of an institute includes full-time students, part-time students and postgraduate students.

Russian higher educational establishments offer different specializations for the students. Thus, at the geological institutes, the students specialize in geology, the science which deals with different problems connected with the Earth, its history, the study of rocks, their physical and chemical properties. One of the main tasks of geology is to prospect, discover and study the deposits of useful minerals.

Geology is both a theoretical and an applied science. Mining geology is of great importance to the mining engineer. As a rule, mining geology includes economic geology.

The outstanding Russian geologist V.A. Obruchev says that geology is the science of the Earth which reveals to us how the Earth took shape, its composition and its changes. Geology helps prospect for ores, coal, oil, salt and other useful minerals.

Higher mining schools (universities, academies, institutes and colleges) develop a wide range of courses and programmes that meet the requirements of the society .They offer courses in mining technology, machinery and transport, hydraulic engineering, electrical engineering, industrial electronics, automation, surveying, geodesy, information technology, etc.

The main trend in the development of higher mining education is the introduction of courses in environmental protection, management (environmental human resources), economics and management of mining enterprises, marketing studies, computer-aided design (CAD) and others.

Computer science is also of great importance. The course aims at providing students with understanding how software and hardware technology helps solving problems.

Laboratory work is an important part in training specialists. Experiments in laboratories and workshops will help students to develop their practical skills. They have a short period of field work to gain working experience.

The students go through practical training at mines, plants and other industrial enterprises.. They become familiar with all stages of production and every job from worker to engineer. Here they get practical knowledge and experience necessary for their diploma (graduation) papers.

A lot of students belong to students' scientific groups. They take part in the research projects which their departments usually conduct. Postgraduates carry out research in different fields of science and engineering.

Sport centres give the students opportunities to play different sports such as tennis, football, basketball, volleyball, swimming, ' skiing, water polo, boxing, wrestling and others.

Students graduate from mining and geological higher schools as mining engineers, mining mechanical engineers, ecologists, mining electrical engineers, geologists, economists and managers for mining industry.

***1. Переведите следующие сочетания слов.***

а) широкий круг проблем
б) денные месторождения полезных ископаемых
в) горный инженер-механик
г) вести научно-исследовательскую работу
д) принимать форму
е) техническое и программное обеспечение
ж) студенты (последнего курса)
з) дипломная работа
и) физические и химические свойства
к) месторождение полезных ископаемых

1. оканчивать институт
2. поступать в университет
3. получать образование

4. готовить геологов и горних инженеров
5. высшие горные учебные заведения
6. приобретать опыт
7. студенческие научные общества
8. заниматься различными видами спорта

***№3***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**accurate -** *a* точный, правильный; **accuracy -** *n* точность

**archive -** *n* архив

**attend -** v посещать *(лекции, практические занятия, собрания)*

**comprehensive -** *a* всесторонний, исчерпывающий

**concern -** v касаться, относиться; иметь отношение к чему-л.; *n* дело, отношение; важность; **concerning** *prep* относительно, касательно

**consider -** v рассматривать; считать; **considerable -** значительный, важный; **consideration -** *n* рассмотрение; обсуждение

**draw (drew**, **drawn**) - v *зд,* чертить, рисовать; **draw the conclusion** делать вывод; *syn* **come to the conclusion**

**employ -** v применять, использовать; предоставлять *(работу); syn* **use, utilize, apply; employment -** *n* служба; занятие; применение, использование

**familiarize** - v знакомить; осваивать

**fundamental -** *n pl* основы *(наук)*

**levelling -** *n* нивелирование, сглаживание *(различий);* выравнивание

**number -** *n* число, количество, большое количество; *(порядковый)* номер, ряд

**observe -** v наблюдать, следить *(за чём-л.),* соблюдать *(правило, обычаи)*

**obtain -** v получать; достигать; добывать; *syn* **get, receive**

**present -** v преподносить, дарить; подавать, представлять; **presentation -** *n* изложение; предъявление

**proximity -** *n* близость, соседство; **in proximity to** поблизости, вблизи от *(чего-л.)*

**require** - v требовать; *syn* **call for; demand; meet the requirements** удовлетворять требованиям

**traversing -** *n* горизонтальная съемка

**to keep in close touch with -** поддерживать связь с

**to touch upon (on)** затрагивать, касаться вкратце *(вопроса)*

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 3: Mining Education in Great Britain**

In Great Britain the students get mining education at special colleges and at mining departments of universities.

For example, the Mining Department at the University of Nottingham ranks as one of the foremost teaching and research mining schools in Great Britain. The students come to the University from all parts of the country and from abroad. The close proximity of Nottingham to mines extracting coal and different metals makes it possible for the University to keep in close touch with new achievements in mining.

The aim of training at the University is to give the student an understanding of applied science based on lectures, tutorial system, laboratory work and design classes. The laboratory work trains the student in accurate recording of observations, drawing of logical conclusions and presentation of scientific reports. Besides, it gives the student an understanding of experimental methods and familiarizes him (or her) with the characteristics of engineering materials, equipment and machines.

At Nottingham there are two types of laboratories, general and Specialized. General laboratories deal with the fundamentals of engineering science and specialized ones1 study the more specialized problems in different branches of engineering.

During the final two years of his course the student gets a comprehensive training in surveying. Practical work both in the field and in drawing classes forms an important part of this course. Besides, the students have practical work in survey camps during two weeks. The equipment available for carrying out traversing, levelling, tacheometric and astronomical surveying is of the latest design.

The practical and laboratory work throughout the three or four years of study forms a very important part of the course, so the students obtain the required standard in their laboratory course work before they graduate.

British educational system is fee-paying. The annual fee includes registration, tuition, examination, graduation and, in the case of full-time students, membership of the Union of Students.

Students from all over the world (nearly 100 countries) study at the University of Nottingham. For many years the University has had a thriving community of international students.

The University pays much attention to learning foreign languages. For individual study there is a 16-place self-access tape library with a tape archive of 3,000 tapes in 30 languages. There are also 16 video work stations where the students play back video tapes or watch TV broadcasts in a variety of languages.

***1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. In Great Britain the students can get mining education only at special colleges.
2. The training at universities is based on tutorial system.
3. The laboratory work familiarizes the student with modern equipment.
4. There are three types of laboratories at the University of Nottingham.
5. When the students study surveying, they have practical work both in the field and in drawing classes.
6. The students from abroad don't study at Nottingham.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. Where can one get mining education in Great Britain?
2. Is the Mining Department at the University of Nottingham one of the foremost research mining schools in Great Britain?
3. What makes it possible for the University to keep in close touch with the, achievements in mining?
4. What are the students supposed to do in the laboratories?
5. Will the students have practical work in survey camps or in the laboratories?
6. What do the students use surveying equipment for?
7. What can you say about studying foreign languages at the University?

***№4***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**advance -** *n* прогресс, успех; продвижение вперед; v делать успехи, развиваться, продвигаться вперед; **advanced courses** курсы по расширенной программе

**authority -** *n* администрация; начальство

**differ** - v (from) отличаться (от); **difference** *n* различие; разница; **different** *a* различный; *syn* **various**

**excavate -** v добывать *(уголь);* вырабатывать полезное ископаемое открытым способом; вынимать *(грунт);* **excavation** - *n* открытая разработка карьером; разрез, карьер; **surface excavation** открытая разработка; *syn* **open-cast (opencast)**

**experience -** *n* жизненный опыт; опыт работы; стаж

**found -** v основывать**; *syn* establish, set up; foundation -** *n* основание; учреждение; основа; **lay the foundation** положить начало чему-л , заложить основу чего-л.

**manage -** v управлять, заведовать, справляться, уметь обращаться; **management -** *n* управление, заведование; правление, дирекция; **management studies -** наука об управлении

**mean (meant)** - *v* значить, иметь значение, подразумевать; намереваться, иметь в виду; **means -** *n, pl* средства, **meaning -** *n* значение, **by means of** посредством (чего-л)

**metalliferous –** *a* содержащий металл, рудоносный

**preliminary -** *a* предварительный**; preliminary course** подготовительные курсы

**realize -** v представлять, себе; понимать *(во всех деталях); **syn** **understand***

**recognize -** *v* признавать; узнавать

**work out -**v разрабатывать *(план);* решать задачу

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 4: Mining Education in Great Britain (continued)**

At present in Great Britain there are a number of universities and colleges which give instruction in mechanical engineering, mining, metallurgy, etc. These institutions provide full-time and part-time education. It should be noted that technical colleges confer diplomas' on college graduates.

A university graduate leaves with the degree of Bachelor of Arts or Bachelor of Science, which is an academic qualification awarded by universities.

For example, the University in Cardiff has become one of the largest in Wales. It is one of the four colleges which together with the Welsh National School of Medicine form the University of Wales. There is the Mining Engineering Department in the University of Wales. The Department deals with the whole range of extractive industries such as coal and metalliferous mining, quarrying and oil technology.

After graduating from the college a student can be recommended for entry to the university by a college authority and he can apply for admission to the university.

At the Mining Department students may take several courses such as geology, mining engineering, mine surveying, quarrying, management studies and others. It has become a tradition that the courses are based on an intensive tutorial system. It means that students are allotted to members of the teaching staff for individual tuition separately in mining, in quarrying and in mine surveying. The system is founded on that of the older universities of Great Britain.

At the Department of Mining Engineering of the Newcastle University mining has now become a technically advanced profession. The Department of Mining Engineering trains industrially experienced engineers through various advanced courses in rock mechanics and surface excavation. For many years the Mining Engineering Department at Newcastle has recognized the need for highly-qualified engineers and realized that the courses in rock mechanics and surface excavation are of great importance for mining engineers.

At the University a student studies for three or four years. The organization of the academic year is based on a three-term system which usually runs from about the beginning of October to the middle of December, from the middle of January to the end of March and from the middle of April to the end of June or the beginning of July.

Students course is designed on a modular basis. Modules are self-contained 'units' of study, which are taught and assessed independently of each other. When a student passes a module, he (she) gains a credit. All modules carry a number of credits. At the end of the term, the number of credits a student gets, determines the award he (she) receives. Each module is continuously assessed by coursework and/or end-of-term examinations.

Admission to the British universities is by examination and selection. The minimum age for admission to the four-year course is normally 18 years. Departments usually interview all the candidates. The aim of the interview is to select better candidates.

Just over half of all university students live in colleges, halls of residence, or other accommodation provided by their university, another third lives in lodgings or privately rented accommodation; and the rest live at home.

***1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. At present there are about a hundred technical institutions in Great Britain.
2. It should be noted that British colleges confer degrees.
3. As a rule a college authority recommends the graduates for entry to the university.
4. At the Mining Engineering Department of the University of Wales the students study only metalliferous mining.
5. At the Mining Engineering Department the courses are based on an intensive tutorial system.
6. The Mining Engineering Department at the Newcastle University has recognized the importance of teaching rock mechanics and surface excavation (open-cast mining).

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. Are there many technical institutions in Great Britain?
2. What is the difference between colleges and universities?
3. Is the Mining Engineering Department the only one in the University of Wales?
4. Does the Mining Engineering Department deal only with metalliferous mining?
5. Can a student enter the university after he has graduated from the college?
6. What courses are of special importance for mining engineers?
7. What do you know about the organization of the academic year at British universities?
8. When do the students take their examinations?

***3. Переведите следующие сочетания слов.***

а) курсы по расширенной программе
б) рудоносные отложения
в) средства производства
г) горный факультет
д) открытые горные работы
е) опытный инженер
ж) администрация колледжа
з) поощрять студентов
и) отвечать требованиям университета
к) наука об управлении

1. зависеть от условий
2. значить, означать
3. признать необходимость (чего-л.)
4. ежегодная производительность (шахты)
5. начальник шахты
6. добывающая промышленность
7. представлять особую важность
8. механика горных пород
9. единственный карьер
10. основывать факультет (школу, систему и т.д.)

***№5***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**abyssal** - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный
**adjacent** - *a* смежный, примыкающий
**ash** - *n* зола
**belt -** *n* пояс; лента; ремень
**body** - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты
**common -** *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**
**cool** - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

**dimension -** *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**
**dust** - *n* пыль
**dyke –** *n* дайка
**extrusion** - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*
**fine** - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь
**flow -** v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
**fragmentary -** *a* обломочный, пластический
**glass** - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
**gold** - *n* золото
**inclined** - *a* наклонный
**mica** - *n* слюда
**permit** - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
**probably** - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
**shallow** - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
**sill** - *n* силь, пластовая интрузия
**stock** - *n* шток, небольшой батолит
**vein** - *n* жила, прожилок, пропласток

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 5: Igneous Rocks**

Igneous rocks have crystallized from solidified magma.

Igneous rocks can be classified in a number of ways and one of (hem is based on mode of occurrence. They occur either as intrusive (below the surface) bodies or as extrusive masses solidified at the Earth's surface. The terms "intrusive" and "extrusive" refer to the place where rocks solidified.

The grain size of igneous rocks depends on their occurrence. The intrusive rocks generally cool more slowly than the extrusive rocks and crystallize to a larger grain size. The coarser-grained intrusive rocks with grain size of more than 0.5 mm called plutonic or abyssal are referred to as intrusive igneous rocks because they are intruded into older pre-existing rocks. Extrusive or volcanic rocks have even finer grains, less than 0.05 mm and are glassy.

Exposed igneous rocks are most numerous in mountain zones for two reasons. First, the mountain belts have been zones of major deformation. Second, uplifts in mountain belts have permitted plutonic masses to be formed.

The largest bodies of igneous rocks are called batholiths. Batholiths cooled very slowly. This slow cooling permitted large mineral grains to form. It is not surprising that batholiths are composed mainly of granitic rocks with large crystals called plutons. As is known, granites and diorites belong to the group of intrusive or plutonic rocks formed by solidification of igneous mass under the Earth's crust. Granites sometimes form smaller masses called stocks, when the occurrence has an irregular shape but smaller dimensions than the batholiths.

Laccoliths and sills, which are very similar, are intruded between sedimentary rocks. Sills are thin and they may be horizontal, inclined or vertical. Laccoliths are thicker bodies and in some cases they form mountains.

Dykes are also intrusive bodies. They range in thickness from a few inches to several thousand feet. Dykes are generally much longer than they are wide. Most dykes occupy cracks and have straight parallel walls. These bodies cool much more rapidly and are commonly fine-grained. For example, granite may occur in dykes that cut older rocks.

Pegmatites (quartz, orthoclase and mica) also belong to the group of plutonic or intrusive rocks. They occur in numerous veins which usually cut through other plutonites, most often granite, or adjacent rocks.

Extrusive igneous rocks have been formed from lava flows which come from fissures to the surface and form fields of volcanic rocks such as rhyolite, andesite, basalt, as well as volcanic ashes and dust, tuff, etc. As a rule, these rocks of volcanic origin cool rapidly and are fine-grained. It is interesting to note that basalt is the most abundant of all lavatypes. It is the principal rock type of the ocean floor.

Igneous rocks are rich in minerals that are important economically or have great scientific value. Igneous rocks and their veins are rich in iron, gold, zinc, nickel and other ferrous metals.

***1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. Igneous rocks have been formed by sedimentation.
2. Intrusive rocks have been formed by the cooling of rocks of the Earth's crust.
3. Extrusive rocks have been formed the same way.
4. The grain size of igneous rocks depends on mode of occurrence.
5. Exposed igneous rocks are numerous in mountain zones.
6. Granites and diorites belong to the group of extrusive rocks.
7. As a rule, granite may occur in dykes.
8. Pegmatites do not belong to the group of plutonic or intrusive rocks.

***2). Ответьте на вопросы:***

1. Have igneous rocks crystallized from magma or have they been formed by sedimentation?
2. Which types of igneous rocks do you know?
3. What does the grain size of igneous rocks depend on?
4. Can you give an example of intrusive or plutonic rocks?
5. Are diorites intrusive or extrusive formations?
6. What do you know about batholiths?
7. Do pegmatites belong to the group of plutonic or volcanic rocks?
8. How do pegmatites occur?
9. What minerals are igneous rocks rich in?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | adjacent layers | а) способ залегания |
| 2. | abyssal rocks | б) крупнозернистый |
| 3. | dimensions of crystals | в) зоны крупных нарушений |
| 4. | valuable minerals | г) абиссальные (глубинные) породы |
| 5. | shape and size of grains | д) смежные пласты (слои) |
| 6. | mode of occurrence | е) размеры кристаллов |
| 7. | coarse-grained | ж) взбросы |
| 8. | uplifts | з) форма и размер зерен |
| 9. | zones of major deformation | и) ценные минералы |

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | затвердевшие массы | а) irregular shape |
| 2. | обломочные породы | б) at a certain depth |
| 3. | медленно остывать | в) economically important |
| 4. | мелкозернистый | г) solidified masses |
| 5. | многочисленные трещины | д) scientific value |
| 6. | неправильная форма | е) to cool slowly |
| 7. | на определенной глубине | ж) existing types of rocks |
| 8. | экономически важный | з) fine-grained |
| 9. | научная ценность | и) fragmentary rocks |

10. существующие типы пород к) numerous cracks or fissures

***№6***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**band -** *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
**cleave** - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
**constituent -** *n* составная часть, компонент
**define** - *v* определять, давать определение
**distribute** - v **(among)** распределять (между); раздавать;
**disturb** - *v* нарушать; смещать
**excess -** *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
**flaky** - *a* слоистый; похожий на хлопья
**fluid** - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
**foliate -** *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
**marble -** *n* мрамор
**mention** - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
**plate** - *n* пластина; полоса *(металла)*
**pressure** - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
**relate** - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
**run (ran, run) -** *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
**schistose** - *a* сланцеватый; слоистый
**sheet** - *n* полоса
**slate** - *n* сланец; *syn* **shale**
**split (split) -** *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
**trace** - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
**at least** по крайней мере
**to give an opportunity** (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 6: Metamorphic Rocks**

The problem discussed concerns metamorphic rocks which compose the third large family of rocks. "Metamorphic" means "changed from". It shows that the original rock has been changed from its primary form to a new one. Being subjected to pressure, heat and chemically active fluids beneath the Earth's surface, various rocks in the Earth's crust undergo changes in texture, in mineral composition and structure and are transformed into metamorphic rocks. The process described is called metamorphism.

As is known, metamorphic rocks have been developed from earlier igneous and sedimentary rocks by the action of heat and pressure.

Gneisses, mica schists, phyllites, marbles, slate, quartz, etc. belong to the same group of rocks. Having the same mineral composition as granite, gneisses consist chiefly of quartz, orthoclase and mica. However unlike granite, they have a schistose structure. It means that their constituents are distributed in bands or layers and run parallel to each other in one direction. If disturbed the rock cleaves easily into separate plates.

The role of water in metamorphism is determined by at least four variable geologically related parameters: rock pressure, temperature, water pressure, and the amount of water present.

During a normal progressive metamorphism rock pressure and temperature are interdependent, and the amount of water and the pressure of water are related to the sediments and to the degree of metamorphism in such a way that, generally speaking, the low-grade metamorphic rocks are

characterized by the excess of water. The medium-grade rocks defined by some deficiency of water and the high-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.

Many of the metamorphic rocks mentioned above consist of flaky materials such as mica and chlorite. These minerals cause the rock to split into thin sheets, and rocks become foliated.

Slate, phyllite, schist and gneiss belong to the group of foliated metamorphic rocks. Marble and quartzite are non-foliated metamorphic rocks.

The structure of metamorphic rocks is of importance because it shows the nature of pre-existing rocks and the mechanism of metamorphic deformation. Every trace of original structure is of great importance to geologists. It gives an opportunity of analysing the causes of its metamorphism.

Being often called crystalline schists, metamorphic rocks such as gneisses and mica have a schistose structure. Metamorphic rocks represent the oldest portion of the Earth's crust. They are mostly found in the regions of mountain belts where great dislocations on the Earth once took place.

***1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. Generally speaking, metamorphic rocks have been developed from ores.
2. Marble, slate and phyllite belong to the group of metamorphic rocks.
3. As is known, unlike granite metamorphic rocks have a schistose structure.
4. It is quite obvious that the role of water in metamorphism is great.
5. As a rule, low-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.
6. Flaky materials cause the rock to split into thin sheets.
7. It should be noted that marble and quartzite are foliated metamorphic rocks.
8. The structure of metamorphic rocks shows the nature of older preexisting rocks and the mechanism of metamorphic deformation as well.
9. All metamorphic rocks are non-foliated.

***2). Ответьте на вопросы:***

1. Do you know how metamorphic rocks have been formed?
2. Which rocks belong to the group of metamorphic?
3. Does gneiss have the same structure as granite?
4. Is the role of water great in metamorphism?
5. What rocks do we call foliated? What can you say about non-foliated metamorphic rocks?
6. How can geologists trace the original structure of metamorphic rocks?
7. Why are metamorphic rocks often called crystalline schists?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

1. as a result of the chemical and physical changes
2. constituents of rocks
3. to be subjected to constant development
4. to undergo changes
5. excess of water
6. low-grade ores
7. coal band
8. to cleave into separate layers
9. traces of original structure
10. generally speaking

а) полоса (или прослоек) угля
б) составляющие пород
в) расщепляться на отдельные слои
г) вообще говоря

д) в результате химических и физических изменений
е) избыток воды
ж) изменяться
з) находиться в постоянном развитии
и) низкосортные руды
к) следы первоначальной структуры

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. иметь значение
2. упомянутые выше
3. сланцеватая структура
4. в отличие от гранита
5. недостаток воды
6. существовавшие ранее породы
7. слоистые породы
8. мрамор и сланец
9. гнейс
10. давать возможность
11. определять структуру

а) unlike granite
б) to be of importance
в) pre-existing rocks
г) mentioned above
д) schistose structure
е) to give an opportunity (of doing smth)
ж) to define (determine) rock texture
з) deficiency of water
и) flaky rocks
к) marble and slate
л) gneiss

***№7***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**aerial** - *a* воздушный; надземный

**certain** - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

**cost** - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

**crop** - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

**dredging** - *n* выемка грунта; драгирование

**drill** - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

**drive (drore**, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

**evidence** – *n* основание; признак(и); свидетельства

**expect -** v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

**explore** - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

**galena** - *n* галенит, свинцовый блеск

**indicate** - v указывать, показывать; служить признаком; означать

**lead** - *n* свинец

**look for** - v искать

**open up -** v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

**panning** - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

**processing** - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

**prove -** v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

**search** - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

**sign** - *n* знак, символ; признак, примета

**store** - v хранить, накапливать *(о запасах)*

**work -** v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

**country rock** коренная (основная) порода

**distinctive properties** отличительные свойства

**malleable metal** ковкий металл

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

**TEXT 7: Prospecting**

Mining activities include prospecting and exploration for a mineral deposit through finding, proving, developing, extracting and processing the ore. That is why it is possible to divide the mining activity into three major phases: 1) before mining which involves prospecting and exploration required to locate, characterize and prove a potential ore body; 2) mining which refers to actual coal or ore extraction. Extraction processes include underground or surface mining and dredging; 3) after mining which involves processing and preparing the raw ore for the end product.

As has already been said, before a mineral deposit can be worked, that is, before it can be extracted from the Earth for use by man, it must first be found. The search for economically useful mineral deposits is called prospecting. To establish the quality and quantity of a mineral deposit, the type of country rock, etc. means to prove it and this process is called proving. Prospecting and proving are only two different stages of mining geological exploration, the latter includes drilling and driving of openings.

Last century prospectors looked for visible evidence of mineralization on the surface of the Earth. To recognize valuable minerals it was necessary to know their various distinctive physical properties. For example, gold occurs in nature as a heavy malleable yellow metal. -Galena, the most important mineral containing lead, is dark grey, heavy and lustrous. The first ores of iron to be mined were deposits of magnetite, a black heavy mineral capable of attracting a piece of iron.

As the deposits of mineral that cropped out at the surface were mined, the search for additional supplies of minerals took place. The science of geology was used to explain the occurrence of ore deposits.

The aim of geological prospecting is to provide information on a preliminary estimation of the deposit and the costs of the geological investigations to be made. It also indicates whether it is available to continue the exploration or not.

Prospecting work includes three stages: 1) finding signs of the mineral; 2) finding the deposit; 3) exploring the deposit.

General indications of the possibility of exposing this or that mineral in a locality can be obtained by studying its general topographical relief, the type of ground and its general natural conditions. Thus, in mountainous regions where fissures were formed during the process of mountain formation, ore minerals could be expected in the fissure fillings. In hilly regions, sedimentary deposits would be expected.

Certain deposits are found only in a particular type of ground. Coal seams, for example, are found in sedimentary formations mainly consisting of sandstones and shales. Veins, on the other hand,

are found in crystalline (igneous) rocks, and the type of country rock usually determines the type of minerals.

At present, prospecting methods to be used are as follows:

1. Surface geological and mineralogical prospecting such as panning.
2. Geophysical, geochemical, geobotanical prospecting.
3. Aerial photography with geological interpretation of the data to be obtained is highly effective from aircraft or helicopter. Besides, successful development of space research has made it possible to explore the Earth's resources from space by satellites.

In modern prospecting the methods mentioned above are used together with the study of geological maps.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. The search for economically useful mineral deposits is called proving.
2. Last century prospectors looked for visible evidence of mineral deposits.
3. The first ores of iron to be mined were deposits of galena.
4. The science of geology can explain the mode of occurrence of ore deposits.
5. As a rule prospecting includes four stages.
6. The study of general topographical relief and the type of ground makes it possible to expose this or that deposit.
7. Geologists know that certain deposits are only found in a particular type of ground.
8. As is known, veins are found in metamorphic rocks.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What is prospecting?
2. What is proving?
3. How did prospectors find mineral deposits in the 19th century?
4. Does gold occur in nature as a heavy malleable yellow metal or as a heavy dark-grey one?
5. What metal is capable of attracting a piece of iron?
6. What does prospecting work provide?
7. What are the three main stages of prospecting?
8. Is it enough to know only the topographical relief of a locality for exposing this or that mineral?
9. What methods of prospecting do you know?
10. What are the most effective aerial methods of prospecting now?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

| | |
|---|---|
| 1. country rock | а) залегание рудных месторождений |
| 2. panning | б) блестящий металл |
| 3. the search for commercially useful deposits | в) коренная (основная) порода |
| 4. geological exploration | г) дополнительные запасы минералов |
| 5. to look for evidence of mineralization | д) промывка (золотоносного песка в лотке) |
| 6. distinctive properties | е) геологическая разведка (с попутной добычей) |
| 7. lustrous metal | ж) искать доказательства наличия месторождения |
| 8. capable of attracting a piece of iron | з) отличительные свойства |
| 9. additional supplies of minerals | и) поиски экономически полезных месторождений |
| 10. the occurrence of ore deposits | к) способный притягивать кусок металла |

***б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | стоимость геологических исследований | а) the data obtained |
| 2. | выходить на поверхность (обнажаться) | б) galena, sandstones and shales |
| 3. | произвести предварительную оценку (месторождения) | в) the cost of geological investigations |
| 4. | визуальные наблюдения с воздуха | г) to crop out |
| 5. | полученные данные | д) certain ore deposits |
| 6. | галенит, песчаники и сланцы | е) to make a preliminary estimation (of a deposit) |
| 7. | общие показания | ж) visual aerial observations |
| 8. | находить признаки месторождения | з) to find the signs of a deposit |
| 9. | определенные рудные месторождения | и) general indications |

***№8***

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**adit** - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

**angle** - *n* угол

**approximate** - *a* приблизительный

**bit** - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

**borehole** - *n* скважина, буровая скважина

**crosscut** - *n* квершлаг

**dip** - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

**enable** - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

**exploit** - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

**measure** - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

**overburden -** *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

**pit** - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

**reliable** - *a* надежный; достоверный

**rig** - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

**sample** - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

**section** - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

**sequence** - *n* последовательность; порядок следования; ряд

**sink (sank, sunk**) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять*;* погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

**slope -** *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

**steep** - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

**strike** - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

**trench** - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

**to make use (of)** использовать, применять

**to take into consideration** принимать во внимание; *syn* **take into account**

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

## TEXT 8: Exploration of Mineral Deposits

Exploration is known to include a whole complex of investigations carried out for determining the industrial importance of a deposit. The main task is to determine the quality and quantity of mineral and the natural and economic conditions in which it occurs. The exploration of the deposit is divided into three stages, namely preliminary exploration, detailed exploration and exploitation exploration.

The aim of preliminary exploration is to establish the general size of a deposit and to obtain an approximate idea of its shape, dimensions and quality. At this stage the geological map of the deposit is corrected and a detailed survey of its surface is completed.

The information on the preliminary exploration is expected to give an all-round description of the deposit which will enable the cost of its detailed exploration to be estimated.

The following points should be taken into consideration: 1) the shape and area of the deposit; 2) its depth and angles of dip and strike; 3) its thickness; 4) the properties of the surrounding rock and overburden; 5) the degree of uniformity of distribution of the mineral within the deposit and the country rock, etc.

Preliminary explorations can make use of exploratory openings such as trenches, prospecting pits, adits, crosscuts and boreholes. They are planned according to a definite system, and some are driven to a great depth.

All the exploratory workings are plotted on the plan. These data allow the geologist to establish the vertical section of the deposit.

The quality of the mineral deposit is determined on the basis of analyses and tests of samples taken from exploratory workings.

The method of exploration to be chosen in any particular case depends on the thickness of overburden, the angle of dip, the surface relief, the ground water conditions and the shape of the mineral deposit.

The task of the detailed exploration is to obtain reliable information on the mineral reserves, their grades and distribution in the different sectors of the deposit. Detailed exploration data provide a much more exact estimate of the mineral reserves.

Mine or exploitation exploration is known to begin as soon as mining operations start. It provides data for detailed estimates of the ore reserves of individual sections. It facilitates the planning of current production and calculating the balance of reserves and ore mined.

The searching and discovering of new mineralized areas are based on geological survey and regional geophysical prospecting. The results of these investigations provide data on iron-bearing formations and new deposits for commercial extraction.

In detailed exploration both underground workings and borehole survey are used. Core drilling with diamond and carbide bits is widely used. Non-core drilling is also used in loose rocks in combination with borehole geophysical survey.

One of the main methods to explore coal deposits is also core-drilling. Modern drilling equipment makes it possible to accurately measure bed thickness and determine structure of beds, faults and folds. Recording control instruments are attached to drilling rigs which allow the geologists to get reliable samples good for nearly all parameters of coal quality to be determined.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. The purpose of preliminary exploration is to determine the mineral reserves and their distribution in the different sectors of the deposit.
2. The properties of the surrounding rock and overburden should be taken into consideration during the preliminary exploration.
3. The purpose of the detailed exploration is to find out the quantity (reserves) of the deposit.
4. Exploitation exploration facilitates the planning of current production.
5. Both core drilling and non-core drilling are widely used.

6. Recording control instruments allow geologists to get reliable ore samples.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What stages does exploration include?
2. What is the main purpose of preliminary exploration?
3. What should be taken into consideration by geologists during preliminary exploration?
4. What exploratory openings do you know?
5. Do you know how the quality of the mineral deposit is determined?
6. What is the aim of a detailed exploration?
7. Is core drilling used in prospecting for loose rocks?
8. What is drilling equipment used for?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов:***

1. bedded deposits
2. core drilling
3. the angle of dip of the seam
4. the thickness of overburden
5. exploratory workings
6. composition of minerals
7. pits and crosscuts
8. to exploit new oil deposits
9. sampling
10. geological section

а) мощность наносов
б) разрабатывать новые месторождения нефти
в) шурфы и квершлаги
г) пластовые месторождения
д) опробование (отбор) образцов
е) угол падения пласта
ж) колонковое бурение
з) геологический разрез (пород)
и) состав минералов
к) разведочные выработки

***б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:***

1. буровые скважины
2. по простиранию пласта
3. равномерность распределения минерала в залежи
4. водоносность пород
5. карбидные и алмазные коронки
6. детальная разведка
7. использовать новые поисковые методы
8. проникать в залежь
9. коренная порода
10. свойства окружающих пород

а) ground water conditions
б) detailed exploration
в) boreholes
г) along the strike of the bed (seam)
д) carbide and diamond bits
е) the uniformity of mineral distribution in the deposit
ж) the properties of surrounding rocks
з) to make use of new prospecting methods
и) country rock
к) to penetrate into the deposit

## 3. Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций)

***Грамматические конструкции представлены на стр. 6 – 40.***

***Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

**Семья. Family**

**родственник** relative, relation
**родители** parents
**мать (мама)** mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
**отец (папа)** father (dad, daddy, papa, pa)
**жена** wife
**муж** husband
**супруг(а)** spouse
**ребенок, дети** child, children
**дочь** daughter
**сын** son
**сестра** sister
**брат** brother
**единственный ребенок** only child
**близнец** twin
**близнецы, двойняшки** twins
**брат-близнец** twin brother
**сестра-близнец** twin sister
**однояйцевые близнецы** identical twins
**тройняшки** triplets
**бабушка и дедушка** grandparents
**бабушка** grandmother (grandma, granny, grandmamma)
**дедушка** grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
**внуки** grandchildren
**внучка** granddaughter
**внук** grandson
**прабабушка** great-grandmother
**прадедушка** great-grandfather
**прабабушка и прадедушка** great-grandparents
**правнуки** great-grandchildren
**тётя** aunt
**дядя** uncle
**крестный (отец)** godfather
**крестная (мать)** godmother
**отчим, приемный отец** stepfather
**мачеха, приемная мать** stepmother
**сводный брат** stepbrother
**сводная сестра** stepsister
**брат по одному из родителей** half-brother
**сестра по одному из родителей** half-sister
**приемный, усыновленный сын** adopted son
**приемная, удочеренная дочь** adopted daughter
**приемный ребенок** adopted child
**патронатная семья, приемная семья** foster family
**приемный отец** foster father
**приемная мать** foster mother
**приемные родители** foster parents

**приемный сын** foster son
**приемная дочь** foster daughter
**приемный ребенок** foster child
**неполная семья (с одним родителем)** single-parent family
**родня** the kin, the folks
**племянница** niece
**племянник** nephew
**двоюродный брат** cousin (male)
**двоюродная сестра** cousin (female)
**двоюродный брат (сестра), кузен (кузина)** first cousin
**троюродный брат (сестра)** second cousin
**четвероюродный брат (сестра)** third cousin
**родня со стороны мужа или жены** in-laws
**свекровь** mother-in-law (husband's mother)
**свёкор** father-in-law (husband's father)
**тёща** mother-in-law (wife's mother)
**тесть** father-in-law (wife's father)
**невестка, сноха** daughter-in-law
**зять** son-in-law
**шурин, свояк, зять, деверь** brother-in-law
**свояченица, золовка, невестка** sister-in-law
**семейное положение** marital status
**холостой, неженатый, незамужняя** single
**женатый, замужняя** married
**брак** marriage
**помолвка** engagement
**помолвленный, обрученный** engaged
**развод** divorce
**разведенный** divorced
**бывший муж** ex-husband
**бывшая жена** ex-wife
**расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей** separated
**вдова** widow
**вдовец** widower
**подружка, невеста** girlfriend
**друг, парень, ухажер** boyfriend
**любовник, любовница** lover
**ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный** fiance
**свадьба** wedding
**невеста на свадьбе** bride
**жених на свадьбе** (bride)groom
**медовый месяц** honeymoon

***Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

**The Ural State Mining University**

| | |
|---|---|
| **Mining University** – Горный университет;<br>**higher educational institution** - высшее учебное заведение;<br>**to provide** - зд. Предоставлять;<br>**full-time education** - очное образование;<br>**extramural education** - заочное | **scientific research centre** - центр научных исследований;<br>**master of science** - кандидат наук;<br>**capable** – способный;<br>**to take part in** - принимать участие;<br>**graduate** – выпускник;<br>**to dedicate** – посвящать; |

| | |
|---|---|
| образование;<br>**to award** – награждать;<br>**post-graduate courses** – аспирантура; | **to carry out scientific work** - выполнять научную работу; |

| | |
|---|---|
| **Faculty of Mining Technology** - горно – технологический;<br>**Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический;<br>**Institute of World Economics** – Институт мировой экономики;<br>**Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический;<br>**Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты;<br>**Faculty of City Economy** – городского хозяйства; | **Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики;<br>**Faculty of extramural education** – заочный;<br>**department** – кафедра;<br>**dean** – декан;<br>**to train specialists in** - готовить специалистов;<br>**to consist of** - состоять из;<br>**preparatory** – подготовительный;<br>**additional** – дополнительный;<br>**to offer** – предлагать; |

| | |
|---|---|
| **to house** - размещать /ся/;<br>**building** – здание;<br>**Rector's office** – ректорат;<br>**Dean's office** – деканат;<br>**department** – кафедра;<br>**library** – библиотека;<br>**reading hall** - читальный зал;<br>**assembly hall** - актовый зал;<br>**layout** - расположение, план;<br>**administrative offices** - административные отделы; | **computation centre** - вычислительный центр;<br>**canteen** – столовая;<br>**to have meals** – питаться;<br>**hostel** – общежитие;<br>**to go in for sports** - заниматься спортом;<br>**wrestling** – борьба;<br>**weight lifting** - тяжелая атлетика;<br>**skiing** - катание на лыжах;<br>**skating** - катание на коньках;<br>**chess** – шахматы; |

| | |
|---|---|
| **academic work** - учебный процесс;<br>**academic year** - учебный год;<br>**to consist of** - состоять из;<br>**bachelor's degree** - степень бакалавра;<br>**course of studies** - курс обучения;<br>**to last** - длиться;<br>**term** - семестр;<br>**to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия;<br>**period** - пара, 2 – х часовое занятие;<br>**break** - перерыв;<br>**subject** - предмет;<br>**descriptive geometry** - начертательная геометрия; | **general geology** - общая геология;<br>**foreign language** - иностранный язык;<br>**to operate a computer** - работать на компьютере;<br>**to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен;<br>**to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен;<br>**to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен;<br>**to fail in chemistry** - не сдать химию;<br>**holidays, vacations** - каникулы;<br>**to present graduation paper** - представлять дипломные работы;<br>**for approval** - к защите; |

***The Faculty of Mining Technology*** trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining ) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

***The Institute of World Economics*** trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

***The Faculty of Mining Mechanics*** trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

***The Faculty of Geology & Geophysics*** trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

***Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

***My town***

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist's/a pharmacy/a drugstore - аптека

a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки
a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна

a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

***Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:***

**My speciality**

**The Earth's Crust and Useful Minerals**

**cause -** v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

**clay** - *n* глина; глинозем

**consolidate -** v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

**crust -** *n* кора; *геол.* земная кора

**decay -** v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

**derive -** v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

**destroy -** v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

**dissolve** v растворять

**expose -** v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение

**external -** *a* внешний

**extrusive** - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

**force -** v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

**glacier -** *n* ледник, глетчер

**grain -** *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый

**gravel -** *n* гравий, крупный песок

**internal -** *a* внутренний

**intrusive -** *a* интрузивный, плутонический

**iron -** *n* железо

**layer -** *n* пласт

**like** - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

**lime -** *n* известь; **limestone -** *n* известняк

**loose -** *a* несвязанный, свободный; рыхлый

**make up -** v составлять; *n* состав *(вещества)*

**particle** - *n* частица; включение

**peat -** *n* торф; торфяник

**represent -** v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный

**rock** – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

**sand -** *n* песок

**sandstone -** *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

**sediment -** *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

**schist -** *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый

**shale -** *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …**, **oil …** - горючий сланец

**siltstone -** *n* алеврит

**stratification -** *n* напластование, залегание

**stratify -** v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

**substance -** *n* вещество, материал; сущность

**thickness -** *n* толщина, мощность

**value -** *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*

**vary** - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

**contain -** v содержать *(в себе),* вмещать

**crack -** *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

**contract -** v сжиматься; сокращаться

**dust -** *n* пыль

**expand -** v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

**fissure -** *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

**fracture -** *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

**freeze -** *v* замерзать; замораживать; застывать

**gradual -** *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

**hard -** *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

**hole -** *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

**influence -** *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

**lateral -** *a* боковой

**occur -** *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания

**penetrate -** *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

**phenomenon -** *n* явление; *pi* **phenomena**

**pressure -** *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

**rate -** *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

**refer -** v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

**resist -** *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

**size -** *n* размер; величина; класс *(угля)*

**solution –** *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий

**succession –** *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

**undergo** (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

**uniform –** *a* однородный; одинаковый

**weathering -** *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

**to be subjected to** подвергаться

## Rocks of Earth's Crust

**abyssal** - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

**adjacent** - *a* смежный, примыкающий

**ash** - *n* зола

**belt -** *n* пояс; лента; ремень

**body** - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

**common -** *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

**cool** - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

**dimension -** *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

**dust** - *n* пыль

**dyke –** *n* дайка

**extrusion** - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

**fine** - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь

**flow -** v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы

**fragmentary -** *a* обломочный, пластический

**glass** - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
**gold** - *n* золото
**inclined** - *a* наклонный
**mica** - *n* слюда
**permit** - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
**probably** - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
**shallow** - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
**sill** - *n* силь, пластовая интрузия
**stock** - *n* шток, небольшой батолит
**vein** - *n* жила, прожилок, пропласток
**band -** *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
**cleave** - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
**constituent -** *n* составная часть, компонент
**define** - *v* определять, давать определение
**distribute** - v **(among)** распределять (между); раздавать;
**disturb** - *v* нарушать; смещать
**excess -** *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
**flaky** - *a* слоистый; похожий на хлопья
**fluid** - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
**foliate -** *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
**marble -** *n* мрамор
**mention** - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
**plate** - *n* пластина; полоса *(металла)*
**pressure** - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
**relate** - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
**run (ran, run) -** *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
**schistose** - *a* сланцеватый; слоистый
**sheet** - *n* полоса
**slate** - *n* сланец; *syn* **shale**
**split (split) -** *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
**trace** - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
**at least** по крайней мере
**to give an opportunity** (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
**in such a way** таким образом

## Fossil Fuels

**accumulate** - v накапливать; скопляться
**ancient** - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
**associate** - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
**burn (burnt**) - v сжигать; гореть; жечь
**charcoal -** *n* древесный уголь
**convenient** - *a* удобный, подходящий
**crude** - *a* сырой, неочищенный
**dig (dug**) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
**divide** - v делить; (from) отделять; разделять
**evidence -** *n* доказательство; очевидность; признак(и)
**fossil** - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
**heat -** v нагревать; *n* теплота
**liquid -** *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

**manufacture** - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

**mudstone -** *n* аргиллит

**purpose** - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

**shale** - *n* глинистый сланец

**the former … the latter -** первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

**bench** - *n* слой, пачка *(пласта)*

**blend** - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

**combustion** - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

**continuity** - *n* непрерывность, неразрывность

**domestic** - *a* внутренний; отечественный

**estimate** - v оценивать; *n* оценка; смета

**fault** - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

**fold** - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

**inflame** - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

**intermediate** - *a* промежуточный; вспомогательный

**liable** - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

**luster -** *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий

**matter** - *n* вещество; материя

**moisture** - *n* влажность, сырость; влага

**parting** - *n* прослоек

**plane** - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

**rank** - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

**regular** - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

**similar** - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

**smelt** - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

**store** - v запасать, хранить на складе; вмещать

**strata** - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

**thickness** - *n* мощность *(пласта, жилы)*

**uniform** - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

**utilize** - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

**volatile** - *a* летучий, быстро испаряющийся

## Prospecting and Exploration

**aerial** - *a* воздушный; надземный

**certain** - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

**cost** - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

**crop** - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

**dredging** - *n* выемка грунта; драгирование

**drill** - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

**drive (drore**, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

**evidence** – *n* основание; признак(и); свидетельства

**expect -** v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

**explore** - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

**galena** - *n* галенит, свинцовый блеск

**indicate** - v указывать, показывать; служить признаком; означать

**lead** - *n* свинец

**look for** - v искать

**open up -** v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

**panning** - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

**processing** - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

**prove -** v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

**search** - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

**sign** - *n* знак, символ; признак, примета

**store** - v хранить, накапливать *(о запасах)*

**work -** v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

**adit** - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

**angle** - *n* угол

**approximate** - *a* приблизительный

**bit** - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

**borehole** - *n* скважина, буровая скважина

**crosscut** - *n* квершлаг

**dip** - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

**enable** - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

**exploit** - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

**measure** - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

**overburden -** *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

**pit** - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

**reliable** - *a* надежный; достоверный

**rig** - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

**sample** - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

**section** - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

**sequence** - *n* последовательность; порядок следования; ряд

**sink (sank, sunk**) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

**slope -** *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

**steep** - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

**strike** - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

**trench** - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

**to make use (of)** использовать, применять

**to take into consideration** принимать во внимание; *syn* **take into account**

## General Information on Mining

**access -** *n* доступ

**affect** - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

**barren** - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

**chute** - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

**compare** - v (with) сравнивать, проводить параллель

**contribute -** v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

**cross-section** - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

**develop** - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

**drift** - *n* штрек, горизонтальная выработка

**ensure** - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

**face** - *n* забой; лава

**floor** - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

**govern** - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

**inclination** - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

**incline** - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

**inclined** - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

**level** - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

**recover** - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

**remove** - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

**rib** - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

**roof** - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

**shaft** - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

**tabular -** *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

**waste** - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

**well** - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

**capital investment -** капитальные вложения

**gate road -** промежуточный штрек

**in bulk -** навалом, в виде крупных кусков

**metal-bearing -** содержащий металл

**production face/working -** очистной забой

**productive mining -** эксплуатационные работы

**in view of -** ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

**with a view to -** с целью

**advantage** - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

**caving** - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

**deliver** - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

**entry** - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

**giant** - *n* гидромонитор

**gravity** - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

**haul** - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

**longwall** - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

**lose (lost)** - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

**pillar** - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

**predominate** - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

**protect** - v охранять, защищать

**reach** - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

**satisfy** - v удовлетворятъ(ся)

**shield** - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

**room -** *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

**stowing** - *n* закладка *(выработанного пространства)*

**method of working** система разработки

**the sequence of working the seams -** последовательность отработки пластов

**goaf** — завал; обрушенное пространство

**double-ended drum bearer** — комбайн с двойным барабаном

**to identify** — опознавать

**appraisal** — оценка

**susceptibility** — чувствительность

**concealed** — скрытый, не выходящий на поверхность

**crusher** — дробилка

**concentration** — обогащение

**blending** — смешивание; составление шихты

**screen** — сортировать (обыден. уголь); просеивать

**froth floatation** — пенная флотация

**core drilling** — колонковое бурение

**to delineate** — обрисовывать, описывать

**lender** — заимодавец

**feasibility** — возможность

**in situ mining** — повторная разработка месторождения в массиве

**screening** — просеивание; грохочение

**processing** — обработка, разделение минералов

## Mining and Environment

**break** v **(broke**, **broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

*(руды .или породы);* расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

**drill -** *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение

**dump** -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

**dumper** опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

**environment -** *n* окружение; окружающая обстановка/среда

**explode -** v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive -** *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

**friable -** *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

**handle -** v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

**heap -** v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

**hydraulicklng -** *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

**load -** v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader -** *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader -** комбайн, комбинированная горная машина

**lorry** - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

**mention -** v упоминать

**overcasting -** *n* перелопачивание *(породы)*

**pump** - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

**reclamation -** *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

**sidecastiag** - *n* внешнее отвалообразование

**site** - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

**slice** - *n* слой; **slicing -** *n* выемка слоями, разработка слоями

**strip** - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper -** *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping -** *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

**unit -** *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

**washery** - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

**to attract smb's attention** привлекать чье-л. внимание

**backhoe** - *n* обратная лопата

**blast** - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

**block out** - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

**clearing** - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

**crash** - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

**earth-mover** - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

**excavator** - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket** ~ многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

**grab -** *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

**grabbing -** погрузка грейфером; захватывание

**hoist -** *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

**plough -** *n* струг

**power shovel** - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

**range -** *n* колебание в определенных пределах

**rate** - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

**remote** - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

**result** - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

**safety** - *n* безопасность; техника безопасности

**slope** - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(руды)*

**support** - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

## 1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения)

Самостоятельное изучение тем курса предполагает изучение тем практических занятий, представленных в разделе 1, 2, 3 данных методических указаний студентами заочной формы обучения в межсессионный период.

## 1.5 Подготовка к контрольной работе и 1.6 Написание контрольной работы

Для выполнения контрольной работы студентами кафедрой подготовлены *Методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов данной специальности.*

## II. Другие виды самостоятельной работы

## 2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (Подготовка к ролевой игре, к практико-ориентированным заданиям, опросу)

### *2.1.1 Подготовка к ролевой игре*

Студенты получают ролевые карточки. Им необходимо обдумать свою роль, стратегию своей роли, вопросы и ответы.

Role card 1

Sasha

The worst thing about your house is lack of privacy. You share your room with a younger sister. You think she goes through all your stuff. She asks you ambarrassing questions about boys, makes little nasty comments about you.

Your parents treat you like a baby. Your father is too much interested in your studying and homework. Your mother makes you do the work about the house alone. You are going to leave home as soon as you are old enough.

- Collect all the arguments to explain your attitude to your family.
- Listen to what the members of your family are saying.
- Don't interrupt them.
- Don't forget that both parents and children are to blame in conflict situations.
- Be polite and friendly

Role card 2

Mother

Your daughter has written a letter of complaint to the youth magazine. She is not satisfied with your attitude to her. You have read this letter. You are worried about the situation in the family and have decided to discuss the problems with a family therapist.

- Say why you have invited the therapist
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha

- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 3

Father

Your daughter is complaining that you treat her like a baby. You don't let her out at night during the week. You always ask her about the boys. You don't believe her when she says she doesn't have any homework to do. Your wife has invited a family therapist to discuss the problems of your family.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 4

Sister

Sasha is complaining that you don't help her with the work about the house. She also says that she can't keep anything secret in her room, you go through all her stuff. She is irritated by your behaviour. She is going to leave your home as soon as she is old enough.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 5

Family therapist

- Encourage all the members of the family to speak
- Take notes
- Ask questions
- Summarize what you have heard from all the members of the family
- Try to analyse the situation in a short report

### *2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию*

***Подготовьте устные высказывания по темам:***

1. From the history of the Ural State Mining University.
2. Faculties and specialities of the University.
3. The layout of the Ural State Mining University.
4. Student's academic work.

***Подготовьте письменные ответы на вопросы:***

1. Where do you study?
2. What faculty do you study at?
3. How many faculties are there at the Ural State Mining University?
4. What year are you in?
5. What is your future speciality?
6. What specialities are there at your faculty?
7. When did you enter the University?

8. When was the Sverdlovsk Mining Institute founded?
9. When was it reorganized into the University?
10. In how many buildings is the Ural State Mining University housed?
11. In what building is your faculty housed?
12. Who is the dean of your faculty?
13. What books do you take from the library?
14. Where do you live?
15. Where do you usually have your meals?
16. How long does the course of studies for a bachelor's degree last?
17. How long do the students study for a Diplomate Engineer's course and a Magister's degree?
18. What subjects do you study this term?
19. What lectures and practical classes do you like to attend?
20. Where do the students have their practical work?
21. When do the students present their graduation papers for approval?
22. What graduates can enter the post-graduate courses?
23. What kind of sport do yon like?
24. Where do you go in for sports?

### ***2.1.3 Подготовка к опросу***

***Ответьте на вопросы на иностранном языке:***

1. What specialities does the geological faculty train geologic engineers in?
2. What problems does Geology study?
3. What branches is Geology divided into?
4. What does Economic Geology deal with?
5. What does mineralogy investigate?
6. What does paleontology deal with?
7. What is the practical importance of Geology?
8. Where do graduates of the geological faculty of the Mining University work?
9. What is your future speciality?
10. What kind of work do geologists-prospectors conduct?
11. What do geologists explore during the early stages of geological exploration?
12. What work do geologists conduct while working in. the field?
13. When do geologists start exploratory work?
14. What is the purpose of the exploratory work?
15. How is exploratory work conducted?
16. What contribution do geologists make to the development of the National Economy of our country?
17. What does hydrogeology deal with?
18. Where are ground waters used?
19. Where is thermal (hot) water used?
20. What must hydrogeologists do with ground waters which complicate construction work or mineral extraction?

## 2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного (по 2 текста на тему)

### Text 1: A.M. Terpigorev (1873-1959)

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**to defend graduation paper (thesis) -** защищать дипломную работу (диссертацию)

**to pass an entrance examination -** сдать вступительный экзамен

**to get a higher education -** получить высшее образование

**to do one's best (one's utmost, all one can, everything in one's power) -** сделать все возможное, не жалеть сил

**to make contribution (to) -** вносить вклад в *(науку, технику* и т.д.)

**choose (chose**, **chosen** ) - v выбирать; **choice -** *n* выбор

**collect -** v собирать, коллекционировать

**dangerous -** *a* опасный

**deposit -** *n* месторождение, залежь; **bedded deposits -** пластовые месторождения

**describe -** v описывать, изображать; **description -** *n* описание; **descriptive -** *a* описательный

**facility -** *n (pl* **facilities)** средства; возможности; оборудование; устройства

**fire damp -** *n* рудничный газ, метан

**harm** - *n* вред; *v* вредить; **harmful -** *a* вредный

**relate -** v относиться, иметь отношение

**safety -** *n* безопасность; **mine safety** безопасность труда при горных работах; техника безопасности; **safety measures** меры безопасности; **safe -** *a* безопасный; надежный

**seam -** *n* пласт *(угля); syn* **bed, layer; flat seam** горизонтальный, пологопадающий пласт; **inclined seam** наклонный пласт; **steep seam** крутопадающий пласт; **thick seam** мощный пласт; **thin seam** тонкий пласт

**state -** *n* состояние; государство; штат; *a* государственный; v заявлять; констатировать; излагать

**success** - *v* успех; удача; **be a success** иметь успех; **successful** *a* успешный

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

Academician A.M. Terpigorev is a well-known mining engineer who successfully combined his practical experience with scientific research. He was bom in 1873 in Tambov. In 1892 he finished school with honours1 and decided to get a higher education. He chose the Mining Institute in St. Petersburg, passed all the entrance examinations successfully and became a student of the Mining Institute.

At the Institute he studied the full range of subjects2 relating to metallurgy, mining and mining mechanics.

At that time students' specialization was based on descriptive courses and elementary practical training. One of the best lecturers was A. P. Karpinsky. His lectures on historical geology were very popular.

During his practical training Terpigorev visited mines and saw that the miners' work was very difficult. While he was working in the Donbas he collected material for his graduation paper which he soon defended. The Mining of flat seams in the Donbas was carefully studied and described in it.

In 1897 Terpigorev graduated from the Institute with a first-class diploma of a mining engineer.

His first job as a mining engineer was at the Sulin mines where he worked for more than three years first as Assistant Manager and later as Manager.

From 1900 till 1922 Terpigorev worked at the Yekaterinoslav Mining Institute (now the Mining Institute in Dnepropetrovsk).

In 1922 he accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Academy and moved to Moscow. From 1930 he headed the chairs5 of Mining Transport and Mining of Bedded Deposits at the Moscow Mining Institute.

Academician Terpigorev took a particular interest in mine safety. As a result of his investigations a series of safety measures in gassy collieries was worked out. For some time he was working on the problem of fire damp, the most harmful and dangerous of all the gases in mines.

His two-volume work Coal Mining and Mine Transport Facilities is a full description of the state of mechanization and the economy of the Donbas. His other works are about mining transport facilities, mechanization of coal mining and mining machinery. He is one of the pioneers in scientific methods of coal gasification.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. After school Terpigorev decided to work in a mine.
2. Terpigorev collected material for his graduation paper which dealt with mining thick seams in the Donbas.
3. For more than three years Terpigorev worked at the Sulin mines.
4. In 1922 Terpigorev accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Institute.
5. He investigated the problems of mine safety.
6. He was one of the first to work on the problem of gasification of coal.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. When and where was Terpigorev born?
2. What institute did he graduate from?
3. What material did he collect while he was working in the Donbas?
4. Where did Terpigorev work from 1900 till 1922?
5. At what institute did Terpigorev head the chair of Mining Bedded Deposits?
6. What did Terpigorev take a particular interest in?
7. What works by Terpigorev do you know?
8. What problems do Terpigorev's works deal with?
9. What was the result of his investigations on mine safety?

***3. Переведите следующие сочетания слов.***

а) охрана труда в шахтах
б) подтверждать
в) добыча угля
г) эксплуатация месторождений
д) метан
е) принять предложение
ж) выполнить задачу, задание
з) горизонтальный пласт
и) собирать материал

1. поступить в институт
2. решать важные проблемы
3. выдающиеся исследователи
4. успешно провести эксперименты
5. выбрать профессию
6. описательный курс
7. происхождение железной руды
8. начальник шахты
9. мероприятия по охране труда

## Text 2: A.P. Karpinsky (1847-1936)

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**abroad -** *adv* за рубежом
**confirm** - v подтверждать; утверждать
**consider -** v считать, полагать, рассматривать
**contribute -** v вносить вклад; **contribution** вклад
**crust -** *n* земная кора
**detailed -** a подробный, детальный
**elect -** v избирать, выбирать *(голосованием);* назначать *(на должность)*
**embrace -** v охватывать; обнимать
**entire -** *a* весь, целый; полный; *syn* **whole**
**exist –** *v* существовать, быть, жить
**foreign -** *a* иностранный
**former -** *a* прежний

**investigate -** v исследовать; изучать

**prominent -** *a* знаменитый, выдающийся, известный; *syn* **remarkable, outstanding**

**regularity** - *n* закономерность

**significant -** *a* значительный; **significance -** *n* значение, важность; **exhaust the significance** исчерпывать значение

**society –** *n* общество

**staff** - *n* персонал; личный состав; штат

**various -** *a* различный, разный, разнообразный

**to advance the view -** высказывать мнение *(точку зрения)*

**to be interested in -** быть заинтересованным *(чём-л.),* интересоваться

**to take (an) interest in -** заинтересоваться *(чём-л.)*

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

V.A. Obruchev, I.M. Gubkin, A.Y. Fersman, V.I. Vernadsky and A. P. Karpinsky were the prominent Russian scientists who laid the foundation1 of the Russian school of geology and mining.

An entire epoch in the history of Russian geology is connected with Karpinsky's name. One of the greatest Russian geologists, he was a member and for some time President of the Academy of Sciences of the former USSR and a member of several Academies abroad. The Geological Society of London elected him a foreign member in 1901. His greatest contribution to geology was a new detailed geological map of the European part of Russia and the Urals.

For many years he headed the Russian Geological Committee the staff of which was made up of his pupils. He was one of those geologists who embraced the whole of geological science. He created the new stratigraphy of Russia. He studied the geological systems in various regions of the country and was the first to establish3 the regularity of the Earth's crust movement. His paleontological studies are of no less importance, especially those on palaeozoic ammonoids. He also took an interest in deposits of useful minerals and gave a classification of volcanic rocks. He advanced the view that petroleum deposits existed in Russian, which was confirmed later. He studied some ore and platinum deposits and may be justly considered5 the founder of practical geology of the Urals. He was the first Russian scientist who introduced microscope in the study of petrographic slides.

Karpinsky was a prominent scientist, an excellent man and citizen. He was one of the best lecturers at the Mining Institute in his time. He was also one of the greatest Russian scientists who later became the first elected President of the Academy of Sciences of the USSR. Students were attracted to him not only because he was a great scientist but also because of his charming personality and gentle manner.

Every geologist and every geology student knows very well Karpinsky's most significant work An Outline of the Physical and Geographical Conditions in European Russia in Past Geological Periods.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. Karpinsky was the first President of the Academy of Sciences.
2. He worked at the Mining Institute in St.Petersburg.
3. Karpinsky was a member of many Academies abroad.
4. Karpinsky made up a detailed map of the Asian part of our country.
5. He headed the Russian Geological Committee.
6. Karpinsky created a new branch of geology, namely stratigraphy.
7. He only tried to establish the regularity of the Earth's crust movement.
8. Karpinsky may be justly considered the founder of the practical geology of the Urals.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What society elected Karpinsky a foreign member and when?
2. Did he head the Russian Geological Committee or was he a member of that Committee?

3. Did Karpinsky investigate various regions of the Russian territory?
4. Which of his works are the most remarkable?
5. What can you say about Karpinsky's investigations in petrology?

***3. Переведите следующие сочетания слов.***

а) земная кора
б) составить подробную карту
в) замечательные работы
г) выдающийся ученый
д) залежи полезных ископаемых
е) научное общество
ж) избирать председателя (президента)
з) заложить основы школы
и) интересоваться геологией
к) высказать точку зрения
л) возглавлять комитет

## Text 3: Sedimentary Rocks

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**cause -** v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**
**clay** - *n* глина; глинозем
**consolidate -** v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**
**crust -** *n* кора; *геол.* земная кора
**decay -** v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение
**derive -** v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать
**destroy -** v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный
**dissolve** v растворять
**expose -** v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение
**external -** *a* внешний
**extrusive** - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*
**force -** v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие
**glacier -** *n* ледник, глетчер
**grain -** *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый
**gravel -** *n* гравий, крупный песок
**internal -** *a* внутренний
**intrusive -** *a* интрузивный, плутонический
**iron -** *n* железо
**layer -** *n* пласт
**like** - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно
**lime -** *n* известь; **limestone -** *n* известняк
**loose -** *a* несвязанный, свободный; рыхлый
**make up -** v составлять; *n* состав *(вещества)*
**particle** - *n* частица; включение
**peat -** *n* торф; торфяник
**represent -** v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный
**rock** – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода
**sand -** *n* песок
**sandstone -** *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник
**sediment -** *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

**schist -** *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый
**shale -** *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …, oil …** - горючий сланец
**siltstone -** *n* алеврит
**stratification -** *n* напластование, залегание
**stratify -** v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**
**substance -** *n* вещество, материал; сущность
**thickness -** *n* толщина, мощность
**value -** *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*
**vary** - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

The rocks of the Earth's crust are divided into three main groups: sedimentary rocks, which consist of fragments or particles of pre-existing rocks; igneous rocks which have solidified from magma and metamorphic rocks. Metamorphic rocks have been derived from either igneous or sedimentary rocks.

Sedimentary rocks represent one of the three major groups of rocks that make up the crust of the Earth. Most sedimentary rocks have originated by sedimentation. They are layered or stratified. Thus, stratification is the most important characteristic of sediments and sedimentary rocks. It is necessary to note that the processes which lead to the formation of sedimentary rocks are going on around us.

Sediments are formed at or very near the surface of the Earth by the action of heat, water (rivers, glaciers, seas and lakes) and organisms.

It should be noted that 95 per cent of the Earth's crust is made up of igneous rocks and that only 5 per cent is sedimentary. In contrast, the amount of sedimentary rocks on the Earth's surface is three times that of igneous rocks.

Strictly speaking, sedimentary rocks form a very small proportion by volume of the rocks of the Earth's crust. On the contrary, about three quarters of the Earth's surface is occupied by sedimentary rocks. It means that most of sedimentary rocks are formed by sediments, accumulations of solid material on the Earth's surface.

The thickness of the layers of sedimentary rocks can vary greatly from place to place. They can be formed by the mechanical action of water, wind, frost and organic decay. Such sediments as gravel, sand and clay can be transformed into conglomerates, sandstones and clay schists as a result of the accumulation of materials achieved by the destructive mechanical action of water and wind.

Mechanical sediments can be unconsolidated and consolidated. For example, gravel, sand and clay form the group of unconsolidated mechanical sediments, because they consist of loose uncemented particles (grains).

On the Earth's surface we also find consolidated rocks, which are very similar to the loose sediments whose particles are firmly cemented to one another by some substance. The usual cementing substances are sand, clay, calcium carbonate and others. Thus sandstones are consolidated rocks composed of round or angular sand grains, more or less firmly consolidated. Like sand, sandstones can be divided into fine-grained, medium-grained and coarse-grained.

On the other hand, chemical sediments are the result of deposits or accumulations of substances achieved by the destructive chemical action of water. The minerals such as rock salt, gypsum and others are formed through sedimentation of mineral substances that are dissolved in water.

Sediments can also be formed by the decay of the remains of organisms, by the accumulation of plant relics.1 They are called organic sediments. Limestones, peat, coal, mineral oil and other sediments may serve as an example of organic sediments.

The most principal kinds of sedimentary rocks are conglomerate, sandstone, siltstone, shale, limestone and dolomite. Many other kinds with large practical value include common salt, gypsum, phosphate, iron oxide and coal.

As is known, water, wind and organisms are called external forces, because their action depends on the energy which our planet receives from the Sun.

***1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. The rocks of the Earth's crust are divided into two main groups.
2. Igneous rocks are composed of particles of pre-existing rocks.
3. Sedimentary rocks are stratified.
4. Sediments are formed by the action of glaciers.
5. Igneous rocks make up 75 per cent of exposed rocks.
6. Conglomerates are formed as a result of the accumulation of materials caused by the destructive mechanical action of water.
7. Sandstones are consolidated rocks.
8. Clays are unconsolidated mechanical sediments.
9. Chemical sediments are formed by the destructive chemical action of water.
10. Peat and coal are the organic sediments which are of great practical value.
11. Clay schist was formed at the beginning of the sedimentation period and clay was formed later.

***2). Ответьте на вопросы:***

1. What main groups of rocks do you know?
2. Do sedimentary rocks consist of particles of pre-existing rocks?
3. How were igneous rocks formed?
4. Do you know how sedimentary rocks have originated?
5. What is the most important characteristic feature of sediments?
6. Do sedimentary rocks account for 10 per cent of the Earth's crust?
7. Is gravel consolidated mechanical sediment? And what about sand and clay?
8. What are cementing substances? Can calcium carbonate be used as a cementing substance?
9. Are there only fine-grained sandstones?
10. What can you say about chemical sediments?
11. Can you give an example of organic sediments? How are they formed?

***3) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | земная кора | а) sandstone |
| 2. | растворяться в воде | б) fine-grained sand |
| 3. | песчаник | в) the Earth's crust |
| 4. | уплотненные осадки | г) exposed rocks |
| 5. | изверженные породы | д) to dissolve in water |
| 6. | мелкозернистый песок | е) like gypsum |
| 7. | затвердевать | ж) consolidated sediments |
| 8. | подобно гипсу | з) igneous rocks |
| 9. | обнаженные породы | и) to solidify, to consolidate |

б) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | coarse-grained sand | а) разрушительная сила воды |
| 2. | siltstone and shale | б) пластовые месторождения |
| 3. | the destructive action of water | в) доледниковый период |

| | | |
|---|---|---|
| 4. | existing rocks | г) крупнозернистый (грубо- зернистый) песок |
| 5. | chemical decay | д) частицы вещества |
| 6. | sedimentary rocks | е) алеврит и сланец |
| 7. | stratified deposits | ж) существующие породы |
| 8. | pre-glacial period | з) осадочные породы |
| 9. | particles of a substance | и) химический распад |

## Text 4: Weathering of Rocks

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**contain -** v содержать *(в себе),* вмещать
**crack -** *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться
**contract -** v сжиматься; сокращаться
**dust -** *n* пыль
**expand -** v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**
**fissure -** *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель
**fracture -** *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*
**freeze -** *v* замерзать; замораживать; застывать
**gradual -** *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно
**hard -** *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом
**hole -** *n* отверстие; скважина; шпур; шурф
**influence -** *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*
**lateral -** *a* боковой
**occur -** *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания
**penetrate -** *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*
**phenomenon -** *n* явление; *pi* **phenomena**
**pressure -** *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы
**rate -** *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**
**refer -** v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*
**resist -** *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся
**size -** *n* размер; величина; класс *(угля)*
**solution –** *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий
**succession –** *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно
**undergo** (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*
**uniform –** *a* однородный; одинаковый
**weathering -** *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*
**to be subjected to** подвергаться

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

All rocks which are exposed on the Earth's surface (high mountain peaks, deserts) are decomposed to a certain degree. The process of rock disintegration by the direct influence of local atmospheric conditions on the Earth's surface is called weathering. This phenomenon is often referred to in geology because weathering is an active process. It takes place in the upper layers of the Earth's crust.

The main cause of physical weathering is the change in temperature that takes place with the succession of day and night. This phenomenon can best be observed in the deserts and high mountains where the changes in temperature are common.

During the day under the influence of heat, rocks expand whereas at night they begin to contract. As rocks are generally composed of different minerals, their expansion and contraction do not occur uniformly. As a result of this rocks crack. At the beginning these cracks or fissures are hardly noticeable but gradually they become wider and deeper until the whole surface of rock is finally transformed into gravel, sand or dust.

In the regions of a moderate or cold climate, where the temperature in winter goes down to below 0 (zero), the decomposition of rocks is greatly facilitated by the action of water. When water freezes it increases in volume and develops enormous lateral pressure. Under the action of water, rocks decompose to pieces of varied forms and sizes.

The decomposition of rocks under the direct influence of heat and cold is called physical weathering.

Rocks are subjected not only to physical decomposition but also to chemical weathering, i.e. to the action of chemical agents, such as water, carbon dioxide and oxygen. In a general way, chemical weathering is an acid attack on the rocks of the Earth's crust, in particular an attack on the most abundant minerals — quartz (sand) and aluminosilicates (clays). Only few minerals and rocks are resistant to the action of natural waters. The solvent action of water is stronger when it contains carbon dioxide. Water causes more complex and varied changes. With the participation of oxygen and carbon dioxide up to 90 per cent of rocks is transformed into soluble minerals, which are carried away by the waters.

Organisms and plants also take part in the disintegration of rocks. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks by making holes in them to live in. The action of plants can often be even more destructive. Their roots penetrate into the fissures of rocks and develop the lateral pressure which fractures and destroys rocks.

***1. Укажите, какие предложены соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. The process of sedimentation is called weathering.
2. The change in temperature causes physical weathering.
3. As a rule during the night rocks expand.
4. When freezing water decreases in volume and develops enormous lateral pressure.
5. The decomposition of rocks is due to the influence of heat and cold.
6. As a rule water contains dissolved mineral substances.
7. The solvent action of water is stronger when it does not contain carbon dioxide.
8. It should be noticed that the action of organisms and plants is destructive.
9. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What process is called weathering?
2. What process is called physical weathering?
3. Where can the phenomenon of physical weathering be best observed?
4. What process is called chemical weathering?
5. What substances can act as solvents?
6. Are all minerals and rocks resistant to the action of natural waters or only few minerals and rocks can resist the action of water?
7. How do organisms act on the destruction of rocks?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

1. the Earth's surface
2. to be composed of different minerals
3. the expansion of rocks
4. changes in temperature

5. under the influence of heat
6. weathering
7. destructive forces
8. a great number of fractures
9. to penetrate into fissures

а) под влиянием тепла
б) разрушительные силы
в) выветривание
г) большое количество трещин
д) состоять из различных минералов
е) расширение пород
ж) проникать в трещины
з) изменения температуры
и) поверхность земли

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. увеличиваться в объеме
2. развивать боковое давление
3. способствовать разрушению пород
4. подвергаться гниению
5. растворять вещества
6. сопротивляться (чему-л.)
7. некоторые органические вещества
8. ускорять процесс выветривания
9. куски породы различных размеров

а) to facilitate the decomposition of rocks
б) to increase in volume
в) to resist (smth)
г) rock pieces of varied (different) sizes
д) to accelerate the process of weathering
е) to be subjected to decay
ж) to dissolve substances
з) to develop lateral pressure
и) certain organic substances

## Text 5: Fossil Fuels

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**accumulate** - v накапливать; скопляться
**ancient** - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
**associate** - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
**burn (burnt**) - v сжигать; гореть; жечь
**charcoal -** *n* древесный уголь
**convenient** - *a* удобный, подходящий
**crude** - *a* сырой, неочищенный
**dig (dug**) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
**divide** - v делить; (from) отделять; разделять
**evidence -** *n* доказательство; очевидность; признак(и)
**fossil** - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
**heat -** v нагревать; *n* теплота
**liquid -** *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

**manufacture** - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**
**mudstone -** *n* аргиллит
**purpose** - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**
**shale** - *n* глинистый сланец
**the former … the latter -** первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

The chief sources of energy available to man today are oil, natural gas, coal, water power and atomic energy. Coal, gas and oil represent energy that has been concentrated by the decay of organic materials (plants and animals) accumulated in the geologic past. These fuels-are often referred to as fossil fuels.

The word fossil (derived from the Latin fodere "to dig up") originally referred to anything that was dug from the ground, particularly a mineral. Today the term fossil generally means any direct evidence of past life, for example, the footprints of ancient animals. Fossils are usually found in sedimentary rocks, although sometimes they may be found in igneous and metamorphic rocks as well. They are most abundant in mudstone, shale and limestone, but fossils are also found in sandstone, dolomite and conglomerate.

Most fuels are carbon-containing substances that are burned in air. In burning fuels give off heat which is used for different purposes.

Fuels may be solid, liquid and gaseous. Solid fuels may be divided into two main groups, natural and manufactured. The former category includes coal, wood, peat and other plant products. The latter category includes coke and charcoal obtained by heating coal in the absence of air.

Liquid fuels are derived almost from petroleum. In general, natural petroleum, or crude oil, as it is widely known, is the basis of practically all industrial fuels. Petroleum is a mixture of hundreds of different hydrocarbons — compounds composed of hydrogen and carbon — together with the small amount of other elements such as sulphur, oxygen and nitrogen. Petroleum is usually associated with water and natural gas. It is found in porous sedimentary rocks where the geological formation allowed the oil to collect from a wide area. Petroleum is one of the most efficient fuels and raw materials.

Of gaseous fuels the most important are those derived from natural gas, chiefly methane or petroleum. Using gaseous fuels makes it possible to obtain high thermal efficiency, ease of distribution and control. Gas is the most economical and convenient type of fuels. Today gas is widely utilized in the home and as a raw material for producing synthetics.

Scientists consider that a most promising source of natural resources may be the floor of the sea, a subject which now has become an important field of research.

Generally speaking, all types of fossil fuels described in the text are of great economic importance as they represent the sources of energy the man uses today.

***1. Укажете, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. Coal, water power and atomic energy are the only sources of energy available to man today.
2. Coal, wood and peat represent natural group of solid fuels.
3. As a rule fossil fuels are found in sedimentary rocks.
4. Crude oil is widely used for producing solid fuels.
5. Petroleum can be found in porous sedimentary rocks.
6. Gas is used to produce synthetic materials.
7. Not all types of fossil fuels burn.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What fuels are often referred to as fossil fuels?
2. What does the word fossil mean?
3. What rocks are most abundant hi fossil fuels?

4. What types of fossil fuels do you know?
5. Is coke a natural or manufactured solid fuel? And what can you say about coal and peat?
6. How are coke and charcoal produced?
7. What rocks is petroleum usually associated with?
8. What are the advantages of gaseous fuels?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов сочетаний слов.***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | fossil fuel | а) дерево и торф |
| 2. | raw material | б) небольшое количество аргиллита |
| 3. | crude oil | в) органическое топливо |
| 4. | the chief sources of energy | г) сланец и известняк |
| 5. | to refer to | д) сырье |
| 6. | any direct or indirect evidence of the deposit | е) материалы, содержащие углерод |
| 7. | shale and limestone | ж) главные источники энергии |
| 8. | carbon-containing materials | з) любые прямые или косвенные признаки месторождения |
| 9. | wood and peat | и) сырая (неочищенная) нефть |
| 10. | the small amount of mudstone | к) относиться к (чему-л.); ссылаться на (что-л.) |

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | древесный уголь и кокс | а) to collect data |
| 2. | жидкое топливо | б) charcoal and coke |
| 3. | накапливать | в) to be composed of limestones |
| 4. | собирать данные | г) liquid fuel |
| 5. | происходить от | д) to accumulate |
| 6. | получать хорошие результаты | е) to derive from |
| 7. | богатый горючими сланцами | ж) to obtain good results |
| 8. | состоять из известняков | з) abundant in oil shales |

## Text 6: Coal and Its Classification

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**bench** - *n* слой, пачка *(пласта)*
**blend** - v смешивать(ся); вклинивать(ся)
**combustion** - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание
**continuity** - *n* непрерывность, неразрывность
**domestic** - *a* внутренний; отечественный
**estimate** - v оценивать; *n* оценка; смета
**fault** - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов
**fold** - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва
**inflame** - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя
**intermediate** - *a* промежуточный; вспомогательный
**liable** - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*
**luster -** *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий
**matter** - *n* вещество; материя
**moisture** - *n* влажность, сырость; влага
**parting** - *n* прослоек
**plane** - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования
**rank** - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля
**regular** - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

**similar** - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**
**smelt** - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*
**store** - v запасать, хранить на складе; вмещать
**strata** - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**
**thickness** - *n* мощность *(пласта, жилы)*
**uniform** - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие
**utilize** - v использовать; *syn* **use, apply, employ**
**volatile** - *a* летучий, быстро испаряющийся

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

Coal is the product of vegetable matter that has been formed by the action of decay, weathering, the effects of pressure, temperature and time millions of years ago.

Although coal is not a true mineral, its formation processes are similar to those of sedimentary rocks.

Structurally coal beds are geological strata characterized by the same irregularities in thickness, uniformity and continuity as other strata of sedimentary origin. Coal beds may consist of essentially uniform continuous strata or like other sedimentary deposits may be made up of different bands or benches of varying thickness.

You can see a seam limited by two more or less parallel planes, a shape which is typical of sedimentary rocks. The benches may be separated by thin layers, of clay, shale, pyrite or other mineral matter, commonly called partings. Like other sedimentary rocks coal beds may be structurally disturbed by folding and faulting.

According to the amount of carbon coals are classified into: brown coals, bituminous coals and anthracite. Brown coals are in their turn subdivided into lignite and common brown coal. Although carbon is the most important element in coal, as many as 72 elements have been found in some coal deposits, including lithium, chromium, cobalt, copper, nickel, tungsten and others.

Lignite is intermediate in properties between peat and bituminous coal, containing when dry about 60 to 75 per cent of carbon and a variable proportion of ash. Lignite is a low-rank brown-to-black coal containing 30 to 40 per cent of moisture. Developing heat it gives from 2,500 to 4,500 calories. It is easily inflammable but burns with a smoky flame. Lignite is liable to spontaneous combustion. It has been estimated that about 50 per cent of the world's total coal reserves are lignitic.

Brown coal is harder than lignite, containing from 60 to 65 per cent of carbon and developing greater heat than lignite (4,000-7,000 calories). It is very combustible and gives a brown powder. Bituminous coal is the most abundant variety, varying from medium to high rank. It is a soft, black, usually banded coal. It gives a black powder and contains 75 to 90 per cent of carbon. It weathers only slightly and may be kept in open piles with little danger of spontaneous combustion if properly stored. Medium-to-low volatile bituminous coals may be of coking quality. Coal is used intensively in blast furnaces for smelting iron ore. There are non-coking varieties of coal.

As for the thickness, the beds of this kind of coal are not very thick (1-1.5 meters). The great quantities of bituminous coal are found in the Russian Federation.

Anthracite or "hard" coal has a brilliant lustre containing more than 90 per cent of carbon and low percentage of volatile matter. It is used primarily as a domestic fuel, although it can sometimes be blended with bituminous grades of coal to produce a mixture with improved coking qualities. The largest beds of anthracite are found in Russia, the USA and Great Britain.

Coal is still of great importance for the development of modern industry. It may be used for domestic and industrial purposes. Being the main source of coke, coal is widely used in the iron and steel industry. Lignite, for example either in the raw state or in briquetted form, is a source of industrial carbon and industrial gases.

There is a strong tendency now for increased research into new technologies to utilize coal. No doubt, coal will be used as a raw material for the chemical industry and petrochemical processes. All

these processes involve coal conversion which include gasification designed to produce synthetic gas from coal as the basis for hydrogen manufacture, liquefaction (разжижение) for making liquid fuel from coal and other processes.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. Anthracite coals may be divided into lignite and common brown coal.
2. Coals are ranked according to the percentage of carbon they contain.
3. Peat, with the least amount of carbon is the lowest rank, then comes lignite or brown coal.
4. Brown coal is hard and it is not liable to spontaneous combustion.
5. Bituminous coal weathers rapidly and one cannot keep it in open piles.
6. Being intensively used in the iron and steel industry bituminous coal varies from medium to high rank.
7. Anthracite or hard coal, the highest in percentage of carbon, can be blended with bituminous grades of coal.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What is the classification of coal based on?
2. Is carbon the only element in coal? (Prove it.)
3. Is lignite intermediate in properties between peat and bituminous coal?
4. What heat value does lignite develop when burnt?
5. What coals are liable to spontaneous combustion?
6. What is the difference between lignite and brown coal?
7. Is bituminous coal high- or low-volatile?
8. Does anthracite contain 90 per cent of carbon?
9. Where are the largest deposits of anthracite found? And what can you say about bituminous coal?
10. What do you know about the utilization of coal?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | spontaneous combustion | а) легковоспламеняющийся газ |
| 2. | moisture and ash content | б) высокосортный уголь |
| 3. | the most abundant variety | в) плавить железную руду |
| 4. | in its turn | г) самовозгорание |
| 5. | the amount of volatile matter | д) содержание влаги и золы |
| 6. | easily inflammable gas | е) дымное пламя |
| 7. | brilliant lustre | ж) наиболее широко распространенные угли |
| 8. | to smelt iron ore | з) яркий блеск |
| 9. | high-rank coal | и) в свою очередь |
| 10. | a smoky flame | к) количество летучих веществ |

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов н сочетаний слов:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | тип угля | а) heat value |
| 2. | некоксующийся уголь | б) amount of carbon |
| 3. | доменная печь | в) coal rank |
| 4. | содержание углерода | г) to store coal |
| 5. | смешиваться с другими углями | д) to weather rapidly |
| 6. | улучшенного качества | е) non-coking coal |
| 7. | складировать уголь | ж) blast furnace |
| 8. | теплотворная способность | з) of improved quality |
| 9. | быстро выветриваться | и) to blend with other coals |

## Text 7: General Information on Mining

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**access -** *n* доступ

**affect** - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

**barren** - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

**chute** - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

**compare** - v (with) сравнивать, проводить параллель

**contribute -** v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

**cross-section** - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

**develop** - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

**drift** - *n* штрек, горизонтальная выработка

**ensure** - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

**face** - *n* забой; лава

**floor** - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

**govern** - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

**inclination** - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

**incline** - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

**inclined** - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

**level** - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

**recover** - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

**remove** - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

**rib** - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

**roof** - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

**shaft** - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

**tabular -** *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

**waste** - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

**well** - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

**capital investment -** капитальные вложения

**gate road -** промежуточный штрек

**in bulk -** навалом, в виде крупных кусков

**metal-bearing -** содержащий металл

**production face/working -** очистной забой

**productive mining -** эксплуатационные работы

**in view of -** ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

**with a view to -** с целью

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

As has been said, mining refers to actual ore extraction. Broadly speaking, mining is the industrial process of removing a mineral-bearing substance from the place of its natural occurrence in the Earth's crust. The term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells; metal, non-metallic minerals, coal, peat, oil shale and other hydrocarbons from the earth. In other words, the work done to extract mineral, or to prepare for its extraction is called mining.

The tendency in mining has been towards the increased use of mining machinery so that modern mines are characterized by tremendous capacities. This has contributed to: 1) improving working conditions and raising labour productivity; 2) the exploitation of lower-grade metal-bearing substances and 3) the building of mines of great dimensions.

Mining can be done either as a surface operation (quarries, opencasts or open pits) or by an underground method. The mode of occurrence of the sought-for metallic substance governs to a large degree the type of mining that is practised. The problem of depth also affects the mining method. If the rock containing the metallic substance is at a shallow site and is massive, it may be economically excavated by a pit or quarry-like opening on the surface. If the metal-bearing mass is tabular, as a bed or vein, and goes to a great distance beneath the surface, then it will be worked by some method of underground mining.

Working or exploiting the deposit means the extraction of mineral. With this point in view a number of underground workings is driven in barren (waste) rock and in mineral. Mine workings vary in shape, dimensions, location and function.

Depending on their function mine workings are described as exploratory, if they are driven with a view to finding or proving mineral, and as productive if they are used for the immediate extraction of useful mineral. Productive mining can be divided into capital investment work, development work, and face or production work. Investment work aims at ensuring access to the deposit from the surface. Development work prepares for the face work, and mineral is extracted (or produced) in bulk.

The rock surfaces at the sides of workings are called the sides, or hi coal, the ribs. The surface above the workings is the roof in coal mining while in metal mining it is called the back. The surface below is called the floor.

The factors such as function, direct access to the surface, driving in mineral or in barren rock can be used for classifying mine workings:

I. Underground workings:

a) Long or deep by comparison with their cross-section may be: 1) vertical (shaft, blind pit); 2) sloping (slopes, sloping drifts, inclines); 3) horizontal (drifts, levels, drives, gate roads, adits, crosscuts).

b) Large openings having cross dimensions comparable with their length.

c) Production faces, whose dimensions depend on the thick ness of the deposit being worked, and on the method of mining it.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. As a rule, the term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells as well as coal, iron ores and other useful minerals from the earth.
2. The increased use of mining machinery has greatly contributed to raising labour productivity and improving working conditions.
3. It is quite obvious that the problem of depth is not always taken into consideration in choosing the mining method.
4. Productive workings are usually used for the immediate extraction of useful mineral.
5. Underground workings are driven in barren rock or in mineral.
6. A shaft is a vertical underground working which is long and deep in comparison with its cross-section.
7. The surface above the mine working is usually called the floor.
8. The rock surfaces at the sides of mine workings arc called the ribs.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What is mining?
2. What has contributed to the better working conditions of the miners?
3. What factors influence the choice of the mining method?
4. In what case is useful mineral worked by open pits?
5. Are exploratory workings driven with a view to finding and proving mineral or are they driven for immediate extraction of mineral?
6. What is the difference between development and production work?
7. What main factors are used for classifying mine workings?
8. What do the dimensions of production faces depend on?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:***

1. direct access to the surface
2. open-cast mining
3. tabular (or bedded) deposits
4. oil well
5. underground workings
6. cross-section of a working
7. production face
8. the roof of the mine working
9. to drive mine workings in barren rock
10. to affect the mining method

а) нефтяная скважина
б) проходить горные выработки по пустой породе
в) влиять на метод разработки
г) прямой доступ к поверхности
д) пластовые месторождения
е) открытая разработка
ж) поперечное сечение выработки
з) подземные выработки
и) очистной забой
к) кровля горной выработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов сочетаний слов:

1. способствовать чему-л.
2. размер ствола
3. извлекать, добывать (уголь)
4. штреки и квершлаги
5. пустая порода
6. вообще говоря
7. удалять, перемещать (крепь, вскрышу и др.)
8. с целью ...
9. подготовительные работы
10. мощность пласта

а) thickness of a seam
б) shaft dimension
в) with a view to
г) to contribute to smth.
д) development work
е) to remove (timber, overburden, etc.)
ж) drifts (gate roads) and crosscuts
з) generally speaking

и) to recover (coal)
к) waste (barren) rock

## Text 8: Methods of Working Bedded Deposits Underground

***Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:***

**advantage** - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

**caving** - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

**deliver** - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

**entry** - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

**giant** - *n* гидромонитор

**gravity** - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

**haul** - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

**longwall** - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

**lose (lost)** - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

**pillar** - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

**predominate** - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

**protect** - v охранять, защищать

**reach** - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

**satisfy** - v удовлетворятъ(ся)

**shield** - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

**room -** *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

**stowing** - *n* закладка *(выработанного пространства)*

**method of working** система разработки

**the sequence of working the seams -** последовательность отработки пластов

***Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:***

The method of working (or method of mining) includes a definite sequence and organization of development work of a deposit, its openings and its face work in certain geological conditions. It depends on the mining plan and machines and develops with their improvements. A rational method of working should satisfy the following requirements in any particular conditions: 1) safety of the man; 2) maximum output of mineral; 3) minimum development work (per 1,000 tons output); 4) minimum production cost and 5) minimum losses of mineral.

Notwithstanding the considerable number of mining methods in existence, they can be reduced to the following main types: 1. Methods of working with long faces (continuous mining); 2. Methods of working with short faces (room-and-pillar). The characteristic feature of the continuous mining is the absence of any development openings made in advance of production faces. The main advantage of long continuous faces is that they yield more mineral. Besides, they allow the maximum use of combines (shearers), cutting machines, powered supports and conveyers. The longwall method permits an almost 100 per cent recovery of mineral instead of 50 to 80 per cent obtainable in room-and-pillar methods.

The basic principle of room-and-pillar method is that rooms from 4 to 12 meters wide (usually 6-7) are driven from the entries, each room is separated from each other by a rib pillar. Rib pillars are recovered or robbed after the rooms are excavated. The main disadvantage of shortwall work is a considerable loss of mineral and the difficulty of ventilation. In working bedded deposits methods of mining mentioned above may be used either with stowing or with caving.

In Russia, Germany (the Ruhr coal-field), France and Belgium nearly all the faces are now long ones. In Britain longwall faces predominate.

The USA, Canada, Australia and to some extent India are developing shortwall faces and creating the machines for them. In these countries shortwall faces are widely used.

In Russia the thick seams are taken out to full thickness up to 4.5 m thick if they are steep, and up to 3.5 m thick if they are gently sloping or inclined. In the Kuznetsk coal-field long faces are worked to the dip with ashield protection, using a method proposed by N.Chinakal. In shield mining coal is delivered to the lower working by gravity so that additional haulage is not required.

It should also be noted that in Russia hydraulic mining is widely used as it is one of the most economic and advantageous methods of coal getting. New hydraulic mines are coming into use in a number of coal-fields. Hydraulic mining is developing in other countries as well.

The aim of hydraulic mining is to remove coal by the monitors (or giants) which win coal and transport it hydraulically from the place of work right to the surface. It is quite obvious that the choice of the method of mining will primarily depend on the depth and the shape and the general type of the deposit.

***1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.***

1. A definite sequence and organization of development work is called mining.
2. Mining methods in existence can be reduced to the two main types.
3. The depth and the shape of the deposit influence the choice of the method of working.
4. As is known, in Belgium all the faces are short now, in Great Britain they amount to 84 per cent.
5. In Australian collieries shortwall faces are widely used.
6. The room-and-pillar method is characterized by the absence of any development openings.
7. High-capacity monitors win coal and transport it hydraulically right to the surface.

***2. Ответьте на следующие вопросы:***

1. What factors does mining depend on?
2. What is mining?
3. What are the most important factors which affect the choice of the method of working?
4. Do short faces or long faces predominate in Russia? What can you say about the Ruhr coal-field?
5. Is Canada developing shortwall faces or longwall faces?
6. What are the main disadvantages of shortwall faces?
7. What are the two main methods of working?
8. What is the main advantage of long continuous faces?
9. What methods of mining long faces do you know?
10. What method of mining is characterized by the absence of development openings?

***3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | development face | а) сплошная система разработки |
| 2. | great losses | б) выемка целиков |
| 3. | shield method of mining | в) подготовительный забой |
| 4. | continuous mining | г) большие потери |
| 5. | longwall advancing to the dip | д) удовлетворять требованиям |
| 6. | the room-and-pillar method of mining | е) зависеть от геологических условий |
| 7. | to open up a deposit | ж) выемка лавами прямым ходом по падению |

8. pillar mining з) щитовая система разработки
9. to satisfy the requirements и) вскрывать месторождение
10. to depend upon the geological conditions к) камерно-столбовая система разработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. включать (в себя) а) safety
2. выемка лавами обратным ходом б) annual output
3. достигать 50% в) to involve
4. превышать 60% г) to propose a new method of mining
5. безопасность д) long wall retreating
6. годовая добыча е) in connection with difficulties
7. основной недостаток системы разработки ж) to exceed 60 per cent
8. под-этаж з) notwithstanding (in spite of)
9. крутопадающий пласт и) to reach 50 per cent
10. щитовая система разработки к) the main disadvantage of the method of mining
11. предложить новый способ разработки л) sublevel
12. в связи с трудностями м) the shield method of mining
13. несмотря на н) open up a deposit
14. вскрывать месторождение о) steep seam

## 2.3 Подготовка доклада

**Подготовьте доклад по одной из предложенных тем.**

1. Inigo Jones (1573-1652)
2. Christopher Wren (1632-1723)
3. Geoffrey Chaucer (1340-1400)
4. Samuel Johnson (1709-1784)
5. Alfred Tennyson (1809-1892)
6. Thomas Hardy (1840-1928)
7. John Milton (1608-1674)
8. William Makepeace Thackeray (1811-1863)
9. Henry Wadsworth Longfellow (1807 – 1882)
10. Joshua Reynolds (1723-1792)
11. Thomas More (1478 – 1535)
12. J.M.W. Turner (1775-1851)
13. Thomas Gainsborough (1727 – 1788)
14. Henry Moor (1898-1986)
15. Henry Irving (1838-1905)
16. William Gilbert (1836-1911)
17. Arthur Sullivan (1842-1900)
18. James Watt (1736 - 1819)
19. Thomas Telford (1757 - 1834)
20. Isambard Kingdom Brunel (1806 – 1859)
21. George Stephenson (1781 – 1848)
22. David Livingstone (1813 – 1873)
23. Tony Blair (1953)
24. Winston Churchill (1874 - 1965)
25. Margaret Hilda Thatcher (1925)
26. Sir Isaac Newton (1642 – 1727
27. Alexander Graham Bell (1847 - 1922)

28. Robert Burns (1759 – 1796)

**Правила предоставления информации в докладе**

| Размер | **А4** |
|---|---|
| Шрифт | Текстовый редактор Microsoft Word,<br>шрифт Times New Roman 12 |
| Поля | слева – 2 см., сверху и справа – 1 см., снизу – 1 |
| Абзацный отступ | 1 см устанавливается автоматически |
| Стиль | Примеры выделяются курсивом |
| Интервал | межстрочный интервал – 1 |
| Объем | 1 -2 страницы (до 7 минут устного выступления) |
| Шапка доклада | ***Иванова Мария Ивановна***<br>Екатеринбург, Россия<br>ФГБОУ ВПО УГГУ, МД-13<br>НАЗВАНИЕ ДОКЛАДА |
| | Список использованной литературы |

Краткое содержание статьи должно быть представлено на 7-10 слайдах, выполненных в PowerPoint.

## 2.4 Подготовка к тесту

Тест направлен на проверку страноведческих знаний и знаний межкультурной коммуникации. Для этого студентам необходимо повторить материал, представленный в *Социально-культурной сфере общения* по теме «Страны изучаемого языка» (Я и мир). Для успешного написания теста изучите следующий материал:

### THE GEOGRAPHICAL POSITION OF GREAT BRITAIN

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland covers an area of some 244 thousand square miles. It is situated on the British Isles. The British Isles are separated from Europe by the Strait of Dover and the English Channel. The British Isles are washed by the North Sea in the east and the Atlantic Ocean in the west.

England is in the southern and central part of Great Britain. Scotland is in the north of the island. Wales is in the west. Northern Ireland is situated in the north-eastern part of Ireland.

England is the richest, the most fertile and most populated part in the country. There are mountains in the north and in the west of England, but all the rest of the territory is a vast plain. In the northwestern part of England there are many beautiful lakes. This part of the country is called Lake District.

Scotland is a land of mountains. The Highlands of Scotland are among the oldest mountains in the world. The highest mountain of Great Britain is in Scotland too. The chain of mountains in Scotland is called the Grampians. Its highest peak is Ben Nevis. It is the highest peak not only in Scotland but in the whole Great Britain as well. In England there is the Pennine Chain. In Wales there are the Cumbrian Mountains.

There are no great forests on the British Isles today. Historically, the most famous forest is Sherwood Forest in the east of England, to the north of London. It was the home of Robin Hood, the famous hero of a number of legends.

The British Isles have many rivers but they are not very long. The longest of the English rivers is the Severn. It flows into the Irish Sea. The most important river of Scotland is the Clyde. Glasgow stands on it. Many of the English and Scottish rivers are joined by canals, so that it is possible to travel by water from one end of Great Britain to the other.

The Thames is over 200 miles long. It flows through the rich agricultural and industrial districts of the country. London, the capital of Great Britain, stands on it. The Thames has a wide mouth, that's

why the big ocean liners can go up to the London port. Geographical position of Great Britain is rather good as the country lies on the crossways of the see routes from Europe to other parts of the world. The sea connects Britain with most European countries such as Belgium, Holland, Denmark, Norway and some other countries. The main sea route from Europe to America also passes through the English Channel.

United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland occupies the territory of the British Isles. They lie to the north-west of Europe.

Once upon a time the British Isles were an integral part of the mainland. As a result of sinking of the land surface they became segregated. Great Britain is separated from the continent by the English Channel. The country is washed by the waters of the Atlantic Ocean. Great Britain is separated from Belgium and Holland by the North Sea, and from Ireland — by the Irish Sea.

There are several islands along the coasts. The total area of the British Isles is 325 000 km2. The main islands are Great Britain and Ireland.

The surface of the country is much varied. Great Britain is the country of valleys and plains.

The insular geographical position of Great Britain promoted the development of shipbuilding, different trading contacts with other countries. It has also allowed the country to stay independent for quite a long period of time.

## THE BRITISH PARLIAMENT

The British Parliament is the oldest in the world. It originated in the 12th century as Witenagemot, the body of wise councillors whom the King needed to consult pursuing his policy. The British Parliament consists of the House of Lords and the House of Commons and the Queen as its head.

The House of Commons plays the major role in law-making. It consists of Members of Parliament (called MPs for short). Each of them represents an area in England, Scotland, Wales and Ireland.

MPs are elected either at a general election or at a by-election following the death or retirement. Parliamentary elections are held every 5 years and it is the Prime Minister who decides on the exact day of the election. The minimum voting age is 18. And the voting is taken by secret ballot.

The election campaign lasts about 3 weeks, The British parliamentary system depends on political parties.

The party which wins the majority of seats forms the government and its leader usually becomes Prime Minister. The Prime Minister chooses about 20 MPs from his party to become the cabinet of ministers. Each minister is responsible for a particular area in the government. The second largest party becomes the official opposition with its own leader and «shadow cabinet». The leader of the opposition is a recognized post in the House of Commons.

The parliament and the monarch have different roles in the government and they only meet together on symbolic occasions, such as coronation of a new monarch or the opening of the parliament. In reality, the House of Commons is the one of three which has true power.

The House of Commons is made up of six hundred and fifty elected members, it is presided over by the speaker, a member acceptable to the whole house. MPs sit on two sides of the hall, one side for the governing party and the other for the opposition. The first 2 rows of seats are occupied by the leading members of both parties (called «front benches»). The back benches belong to the rank-and-life MPs.

Each session of the House of Commons lasts for 160-175 days. Parliament has intervals during his work. MPs are paid for their parliamentary work and have to attend the sittings.

As mention above, the House of Commons plays the major role in law making. The procedure is the following: a proposed law («a bill») has to go through three stages in order to become an act of Parliament; these are called «readings».

The first reading is a formality and is simply the publication of the proposal. The second reading involves debate on the principles of the bill; it is examination by parliamentary committee.

And the third reading is a report stage, when the work of the committee is reported on to the house. This is usually the most important stage in the process.

When the bill passes through the House of Commons, it is sent to the House of Lords for discussion, when the Lords agree it, the bill is taken to the Queen for royal assent, when the Queen sings the bill, it becomes act of the Parliament and the Law of the Land.

The House of Lords has more than 1000 members, although only about 250 take an active part in the work in the house. Members of this Upper House are not elected; they sit there because of their rank. The chairman of the House of Lords is the Lord Chancellor. And he sits on a special seat, called «Woolsack».

The members of the House of Lords debate the bill after it has been passed by the House of Commons. Some changes may be recommended and the agreement between the two houses is reached by negotiations.

## BRITISH TRADITIONS AND CUSTOMS

British nation is considered to be the most conservative in Europe. It is not a secret that every nation and every country has its own customs and traditions. In Great Britain people attach greater importance to traditions and customs than in other European countries. Englishmen are proud of their traditions and carefully keep them up. The best examples are their queen, money system, their weights and measures.

There are many customs and some of them are very old. There is, for example, the Marble Championship, where the British Champion is crowned; he wins a silver cup known among folk dancers as Morris Dancing. Morris Dancing is an event where people, worn in beautiful clothes with ribbons and bells, dance with handkerchiefs or big sticks in their hands, while traditional music-sounds.

Another example is the Boat Race, which takes place on the river Thames, often on Easter Sunday. A boat with a team from Oxford University and one with a team from Cambridge University hold a race.

British people think that the Grand National horse race is the most exciting horse race in the world. It takes place near Liverpool every year. Sometimes it happens the same day as the Boat Race takes place, sometimes a week later. Amateur riders as well as professional jockeys can participate. It is a very famous event.

There are many celebrations in May, especially in the countryside.

Halloween is a day on which many children dress up in unusual costumes. In fact, this holiday has a Celtic origin. The day was originally called All Halloween's Eve, because it happens on October 31, the eve of all Saint's Day. The name was later shortened to Halloween. The Celts celebrated the coming of New Year on that day.

Another tradition is the holiday called Bonfire Night. On November 5, 1605, a man called Guy Fawkes planned to blow up the Houses of Parliament where the king James 1st was to open Parliament on that day. But Guy Fawkes was unable to realize his plan and was caught and later, hanged. The British still remember that Guy Fawkes' Night. It is another name for this holiday. This day one can see children with figures, made of sacks and straw and dressed in old clothes. On November 5th, children put their figures on the bonfire, burn them, and light their fireworks.

In the end of the year, there is the most famous New Year celebration. In London, many people go to Trafalgar Square on New Year's Eve. There is singing and dancing at 12 o'clock on December 31st.

A popular Scottish event is the Edinburgh Festival of music and drama, which takes place every year. A truly Welsh event is the Eisteddfod, a national festival of traditional poetry and music, with a competition for the best new poem in Welsh. If we look at English weights and measures, we can be convinced that the British are very conservative people. They do not use the internationally accepted measurements. They have conserved their old measures. There are nine essential measures. For general use, the smallest weight is one ounce, then 16 ounce is equal to a pound. Fourteen pounds is one stone.

The English always give people's weight in pounds and stones. Liquids they measure in pints, quarts and gallons. There are two pints in a quart and four quarts or eight pints are in one gallon. For length, they have inches: foot, yards and miles.

## LONDON

As well as being the capital of England, London is the capital of the United Kingdom. London was founded by the Romans in 43 A.D. and was called Londinium. In 61 A.D. the town was burnt down and when it was rebuilt by the Romans it was surrounded by a wall. That area within the wall is now called the City of London. It is London's commercial and business centre. It contains the Bank of England, the Stock Exchange and the head offices of numerous companies and corporations. Here is situated the Tower of London.

The Tower was built by William the Conqueror who conquered England in 1066. He was crowned at Westminster Abbey. Now most of the Government buildings are located there.

During the Tudor period (16th century) London became an important economic and financial centre. The Londoners of the Elizabethan period built the first theatres. Nowadays the theatre land is stretched around Piccadilly Circus. Not far from it one can see the British Museum and the «Covent Garden» Opera House.

During the Victorian period (19th century) London was one of the most important centers of the Industrial Revolution and the centre of the British Empire. Today London is a great political centre, a great commercial centre, a paradise for theatre-goers and tourists, but it is also a very quiet place with its parks and its ancient buildings, museums and libraries.

## LONDON

London is the capital of Great Britain, its political, economic and commercial center. It`s one of the largest cities in the world and the largest city in Europe. Its population is about 9 million. London is one of the oldest and most interesting cities in the world. Traditionally it`s divided into several parts: the City, Westminster, the West End and the East End.

They are very different from each other and seem to belong to different towns and epochs. The heart of London is the City, its financial and business center. Numerous banks, offices and firms are situated there, including the Bank of England, the Stock Exchange and the Old Bailey. Few people live here, but over a million people come to the City to work. There are some famous ancient buildings within the City. Perhaps the most striking of them in St. Paul`s Cathedral, the greatest of British churches. St. Paul`s Cathedral has always dominated the center of London. It stands on the site of former Saxon and Norman churches. They latter were destroyed in the Great Fire and the present building, completed in 1710, is the work of the eminent architect Sir Christopher Wren. It is an architectural masterpiece.

Londoners have a particular affection for St. Paul`s, which is the largest Protestant Church in England. Its high dome, containing the remarkable Whispering Gallery, is a prominent landmark towering above the multistoried buildings which line the river-bank.

The Tower of London was one of the first and most impressive castles built after the Norman invasion of England in 1066. Since the times of William I various kings have built and extended the Tower of London and used it for many purposes. The Tower has been used as a royal palace, an observatory, an arsenal, a state prison, and many famous and infamous people have been executed within its walls. It is now a museum. For many visitors the principal attraction is the Crown Jewels, the finest precious stones of the nation. A fine collection of armour is exhibited in the keep. The security of the Tower is ensured by a military garnison and by the Yeoman Warders or Beefeaters, who still wear their picturesque Tudor uniform.

Westminster is the historic, the governmental part of London. Westminster Abbey is a national shrine where the kings and queens are crowned and famous people are buried. Founded by Edward the Confessor in 1050, the Abbey was a monastery for along time. The present building dates largely from the times of Henry 3, who began to rebuild the church, a task which lasted nearly 300 years. The West towers were added in the eighteenth century. Since William I almost every English monarch has been

crowned in this great church, which contains the tombs and memorials of many of Britain`s most eminent citizens: Newton, Darwin, Chaucer, Dickens, Tennyson, Kipling and etc. One of the greatest treasures of the Abbey is the oaken Coronation Chair made in 1300. The Abbey is also known for its Poet`s Corner. Graves and memorials to many English poets and writers are clustered round about.

Across the road from Westminster Abbey is Westminster Palace, or the Houses of Parliament, the seat of the British Parliament. The Parliament of Great Britain and Northern Ireland consists of the House of Lords and the House of Commons. The House of Lords consists of just over 1,000 members of the different grades of nobility — dukes, marquises, earls, viscounts and barons.

The House of Commons consists of 650 members. They are elected by secret ballot by men and women aged 18 and over. Every Parliament is divided into Sessions. Each of these may last a year and usually begins early in November. The Clock Tower, which contains the hour-bell called Big Ben, is known over the world. The bell is named after Sir Benjamin Hall.

Buckingham Palace is the official residence of the Queen. The West End is the richest and most beautiful part of London. It is the symbol of wealth and luxury. The best hotels, shops, restaurants, clubs, and theatres are situated there. There are splendid houses and lovely gardens belonging to wealthy people.

Trafalgar Square is the geographical center of London. It was named in memory of Admiral Nelson`s victory in the battle of Trafalgar in 1805. The tall Nelson`s Column stands in the middle of the square. On the north side of Trafalgar Square is the National Gallery and the National Portrait Gallery.

Not far away is the British Museum — the biggest museum in London. It contains a priceless collection of ancient manuscripts, coins, sculptures, est., and is famous for its library.

The East End is the poorest district of London. There are a lot of factories, workshops and docks here. The streets are narrow, the buildings are unimpressive. The East End is densely populated by working class families.

## PLACES OF INTERESTS IN GREAT BRITAIN

Britain is rich in its historic places which link the present with the past. The oldest part of London is Lud Hill, where the city is originated. About a mile west of it there is Westminster Palace, where the king lived and the Parliament met, and there is also Westminster Abby, the coronation church. Liverpool, the «city of ships», is England’s second greatest port, ranking after London. The most interesting sight in the Liverpool is the docks. They occupy a river frontage of seven miles.

The University of Liverpool, established in 1903, is noted for its School of Tropical Medicine. And in the music world Liverpool is a well-known name, for it’s the home town of «The Beatles».

Stratford-on-Avon lies 93 miles north-west of London. Shakespeare was born here in 1564, and here he died in 1616.

Cambridge and Oxford Universities are famous centers of learning. Stonehenge is a prehistoric monument, presumably built by Druids, members of an order of priests in ancient Britain. Tintagel Castle is King Arthur’s reputed birthplace. Canterbury Cathedral is the seat of the Archbishop of Canterbury, head of the Church of England.

The British Museum is the largest and richest museum in the world. It was founded in 1753 and contains one of the world’s richest collections of antiquities. The Egyptian Galleries contain human and animal mummies. Some parts of Athens’ Parthenon are in the Greek section.

Madam Tussaud’s Museum is an exhibition of hundreds of life-size wax models of famous people of yesterday and today. The collection was started by Madam Tussaud, a French modeller in wax, in the 18th century. Here you can meet Marilyn Monroe, Elton John, Picasso, the Royal Family, the Beatles and many others: writers, movie stars, singers, politicians, sportsmen, etc.

## 5. Подготовка к экзамену

Подготовка к экзамену включает в себя повторение всех изученных тем курса.

Билет на экзамен включает в себя тест и практико-ориентированное задание.

| *Наименование оценочного средства* | *Характеристика оценочного средства* | *Методика применения оценочного средства* | *Наполнение оценочного средства в КОС* | *Составляющая компетенции, подлежащая оцениванию* |
|---|---|---|---|---|
| Экзамен: | | | | |
| Тест | Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося. | Тест состоит из 20 вопросов. | КОС - тестовые задания | Оценивание уровня знаний, умений, владений |
| Практико-ориентированное задание | Задание, в котором обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию | Количество заданий в билете – 1. Предлагаются задания по изученным темам в виде практических ситуаций. | КОС- Комплект заданий | Оценивание уровня знаний, умений и навыков |

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

# ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины …….....3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы …….3
Требования к оформлению теста ……..…….....3
Содержание теста…….....3
Содержание опроса…….....9
Выполнение работы над ошибками……...……..11

## Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

## Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

## Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

## Содержание теста

| № п/п | Вопросы | Варианты ответов |
|---|---|---|
| 1 | Физическая культура представляет собой: | А) учебный предмет в школе<br>Б) выполнение физических упражнений<br>В) процесс совершенствования возможностей человека<br>Г) часть общей культуры общества |
| 2 | Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется: | А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям<br>Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков<br>В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности<br>Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности |
| 3 | Под физическим развитием понимается: | А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни<br>Б) размеры мускулатуры, формы тела, |

| | | |
|---|---|---|
| | | функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность<br>В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений<br>Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом |
| 4 | Физическая культура ориентирована на совершенствование | А) физических и психических качеств людей<br>Б) техники двигательных действий<br>В) работоспособности человека<br>Г) природных физических свойств человека |
| 5 | Отличительным признаком физической культуры является: | А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям<br>Б) физическое совершенство<br>В) выполнение физических упражнений<br>Г) занятия в форме уроков |
| 6 | В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к: | А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества<br>Б) общим принципам образования и воспитания<br>В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания<br>Г) принципам обучения |
| 7 | Физическими упражнениями называются: | А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье<br>Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения<br>В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики<br>Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания |
| 8 | Нагрузка физических упражнений характеризуется: | А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия<br>Б) величиной их воздействия на организм<br>В) временем и количеством повторений двигательных действий<br>Г) напряжением отдельных мышечных групп |
| 9 | Величина нагрузки физических упражнений обусловлена: | А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий<br>Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей<br>В) утомлением, возникающим при их выполнении<br>Г) частотой сердечных сокращений |
| 10 | Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка | А) мала и ее следует увеличить<br>Б) переносится организмом относительно легко<br>В) достаточно большая и ее можно повторить<br>Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить |
| 11 | Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений | А) 120-130 уд/мин<br>Б) 130-140 уд/мин<br>В) 140-150 уд/мин<br>Г) свыше 150 уд/мин |
| 12 | Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что: | А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости<br>Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации |

| | | |
|---|---|---|
| | | В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.<br>Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени. |
| 13 | Что понимают под закаливанием: | А) купание в холодной воде и хождение босиком<br>Б) приспособление организма к воздействию внешней среды<br>В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми<br>Г) укрепление здоровья |
| 14 | Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит: | А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения<br>Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма<br>В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении<br>Г) после занятия надо принять холодный душ |
| 15 | Правильное дыхание характеризуется: | А) более продолжительным выдохом<br>Б) более продолжительным вдохом<br>В) вдохом через нос и выдохом через рот<br>Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха |
| 16 | При выполнении упражнений вдох не следует делать во время: | А) вращений и поворотов тела<br>Б) наклонах туловища назад<br>В) возвращение в исходное положение после наклона<br>Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным,<br>рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны |
| 17 | Что называется осанкой? | А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение<br>Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп<br>В) привычная поза человека в вертикальном положении<br>Г) силуэт человека |
| 18 | Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее: | А) затылком, ягодицами, пятками<br>Б) лопатками, ягодицами, пятками<br>В) затылком, спиной, пятками<br>Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками |
| 19 | Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что: | А) он обеспечивает ритмичность работы организма<br>Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня<br>В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня<br>Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений |
| 20 | Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что: | А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека<br>Б) снимает утомление нервных клеток организма<br>В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения<br>Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как | А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма<br>Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии<br>В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма<br>Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям |
| 22 | Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части? | А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения<br>Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся.<br>В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России<br>Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них |
| 23 | Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе. | А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8<br>Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4<br>В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4<br>Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4 |
| 24 | Под силой как физическим качеством понимается: | А) способность поднимать тяжелые предметы<br>Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений<br>В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений<br>Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему. |
| 25 | Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения. | А) 1, 2, 5, 4, 3, 6<br>Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5<br>В) 2, 6, 4, 5, 3, 1<br>Г) 2,1, 3, 4, 5, 6 |
| 26 | Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. | А) 1, 2, 3, 4<br>Б) 2,3,1,4<br>В) 3, 2, 4, 1<br>Г) 4,2 ,3, 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила. | |
| 27 | Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения | А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы<br>Б) упражнения, способствующие снижению массы тела<br>В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки<br>Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений |
| 28 | И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется: | А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц<br>Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы<br>В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений<br>Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе |
| 29 | Под быстротой как физическим качеством понимается: | А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью<br>Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени<br>В) способность быстро набирать скорость<br>Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой |
| 30 | Для развития быстроты используют: | А) подвижные и спортивные игры<br>Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции<br>В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений<br>Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью |
| 31 | Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время: | А) подвижных и спортивных игр<br>Б) челночного бега<br>В) прыжков в высоту<br>Г) метаний |
| 32 | Под гибкостью как физическим качеством понимается: | А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона<br>Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений.<br>В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев<br>Г) эластичность мышц и связок |
| 33 | Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии: | А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений<br>Б) выполняются 12-16 циклов движения<br>В) упражнения выполняются до появления пота<br>Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений |
| 34 | Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять | А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7<br>Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1<br>В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 |

| | | |
|---|---|---|
| | перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений. | Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1 |
| 35 | При развитии гибкости следует стремиться | А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах<br>Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах<br>В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах<br>Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов |
| 36 | Под выносливостью как физическим качеством понимается: | А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки<br>Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению<br>В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь<br>Г) способность сохранять заданные параметры работы |
| 37 | Выносливость человека не зависит от: | А) функциональных возможностей систем энергообеспечения<br>Б) быстроты двигательной реакции<br>В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть<br>Г) силы мышц |
| 38 | При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются: | А) максимальная активность систем энергообеспечения<br>Б) умеренная интенсивность<br>В) максимальная интенсивность<br>Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата |
| 39 | Техникой физических упражнений принято называть | А) способ целесообразного решения двигательной задачи<br>Б) способ организации движений при выполнении упражнений<br>В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений<br>Г) рациональную организацию двигательных действий |
| 40 | При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники). | А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия<br>Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие<br>В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи<br>Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи |
| 41 | В процессе обучения двигательным действиям используют методы | А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы |

| | | |
|---|---|---|
| | целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от | Б) сложности основы техники<br>В) количества элементов, составляющих двигательное действие<br>Г) предпочтения учителя |
| 42 | Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения | А) основы техники<br>Б) ведущего звена техники<br>В) подводящих упражнений<br>Г) исходного положения |
| 43 | Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к: | А) урочным формам занятий физическими упражнениями<br>Б) «малым» неурочным формам<br>В) «крупным» неурочным формам<br>Г) соревновательным формам |
| 44 | Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым? | А) уроки физической культуры<br>Б) внеклассная работа<br>В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия<br>Г) содержание и организация педагогической практики |
| 45 | Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля: | А) оперативному<br>Б) текущему<br>В) предварительному<br>Г) итоговому |

**Критерии оценивания теста**

***Оценка за тест*** определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

**Результат теста**

*Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:*

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

## ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости

18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.
24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.
25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.

79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.
86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.
87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
91. Студенческие спортивные соревнования.
92. Студенческие спортивные организации.
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

**Выполнение работы над ошибками**

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

# ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Авторы: Шулиманов Д.Ф., Жданкина Е.Ф.
Соавторы: Харламов А.И., Никуленок Ф.С., Андреев А.Л., Бугаев И.Ю.

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение…….....3
Глава 1. ХОДЬБА, БЕГ…….. …….5
1.1. Физическая подготовка студента-легкоатлета…….. ……...5
1.2. Сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы ……6
Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕХНИКИ ДВИЖЕНИЙ: ФАЗЫ, СТРУКТУРЫ, СИЛЫ ДВИЖЕНИЙ ……...8
2.1. Основы техники спортивной ходьбы ……..10
2.2. Основы техники бега …….13
Глава 3. ВИДЫ УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МЫШЕЧНЫХ ГРУПП……18
3.1. Упражнения для верхней части туловища ……...18
3.2. Упражнения для средней части тела……..……...42
3.3. Упражнения для мышц верхней части ног …….....53
3.4. Упражнения для мышц голени и стопы……64
3.5. Упражнения для восстановления мышечных групп ……...74
Глава 4. ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА……84
Глава 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НОРМАТИВАМ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ……87
Глава 6. АКТУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ГОТОВНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ЗАЧЕТНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ, НА ОСНОВЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДАПТАЦИИ К СМЕНЕ ВИДОВ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ……..…….....97
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……101

## ВВЕДЕНИЕ

Современные темпы развития цивилизации улучшают жизнь человечества, но в то же время снижают его двигательную активность, что в совокупности с негативной экологией наносит существенный вред организму человека, особенно в условиях удаленного обучения. Увеличилось число заболеваний, снижается активность иммунной системы, многие болезни, которыми болели в основном люди зрелого возраста, «помолодели» и как следствие – сокращение продолжительности жизни человека. Снижение двигательной активности – это один из многих негативных факторов, препятствующих нормальной плодотворной жизнедеятельности человека.

Сохранение и укрепление здоровья студентов, формирование у них потребности в физическом совершенствовании и здоровом образе жизни являются одной из основных задач образовательных учреждений всех типов. Процесс физического воспитания в вузе, как и весь учебный процесс, регламентирован и обеспечен документами федерального уровня (приказ Министерства образования Российской Федерации, примерная учебная программа, государственный образовательный стандарт). Этим созданы предпосылки для укрепления здоровья студентов, повышения качества физического воспитания в вузах. Для эффективной постановки физического воспитания, в образовательных учреждениях страны требуются, в том числе, современные программы физического воспитания с использованием новейших технологий, форм и методов физкультурно-спортивной работы в условиях дистанционного обучения.

Легкая атлетика – наиболее массовый вид спорта, способствующий всестороннему физическому развитию человека, так как объединяет распространенные и жизненно важные движения (ходьба, бег и др.). Регулярные занятия легкоатлетическими упражнениями развивают силу, быстроту, выносливость и другие качества, необходимые человеку в повседневной жизни.

В системе физического воспитания легкая атлетика занимает одно из главных мест благодаря разнообразию, доступности, а также ее прикладному значению. Различные виды ходьбы и бега входят составной частью в каждое занятие физической культуры образовательных учреждений всех ступеней и тренировочный процесс многих других видов спорта. В то же время легкая атлетика является научно-педагогической дисциплиной и имеет свои методы и приемы обучения. Она наряду с другими базовыми физкультурно-спортивными дисциплинами обеспечивает профессиональную подготовку на факультетах физической культуры в вузах.

Дисциплина включает:

- формирование комплекса знаний, умений и навыков в области легкой атлетики;

- освоение профессиональных умений педагога физической культуры в процессе обучения легкоатлетическим двигательным действиям;

- приобретение умений и навыков научно-методической деятельности.

Таким образом, в построении учебного процесса по дисциплине «физическая культура» может быть использована современная инновационная технология его проведения, ориентированная на состояние здоровья занимающихся, обеспечивающая более индивидуализированный подход к его построению и эффективность реализации в условиях удаленного обучения.

## Глава 1. Ходьба, бег

Легкая атлетика является одним из популярных видов спорта в мире. Практически все виды спорта так или иначе используют упражнения из легкой атлетики для подготовки спортсменов.

Легкоатлетические упражнения широко используются в детских дошкольных учреждениях, начиная с раннего возраста, в школах, средних и высших учебных заведениях. Легкоатлетические упражнения повышают деятельность всех систем организма, являются одним из эффективных факторов профилактики различных заболеваний. Легко дозируемые упражнения могут использоваться как для развития физических качеств спортсменов высокого класса, так и для развития подрастающего поколения, для людей с ослабленным здоровьем, пожилого возраста, в период реабилитации после перенесенных травм и просто для поддержания нормальной жизнедеятельности человеческого организма.

Доступность, простота упражнений, незначительные затраты позволяют заниматься всевозможными видами легкой атлетики независимо от проживания: в сельской местности или в городской. Легкую атлетику можно характеризовать как:

- средство восстановления и реабилитации организма;
- средство воспитания и развития подрастающего поколения.

Совершенствование беговой подготовки определено многими факторами. Занятия легкой атлетикой приносят пользу сердечно-сосудистой и респираторной системам, что ведет к повышению беговых показателей [1, 2]. Но при неправильных тренировках (слишком длинная дистанция в чрезмерно быстром темпе) в результате больших нагрузок на костно-мышечную систему можно нанести вред организму, в ряде случаев и продуманные тренировки могут усиливать мышечный дисбаланс и анатомические дефекты. Введение силовых тренировок с использованием тренажеров или предметов применяемых в быту в общий план улучшения беговой подготовки повышает

эффективность бега путем усиления бегового шага, который становится более твердым и широким, что влияет на достижения спортивных результатов [3, 4].

### 1.1. Физическая подготовка студента-легкоатлета

В результате занятий легкой атлетикой, в частности ходьбой и бегом, происходят своеобразные морфологические и функциональные изменения в организме студента, определяющие состояние его тренированности, которое принято связывать преимущественно с адаптационными перестройками биологического характера, отражающими возможности различных функциональных систем и механизмов, а также уровень его физической подготовленности. В связи с этим немаловажное место в занятиях легкой атлетикой отводится физической подготовке, общей и специальной. Высокий уровень развития быстроты, силы, скоростно-силовых качеств, выносливости, гибкости, координации движений в огромной мере предопределяет достижение высоких результатов в избранном виде легкой атлетики.

В каждом виде легкой атлетики существуют физические качества, которые отвечают определенным факторам, оптимально влияющим на спортивный результат в избранном виде. Например, для спринтерского бега наиболее информативны тесты, оценивающие быстроту реакции на старте, способность к ускорению, максимальную скорость бега, скоростную выносливость, техническое мастерство бегуна; у барьеристов к вышеперечисленным факторам добавляются показатели темпоритмовой структуры преодоления барьеров.

В беге на средние и длинные дистанции для оценки подготовленности учитываются показатели скоростной и специальной выносливости, способность удерживать заданную скорость.

### 1.2. Сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы

Сердечно-сосудистая система – система органов, которые обеспечивают циркуляцию крови и лимфы. Она включает сердце, кровь и кровеносные сосуды (вены и артерии). Поступающая из сердца кровь движется по артериям и возвращается в сердце по венам (рис. 1).

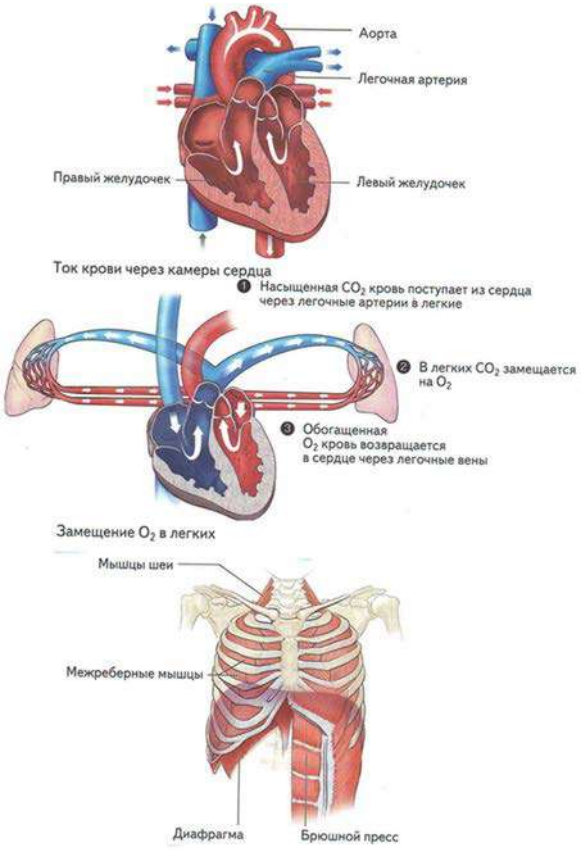



Рис. 1. Мышцы, участвующие в дыхании

Сердечно-респираторная система объединяет сердце и легкие. Воздух поступает через нос и рот. Диафрагма и другие мышцы нагнетают его в легкие, где кислород, содержащийся в воздухе, смешивается с кровью (см. рис. 1). Взаимосвязь двух систем осуществляется, когда сердце прокачивает кровь в легкие через легочные артерии. Там она смешивается с кислородом, содержащимся в воздухе, который вдыхаем. Обогащенная кислородом кровь вновь доставляется к сердцу по легочным венам. Затем через артерии кровь, наполненная красными кровяными клетками, обогащенными кислородом, прокачивается к мышцам (см. рис. 1), обеспечивающим движение [4].

Чем лучше развиты сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы, тем больший объем крови циркулирует в организме. Повышение объема циркулирующей крови увеличивает количество обогащенных кислородом красных клеток крови, питающих мышцы, а также повышает объем плазмы, необходимой для производства энергии в процессе гликолиза.

В улучшении беговых показателей участвуют также и другие факторы, такие как степень нейромышечной подготовки, мышечная выносливость, сила и гибкость. Укрепляя сердечно-сосудистую и сердечно-респираторную системы, эти факторы существенно улучшают беговые показатели.

**Ходьба** – самая естественная нагрузка. Тренировочный эффект определяется расстоянием и учащением пульса. Чтобы иметь удовлетворительную тренированность (по Куперу), нужно ходить не меньше часа и покрывать расстояние почти 6,5 км. Надо очень быстро и напряженно идти. Стоит замедлить шаг до 5 км, нужно уже проходить 10 км каждый день. Поэтому ходьба как единственный метод тренировки хороша в качестве вводного курса, незаменима для восстановления сил после болезней.

**Бег трусцой** не значит, лучше настоящего бега, чем быстрее, тем больше уровень тренированности, потому что он достигается мощностью. Существует нормальный бег, не быстрый и не медленный, со скоростью 9-10 км/ч. Пробегать 2 км ежедневно за 12 мин – этого для минимума достаточно, никаких разминок не требуется, никаких дополнительных, плановых калорий для занимающегося физкультурой не нужно.

Дыхание имеет большое значение, как в беге, так и в ходьбе; если дыхание сбилось, необходимо снизить темп и восстановить его. Закончилось время или дистанция – нужно немного пройтись шагом и дышать как дышится. Излишек углекислоты в крови как раз способствует расширению сосудов, и кислородный голод скорее исчезнет.

Хорошо приучить себя дышать носом во время бега, это не просто и придет только со временем. Дыхание носом хотя и труднее, кажется менее эффективным, но зато тренирует диафрагму, приучает дыхательный центр к излишкам углекислоты. Зимой защищает трахею и бронхи от прямого попадания холодного воздуха.

**Бег на месте** – хороший способ общей тренировки, хотя плохо дозируется, так как легко сделать подскоки облегченными: достаточно поднять стопу на 15 см вместо 20, и треть нагрузки пропала. «Трусца на месте» – плохой заменитель настоящей трусцы. Но не нужно преувеличивать недостатки, так как есть хороший метод контроля – частота пульса.

Самое простое правило: частота пульса должна удваиваться по сравнению с покоем, частота пульса менее 120 ударов в 1 мин свидетельствует о том, что бег на месте неэффективен и нужно прибавить темп. Важно выработать свой собственный темп, обеспечивающий необходимую мощность, и постепенно доводить время до заданного предела, правила дыхания остаются те же [1].

**Самоконтроль** – немаловажно следить за пульсом. После остановки нужно подсчитать пульс за 10 или 15 с, чтобы узнать как реагирует сердце на заданный темп бега. Не следует допускать частоту пульса более 140 ударов в 1 мин. При различных заболеваниях сердечно-сосудистой системы легкой степени достаточно и 120-130 и даже 100 ударов в 1 мин. Очень важна постепенность наращивания во всем, и скорости и расстояний, но ее нужно дополнить правилами контроля пульса.

Одежда. Не нужно одеваться тепло, наоборот, как можно легче: быстрее будете бегать, если холод подгоняет. Бегать можно в любую погоду, если одеться соответственно. Особенно неприятны ветер и дождь, но если промокнете, то за 10-20 мин не простудишься, но незакаленному лучше поберечься.

Стандартная последовательность беговых тренировок начинается с базового (вводного) периода (в данных условиях проведения занятий применяется бег на месте), а силовые упражнения выполняются с небольшим отягощением и большим количеством повторений. Силовые упражнения выполняются с увеличением веса отягощений. Финальная фаза определяется коротким периодом высокоинтенсивной (V02max) беговой тренировки в комплексе с поддерживающей силовой тренировкой и плановым отдыхом [3, 5].

## Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕХНИКИ ДВИЖЕНИЙ: ФАЗЫ, СТРУКТУРЫ, СИЛЫ ДВИЖЕНИЙ

Любая двигательная деятельность человека состоит из определенных двигательных действий, которые, в свою очередь, состоят из конкретных движений. В биомеханике различают два вида движений:

1) перемещение всей биосистемы относительно точки отсчета или других каких-либо точек (например, перемещение бегуна относительно старта или финиша);

2) деформация тела, т.е. изменение положений звеньев тела относительно друг друга или общего центра массы (сгибание руки, ноги и т.д.) [3, 6].

Человек может выполнять множество разнообразных движений, которые будут не похожи у разных людей, никто в точности не сумеет скопировать одно и то же движение человека, даже сам индивидуум. Это в первую очередь зависит от строения суставов, расположения мышц и мышечных групп, активности центральной нервной системы и многих других факторов. Все разнообразные движения человека объединяются одним основным понятием «техника», техника движений бывает врожденной и приобретенной.

Самое простое определение термина «техника движений» – это система определенных движений, целенаправленно решающая двигательную задачу [3]. Все движения подчинены определенной системе: есть простые движения, например сгибание руки в локтевом суставе; но в основном – сложные движения – действия, которые складываются из ряда различных движений, что и определяет состав техники движений. Для того чтобы получить систему движений, необходимо создать определенные связи между отдельными движениями, выявить их влияние друг на друга, что и определяет структуру техники движений.

Техника движений может быть естественной и спортивной. Если человек выполняет привычные движения в обыденной жизни: идет на работу, делает утреннюю пробежку – это естественная техника движений, но для победы в соревнованиях, победы над соперником, используется спортивная техника движений, которая требует проявления максимальных возможностей человеческого организма.

Технику движений классифицируют как произвольную и вынужденную, ограниченную и свободную, индивидуальную и идеальную, рациональную и нерациональную. Эта классификация условная, так как техника всех видов легкой атлетики содержит несколько таких параметров. Целостная техника легкоатлетических видов всегда включает в себя несколько таких разделений. Отдельные действия могут быть более локализованы, например отталкивание – вынужденное действие для техники движения ног, а техника движения рук может быть произвольной; движения рук в беге – это также произвольная техника. Свободная техника в легкоатлетических видах не наблюдается, так как она ограничена правилами соревнований и целями спортсмена [3, 7, 8].

Индивидуальная техника предполагает, что вся техника движений, выполняемая человеком, строго индивидуальна и зависит от анатомических, физиологических и психологических особенностей индивидуума. Студенты, пришедшие изучать технику какого-либо движения, поначалу обладают нерациональной техникой, но впоследствии, при глубоком изучении и формировании устойчивого двигательного навыка, их нерациональная техника движений постепенно перейдет в рациональную. Даже у высококвалифицированных спортсменов рациональная техника может ухудшиться, т.е. появляются черты нерациональной техники (лишние, не экономичные движения), определяется это воздействием на студента психических, физиологических, ситуационных и других факторов. Изменения в технике движений зависят от психологических особенностей студента, сложности техники движений, устойчивости двигательного навыка.

## 2.1. Основы техники спортивной ходьбы

**Ходьба** – естественный способ передвижения человека. Спортивная ходьба отличается от простой ходьбы более высокой скоростью передвижения, ограничением техники передвижения правилами соревнований и другими техническими моментами.

Техника спортивной ходьбы имеет циклический характер, т.е. определенный цикл повторяется многократно на протяжении всей дистанции и, в отличие от других циклических видов легкой атлетики, жестко ограничен правилами соревнований. Эти

ограничения существенно повлияли на становление техники спортивной ходьбы. Во-первых, в спортивной ходьбе не должно быть фазы полета, т.е. всегда должен быть контакт с опорой. Во-вторых, исходя из первого ограничения, опорная нога в момент вертикали должна быть выпрямлена в коленном суставе (несколько лет назад сделали добавление к этому ограничению – опорная нога должна быть выпрямлена в коленном суставе с момента постановки ноги на опору). Отличие спортивной ходьбы от естественной (бытовой) по внешним данным заключается в том, что в естественной ходьбе пешеход может сгибать ногу в коленном суставе, амортизируя постановку ноги, а в спортивной ходьбе спортсмен передвигается на прямых ногах.

Основу техники спортивной ходьбы составляет один цикл действия, который состоит из двойного шага, шага левой ноги и шага правой ноги. Цикл содержит: а) два периода одиночной опоры; б) два периода двойной опоры; в) два периода переноса маховой ноги [3].

Период одиночной опоры одной ноги совпадает с периодом переноса другой ноги. Период двойной опоры очень кратковременен, порой его можно и не увидеть. Период одиночной опоры более длителен и делится на две фазы:

1) фаза жесткой передней опоры; 2) фаза отталкивания. Период переноса тоже имеет две фазы: 1) фаза заднего шага; 2) фаза переднего шага. Эти фазы присутствуют как в периоде переноса или опоры для левой ноги, так и для правой ноги.

Фазы разделяются моментами, т.е. такими мгновенными положениями, после которых происходят изменения движений. Если моменты являются границами изменения движений в одном или нескольких звеньях, то позы в данных моментах – это описание положений звеньев тела относительно общего центра масс (ОЦМ) или друг друга, т.е. позы дают визуальную картину смены движений.

Фаза передней жесткой опоры правой ноги начинается с момента постановки ее на опору. Нога, выпрямленная в коленном суставе, ставится с пятки. Эта фаза продолжается до момента вертикали, когда ОЦМ находится над точкой (над стопой правой ноги) опоры.

С момента вертикали до момента отрыва правой ноги от грунта длится фаза отталкивания. Период одиночной опоры правой ноги заканчивается и начинается период переноса правой ноги, который имеет две фазы: 1) фаза заднего шага, которая начинается с момента отрыва ноги от опоры до момента вертикали (момент вертикали в переносе ноги определяется по положению бедра – продольная ось бедра должна быть перпендикулярна площади поверхности опоры, т.е. горизонтали); 2) фаза переднего шага – с момента вертикали до момента постановки ноги на опору. Потом следует кратковременный период двойной опоры. Когда идет период одиночной опоры правой

ноги, левая нога находится в периоде переноса. То же самое повторяется с левой ногой. Цикл закончился, начинается новый цикл, и все повторяется (рис. 2).

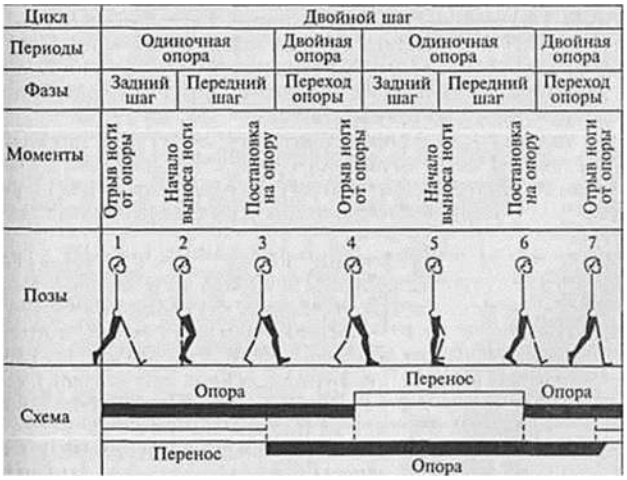



Рис. 2. Периоды, фазы, моменты в спортивной ходьбе

Период двойной опоры очень кратковременен, но он имеет большое значение в технике спортивной ходьбы. По нему определяется соответствие техники правилам соревнований. Если период двойной опоры отсутствует, значит, спортсмен не идет, а бежит, за что его дисквалифицируют [3, 6, 7].

Частота шагов у высококвалифицированных ходоков колеблется от 190 до 230 шагов в минуту. Длина шага колеблется от 95 до 130 см и зависит от длины ног спортсмена и развиваемых мышечных усилий. Движения рук и ног, поперечных осей плеч и таза – перекрестны, т.е. левая рука движется вперед, когда вперед движется правая нога, и наоборот. Позвоночник и таз совершают сложные встречные движения. В конце фазы отталкивания наклон передней поверхности таза несколько увеличивается, а к моменту вертикали, в период переноса этой ноги, – уменьшается. Такие колебания таза в переднезаднем направлении помогают эффективнее отвести назад бедро ноги, отталкивающейся от опоры. Так же изменяется наклон поперечной оси таза: во время переноса она опускается в сторону маховой (переносимой) ноги, а во время двойной опоры опять выравнивается. Такое опускание таза в сторону маховой ноги связано с движением маятника, т.е. нога, как маятник, стремится от оси вращения под действием центробежной силы, это помогает мышцам, отводящим бедро, лучше расслабиться (см. рис. 2).

Позвоночник также изгибается в сторону маховой ноги в период ее переноса. В целом туловище совершает ряд сложных, почти одновременных движений в каждом шаге: незначительно сгибается и разгибается, происходят боковые наклоны и скручивание туловища.

Перекрестные движения рук и ног, плеч и таза, а также другие движения туловища помогают сохранить равновесие тела, нейтрализуют полный боковой разворот тела (в отличие от того, когда ходок идет иноходью, т.е. движения не перекрестные), создают оптимальные условия для постановки ног, эффективное отталкивание и рациональный перенос маховой ноги.

Движения рук в спортивной ходьбе помогают увеличивать частоту шагов, поэтому мышцы верхнеплечевого пояса усиленно работают. Особенно на это надо обращать внимание к концу дистанции при наступлении утомления. Движения рук осуществляются следующим образом: руки согнуты в локтевых суставах под углом 90° к направлению движения ходока; пальцы рук полусжаты; мышцы плеч расслаблены.

Работа мышц во время взаимодействия их на опору через звенья тела является движущей силой при ходьбе. Выполняя отталкивание и перенос ног в оптимальном сочетании, все тело получает ускорение в направлении от места опоры. Силы реакции опоры во время отталкивания придают скорость движения телу, а перенос маховой ноги, вследствие инерционных сил, придает ускорение телу ходока. Одновременное движение маховой ногой вперед и отталкивание толчковой ногой в целом составляют отталкивание от опоры.

Все движения звеньев тела осуществляются с ускорением, вследствие чего возникают инерционные силы отдельных звеньев, одни из которых участвуют в придании скорости всего тела, другие нейтрализуют отрицательные инерционные силы (движения рук).

Движения всех звеньев тела (их центров масс) происходят по криволинейной траектории, а перемещение тела и его ускорение осуществляются в линейном направлении, т.е. не существует какой-либо реальной движущей силы, создающей движение по линейной траектории. Суть всех перемещений в ходьбе – это сумма равнодействующих сил, направленных по криволинейной траектории, и сил, направленных под углом к перемещению тела и опоры.

Движущие инерционные и мышечные силы воздействуют через стопу (стопы) на опору. Исходя из третьего закона механики возникают противодействующие им силы – силы реакции опоры, без которых изменение движения ОЦМ невозможно.

Под силой отталкивания понимают воздействие опоры на тело спортсмена, которое возникает в результате действия сил давления на опору. Отталкивание – это не результат чистой работы мышц, а результат взаимодействия мышечных усилий и инерционных сил на опору. Чем опора жестче, тем величина отталкивания (силы реакции опоры) больше.

## 2.2. Основы техники бега

Виды легкоатлетического бега делятся на гладкий бег, бег с препятствиями, бег по пересеченной местности (кросс) и имеют общие основы.

Бег, как и ходьба, относится к циклическим движениям, где цикл движения включает двойной шаг. Вместо периода двойной опоры в ходьбе в беге имеется период полета. В беге можно выделить: а) период одиночной опоры; б) период полета; в) период переноса маховой ноги, который совпадает с периодом опоры [3, 4].

Быстрота, амплитуда движений, проявление больших мышечных усилий в беге, чем в ходьбе, – эти факторы зависят от скорости бега (чем выше скорость, тем выше значения перечисленных факторов).

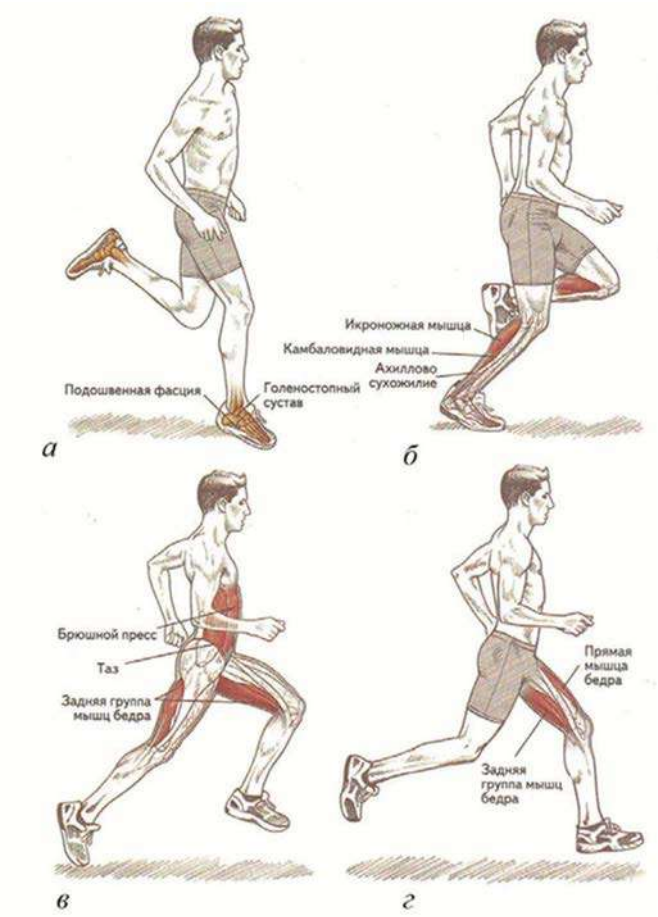



Рис. 3. Цикл бегового шага: *а* – первоначальный контакт; *б* – фаза опоры; *в* – отрыв опорной ноги; *г* – фаза переноса маховой ноги вперед

Период переноса маховой ноги (левой) и период опоры толчковой ноги (правой) совпадают по времени, затем наступает период полета, после этого период переноса маховой ноги (правой) и период опоры толчковой ноги (левой), затем опять период полета (см. рис. 3).

В беге, как и в ходьбе, руки и ноги выполняют согласованные перекрестные движения. Встречные перекрестные движения осей таза и плеч позволяют сохранить равновесие и противодействуют боковому развороту тела бегуна.

В периоде опоры в беге, так же как и в ходьбе, две фазы: 1) фаза амортизации; 2) фаза отталкивания. Фаза амортизации начинается с момента постановки ноги на опору и длится до момента вертикали, когда проекция ОЦМ находится над точкой опоры. В отличие от ходьбы в этой фазе происходит значительное снижение ОЦМ за счет разгибания в голеностопном суставе, сгибания в коленном суставе и наклона поперечной оси таза в сторону маховой ноги. Одновременно с этим происходит растягивание упругих компонентов (связки, сухожилия, фасции), участвующих в последующем отталкивании. За мгновение до соприкосновения с опорой (15-25 миллисекунд) мышцы, участвующие в фазе амортизации, уже становятся электрически активными, т.е. импульсы возбуждения приходят к мышце заранее, до опоры, и растягиваются напряженные мышцы. С момента вертикали до момента отрыва толчковой ноги от опоры длится фаза отталкивания. Она начинается с распрямления толчковой ноги в тазобедренном и коленном суставах, завершается сгибанием в голеностопном суставе. С начала фазы амортизации увеличивается сила давления на опору, которая продолжает увеличиваться и после провождения вертикали до определенного момента за счет мышечных усилий, которые разгибают тазобедренный и коленный суставы. Сила реакции опоры также увеличивается, как и сила давления на опору, только они действуют диаметрально противоположно друг другу, телу студента при беге и его ОЦМ придается определенная скорость. В конце фазы отталкивания силы давления и реакции опоры уменьшаются (примерно после выпрямления ноги в коленном суставе), и мышцы, участвующие в сгибании голеностопного сустава, выполняют скоростную работу с меньшими усилиями, но с большей скоростью. В частности: сначала ягодичные мышцы более сильные, но менее скоростные, придают начальную скорость движению, затем мышцы передней поверхности бедра менее сильные, но более скоростные придают ускорение телу, и в конце действуют более скоростные, но относительно слабые мышцы (икроножные). Сила и скорость проявления мышечных усилий обратно пропорциональны, нельзя одновременно увеличить силу и скорость мышечных усилий.

В периоде одиночной опоры маховая нога также участвует в придании скорости телу бегуна. С момента постановки ноги на опору до момента вертикали маховая нога за счет инерционных сил увеличивает силу давления на опору. С момента вертикали до момента отрыва опорной ноги от опоры инерция массы маховой ноги помогает быстрее выпрямить толчковую ногу в фазе отталкивания и тем самым увеличить скорость

(принцип маятника). Время и скорость отталкивания во многом зависят от быстроты переноса маховой ноги вперед с момента постановки толчковой ноги на опору.

Период полета начинается с момента отрыва толчковой ноги от опоры до момента постановки маховой ноги на опору. Выделяют две фазы: 1) фаза подъема ОЦМ до наивысшей точки траектории ОЦМ; 2) фаза опускания ОЦМ до касания маховой ноги опоры и превращения ее в толчковую ногу. Такое деление периода полета на две фазы необходимо для того, чтобы понять, какое участие принимает сила тяжести в изменении скорости движения ОЦМ по траектории. В период полета скорость движения не увеличивается, а наоборот, чем больше этот период, тем больше происходит потерь в скорости. Период полета характеризует длину бегового шага.

В конце фазы отталкивания ОЦМ получает определенную начальную скорость вылета, которая несколько гасится, так как движение ОЦМ происходит вверх-вперед до высшей точки траектории, затем происходит небольшое увеличение за счет силы тяжести. Сила тяжести в периоде полета тела бегуна выполняет двоякую функцию, сначала она снижает скорость движения ОЦМ, а затем, после высшей точки траектории, увеличивает ее (принцип метронома). В другие моменты сила тяжести не оказывает влияния на изменение скорости движения ОЦМ. Если бег выполняется не на ровной местности, а в гору или под гору, то тогда сила тяжести будет оказывать влияние на изменение скорости движения: при беге в гору скорость снижается, при беге под гору скорость движения увеличивается.

В периоде переноса ноги с момента постановки ноги на опору в фазе амортизации происходит снижение скорости движения ОЦМ за счет тормозящей силы, которая возникает всегда, и задача бегуна снизить ее воздействие. С одной стороны, тормозящая сила и инерционные силы тяжести после фазы полета в фазе амортизации негативно влияют на скорость движения, с другой стороны – в это время создаются предпосылки для эффективного отталкивания.

Скорость тела бегуна можно увеличить исключительно при взаимодействии с опорой, но для того, чтобы увеличить скорость бега, необходимо как можно чаще контактировать с опорой во время отталкивания. Нет тормозящих сил, постоянный контакт с опорой, и только за счет сил трения создается скорость движения. В период полета после фазы отталкивания мышцы, участвующие в нем, расслабляются и получают кратковременный отдых. Невозможно, чтобы мышцы все время находились в возбужденном состоянии, даже при беге на короткие дистанции. Мышечные судороги – это постоянное возбуждение мышц, которое несет в себе негативные последствия, как для мышц, так и для нервной системы. Умение бегуна рационально чередовать мышечную

работу и мышечное расслабление имеет большое значение в беге на любые дистанции, и не только в беге, но и при выполнении любой физической деятельности. Рациональное чередование работы и отдыха мышц характеризует межмышечную координацию спортсмена. Период полета (или длина бегового шага) должен быть оптимальным и будет зависеть от физических качеств человека, непосредственно от силы ног, длины ног, подвижности в тазобедренных суставах и индивидуальной рациональной техники бега.

Скорость бега зависит как от длины шага, так и от частоты шагов. Оптимальное соотношение этих параметров характеризует ритм бега и рациональность техники бегуна. Во-первых, чтобы увеличить скорость бега, необходимо работать над уменьшением времени опоры, т.е. при той же силе отталкивания уменьшить время отталкивания. Так как период опоры и период переноса связаны друг с другом, то уменьшение времени опоры вызовет и уменьшение времени переноса, и наоборот, т.е. быстрое сведение бедер и быстрый вынос бедра маховой ноги вперед уменьшат время переноса, что поможет быстрому выполнению отталкивания за меньшее время. Быстрый «съем» толчковой ноги с опоры после отталкивания также убыстряет перенос ее вперед. Ощущение такое, как будто убираем ногу с раскаленного песка, чтобы не обжечься. Во-вторых, увеличение скорости бега происходит за счет уменьшения времени полета: 1) снижение вертикального колебания ОЦМ, приближение кривизны траектории к горизонтали; 2) активная постановка толчковой ноги в последней части периода полета, т.е. не ждать опору, а активно идти на сближение с ней. В то же время такая активная постановка ноги может способствовать ударному воздействию на тело бегуна в фазе амортизации – это негативный фактор. Поэтому нога должна ставиться быстро и в то же время мягко, пружинисто, за счет увеличения силы тяги мышц, противодействующей снижению ОЦМ.

Техника движений рук в беге зависит от скорости бега. На коротких дистанциях, где задача бегуна развить максимальную скорость, амплитуда движений рук наибольшая, скорость движения рук совпадает с частотой беговых шагов. Частота движений рук и ног взаимосвязана между собой, чтобы увеличить частоту беговых шагов, надо увеличить частоту движений рук. Руки, согнутые в локтевых суставах под углом 90°, движутся вперед и несколько вовнутрь, затем назад и несколько кнаружи. В беге на короткие дистанции движения рук приближаются к направлению движения бегуна. С уменьшением скорости бега амплитуда движений рук уменьшается, также несколько меняется и направление. При выносе руки вперед она больше приближается к срединной плоскости, а при движении назад больше отводится кнаружи [3, 4].

Наклон туловища также зависит от скорости бега. На коротких дистанциях при максимальной скорости наклон тела вперед наибольший, при беге на длинные дистанции

наклон тела минимальный (до 5°). Необходимо помнить, что чрезмерный наклон туловища вперед, с одной стороны, помогает отталкиванию, но с другой – затрудняет вынос ноги вперед, уменьшая длину шага. Наклон туловища должен быть оптимальным и будет зависеть от скорости бега, дистанции и частей дистанции (стартовый разгон – бег с наклоном, с постепенным выпрямлением туловища; бег по дистанции – наклон оптимальный; финиширование – последние шаги выполняются с большим наклоном, чем при беге по дистанции). При анализе техники движения ног рассматривают отдельно движения каждого звена нижних конечностей. Траектории движения центров масс бедра, голени и стопы имеют сложную форму. Если движение центра массы (ЦМ) бедра можно рассматривать как движение простого маятника, то траектории движения ЦМ голени и ЦМ стопы представляют собой сложные эллипсовидные формы. Нога похожа на маятник, состоящий из трех последовательно соединенных маятников (бедро, голень, стопа). Частота колебаний маятника зависит от его длины, а при значительных отклонениях, например в ходьбе или беге, она будет зависеть от амплитуды движения ног, чем короче маятник, тем чаще он будет двигаться.

Траектория движения ОЦМ в беге напоминает траекторию движения ОЦМ в ходьбе, но размах колебаний ОЦМ в первом случае гораздо выше и зависит от скорости бега: чем выше скорость бега, тем размах колебаний больше. Наивысшее положение ОЦМ наблюдается в период полета, низшее – в фазе амортизации, ближе к моменту вертикали. В этом положении происходит наибольшее сгибание в суставах опорной ноги и опускание таза. Помимо вертикальных колебаний ОЦМ имеются и поперечные колебания в сторону опорной ноги, так как она отклоняется кнаружи. Таким образом, колебания ОЦМ происходят как в вертикальном, так и в поперечном направлениях, создавая тем самым сложную траекторию движения ОЦМ.

# Глава 3. ВИДЫ УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МЫШЕЧНЫХ ГРУПП

## 3.1. Упражнения для верхней части туловища

Двенадцать грудных позвонков расположены друг над другом и соединены связками (рис. 4). Грудной отдел позвоночника может наклоняться вперед и назад, ограниченно двигаться в стороны и вращаться на определенный угол. К грудным позвонкам при помощи суставов прикрепляются ребра. В передних отделах они соединяются в единый жесткий каркас при помощи грудины, формируя грудную клетку.

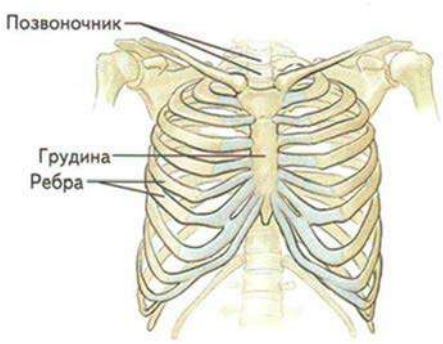



Рис. 4. Костные структуры корпуса: ребра, грудина, позвоночник

Задняя поверхность позвонков поддерживается мышцей, выпрямляющей позвоночник, которая проходит по всей его длине, а ребра удерживаются с помощью межреберных мышц. Без дополнительной структурной поддержки ребра потеряли бы устойчивость, поэтому помощь в поддержании их положения оказывают также трапециевидная мышца, широчайшая мышца спины, ромбовидные, круглые мышцы, большая и малая грудные мышцы, а также мышцы, стабилизирующие плечо (см. рис. 5). В основании этой конструкции лежит диафрагма, окружающая нижние ребра, дополнительную стабильность придают прямая мышца живота, наружные косые мышцы живота и передние зубчатые мышцы [4].

Для бега организму требуется гораздо больше кислорода, чем для пассивной жизни. Диафрагма производит действие, аналогичное действию кузнечных мехов; когда она сокращается, чтобы нагнетать воздух в легкие, межреберные мышцы расслабляются, чтобы затем сократиться на фазе выдоха, в течение которой диафрагма, в свою очередь, расслабляется и втягивается в грудную клетку. С помощью этих движений (втягивание и отпускание) легкие наполняются воздухом и опустошаются, восполняя потребность бегуна в кислороде.

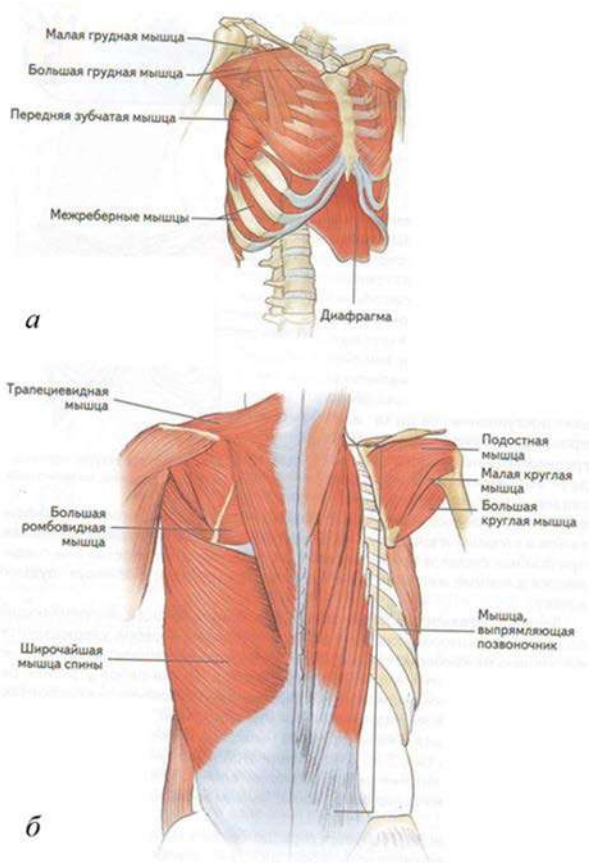



Рис. 5. Верхняя часть корпуса: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Мышцы грудной клетки участвуют не только в механизмах дыхания, они также играют хотя и ограниченную, но важную роль в обеспечении перемещения вперед. Когда с каждым шагом бедра перемещаются вперед, тазобедренный отдел немного поворачивается – сначала в одну сторону, затем в другую. Вместе с ним поворачивается и позвоночник, что может вызывать нестабильность в области живота и грудной клетки, если не стабилизировать это движение. Поэтому небольшое напряжение и расслабление мускулатуры грудной клетки помогает не только удерживать тело в вертикальном положении, но и корректирует изменения, обусловленные движением бегуна вперед при скорости бега до 32 километров в час.

Мышцы, прикрепленные к плечевой кости и окружающие плечевой сустав, в частности грудные мышцы и круглые мышцы, также пассивно двигаются при махах рук, сопровождающих каждый шаг. Если они активно сокращаются, то помогают участвовать в движении верхним частям рук и противостоять тянущему усилию дельтовидных мышц (рис. 6).




Рис. 6. Дельтовидные мышцы

Для бега значимость мышц, участвующих в работе, заключается в понимании принципа «слабого звена»: эффективность спортсмена зависит не от силы, которую он способен развить, а от мышц, которые устают первыми. Если мышцы грудной клетки недостаточно тренированны и быстро устают, эффективность бега снижается. Если мышцы груди ослаблены, ухудшается не только дыхательная деятельность, но и поддержка позвоночника, в этом случае уменьшается участие рук в движении, что приводит к неизбежному замедлению темпа бега.

Качество бега всегда будет ограничено самой слабой частью тела. Если сильные ноги, но легкие не могут доставить кислород для этих ног, можно развить только ту скорость, которая ограничена степенью подготовленности легких, а не ту, на которую были бы способны ноги при иных обстоятельствах. Чтобы избежать этого дисбаланса, диафрагма и все поддерживающие мышцы должны иметь такую же степень тренированности, что и нижние конечности. В результате физических упражнений эти мышцы устают точно так же, как и другие, поэтому их следует тренировать наравне с другими группами мышц, участвующими в упражнении.

Вес отягощения подбирается для каждого упражнения, обеспечивающий средний уровень сопротивления нагрузке, позволяющий правильно выполнять силовое упражнение и все повторения, входящие в подход. По мере развития силы и адаптации организма к текущей нагрузке вес отягощения увеличивается, но не настолько, чтобы нарушалась техника выполнения упражнения, даже на последних повторениях подхода. Подбор веса отягощения зависит и от того, какая часть тела тренируется.

Например, грудные мышцы достаточно велики, поэтому они могут выдерживать большие нагрузки. Трицепсы, состоящие из трех гораздо меньших мышц, устают относительно быстро, когда упражнение нацелено непосредственно на их проработку. Вместе с тем, поскольку трицепсы выполняют вспомогательную роль во многих упражнениях для верхней части тела, в ходе их выполнения они устают еще быстрее, чем

во время тренировки для собственно трицепсов. Для одного занятия достаточно одного упражнения, прорабатывающего именно трицепсы. Для тренировки крупных грудных мышц потребуется несколько упражнений или несколько подходов одного упражнения.

Количество повторений должно варьироваться в зависимости от целей силового упражнения и целей всей тренировки на этот день. Например, два подхода из 20 повторений жима от плеч с гантелями и подход из 30 повторений отжимания от пола могут составить полную тренировку грудных мышц в начале недели, в конце недели можно выполнить один подход из 12 повторений с большим весом отягощения, чем в понедельник, затем два подхода из 10 повторений жима лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье и три подхода из 15 повторений отжимания от пола. Необходимо помнить: чем выше вес отягощения, тем меньше количество повторений и наоборот.

Дыхание: выдыхать, с силой выполняя прямое движение с отягощением, и вдыхать, выполняя обратное движение или удерживая напряжение, создаваемое отягощением. Каждое упражнение следует выполнять плавно. Движения контролируются в ходе всего упражнения. Они тесно взаимосвязаны с ритмом дыхания. Общее правило: вдох – 4 секунды (обратная фаза движения), выдох – 2 секунды (прямая фаза движения).

В формулировке «работа + отдых = результат» требуются небольшие уточнения, чтобы обеспечить стабильный прирост силы, работа должна изменяться со временем количественно (тренировочный объем) и качественно (типы упражнений). Для каждого участка тела подобраны разнообразные упражнения, используя которые возможно созвать многочисленные варианты тренировочных программ, направленные на укрепление мышц, суставов и сухожилий, участвующих в беге. Меняя упражнения, количество подходов и повторений, порядок упражнений, бегуны могут создавать тренировки применительно к своим потребностям и имеющемуся времени. Ни одна тренировка не продлится дольше 30 минут, а две или три тренировки в неделю могут существенно улучшить беговые показатели, укрепив части тела, используемые в тренировочных и соревновательных забегах. С помощью правильно спланированных силовых тренировок можно укрепить свое тело, устранить мышечный дисбаланс, который ухудшает качество бегового шага и является причиной различных травм, и улучшить дыхание, что позволит повысить беговые показатели [4].

### 3.1. Упражнения для верхней части туловища

И.п. – лежа на спине, согнув ноги в коленях, прижав ступни к скамье, гантели в обеих руках на уровне груди (рис. 7).

1-3 – гантели вверх, выпрямить руки; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

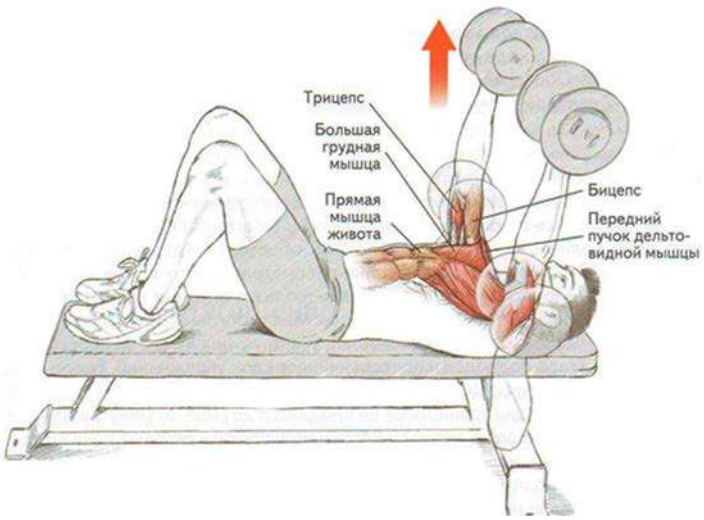



Рис. 7. Жим, лежа с гантелями

**Методические указания:** при выполнении упражнения сохранять естественный изгиб позвоночника так, чтобы поясница не касалась поверхности скамьи.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* бицепс, прямая мышца живота.

**Варианты**

| | |
|---|---|
| *а* вариант. Этот вариант упражнения прорабатывает грудные мышцы, особенно их грудные головки. | *б* вариант. В этом упражнении использование мяча позволяет активнее задействовать брюшной пресс для стабилизации корпуса. |

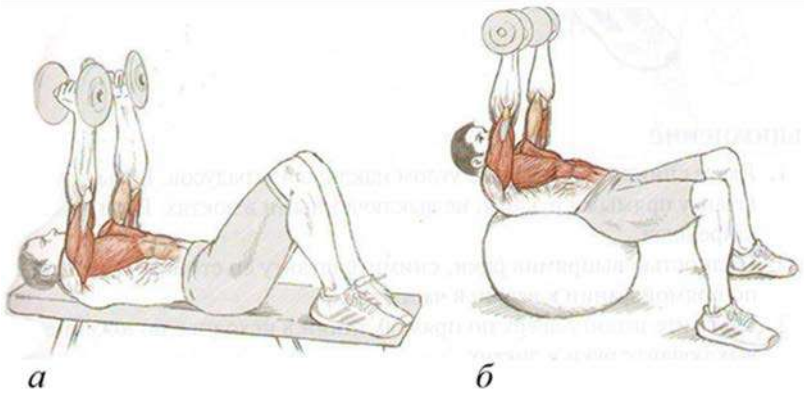



Рис. 8. *а* – жим лежа с гантелями; *б* – жим лежа с гантелями с поворотом на мяче

**Значимость мышц для бега**

Грудные мышцы в ходе упражнений испытывают такую же нагрузку, как и все другие, поэтому их укрепление с помощью простых упражнений, таких как жим лежа с гантелями, приносит существенную пользу. Это упражнение задействует грудные мышцы

интенсивнее, чем жим лежа со штангой, потому что возникает необходимость стабилизировать корпус, так как гантели поднимаются и опускаются независимо каждой рукой. Чем сильнее грудные мышцы и брюшной пресс, тем лучше осанка бегуна на длинные дистанции на завершающих стадиях забега. Упражнение способствует повышению эффективности дыхания и укрепляет сердечно-сосудистую систему. Чем лучше осанка спортсмена, тем эффективнее беговой шаг, что позволяет не тратить энергию на лишние движения, причиной которых является плохая техника бега.

**Безопасность при выполнении**

Выполняя жим с гантелями на мяче, вес гантелей следует уменьшить, потому что положение тела на мяче менее стабильно по сравнению со скамьей. Освоив упражнение, вес можно снова увеличить.

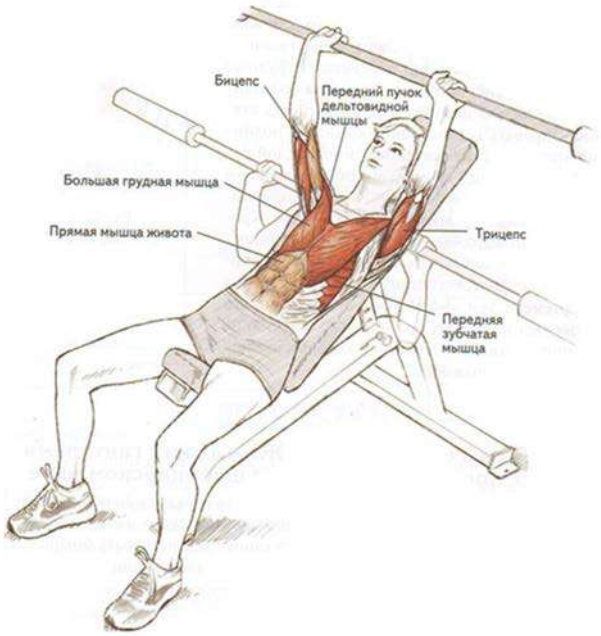



Рис. 9. Жим, лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье

И.п. – лежа на скамейке с углом наклона 45°, руки шире плеч со штангой (рис. 9). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – опустить штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье к верхней части груди; 2 – штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой вверх, и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

**Методические указания:** упражнение выполнять в медленном темпе.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы, передняя зубчатая мышца

*Дополнительные:* бицепс, прямая мышца живота.

**Значимость мышц для бега**

Жим лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье задействует те же мышцы, что и жим лежа с гантелями. Также дополнительно задействуются передние зубчатые мышцы. Использование разных вариантов для одной группы мышц стимулирует увеличение объема мышц этой области и разнообразит тренировки. Так как подразумевается, что силовые упражнения повышают эффективность беговых тренировок, выполнение новых упражнений помогает сохранять интерес к занятиям.

И.п. – лежа на скамье на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к скамье, руки с гантелями вверх и на 5-10° согнуты в локтях (рис. 10).

1-3 – руки медленно в стороны; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

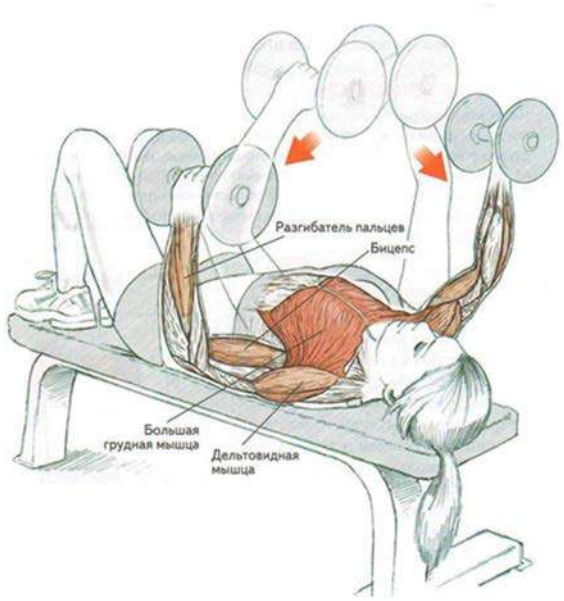



Рис. 10. Разведение рук с гантелями лежа

**Методические указания:** сохранять естественный изгиб позвоночника, чтобы поясница не касалась поверхности скамьи. В и.п. расстояние между гантелями 5-7 см, удерживать гантели в обеих руках, ладони обращены друг к другу.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца.

*Дополнительные:* бицепс, дельтовидная мышца, разгибатель пальцев.

**Безопасность при выполнении**

Обратить внимание на то, что в исходном положении руки выпрямлены, а не разведены. Поднимать гантели из положения с разведенными руками может быть сложно, особенно если использовать гантели слишком большого веса. В этом случае в неудобной позиции оказываются дельтовидные мышцы и бицепсы. Во избежание травм не следует опускать руки ниже уровня поверхности скамьи.

Возвращая гантели в и.п., не выталкивать их ладонями и не слишком подключать дельтовидные мышцы. Движение должно совершаться преимущественно за счет грудных мышц.

**Значимость мышц для бега**

Представленные упражнения укрепляют грудные мышцы. Тем не менее преимущество разведения рук в положении лежа с гантелями состоит в том, что вместе с выполнением упражнения мышцы растягиваются, особенно во время обратной фазы движения, при опускании гантелей. Это позволяет растягивать межреберные мышцы, улучшая дыхательную функцию. Чем лучше растянуты мышцы груди, тем легче вдыхать кислород.




Рис. 11. Отжимание от пола

И.п. – упор лежа, руки согнуты немного шире плеч, ладони под плечевыми суставами (рис. 11).

1 – отжаться от пола одним движением, полностью выпрямить руки –выдох; 2 – и.п. – вдох, согнуть руки в локтях.

Выполнить 30 раз.

**Методические указания:** удерживать тело так, чтобы голова была немного выше ног. В нижней точке грудь параллельна полу и почти касается его.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* бицепс, широчайшая мышца спины, прямая мышца живота.

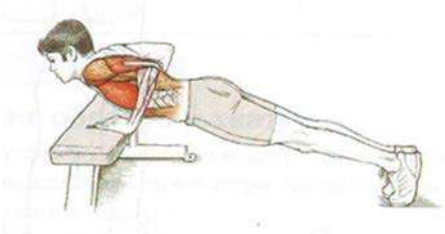


Рис. 12. Наклонное отжимание

**Безопасность при выполнении**

Не следует ускорять движение, поскольку при выполнении наклонного отжимания работают мышцы вращающей манжеты плеча, которые при ускорении движения могут травмироваться.

Отжимание с обратным наклоном переносит акцент на верхнюю часть спины (рис. 13). Использование мяча требует лучшей стабилизации корпуса, поэтому данное упражнение активно задействует вспомогательные мышцы.

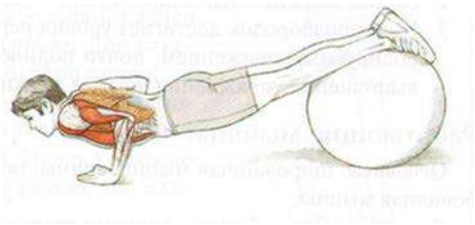


Рис. 13. Отжимание с мячом

**Методические указания:** при выполнении отжимания следить за тем, чтобы корпус не провисал. Держать тело в фиксированном положении, если это не получается, нужно взять мяч меньшего диаметра.

**Значимость мышц для бега**

Отжимание относится к числу самых простых силовых упражнений и является очень эффективным упражнением для укрепления верхней части тела. Для его выполнения не нужны ни тренажеры, ни отягощения (кроме веса собственного тела). Упражнение выполняется одним движением. Базовое упражнение простое, его варианты (наклонное отжимание и отжимание с мячом) немного сложнее. Отжимание прорабатывает мышцы верхней части тела и брюшной пресс бегуна, в результате чего улучшается осанка. Техника отжимания схожа с положением, в котором находится корпус во время бега, что способствует формированию правильной осанки. В течение одного занятия можно выполнять несколько подходов отжимания. Подобно любым другим силовым упражнениям, эти упражнения не следует выполнять изо дня в день, так как

организм нуждается в отдыхе, который позволит восстановиться мышечным волокнам, получившим нагрузку во время отжиманий.

Наклонное отжимание – переносит акцент на верхнюю часть груди и плечи. Можно выполнить большее число повторений этого отжимания, чем основного его варианта, поэтому данное упражнение можно использовать для начала занятий, когда сложно выполнять обычное отжимание.

**Упражнения для верхней части спины**

И.п. – вис на перекладине хватом сверху (рис. 14).

1 – движение вверх, до подбородка; 2 – и.п.

Выполнить 10-12 раз.

**Методические указания:** в ходе выполнения упражнения ноги не должны касаться земли, движение вверх выполнять без рывков.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* широчайшая мышца спины, большая круглая мышца, ромбовидная мышца.

*Дополнительные:* бицепс, большая грудная мышца.

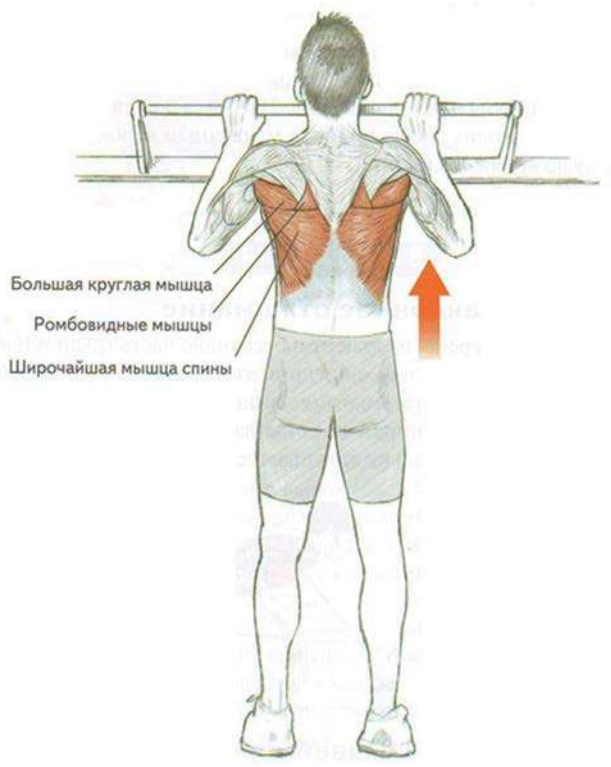



Рис. 14. Подтягивания на перекладине хватом сверху

**Значимость мышц для бега**

Подтягивание – упражнение, противоположное отжиманию от пола и дополняющее его. Для начинающих осваивать упражнение можно использовать подставку, чтобы выполнить первое повторение и подтянуться столько раз, сколько это

возможно сделать уверенно. Подтягиваться можно хватом сверху и снизу, не извиваться и не делать рывков. Упражнение позволяет эффективно развивать силу и укреплять мышцы верхней части спины.

И.п. – вис на перекладине хватом снизу (см. рис. 15).

1 – движение вверх, до подбородка; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения ноги не должны касаться земли.



Рис. 15. Подтягивание хватом снизу

**Мышцы, участвующие в работе**

Подтягивание хватом снизу позволяет задействовать бицепсы эффективнее, чем подтягивание прямым хватом. Учитывая сравнительно небольшой размер бицепсов, выполнять это упражнение тяжелее, потому что эти мышцы быстро устают.

Оба варианта упражнения можно чередовать во время напряженной тренировки мышц верхней части спины. Их также можно выполнять по отдельности в разные дни в ходе обычного занятия.

**Значимость мышц для бега**

Тяга вниз, прорабатывающая мышцы верхней части спины, не является стандартным движением, совершаемым при беге. Упражнение повышает беговые показатели путем укрепления соответствующих мышц (широчайшей мышцы спины и круглых мышц), которые стабилизируют грудную клетку, улучшая дыхание и осанку. Укрепление мышц верхней части спины помогает уравновесить мышцы груди, развитые соответствующими упражнениями, создается баланс мышц корпуса, которые позволяют сохранять осанку во время длительного бега. Упражнение следует ввести в начальном периоде занятий.




Рис. 16. Тяга к животу одной рукой в наклоне

И.п. – поставить колено правой ноги на скамью, упор в скамью ладонью правой руки, левая рука с гантелью находится ниже уровня поверхности скамьи (см. рис. 16).

1 – рука вверх до угла 90° в локтевом суставе; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-20 раз.

**Методические указания:** движение руки вверх за счет мышц верхней части спины и плеч. Упражнение напоминает движение, совершаемое при работе пилой.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* широчайшая мышца спины, большая круглая мышца, передний пучок дельтовидной мышцы, бицепс, трапециевидная мышца.

*Дополнительные:* мышца, выпрямляющая позвоночник, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

**Значимость мышц для бега**

Упражнение несложное, в выполнении позволяет прорабатывать сразу несколько мышц. Можно использовать отягощение большого веса (после того как освоена правильная техника выполнения упражнения). Укрепление дельтовидной и трапециевидной мышц поможет студенту правильно держать голову и руки. Если эти мышцы обладают достаточной силой, они значительно улучшат работу рук во время забегов на короткие дистанции, помогут преодолевать усталость во время продолжительных забегов и соблюдать технику во время бега по пересеченной местности.

Важным элементом этого упражнения является изолирование мышц верхней части спины и плеч. Для стабилизации корпуса также используется и брюшной пресс, основная нагрузка должна приходиться на широчайшие мышцы спины, трапециевидные, дельтовидные мышцы и бицепсы.

И.п. – стоя в наклоне в руках штанга, ноги на ширине плеч (см. рис. 17). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой к поясу; 2 – и.п.

Выполнить 8-10 раз.

**Методические указания:** использовать вес, сопоставимый технически правильному выполнению упражнения.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* широчайшая мышца спины, трапециевидная мышца.

*Дополнительные:* трицепс, дельтовидная мышца.




Рис. 17. Тяга штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой к поясу

**Значимость мышц для бега**

У бегунов очень часто наблюдается мышечный дисбаланс, особенно между четырьмя мышцами квадрицепса, между четырехглавой мышцей и задней группой мышц бедра, а также между правой и левой ногой. Мышечный дисбаланс верхней части тела в ходе силовой подготовки студентов часто игнорируется. Все же в действительности дисбаланс между «толкающими» мышцами груди и «тянущими» мышцами верхней части спины оказывает большое влияние на технику бегового шага, потому что угол наклона корпуса вперед меняет силу и угол подъема колена, который выполняется за счет четырехглавых мышц во время фазы переноса маховой ноги. Недостаточный угол подъема колена, обусловленный сильным наклоном корпуса вперед, снижает скорость бега, особенно на коротких дистанциях.

Небольшой угол подъема колена можно компенсировать увеличением частоты шага, но при неправильном положении тела возможно негативное воздействие на беговые показатели. Таким образом, мышечная система студента в значительной мере определяет беговые показатели, и может показаться, что она играет второстепенную роль в физической подготовке. В частности, укрепив избранную крупную группу мышц (например, грудные мышцы с помощью «толкательных» упражнений), необходимо также укрепить и мышцы-антагонисты (в данном случае мышцы верхней части спины).

**Безопасность при выполнении**

Выполняя это упражнение, особенно с отягощением высокого веса, необходимо сохранять естественный изгиб поясницы, не округлять спину.

**Тяга штанги к поясу широким хватом**

(вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой)

Широкий хват позволяет проработать мышцы под другим углом. В данном случае работает та же основная группа мышц, но студенты, обладающие более длинными верхними конечностями, предпочитают именно этот вариант упражнения. Необходимо сохранять естественный изгиб поясницы.

**Упражнения для рук и плеч**

Для равномерного бегового движения необходимы руки. Каждая рука не только помогает удерживать равновесие, но и способствует движению вперед, играя роль противовеса, когда противоположная нога отрывается от земли. Высокий подъем колена сопровождается усиленной работой рук на протяжении первых нескольких десятков шагов, после чего руки продолжают интенсивно работать до конца забега [3, 4, 9].

Бегуны на длинные дистанции не станут тратить энергию, работая руками в манере спринтера, так как для них основным приоритетом является экономия усилий, они держат руки свободно, обычно согнув их под углом 90° и расслабив кисти. У спринтеров кисти рук напряжены. Работа рук имеет большое значение для успеха, хотя техника этой работы отличается в зависимости от типа бега.

Рука крепится к корпусу посредством плечевых суставов. Это неглубокие шаровидные суставы, входящие в суставную впадину лопатки. Плечевые суставы позволяют осуществлять движения в максимальном диапазоне, близком к 360°. Эта конструкция имеет высокую эффективность, хотя недостатком такой подвижности является нестабильность сустава, что делает его подверженным травмам. Связки,

фиксирующие сустав, должны быть достаточно эластичными, чтобы не препятствовать движению, поэтому стабильность сустава зависит от силы удерживающих его мышц.

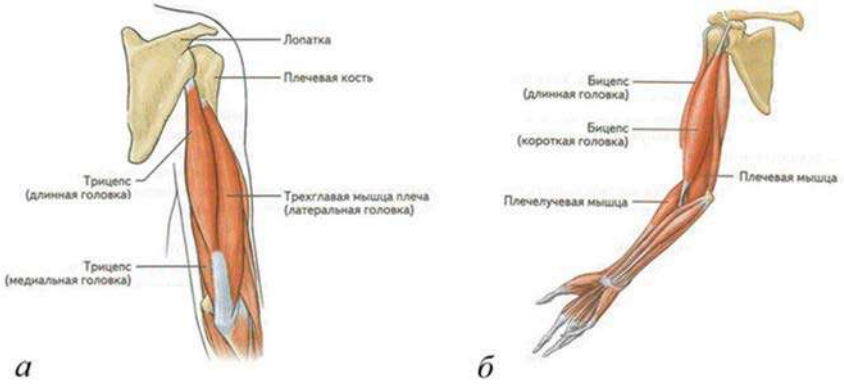



Рис. 18. Верхняя часть руки: *а* – вид сзади; *б* – вид спереди

Третий закон Ньютона гласит: сила действия равна силе противодействия. Если мышца-агонист сокращается и тянет плечо в одном направлении, то мышца-антагонист (или несколько мышц-антагонистов) должна удлиниться, чтобы позволить этому движению осуществиться. Сильные мышцы с хорошим тонусом могут нарушить целостность сустава, если противоположные мышцы (антагонисты) слабы, что особенно актуально для плечевого сустава [4].

Головка плечевой кости заключена в хрящевое кольцо сустава, которое является частью лопатки. Студенту следует знать, какие мышцы удерживают головку плечевой кости в стабильном положении (см. рис. 18) и какие из них следует укреплять, чтобы улучшить технику бега.

Движение ног во время совершения больших шагов требует соответствующих больших махов руками вперед и назад, позволяющих уравновесить перемещение нижних конечностей. В спринте движение рук и плеч играет особо значимую роль, и часто можно наблюдать, как спортсмен, проигравший забег, после соревнования совершает характерные движения, указывающие на закрепощенность плеч. Крепкие плечи не только увеличивают силу бегуна, но и улучшают его равновесие. Усталые руки и закрепощенные плечи ухудшают качество маховых движений руками, укорачивают беговой шаг и приводят к бесполезному увеличению расхода энергии. Выносливость верхних конечностей результат силовых упражнений [4, 9].

Дельтовидные мышцы, которые крепятся к ключице с одной стороны и к лопатке – с другой, покрывают весь плечевой сустав. Дельтовидные мышцы также соединены с плечевой костью. Сокращаясь, они оттягивают руку в сторону, то есть позволяют отводить ее, они противодействуют силе земного притяжения. Под дельтовидными мышцами находится сложная мышечная структура, позволяющая осуществлять движение

рукой в нескольких плоскостях. Для бегуна, у которого угол движения рук обычно не превышает 45° с минимальным диапазоном движения в стороны, это особого значения не имеет. В плечевом суставе руку удерживает сложная мышечная структура: надостная мышца охватывает головку плечевой кости; подостная, подлопаточная мышца, большая и малая круглые мышцы формируют вращающую манжету плеча, которая стабилизирует плечевой сустав. Ниже плечевого сустава (в области верхней части руки) расположены бицепс, трицепс и плечевая мышца. Их основная функция – приведение в движение локтевого сустава, но некоторые мышечные пучки крепятся также к плечевому суставу, обеспечивая ему большую стабильность [4, 10].

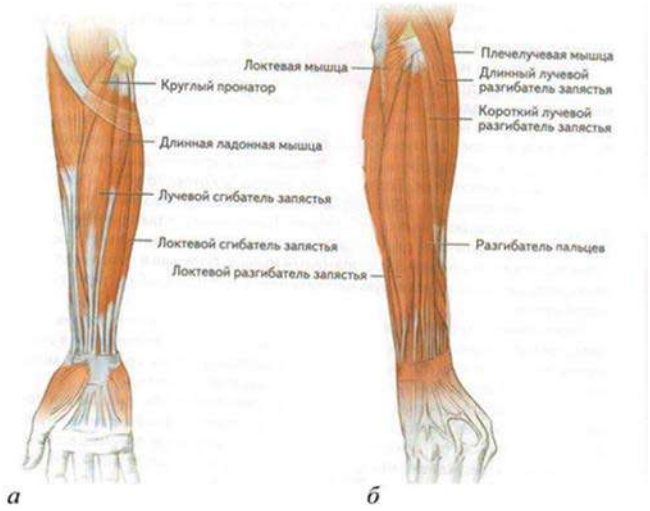



Рис. 19. Предплечье: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Мышцы-сгибатели и мышцы-разгибатели предплечья (рис. 19) обеспечивают движение кисти и пальцев. Эволюция определила использование рук во время бега в двух аспектах: во-первых, для стабилизации тела, а во-вторых, для удержания тела в вертикальном положении при движении каждой ноги. Сильные верхние конечности не только помогают развить полную мощность движения во время спринта, но и позволяют плечам расслабиться. Когда плечи напряжены, скорость бега неизбежно падает.

Необходимо знать, что если руки не будут включены в процесс бега, то не будет полной отдачи. Когда руки устают, уменьшаются длина и частота шага, в результате чего бегун замедляет движение.

**Методические указания:** держать спину ровно, выполняя упражнения для бицепсов. Не раскачиваться, чтобы помочь движению. Выбрать вес, который не препятствует плавному движению, относительно легкое отягощение. Локти держать ближе к корпусу, зафиксировать положение. Движение должно совершаться за счет бицепсов, а не плеч [4].

Бегуны, выбирая упражнения для рук, отдают предпочтение упраж- нениям для бицепсов, но для сбалансированного развития необходимо прорабатывать также и трицепсы. Упражнения для этих групп мышц следует выполнять с относительно небольшим весом, потому что бегунам на длинные дистанции необходимо поддерживать ритмичную работу рук на заключительных стадиях забегов, а не совершать мощные махи руками, как спринтерам, им следует выполнять большое число повторений (18-24) для повышения мышечной выносливости. Для бегунов на средние дистанции и спринтеров достаточно 8-12 повторений с большим весом отягощения.




Рис. 20. Попеременный подъем гантели на бицепс стоя

И.п. – стойка, ноги на ширине плеч, немного согнуты в коленях, руки с гантелями вниз (рис. 20).

1 – правая рука с гантелью тыльной стороной к плечу; 2 – и.п.; 3 – левая рука с гантелью тыльной стороной к плечу; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 12-15 раз.

**Методические указания:** во время выполнения упражнения не раскачиваться, верхняя часть руки зафиксирована в локте, проходя отметку 90°, верхняя часть руки не должна двигаться вместе с ней. Стоя боком к зеркалу, проследить за тем, чтобы локоть был зафиксирован (основная нагрузка должна приходиться на бицепс).

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* бицепс, плечевая мышца, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* плечелучевая мышца, лучевой сгибатель запястья.

**Безопасность при выполнении**

Упражнение может вызвать проблемы, если попытаться выполнять его с отягощением слишком большого веса. Оптимальный вес должен быть достаточно велик, чтобы обеспечить должную нагрузку для всех повторений, но при этом не вызывать

нарушения формы выполнения упражнения. Не поднимать гантель с помощью мышц верхней части спины. Движение выполняется только за счет бицепсов.

**Значимость мышц для бега**

Развитие силы мышц не равнозначно приращению мышечной массы. Упражнение для бицепсов, выполняемое с правильно подобранным весом отягощения и большим количеством повторений в комплексе с напряженной беговой программой, обеспечит повышение функциональной силовой выносливости без прироста мышечной массы. Цель студента в беге на длинные дистанции состоит в том, чтобы обеспечить надежный противовес движениям ног, поэтому во время длительного тренировочного или соревновательного забега бицепсы уставать не должны. В данном случае высшим приоритетом является силовая выносливость, выполнение 12-18 повторений и многочисленных подходов попеременного подъема гантели на бицепс стоя.

Подъем штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на бицепс можно выполнять прямым, средним, узким и широким хватом. Узкий хват активнее других задействует двуглавые мышцы плеч. Широкий хват подключает передние пучки дельтовидных мышц. Можно использовать все три варианта хвата (см. рис. 21). Полная тренировка для бицепсов может состоять из одного этого упражнения – по подходу с каждым хватом.



Рис. 21. Подъем штанги на бицепс разнохватом




Рис. 22. Попеременный «молоток» стоя

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, руки вниз с гантелями (рис. 22).

1 – гантель к плечу; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз на каждую руку.

**Методические указания:** верхняя часть руки должна быть зафиксирована, она не должна двигаться вместе с ней, когда гантель проходит 90°.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* бицепс, плечевая мышца.

*Дополнительные:* мышцы-разгибатели предплечья.

**Безопасность при выполнении**

Не поднимать гантель за счет мышц верхней части спины. Движение выполняется только с помощью бицепсов. Стоя боком к зеркалу, проследить за тем, чтобы локоть оставался в фиксированном положении (основная нагрузка должна приходиться на бицепс).

**Значимость мышц для бега**

Выполнение этого упражнения напоминает подъем на бицепс – меняется только положение кисти руки. «Молоток» развивает преимущественно силу бицепса, в меньшей степени – плечевой мышцы. Выполняя данное упражнение в конце тренировки бицепса, можно довести эту группу мышц до окончательного утомления. «Молоток» повышает

гибкость локтевого сустава, так как нагрузка распределяется по всему диапазону движения.

Нередко бегуны жалуются на боли в области бицепсов после коротких забегов. Поскольку в этом случае требуется более активная работа рук, на мышцы верхней части рук приходится большая нагрузка. Выполняя упражнения для бицепсов, можно предотвратить наступление усталости во время забегов, а также сократить время отдыха между повторениями силовых упражнений.

**«Молоток» двумя руками сидя**

И.п. – сидя на скамье, ступни прижаты к полу, спина ровная, руки с гантелями вниз, ладони обращены друг к другу.

1 – «молоток» одновременно двумя руками; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** упражнение требует координации обеих рук и может приводить к утомлению мышц быстрее, чем вариант с попеременным подъемом рук.

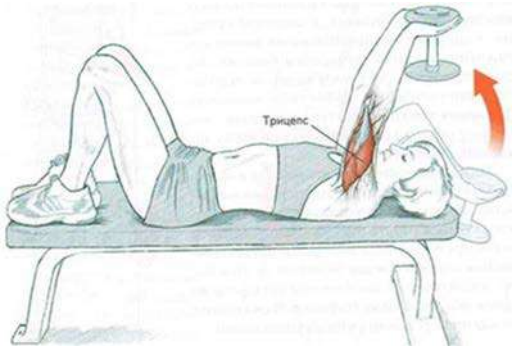



Рис. 23. Экстензия на трицепс с гантелью лежа

И.п. – лежа на спине, на скамье, ступни плотно прижаты к скамье, в руках согнутых под углом 90° гантели (рис. 23).

1 – руки с гантелями вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-12 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать гантели, туловище неподвижно.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

**Безопасность при выполнении**

Начинать выполнять упражнение, держа гантель в выпрямленных руках над головой. В этом случае первым движением станет обратная фаза упражнения – опускание гантели за голову.

**Значимость мышц для бега**

Экстензия на трицепс, направлена на укрепление трицепсов (мышц-антагонистов для бицепсов), что создает сбалансированную и хорошо развитую мускулатуру верхней части руки. Мышцы предплечья используются в качестве вспомогательных. Движение осуществляется только в локтевых суставах и производится исключительно за счет трицепсов.

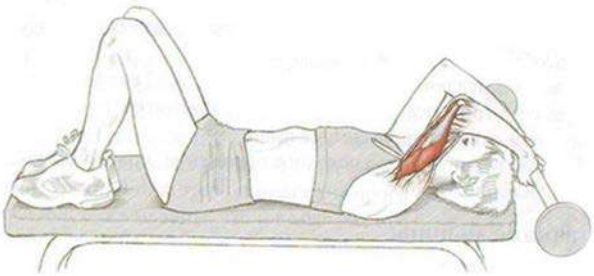


Рис. 24. Экстензия на трицепс со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье лежа

И.п. – лежа на спине, на скамье, ступни плотно прижаты к скамье, в руках согнутых под углом 90° штанга (рис. 24). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – руки вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать штангу, туловище неподвижно.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

**Безопасность при выполнении**

Начинать выполнять упражнение, держа гантель в выпрямленных руках над головой. В этом случае первым движением станет обратная фаза упражнения – опускание гантели за голову.




Рис. 25. Разгибание руки с гантелью на скамье

И.п. – стоя, упор левым коленом на скамью, правой рукой упор в скамью и правую ногу поставить на пол (см. рис. 25). Держать ровно спину и голову. Рука с гантелью согнута в локте под углом примерно 90°, ладонь обращена к бедру.

1 – разогнуть руку – выдох; 2 – и.п. – вдох.

Выполнить 2 подхода по 15 раз на каждую руку.

**Методические указания:** держать локоть в фиксированном положении на одной линии с корпусом, не менять положение локтя во время выполнения упражнения. Прижать локоть к туловищу и зафиксировать положение, не опускать плечо, чтобы помочь движению.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

*Дополнительные:* надостная мышца, подостная мышца, дельтовидная мышца, большая грудная мышца.

**Значимость мышц для бега**

Разгибание руки с гантелью задействует главным образом трицепс, но также подключает надостную и подостную мышцы, так как начальная фаза маха рукой в беге начинается от плеча, укрепление мышц плеч и плечевого пояса посредством этого упражнения помогает предотвратить утомление рук и ухудшение осанки, что является причинами снижения беговых показателей в связи с нерациональными тратами энергии.



Рис. 26. Разгибание обеих рук с гантелями

И.п. – стоя в полунаклоне, ноги на ширине плеч, гантели в руках внизу (см. рис. 26).

1 – одновременно разогнуть руки; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** упражнение прорабатывает те же мышцы, что и в ходе разгибания одной руки на скамье, а также активизируются брюшной пресс и мышцы поясницы, чтобы стабилизировать корпус.

И.п. – стоя, хватом снизу держать штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги немного уже ширины плеч. Угол между верхней частью рук и предплечьями примерно 75°.

1 – руки вниз – выдох (локти не меняют исходного положения); 2 – и.п. – вдох.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** локти приближены к бокам, их положение остается зафиксированным в ходе всего упражнения.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс, мышцы-разгибатели предплечья.

**Значимость мышц для бега**

При выполнении упражнения «тяга вниз» прорабатываются прежде всего трицепсы, но поскольку используется обратный хват, то дополнительно развиваются также и мышцы предплечий. Упражнение отлично подходит в качестве переходного от упражнений преимущественно на трицепс к упражнениям для предплечий. Трицепсы и мышцы-разгибатели предплечий в ходе этого упражнения быстро утомляются, они устают во время забегов на длинные дистанции, где активная работа рук является дополнительным средством увеличения скорости бега.




Рис. 27. Подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье

**Выполнение подъема на предплечье**

И.п. – сидя в полунаклоне на скамье с опорой на предплечья, в руках штанга хватом снизу, кисти и запястья выходят за край скамьи (рис. 27). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – штанга вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** подъем штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой до полного выпрямления на кистях рук, выполняя движение за счет мышц предплечий.

**Выполнение обратного подъема на предплечье**

И.п. – сидя в полунаклоне на скамье с опорой на предплечья, в руках штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой хватом сверху, кисти и запястья выходят за край скамьи (см. рис. 27).

1 – штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой вверх (до полного выпрямления на кистях рук, выполняя движение за счет мышц предплечий); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** сосредоточиться на полном растягивании мышц, быстрым движением штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой не опускать. При неудобном положении – положить предплечья на переднюю поверхность бедер.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* мышцы-сгибатели предплечий, мышцы-разгибатели предплечий.

**Значимость мышц для бега**

На начальном этапе силовой подготовки мышцы-сгибатели и мышцы- разгибатели предплечья укрепляются в ходе других, неспецифических упражнений. В дальнейшем можно начать использовать подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье для особой проработки этих мышц. Каждое предплечье удерживается под углом примерно 90° к верхней части руки, выступая в качестве противовеса действию противоположной ноги. За длительное время бега неизбежно наступает усталость мышц, запуская цепь биомеханических изменений, приводящих к нарушению осанки и излишним затратам энергии. Выполняя силовые упражнения для рук, наступление этой реакции можно смягчить или вообще предотвратить, что равноценно экономии энергии и лучшим беговым результатам.

### 3.2. Упражнения для средней части тела

Главная задача костей, составляющих таз женщины, заключается в создании защитной структуры для развивающегося утробного плода. Мужчинам эта функция не нужна. У них более узкие бедра формируют платформу, соединяющую ноги с остальными частями тела. Таз мужчин эволюционно формировался для обеспечения движения [4, 10].

Таз составляют шесть костей: две подвздошные, две седалищные и две лобковые кости (см. рис. 28). И хотя эти кости прочно соединяются друг с другом без видимых

промежутков, подвздошные кости соединяются с крестцом посредством крестцово-подвздошных суставов, и в данной области может наблюдаться значительная степень подвижности. Это становится очевидным во время родов, когда гормональные изменения вызывают ослабление связок, удерживающих суставы, что приводит к частичному вывиху. Выше крестца расположено пять позвонков поясничного отдела, которые играют важную роль в поддержании стабильности всей скелетной структуры. Каждая лобковая кость соединяется с лобковым симфизом. Это прочное фиброзное соединение может быть подвержено повреждениям в результате хронической перетренированности, так как оно формирует опорную точку и точку приложения максимальной силы.

С каждой стороны подвздошной кости имеется вертлужная впадина, формирующая шаровидный тазобедренный сустав. Такая форма сустава эволюционно сложилась для того, чтобы совместить максимальную стабильность с максимально возможным диапазоном движения. Подобным образом устроен и менее глубокий плечевой сустав, который в большей степени подвержен вывихам под нагрузкой. Головка бедренной кости лежит в округлом углублении тазобедренного сустава, диапазон движения которого ограничен этим углублением, а также плотностью и эластичностью окружающих его мышц и сухожилий.

Если таз уподобить циферблату часов, то два крестцово-подвздошных сустава располагаются в небольшом отдалении друг от друга в позиции 11 и 13 часов; тазобедренные суставы – в позиции 4 и 8 часов; лобковый симфиз – в позиции 6 часов. Если один из этих суставов смещается, другой также должен изменить свое положение, чтобы компенсировать перемещение. Это приобретает большое значение при беге, при котором таз поворачивается из стороны в сторону, воздействуя на все структуры таза.

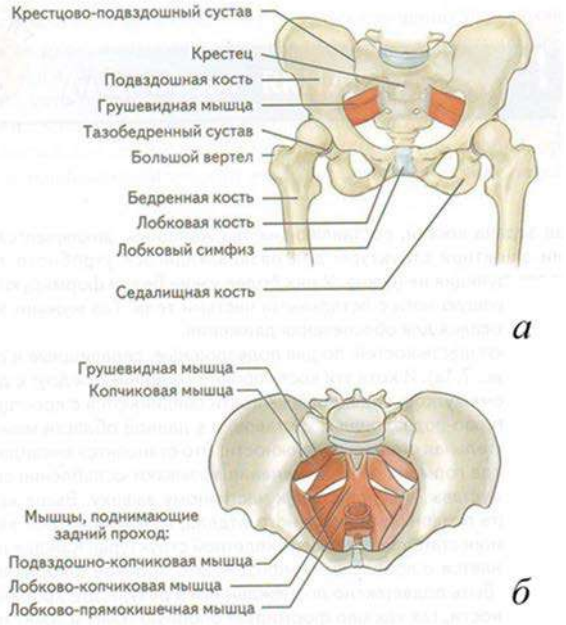


Рис. 28. Кости и мышцы таза: *а* – костные структуры; *б* – мышцы таза

Тазовое дно формируют мышцы, поднимающие задний проход (см. рис. 29), которые, собственно, и выполняют указанную функцию. Помимо этого, они являются опорой для внутренних органов. Ослабление мышц, поднимающих задний проход, может привести к недержанию, поэтому их нужно укреплять и поддерживать в тонусе. Бег повышает давление в брюшном отделе, и любое ослабление мышц может вызвать нежелательные физические симптомы.

Другие мышцы тазового дна выполняют двойную функцию – стабилизируют ноги и приводят их в движение в тазобедренных суставах. Стабильность дополнительно обеспечивается некоторыми крупными сухожилиями, которые относительно слабо растягиваются, тем не менее позволяя совершать движения в достаточно большом диапазоне. Подвздошно- поясничные мышцы, отходящие от поясничного отдела позвоночника и внутренней части крестца и проходящие через таз, формируют мягкие стенки для внутренних органов с внутренней стороны бедренной кости ниже тазобедренного сустава. Выше поясничного отдела позвоночника располагаются их антагонисты – мышцы, выпрямляющие позвоночник, которые стабилизируют его извне. Подвздошно-поясничные мышцы являются мощными сгибателями бедер, подтягивающими бедра (ногу выше колена) к животу.




Рис. 29. Мышцы средней части тела и бедра: *а* – вид сзади; *б* – вид спереди

Ягодицы сформированы тремя слоями ягодичных мышц, отходящих вниз от спины под углом 45° к крестцу. Сокращение наружного слоя – большой ягодичной мышцы, выпрямляет и поворачивает тазобедренный сустав наружу. Большая ягодичная мышца переходит в напрягатель широкой фасции. Расположенные под большой ягодичной мышцей средняя и малая ягодичные мышцы отходят от вершины бедренной кости в области большого вертела. Их задача – отведение бедра наружу. Тазобедренный сустав в этом случае работает как центр шарнира.

Студенты, испытывающие боли в области поясницы, часто страдают синдромом грушевидной мышцы. Грушевидная мышца располагается параллельно средней ягодичной мышце, а боль появляется, скорее всего, по причине близости к седалищному нерву, который раздражает грушевидная мышца. Она стабилизирует тазобедренный сустав и позволяет отводить бедро.

Так как тазобедренный сустав подвижен, несколько мышечных групп должны уравновешивать действие мышц, расположенных в области таза. Эти мышцы в основном отводят бедро назад, в сторону и поворачивают его наружу. Противоположные мышцы – мышцы верхней части ноги, зачастую выполняют сразу несколько функций. Задняя группа мышц бедра (полуперепончатая мышца, полусухожильная мышца и двуглавая мышца бедра) берет начало от лобковой кости и идет вниз по бедру с обратной стороны коленного сустава, выступая в качестве его сгибателя (см. рис. 29). Функция этих мышц заключается в отведении бедра назад. Функцией, противоположной отведению, является приведение. Три приводящие мышцы (большая, длинная и короткая) вместе с тонкой и гребенчатой мышцами позволяют нам сводить бедра. Эти мышцы берут начало от лобковой кости и проходят по внутренней стороне бедра. Подобно подвздошно-поясничным мышцам четырехглавые и портняжные мышцы также отводят бедро и, сокращаясь, сгибают его.

Процесс бега требует повторяющихся движений, поэтому мышечный дисбаланс может приводить к воспалению суставной сумки.

В отличие от груди, живот не имеет костной структуры, выполняющей функцию стабилизации. Высота по вертикали задается и поддерживается поясничным отделом позвоночника. Функцию стабилизации выполняют органы брюшной полости, прилагающие противоположно направленное давление на мышечную стенку, состоящую из прямой мышцы живота, которая отходит от основания грудной клетки, проходит по центру и соединяется с лобковым симфизом и лобковой костью (см. рис. 30).

С боковых сторон диагонально расположены наружные и внутренние косые мышцы и поперечная мышца живота, выполняющие три функции: повороты корпуса, сгибание туловища вперед и защиту внутренних органов брюшной полости. Во время бега мышцы поочередно растягиваются и сокращаются по мере того, как таз движется не только из стороны в сторону, но также поворачивается, поднимается и опускается относительно окружающих его частей тела. Эти мышцы вместе с ребрами и диафрагмой участвуют в дыхании, когда оно становится учащенным, что особенно заметно, когда спортсмен начинает часто и тяжело дышать. Таким образом, мышцы выполняют несколько функций одновременно, они действуют эффективнее, если достаточно развиты.

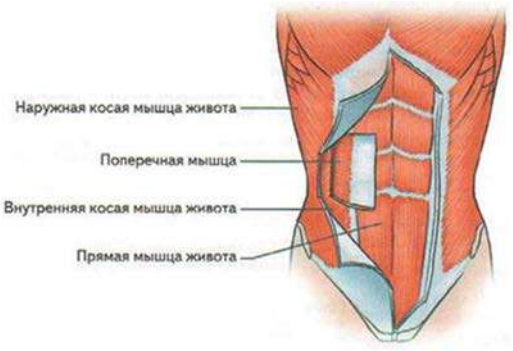



Рис. 30. Мышцы живота

Мышцы поясницы и поясничный отдел позвоночника мало задействованы, стабилизируя корпус, позволяя спортсмену сохранять правильную осанку. Во время бега позвоночник может сгибаться, когда корпус наклоняется вперед или назад в соответствии с изменением рельефа местности, но этому противодействуют мышцы поясницы и поясничный отдел позвоночника. Круговая мускулатура обеспечивает повороты корпуса, наклон тела при прохождении поворотов и движении по любому склону, отсюда – мышцы должны сокращаться и растягиваться, чтобы поддерживать стабильность корпуса и тела в целом. Такие сложные движения должны сосуществовать в сочетании со всеми другими вариантами положения тела, которые оно принимает, когда ноги двигаются и легкие дышат. Потенциальная сила мышц, особенно окружающих поясничный отдел позвоночника, должна рассматриваться как значимый фактор для каждого бегуна, поскольку слабость этих мышц неизменно скажется на других областях [4].

**Рекомендации для проведения занятий:** при выполнении упражнений с весом собственного тела следует делать несколько подходов с большим количеством повторений. Необходимо их выполнять в медленном темпе, при отсутствии дополнительного отягощения сосредоточиться следует на максимально точном выполнении движений.

Большое количество повторений позволяет эффективно развивать мышечную выносливость, в чем заинтересованы бегуны на длинные дистанции. Вместе с тем увеличить силу, позволяющую повысить скорость бега, можно, только используя на занятиях отягощения большого веса.

Упражнения для средней части тела следует выполнять на всех стадиях занятий, т.к. во многих случаях используется только вес собственного тела без дополнительных отягощений, их можно выполнять 3-4 раза в неделю.

**Упражнения для мышц поясницы и ягодиц**

И.п. – упор лежа (см. рис. 31). 1 – корпус вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по десять раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения подъем корпуса зафиксировать на 10-15 с.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* мышца, выпрямляющая позвоночник; большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.




Рис. 31. Экстензия спины с отжиманием от пола

**Значимость мышц для бега**

Экстензия спины с отжиманием от пола помогает укрепить мышцы и связки спины, непосредственно мышцу, выпрямляющую позвоночник, которая является антагонистом прямой мышцы живота. Упражнение как укрепляет, так и растягивает поддерживающие мышцы крестцового и поясничного отделов позвоночника, помогая правильно поворачивать таз и уменьшая угол его наклона вперед (если выполняется слишком большое количество упражнений для укрепления брюшного пресса, что может приводить к дисбалансу между брюшным прессом и мышцами поясницы). Упражнение не следует путать со стандартным отжиманием от пола.

В укреплении мышц средней части тела основное внимание зачастую уделяется брюшному прессу, а мышцам поясницы и ягодиц отводится меньше времени. Тем не менее без сильных мышц ягодиц и уверенной поддержки поясницы задняя группа мышц бедра не может генерировать достаточно силы, даже если сама по себе она хорошо развита. Поскольку мышцы сильны лишь настолько, насколько позволяет самое слабое звено в кинетической цепи.

Для бегового шага большое значение имеет правильное движение таза. Смещение таза, обусловленное мышечным дисбалансом между брюшным прессом и мышцами поясницы, может привести к травмам, которые снизят беговые показатели даже при условии хорошей подготовки сердечно- сосудистой системы.

И.п. – лежа на животе на полу, руки вперед, ноги вместе (рис. 32).

1 – одновременно поднять левую руку и правую ногу на 7-10 см; 2 – и.п.; 3 – одновременно поднять правую руку и левую ногу; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.




Рис. 32. Попеременный подъем рук и ног

**Методические указания:** при выполнении упражнения в поднятом положении руки и ноги зафиксировать на 10-15 с.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* мышца, выпрямляющая позвоночник; большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

**Значимость мышц для бега**

Цель упражнения – укрепить и растянуть мышцы поясницы, ягодиц и, в меньшей степени, брюшного пресса, чтобы сохранить правильный наклон таза во время бега. Смещение таза запускает цепную реакцию смещения других частей тела, что негативно сказывается на технике бега и приводит к дополнительному расходу энергии. Мышцы спины, ягодиц и брюшной пресс работают одновременно, но также уравновешивают друг друга, чтобы сгенерировать силы для выполнения упражнения. Это напоминает механизм работы мышц средней части тела во время бега. Поскольку таз поворачивается в разных направлениях, средняя часть тела должна динамично стабилизироваться, отвечая на изменения беговой поверхности, повороты и неверные шаги (рис. 33).

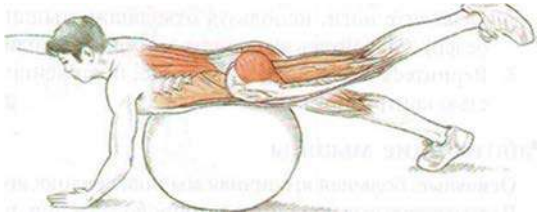


Рис. 33. Гиперэкстензия поясницы на мяче

Использование мяча изменяет динамику гиперэкстензии поясницы, если использовать только одну руку (а при достаточной тренированности можно обходиться и без рук), можно развивать проприоцепцию (координацию расположения тела в

пространстве). Также можно научиться удерживать равновесие на мяче, если освоить технику выполнения упражнения и укрепить мышцы средней части тела, чтобы они активизировались по мере необходимости. Бегуны склонны пренебрегать упражнениями, развивающими проприоцепцию, поскольку их польза не очевидна. В действительности хорошая проприорецепция улучшает технику, создавая более плавный стиль бега.

**Упражнения для брюшного пресса и таза**

И.п. – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки за головой (рис. 34).

1 – поднимать корпус вверх, отрывая по одному позвонку от пола и одновременно прижимая к нему ягодицы; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 25-30 раз.




Рис. 34. Подъем корпуса на полу

**Методические указания:** при выполнении упражнения в верхней точке корпус должен составлять с полом угол 45°. Можно работать в паре с партнером, для удержания стоп, что облегчает упражнение и позволяет выполнить большее количество повторений.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота.

*Дополнительные:* напрягатель широкой фасции, четырехглавая мышца.

**Безопасность при выполнении**

Не смыкать ладони за головой, а просто завести их за затылок, иначе можно растянуть мышцы шеи, помогая подъему корпуса движением рук.



Рис. 35. Подъем корпуса с поворотом

И.п. – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки за головой (рис. 35).

1 – корпус вверх с поворотом; 2 – и.п.

Выполнить 12 раз в каждую сторону.

**Методические указания:** при выполнении упражнения можно на каждое повторение менять стороны, но при этом обязательно касаться локтем колена противоположной ноги.

**Значимость мышц для бега**

Брюшной пресс и мышцы поясницы являются антагонистами и уравно- вешивают друг друга, так же как четырехглавые мышцы и задняя группа мышц бедра. Для того чтобы избежать мышечного дисбаланса и травм, упражнения для брюшного пресса необходимо выполнять после силовых упражнений для мышц поясницы. Не следует выполнять подъем корпуса с максимальной скоростью, движение должно быть относительно быстрым, опускать корпус следует медленно, контролируя работу брюшного пресса.

Упражнение помогает прорабатывать главным образом прямую мышцу живота, которая управляет сокращением брюшного отдела. Так как все упражнения для брюшного пресса задействуют эту мышцу, серию упражнений можно начать с подъема корпуса, достаточно одного подхода до утомления.

Большое значение для бегового шага имеет правильное движение таза. Смещение этой области, обусловленное мышечным дисбалансом между брюшным прессом и мышцами поясницы, может привести к травмам, которые снизят беговые показатели даже при хорошей подготовке сердечно-сосудистой системы.

И.п. – вис на перекладине хватом сверху (рис. 36).

1 – колени к груди; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.




Рис. 36. Подъем ног в висе

**Методические указания:** при выполнении упражнения по сгибанию ног корпус не должен раскачиваться. Упражнение чрезмерно нагружает плечи; при травме плеча необходимо ограничить число повторений.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, подвздошно-поясничная мышца.

*Дополнительные:* широчайшая мышца спины, передняя зубчатая мышца.

Стандартный подъем ног в висе задействует наружные и внутренние косые мышцы живота, но добавление при подъеме поворота ног увеличивает роль мышц, которые отвечают за поворот и наклоны корпуса в стороны (рис. 38). Косые мышцы живота позволяют корпусу наклоняться в стороны, тем самым давая возможность приспосабливаться к беговой поверхности, а также они вместе с диафрагмой и ребрами участвуют в дыхании.



Рис. 37. Подъем ног с поворотом в висе

**Значимость мышц для бега**

Мышцы-сгибатели бедра, в частности подвздошно-поясничная мышца, очень устают за время долгого забега по одной и той же поверхности. Укрепив их, спортсмены могут отсрочить наступление утомления. Кроме того, во время бега по пересеченной местности, когда приходится помногу поднимать ноги, слабые мышцы устанут быстрее и бегуну труднее станет твердо держаться на ногах.

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, правая рука с гантелью внизу, левая рука согнута в локте и заведена за голову (см. рис. 38).

1 – наклон вправо; 2 – и.п.

Выполнить 12 раз правой рукой, затем переложить гантель в левую руку и повторить упражнение.

**Методические указания:** при выполнении упражнения наклон корпуса выполнять в медленном темпе.




Рис. 38. Наклоны в стороны с гантелью

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* наружная косая мышца живота.

*Дополнительные:* прямая мышца живота, квадратная мышца поясницы.

**Значимость мышц для бега**

Целью упражнения является гармоничное развитие мышц живота. Большинство упражнений сосредоточены на проработке прямой мышцы живота. Наклоны в стороны, выполняемые в упражнении, позволяют укрепить наружные косые мышцы живота, которые прорабатываются в ходе подъема ног с поворотом в висе. Укрепление наружных косых мышц живота дает возможность минимизировать наклоны корпуса из стороны в

сторону в конце скоростного забега или ускорения во время тренировки скорости, т.к. мелкие мышцы живота устают быстрее, чем крупные (прямая мышца живота); имеет смысл выполнять упражнения, направленные на проработку мелких мышц, чтобы они поддерживали свою относительную силу.

Практическое применение упражнения состоит в исключении раскачивания корпуса из стороны в сторону во время бега. Раскачивание может быть обусловлено различной постановкой ног в связи с неровностью беговой поверхности, но более распространенной причиной этой проблемы является слабость мышц живота, особенно косых. Неспособность мышц живота удерживать корпус в вертикальном положении приводит к раскачиванию таза из стороны в сторону.

И.п. – лежа на спине, руки вверх за голову, левая нога согнута в колене, а правая (прямая) вверх от пола примерно на 15 см (рис. 39).

1 – руки вперед-вверх, поднять корпус, одновременно поднять прямую правую ногу; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-12 раз.




Рис. 39. Подъем корпуса и ноги

**Методические указания:** корпус поднимать с подбородка и груди, дотронуться руками прямой поднятой ноги в верхней точке.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, поперечная мышца живота, подвздошно-поясничная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца. Использование медицинского мяча позволяет интенсивнее проработать мышцы живота,

т.к. используется дополнительное отягощение (рис. 40). Медицинский мяч удерживается на расстоянии вытянутых рук от мышц живота, поэтому даже легкий 1-3-килограммовый мяч (в зависимости от физической подготовки) ощущается как достаточно тяжелый по причине удаления от точки опоры (т.е. от мышц живота). Необходимо в ходе упражнения учитывать дополнительное отягощение, что помогает развивать координацию движений – умение, которое невозможно развить в результате простого бега.

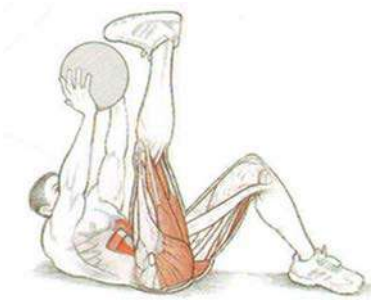


Рис. 40. Подъем корпуса и ноги с медицинским мячом

**Значимость мышц для бега**

Упражнение динамичное быстро утомляет мышцы живота и подвздошно-поясничные мышцы, т.к. в подъеме корпуса и ноги сочетается движение верхней и нижней части тела. Упражнение следует выполнять до полной усталости подъема корпуса и ноги, а также вариант с медицинским мячом, особенно если их выполнять в конце силовой тренировки, для тренировки мышц живота вполне достаточно.

### 3.3. Упражнения для мышц ног

Мышцы нижней части туловища и верхней части ног участвуют в совершении одних и тех же движений. Так, некоторые мышцы таза помогают движению и стабилизации ног – и наоборот. То же относится и к мышцам верхней части ноги, соединяющим тазобедренный и коленный суставы и соответственно влияющим на их движения и устойчивость. Верхняя часть ноги (рис. 41), или бедренная кость соединяется с лобковой и седалищной костями посредством тазобедренного сустава. Коленный сустав схож по функции со шкивом [4, 10]. Надколенник (коленная чашечка) перемещается по углублению в нижнем окончании бедренной кости, направляя действие выпрямляющих сил четырехглавой мышцы в области колена.

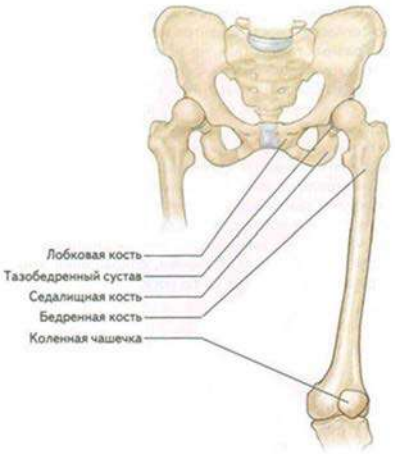



Рис. 41. Костные структуры верхней части ноги

Четырехглавая мышца бедра (см. рис. 42, *а*) имеет четыре головки: прямая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра, медиальная широкая мышца бедра и промежуточная широкая мышца бедра. Одной головкой она начинается от подвздошной кости и тремя – от бедренной и одним общим сухожилием крепится к большеберцовой кости, охватывая надколенник. Сокращение этой крупнейшей группы мышц позволяет выпрямлять коленный сустав и подтягивать колено к груди.

Особенную значимость это имеет для спринтера, которому сокращение четырехглавых мышц бедер позволяет увеличить длину шага. И все же высокий подъем колена приводит к излишнему расходу энергии в забегах на длинные дистанции, для которых специфичен незначительный диапазон движения тазобедренных и коленных суставов. Отсюда во время бега четырехглавые мышцы выполняют две функции, цель обеих – увеличение длины бегового шага. Если нога полностью выпрямлена в колене и четырехглавые мышцы максимально напряжены, то увеличивается не только длина шага, но и фаза переноса маховой ноги, что позволяет уже сгенерированному ускорению продвинуть тело дальше вперед.

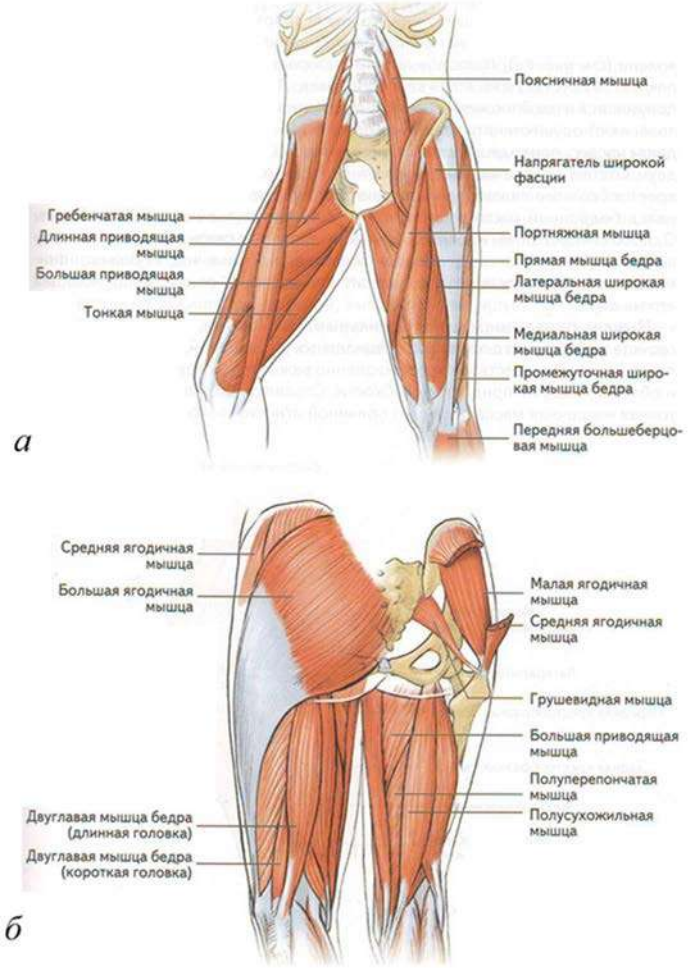



Рис. 42. Верхняя часть ноги: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Таким образом, все это можно отнести и к задней группе мышц бедра (см. рис. 42, *б*), проходящей через оба сустава (коленный и тазобедренный), но входящие в нее мышцы действуют противоположным образом, чтобы выпрямить ногу в тазобедренном суставе и согнуть ее в коленном суставе. Полуперепончатая, полусухожильная и двуглавая мышцы бедра имеют определенную согласованность в центре единого мышечного массива. Они расположены в разных точках таза, но за коленом расходятся и крепятся к тыльной части большеберцовой и малоберцовой костей. Сокращение мышц задней группы бедра позволяет отвести ногу назад; движение в особенности выражено у спринтеров. Бегуну на длинные дистанции увеличение диапазона сгибания колена не нужно, так как мышцы задней группы в этом случае отвечают за движения в области бедра.

Можно условно разделить заднюю группу мышц бедра на верхнюю и нижнюю половины, хотя верхняя часть мышц является разгибателем тазобедренного сустава, нижняя часть сгибает коленный сустав и ограничивает его подвижность. У бегуна на длинные дистанции задняя группа мышц бедра имеет ограниченный диапазон движения в

коленном и тазобедренном суставах, сокращение этих мышц весьма сильное даже при малых углах сгибания ноги.

Необычно, что колено должно иметь возможность совершать скручивающие движения, но иначе спортсмен не сможет поворачивать и бежать по неровной поверхности. С наружной и внутренней стороны колена (см. рис. 43) расположены коллатеральные связки, которые позволяют этому суставу двигаться вперед и назад. Два мениска, имеющие форму полумесяца и расположенные между бедренной и большеберцовой костями, позволяют осуществлять вращательные движения в суставе, по ним распределяется вес, приходящийся на коленный сустав. Также они позволяют бедренной и большеберцовой костям поворачиваться друг относительно друга. Передняя и задняя крестообразные связки препятствуют чрезмерному движению вперед или назад бедренной кости относительно большеберцовой кости и наоборот. Однако следует отметить, что в первую очередь эти связки направляют движение колена и участвуют в поддержании его стабильности. Важно понимать, что стабильность колена зависит прежде всего от силы окружающих его мышц.

Мышцы бедра должны быть сильными и гибкими, и каждое из этих свойств развивается с помощью специальных упражнений. Поддержание баланса этих двух качеств является жизненно важным, т.к. увеличение силы и объема мышц не придает им гибкости. Справедливо и обратное: недостаточная мышечная масса послужит причиной относительной слабости.




Рис. 43. Коленные связки и ткани

**Рекомендации для проведения занятий**

При выполнении следующих упражнений для верхней части ног очень большое значение имеет защита коленного сустава. Так как и передняя, и задняя группа мышц бедра крепятся к колену, которое совершает скручивающие движения, чтобы адаптироваться к изменениям беговой поверхности, поворотам, бегу вверх и вниз, постоянно осуществляется стабилизация и релаксация этого сустава. Упражнения, такие

как выпад, сначала могут показаться трудными, поэтому начинать их выполнение следует с отягощением небольшого веса, который по мере освоения упражнений можно будет увеличивать. Упражнения на тренажерах помогают защитить колени за счет фиксированного диапазона движения, но это снижает их эффективность.

Упражнения для верхней части ног полезно включать в программу на вводной фазе силовой подготовки. Во время завершающей фазы возможно ввести в качестве замены плиометрические упражнения, которые позволяют прорабатывать мышцы ног, не перегружая их.

**Упражнения для приводящих мышц**

И.п. – сидя на стуле, ноги сжимают мяч.

1 – свести ноги (используя приводящие мышцы бедер); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** стопы не используются при выполнении движений. Акцент делать на сведении ног с помощью медиальных широких мышц бедер.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* длинная приводящая мышца, короткая приводящая мышца, тонкая мышца.

*Дополнительные:* медиальная широкая мышца бедра.

**Значимость мышц для бега**

Упражнение на сведение ног можно использовать и в качестве части силовой программы, и в качестве реабилитационной программы, когда необходимо укрепить вспомогательные мышцы без лишней нагрузки на коленные суставы. Многие проблемы с коленями обусловлены дисбалансом между мышцами, образующими четырехглавую мышцу, в связи с чем может происходить смешение коленной чашечки в движении. Упражнение на сведение ног укрепляет приводящие мышцы бедер, а также попутно развивает медиальные широкие мышцы бедер, предупреждая чрезмерное смещение коленной чашечки. Укрепление приводящих мышц бедра и четырехглавой мышцы способствует мощному выпрямлению ноги в толчковой фазе бегового шага.

**Упражнения для четырехглавых мышц бедра**

И.п. – сидя на стуле, колени находятся на одной линии с точкой опоры удержания груза, спина прямая, руками держаться за края стула.

1 – ноги вверх (до выпрямления); 2 – ноги вниз – медленно, и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-18 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения выпрямлять ноги, не выключая их в коленях.

Не раскачиваться, чтобы помочь движению. В случае травмы колена экстензия ног по короткой дуге является замечательной заменой стандартной экстензии ног на тренажере. Единственный недостаток состоит в том, что это упражнение не действует на весь диапазон движения, но когда боль в коленном суставе пройдет, можно будет перейти к стандартной экстензии ног с полным диапазоном движения.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* четырехглавая мышца бедра.

*Дополнительные:* напрягатель широкой фасции, портняжная мышца.

**Значимость мышц для бега**

Экстензия ног – замечательное упражнение, поскольку оно достаточно простое в выполнении и позволяет эффективно укрепить четырехглавые мышцы. Данное упражнение равномерно прорабатывает всю четырехглавую мышцу и способствует правильному перемещению коленной чашечки. Бегуны, перенесшие травму колена, при полном выпрямлении ног могут испытывать нежелательную нагрузку на коленную чашечку. Снизить ее и при этом развить четырехглавые мышцы позволит выполнение экстензии ног по короткой дуге (последние 15-20° траектории движения). Это упражнение, эффективно развивающее силу, необходимо включить в программу вводной тренировки.

**Упражнения для задней группы мышц бедра**

И.п. – лежа на животе на гимнастическом коврике, голову держать ровно, вокруг голеностопа резиновая лента, привязанная к опоре.

1 – согнуть ноги в коленях; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-15 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на задней группе мышц бедра

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* большая ягодичная мышца, малая ягодичная мышца, икроножная мышца.

**Безопасность при выполнении**

Распространенные ошибки при выполнении этого упражнения: пытаться помочь движению руками; слишком быстро опускать ноги; завершая движение, приводить ноги к ягодицам.

**Значимость мышц для бега**

В этом упражнении выполняется движение, противоположное экстензии ног на тренажере и дополняющее его. Оно направлено на укрепление задней группы мышц бедра, что позволяет сбалансировать переднюю группу мышц бедра. Задняя группа мышц бедра активизируется во время восстановительной фазы бегового цикла, когда нога сгибается в колене, поднимая голень к ягодице. Задняя группа мышц бедра не настолько сильна, как передняя, поэтому ее следует постоянно укреплять, чтобы избежать дисбаланса. У бегунов на длинные дистанции редко бывают растяжения и разрывы мышц задней группы, но для них характерно закрепощение этой группы мышц, обусловленное проблемами с поясницей. Кроме того, причиной многих травм колена может являться ослабление задней группы мышц бедра.

Единственным недостатком упражнения является то обстоятельство, что оно укрепляет только заднюю группу мышц бедра, оставляя без внимания ягодицы, которые работают совместно с этой группой мышц в цикле бегового шага. Это действительно так, тем не менее, если включать упражнение во вводную тренировку, когда акцент делается на общем развитии силовых качеств, а не на функциональной работе, проблема невелика. Ягодичные мышцы могут попутно прорабатываться и в ходе других упражнений.

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, в каждой руке по гантели (см. рис. 44).

1 – шаг вперед левой ногой так, чтобы бедро оказалось параллельно полу, а голень образовала угол 90° с бедром, правая нога помогает удерживать равновесие; 2 – и.п.

Выполнить 15 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** отталкиваться той ногой, которой делается шаг вперед.

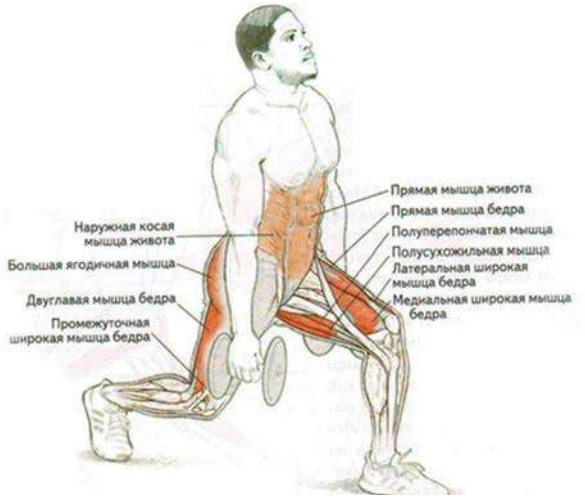



Рис. 44. Выпад с гантелями

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* четырехглавая мышца бедра, задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота.

**Безопасность при выполнении**

Выполняя упражнение, не давать колену выходить за вертикальную линию, проходящую через носок ведущей ноги. Можно травмировать колено, которое оказывается в неустойчивом положении при выполнении этого трудного анаэробного упражнения.

**Выпад с длинным шагом**

Делая длинный шаг, создаются условия, при которых большая и средняя ягодичные мышцы укрепляются активнее, чем при обычном шаге. Также растягиваются подвздошно-поясничная мышца и прямая мышца бедра задней ноги.

**Значимость мышц для бега**

В ходе выполнения выпада укрепляются все мышцы средней части тела, задняя и передняя группы мышц бедра. Вместо гантелей можно использовать штангу, но удержание ее на плечах приводит руки в неестественное для бегуна положение. Студентам при выполнении упражнения обычно удобнее держать руки опущенными.

Упражнение замечательно подходит для второй, силовой, фазы занятий. Выпад относится к числу функциональных упражнений и с добавленным весом гантелей может эффективно развивать силу.

**Наклоны вперед с согнутыми ногами**

И.п. – стоя, на плечах штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой с легким весом, ноги на ширине плеч (см. рис. 45).

1 – наклон вперед от поясницы – вдох; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

**Методические указания:** во время движения ягодицы отводятся назад.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* икроножная мышца, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.




Рис. 45. Наклоны вперед с согнутыми ногами

**Значимость мышц для бега**

Наклоны вперед с согнутыми ногами – простое, но очень эффективное упражнение. Наряду с укреплением задней группы мышц бедра и ягодиц, оно позволяет также растягивать мышцы, повышая эластичность соединительных тканей между мышцами и костями поясницы и таза. Эта кинетическая цепь также влияет на состояние коленей, поскольку сильная поясница в меньшей степени растягивает заднюю группу мышц бедра, что, в свою очередь, позволяет свободно перемещаться коленной чашечке.

Наклоны вперед можно выполнять и с прямыми ногами (см. рис. 46), но студентам, имеющим хронически закрепощенную заднюю группу мышц бедра, следует выполнять упражнение с согнутыми ногами, т.к. акцент делается на развитии гибкости этих мышц. Когда будет достигнута необходимая степень гибкости, можно переходить к выполнению наклонов с прямыми ногами.



Рис. 46. Наклоны вперед с прямыми ногами

**Римская становая тяга**

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, слегка согнутые в коленях, носки разведены, в руках гантели хватом сверху (рис. 47).

1 – наклон вперед (от поясницы); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

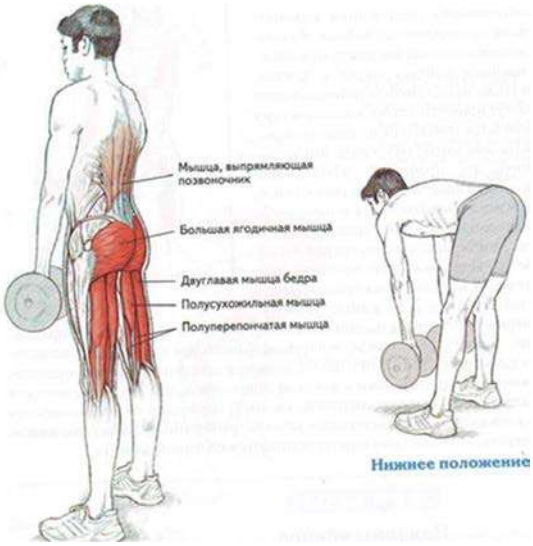



Рис. 47. Римская становая тяга

**Методические указания:** при выполнении упражнения гантели не должны касаться пола. Сохранять естественный изгиб поясницы, не наклоняться слишком низко.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* мышца, выпрямляющая позвоночник.

**Значимость мышц для бега**

Это интенсивное упражнение делает акцент на мышцах верхней части ног, особенно задней группы мышц бедра и мышцах ягодиц. Упражнение в высшей мере функционально, поскольку в ходе его мышцы прорабатываются примерно так же, как во время бега, – во всяком случае, более функционально, чем сгибание ног на тренажере. Баланс между двумя крупными группами мышц (передней и задней группами мышц бедра) является ключевым для выпрямления ноги и толчка во время бега. Чтобы обеспечить непрерывность тренировок и избежать травм, следует ввести в тренировочную программу такие упражнения, как римская становая тяга. Упражнения помогают одновременно укрепить и растянуть заднюю группу мышц бедра.

Принимая во внимание требования, которые налагает скоростной бег на заднюю группу мышц бедра, быстро переключающиеся волокна этих мышц лучше

прорабатываются с помощью высокоинтенсивных упражнений, таких как римская становая тяга с гантелями.

**Присядания**

И.п. – стоя, под штангой на стойке или палкой с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги на ширине плеч, носки разведены (см. рис. 48).

1 – снять штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой со стойки и выпрямиться; 2-3 – присед, опустив корпус и бедра; 4 – и.п.

Выполнить 8-10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения гриф должен лечь на дельтовидные и трапециевидные мышцы (не на шею).

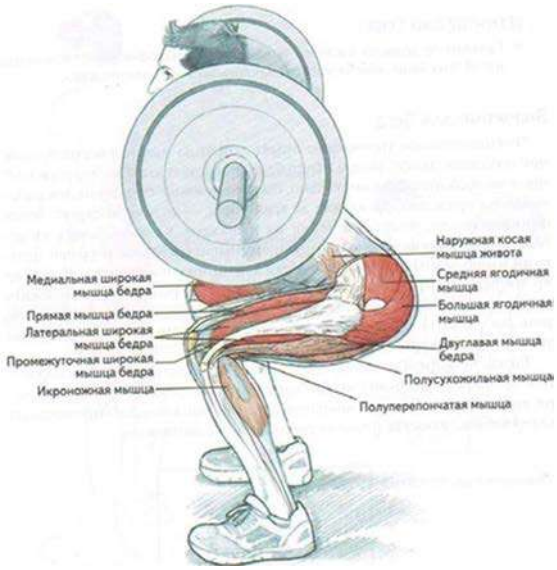



Рис. 48. Приседание

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* четырехглавая мышца бедра, большая ягодичная мышца, средняя ягодичная мышца, малая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, наружная косая мышца живота, икроножная мышца.

**Значимость мышц для бега**

В ходе приседания укрепляются преимущественно четырехглавые мышцы бедер, но т.к. в упражнении участвуют и стабилизирующие мышцы, то прорабатываются и мышцы средней части тела, задняя группа мышц бедер и мышцы голеней.

Можно использовать достаточно большой вес отягощения, хотя это необязательно сделает упражнение эффективным. Приседание следует включить в одну тренировку со становой тягой с гантелями или наклонами вперед, чтобы создать баланс между передней и задней группами мышц бедра.

Приседание развивает взрывные качества, поскольку оно сосредоточено на крупных группах мышц. Поэтому его логичнее использовать студентам, которые тренируются для участия в забегах на короткие или средние дистанции.

Упражнение можно включать вводную тренировку для всех студентов, поскольку оно делает акцент на общем развитии силовых качеств, а не на функциональной работе. Акцент на стабилизирующих мышцах средней части тела будет полезен спортсменам на любой фазе тренировочного цикла.

**Приседание на одной ноге с гантелями**

И.п. – стоя примерно в метре от скамьи, держа в каждой руке по гантели (рис. 49). Положить тыльную сторону стопы правой ноги на скамью позади себя.



Рис. 49. Приседание на одной ноге с гантелями

1 – присед на левой ноге до угла 90° в коленном суставе, а колено правой ноги почти касается пола; 2 – и.п., используя четырехглавые мышцы бедра.

Повторить 12 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** не освоив технику выполнения упражнения, вес гантелей не увеличивать. Упражнение помогает развить приводящие мышцы бедра.

### 3.4. Упражнения для мышц голени и стопы

Любая структура, способная пройти тест на долговечность, имеет мощное, надежное и предпочтительно широкое основание. Идеальным примером устойчивой конструкции является пирамида, но тело человека имеет далеко не пирамидальную форму. Сохранять вертикальное положение человеку помогают лишь две устойчивые нижние конечности, усиленные относительно большими стопами, что представляет собой довольно узкое основание.

Большеберцовая кость (рис. 50) является основной костью в пределах нижней части ноги, несущей вес тела.




Рис. 50. Костные структуры и мягкие ткани голени и стопы

Она дополняется более тонкой малоберцовой костью, расположенной с наружной стороны голеностопного сустава. Мышцы, прикрепленные к этим костям, управляют движением голеностопного сустава, плюсны и фаланг пальцев стопы. Голеностопный сустав двигается почти исключительно вперед и назад, но семь костей, составляющих предплюсну, расположены так, что стопа может совершать вращательные движения в плюснефаланговом и подтаранном суставах. Это позволяет каждой стопе поворачиваться наружу и внутрь, чтобы адаптироваться к беговой поверхности [3, 4].

С землей контактируют только три кости ступни. Пятку образует пяточная кость, которая с первой и пятой головками плюсны образует треугольник. Между этим подобием треножника расположен комплекс, состоящий из таранной, кубовидной, ладьевидной и трех клинообразных костей, которые расположены друг напротив друга так, что могут подниматься, образуя арку по длине каждой стопы совместно с пятью костями предплюсны. Они не только меняют положение стопы, чтобы приспособиться к поверхности под ногами, но и позволяют ей совершать движения в стороны. Кости предплюсны формируют верхнюю часть свода стопы и обеспечивают движения стопы наружу или внутрь. Это движение позволяет при беге или ходьбе использовать или внутреннюю, или наружную сторону стопы.

Сила голени, позволяющая осуществлять толчок, обеспечивается двумя мышцами, относящимися к задней группе (рис. 51). Глубокая камбаловидная мышца, соединяясь с икроножной, формирует ахиллово сухожилие, которое крепится к пяточной кости. Сокращение этих мышц обеспечивает разгибание стопы, а более глубокий слой мышц – ее сгибание. К числу этих глубоких мышц относятся длинный сгибатель пальцев, длинный сгибатель большого пальца стопы и задняя большеберцовая мышца.

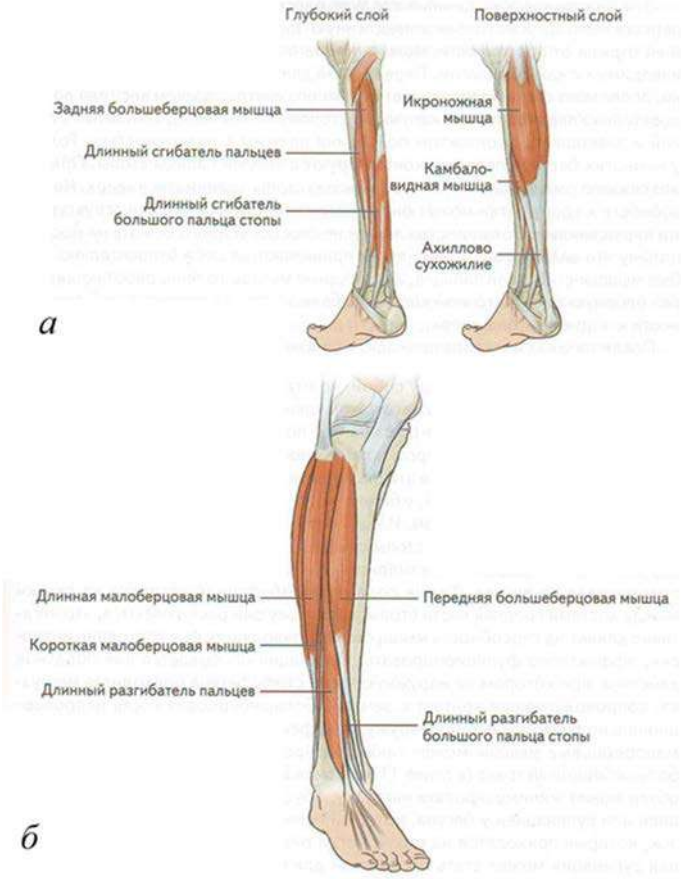



Рис. 51. Голень и стопа: *а* – вид сзади; *б* – вид спереди

Передняя группа мышц голени расположена между малоберцовой и большеберцовой костями. Она окружена относительно жесткой фиброзной оболочкой, заключающей в себе переднюю большеберцовую мышцу, длинный разгибатель пальцев и длинный разгибатель большого пальца стопы. Эти мышцы проходят через фронтальную часть голеностопного сустава и крепятся к костям плюсны, предплюсны и пальцев, позволяя поднимать стопу вверх. Им не приходится генерировать столько силы, сколько задней группе мышц голени, поэтому они менее развиты. Дополнительную латеральную устойчивость голеностопного сустава и тыльной части ноги обеспечивают малоберцовые мышцы, которые берут начало от малоберцовой кости и проходят по латеральной стороне голеностопного сустава, заканчиваясь с наружной стороны костей плюсны.

Очень большую силу генерирует ахиллово сухожилие. Его травма сопровождается сильной болью, поскольку эти ткани обильно снабжены нервными окончаниями. Травмированное ахиллово сухожилие очень долго заживает по причине плохого снабжения кровью. Примерно то же самое можно сказать и о подошвенной фасции, которая берет начало от пяточной кости и крепится к основанию костей плюсны. Она представляет собой жесткую полосу фиброзной ткани, самая слабая точка которой расположена у пятки. Если стопу рассматривать в двух измерениях изнутри, то можно

увидеть, что подошвенная фасция представляет собой горизонтальное основание треугольника, образованного костями плюсны и предплюсны.

Эти анатомические данные следует рассматривать в функциональной перспективе. Просматривая замедленную запись контакта стопы с землей и ее отрыва от поверхности, можно понять особенности движений, воспроизводи- мых с каждым шагом. Первая фаза движения называется ударом пятки, после чего стопа поворачивается немного внутрь, причем вес тела последовательно переносится на наружную сторону стопы перед контактом с землей и завершается контактом основания плюсны с поверхностью. Только у немногих бегунов первыми контактируют с землей пальцы стопы. Обычно это связано с недостаточной способностью стопы подниматься вверх. Неспособность к удару пятки может быть вызвана генетическими или структурными нарушениями. Большинство людей не способны долго бежать на носках, потому что задачу по подъему пятки принимают на себя относительно слабые мышцы-сгибатели пальцев, а не мощные мышцы голени, работающие через опорную точку пяточной кости, особенно в случае ограниченной способности к подъему стопы вверх.

После того как вся стопа приходит в соприкосновение с землей, движение продолжается в обратной последовательности: отрыв пятки, перекат по наружной стороне плюсны, толчок носком стопы. Во время этой фазы движения все мышцы сокращаются или расширяются в постоянном ритме, хотя и не одновременно.

Существует три связанных между собой, но отдельных движения. В подтаранном и голеностопном суставах возможны движения в трех плоскостях: отведение-приведение, сгибание-разгибание, поворот стопы наружу и внутрь. Супинация описывается как противоположное движение. Стопа каждой ноги с каждым шагом проходит все эти фазы движения. Когда пронация или супинация становится избыточной, у бегуна могут возникнуть проблемы, которые приведут к болям или травмам. Избыточная пронация, когда нога контактирует с землей плоско, а свод стопы смещается внутрь и пальцы обращаются наружу, может создавать чрезмерное давление на большеберцовую кость, поворачивая ее внутрь. Также создается избыточная нагрузка на связки между костями средней части стопы, поскольку они растягиваются, что негативно влияет на способность мышц стопы, приводящих ее в состояние инверсии, эффективно функционировать. Супинация описывается как обратное действие, при котором на наружную часть стопы бегуна приходится нагрузка, способствующая контакту с землей. Большеберцовая кость непропорционально разворачивается наружу, и эффект дополнительной нагрузки на малоберцовые мышцы может также распространяться и на подвздошно-большеберцовый

тракт. Из-за нагрузок, которые приходятся на стопу, когда она слишком подвижна, избыточная супинация может стать проблемой для бегуна на длинные дистанции.

Еще одна анатомическая особенность – высокий ригидный свод стопы, как с избыточной супинацией, так и без нее, и уплощенный свод стопы, как с избыточной пронацией, так и без нее. В обоих этих случаях недостаток гибкости с высокой степенью вероятности может приводить к механическим недостаткам, которые не позволят бегунам развивать скорость, на которую они в потенциале способны.

Исходя из этого, пронация описывается как отведение, разгибание и поворот стопы внутрь, то есть как движение, совершаемое в трех плоскостях.

**Рекомендации для проведения занятий**

Некоторые из упражнений, выполняемых стоя, можно делать, стоя попеременно на одной ноге. Этот тип движения способен значительно укрепить целевые мышцы, задействовав все основные мышцы ноги, в том числе самые слабые, чтобы обеспечить равновесие при правильном выполнении упражнения.

Упражнения, которые требуют устойчивости, задействуют мышцы средней части тела и бедер для поддержания правильной формы. Выполнение упражнений в положении стоя на одной ноге позволяет задействовать эти специфические мышцы, а также развить силу мышц средней части тела или, при большем количестве повторений, выносливость.

**Упражнения для голени и ахиллова сухожилия**

И.п. – стоя на степ-платформе носком правой ноги, согнуть левую ногу в колене под углом 90°, руки с гантелями вниз (см. рис. 52).

1 – подъем на носке правой ноги; 2 – и.п.

Выполнить 15 раз на правую ногу, затем сменить ногу.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать стойку за счет напряжения брюшного пресса, ногу в колене полностью не выпрямлять.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.




Рис. 52. Подъем на носке правой ноги

*Дополнительные:* передняя большеберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца, длинный сгибатель пальцев.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

**Безопасность при выполнении**

Количество повторений ограничивается появлением характерных мышечных болей, сигнализирующих об усталости. Но до усталости следует работать только в том случае, если вы выполняете всего один подход. В среднем достаточно выполнить 1-3 подхода. Вес гантелей меняет эффект тренировки.

**Значимость мышц для бега**

Подъем на носке одной ноги должен стать основным упражнением программы силовой подготовки любого бегуна. Это многофункциональное упражнение легко выполнять, к тому же оно требует минимального снаряжения. Основной его целью является развитие силы, что позволяет предупреждать травмы. Оно также может использоваться для реабилитации после травм ахиллова сухожилия и мышц голени. Упражнение не следует выполнять, если бегун все еще переживает первоначальные последствия травмы, но после некоторого периода восстановления, ориентируясь на самочувствие или объективные данные, полученные с помощью МРТ, можно приступать к тренировке.

Привнесение эксцентрической (негативной) компоненты (удлинение мышцы) повышает значимость этого упражнения, направленного на укрепление ахиллова сухожилия и мышц голени. Эксцентрические движения очень эффективны, если мышцы сокращаются эксцентрически, они могут выдержать большую нагрузку. Существует предположение, утверждающее, что движения, сопровождающиеся эксцентрическими

сокращениями, развивают быстро переключающиеся мышечные волокна, поэтому благодаря им хорошо укрепляются мышцы.

И.п. – стоя на платформе, на плечах палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги немного согнуты в коленях, верхняя часть тела прямая, брюшной пресс стабилизирует корпус.

1 – подъем на носках; 2 – и.п., полная растяжка задней группы мышц голени.

Повторить 10-12 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на задней группе мышц голени.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.

*Дополнительные:* передняя большеберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

**Значимость мышц для бега**

Подъем на носках является еще одним упражнением, позволяющим укреплять комплекс задней группы мышц голени и ахиллово сухожилие. Акцент делается на икроножной мышце, которая составляет большую часть мышечного комплекса голени, однако упражнение задействует также и мелкие мышцы. Упражнение следует выполнять вместе с подъемом на носке одной ноги, чтобы эффективно проработать заднюю группу мышц голени. Его также можно делать независимо от других упражнений, когда задачей тренировки является выполнение по одному упражнению для каждой части тела.

Ахиллово сухожилие и мышцы голени принимают на себя основную часть амортизации удара при контакте пятки с беговой поверхностью. Если спортсмен использует не обычные кроссовки, а облегченные беговые туфли на низком каблуке, удар становится еще сильнее. Чтобы минимизировать ударную нагрузку и улучшить способность к толчку, все бегуны должны развивать силу мышц голени, включая в свою тренировочную программу соответствующие упражнения. Эти упражнения можно выполнять на любой стадии тренировочного цикла, с особым акцентом во время фазы тренировочных забегов, если тому не препятствуют травмы.

**Подъем на носках сидя**

В ходе подъема на носках стоя и подъема на носках сидя прорабатываются одни и те же мышцы, отличаются же эти упражнения степенью проработки камбаловидных

мышц. Выполняя упражнение в положении сидя, в меньшей степени задействуются икроножные мышцы и в большей степени – не такие крупные камбаловидные.

Укрепление камбаловидных мышц усиливает толчок от беговой поверхности. Укрепление и растяжка камбаловидных мышц помогают предупредить травмы ахиллова сухожилия, уменьшив дополнительное растяжение [11].

**Упражнение для стопы**

И.п. – сидя на полу, ноги прямо, удерживать в руках концы натянутой резиновой ленты, закрепить ее среднюю часть на поверхности стопы в области плюсны (рис. 53).

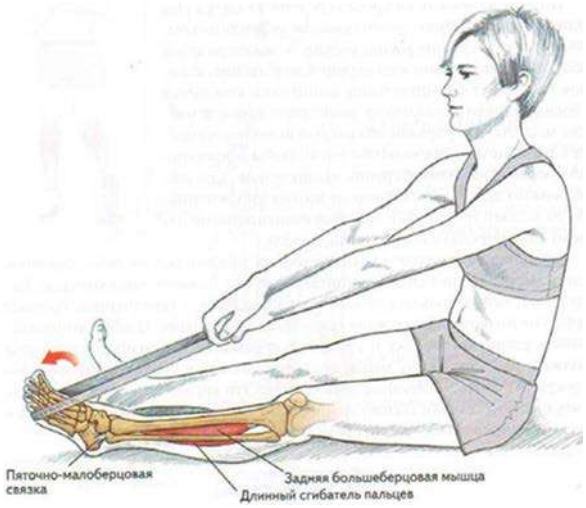



Рис. 53. Отведение носка с резиновой лентой

1 – носки вперед; 2-3 – удержать в этом положении 1-2 с; 4 – и.п.

Повторить 15-20 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения отвести носки максимально вперед, руки прямые.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя большеберцовая мышца, длинный сгибатель пальцев.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* задняя таранно-малоберцовая связка, пяточно-малоберцовая связка (рис. 54).




Рис. 54. Работающие мягкие ткани

**Значимость мышц для бега**

Упражнение развивает силу и подвижность стопы и голеностопного сустава, позволяя предупреждать травмы, возможные при беге по неровной поверхности, а также помогает ноге эффективнее работать в фазе опоры (устойчивого положения).

Так как оно выполняется без отягощений, его можно делать ежедневно в качестве реабилитационного при растяжении связок голеностопного сустава или в качестве укрепляющего для повышения силы и гибкости. Поскольку можно задавать степень натяжения резиновой ленты, каждое повторение упражнения можно усложнять или упрощать. Акцент следует делать на плавное, без рывков, движение и достаточное натяжение ленты, которое легко регулируется, если тянуть на себя или отпускать ее концы.

И.п. – сидя на столе, свесить ноги, согнутые в коленях. Закрепить на середине правой стопы манжету, обеспечивающую достаточную нагрузку на голень, туловище держать прямо, руки вниз (рис. 55).

1 – поднять носок правой ноги; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз каждой ногой.

**Методические указания:** при выполнении упражнения не качать ногами, чтобы помочь движению носков.




Рис. 55. Подъем носка с манжетой

**Безопасность при выполнении**

Выполнять упражнение до появления ощущения усталости. Переместить отягощение на левую ногу и повторить упражнение. Скорость выполнения движения должна быть невысокой, но мышцы стопы и связки голени должны работать динамично.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* передняя большеберцовая мышца.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* передняя таранно-малоберцовая связка, пяточно-малоберцовая связка, подошвенная связка (рис. 56).

**Значимость мышц для бега**

Упражнение выполняется без отягощения, поэтому его можно делать ежедневно в качестве реабилитационного или укрепляющего для повышения силы и гибкости. В зависимости от целей можно менять вес отягощения. Например, больший вес с меньшим количеством повторений и подходов позволяет укреплять мышцы. Меньший вес позволяет выполнить большее число повторений и подходов, что развивает выносливость и гибкость.



Рис. 56. Работающие мягкие ткани

**Подъем носка с резиновой лентой**

Подобно отведению носка, подъем носка также можно выполнять с резиновой лентой. Эти упражнения можно совместить и выполнять попеременно: сначала отводить носок, преодолевая натяжение ленты, затем, удерживая сопротивление, поднимать носок до тех пор, пока он не придет в положение, из которого его вновь можно отводить.

И.п. – сидя на скамье, голеностопные суставы выходят за край скамьи. Вытянуть носки ног и обвязать их резиновой лентой так, чтобы стопы находились на расстоянии примерно 15 см (рис. 57).

1 – повернуть стопы внутрь; 2-3 – максимально развести в стороны; зафиксировать положение на 3-5 с; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-20 раз.

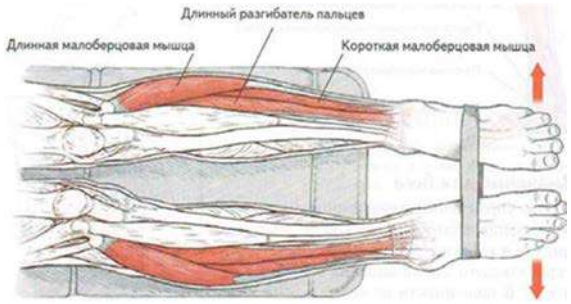



Рис. 57. Разведение стоп с резиновой лентой

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать корпус, с опорой рук о скамью. Повтор упражнения через 3-5 секунд.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* длинная малоберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца, длинный разгибатель пальцев (рис. 58).




Рис. 58. Прорабатываемые мышцы

**Значимость мышц для бега**

Пронация является результатом движения в трех плоскостях, а не только в одной. Во время сгибания стопы эверсия (пронация + отведение) контролируется преимущественно длинной малоберцовой мышцей; во время разгибания стопы – короткой малоберцовой мышцей. Это упражнение выполняется в положении с вытянутым носком, поскольку так его легче выполнять, особенно спортсменам с избыточной пронацией. Бегуны с недостаточной пронацией также получат пользу от этого упражнения, поскольку, выполняя его, они совершают движение, которое нельзя назвать естественным для их стоп.

### 3.5. Упражнения для восстановления мышечных групп

И.п. – стоя правым боком к стене, скрестить ноги так, чтобы правая нога к стене находилась сзади, для равновесия опереться о стену правой рукой (рис. 59).

1 – наклон правым бедром к стене; 2 – и.п.

Повторить 12-15 раз в каждую сторону.




Рис. 59. Растяжка подвздошно-большеберцового тракта в положении стоя

**Методические указания:** при выполнении упражнения постараться коснуться стены, если это удается (стопы не отрываются от пола), зафиксировать положение на 15-30 с.

И.п. – сидя на полу, вытянув левую ногу перед собой, правую ногу перенести через нее, согнув в колене и поставив ступню на пол. Левой рукой упор в пол, правой рукой придерживать колено (рис. 60).

1-3 – колено потянуть вовнутрь, зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-6 раз, после чего поменять и.п.




Рис. 60. Растяжка подвздошно-большеберцового тракта в положении сидя

**Методические указания:** при выполнении упражнения стопу от пола не отрывать.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая ягодичная мышца, напрягатель широкой фасции.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* подвздошно-большеберцовый тракт.

**Значимость мышц для бега**

Закрепощенность подвздошно-большеберцового тракта обычно является результатом супинации. Инверсия стопы может вызывать закрепощенность подвздошно-большеберцового тракта и мышц голени, а также боли в колене.

Но бегуны, корректирующие избыточную пронацию с помощью ортопедических вкладок, зачастую создают недостаточную пронацию, что приводит к такой же травме. Выполнение растяжки подвздошно-большеберцового тракта в положении сидя и стоя поможет растянуть эту жесткую полосу мягкой ткани, предупреждая нежелательное трение о надмыщелок бедренной кости, расположенный в области коленного сустава. Эти упражнения можно выполнять несколько раз в день.

И.п. – стоя между двумя стенами, вытянуть руки в стороны на уровне плеч (рис. 61).

1 – согнуть правую ногу в колене под углом 90°; 2-3 – глаза закрыть, зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-7 раз каждой ногой.




Рис. 61. Удержание равновесия для развития проприоцепции

**Методические указания:** при выполнении упражнения поднять колено так, чтобы угол между бедром и корпусом составил 90°.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* длинная малоберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* подошвенное сухожилие.

**Значимость мышц для бега**

Упражнение имеет нейромышечную и физиологическую составляющие. Может потребоваться некоторое время, чтобы научиться удерживать равновесие, но даже в этом процессе стопа и голень работают, потому что данное упражнение эффективно также и в том случае, если нельзя найти баланс мгновенно.

И.п. – стоя лицом к стене, упор руками в стену, правая нога сзади, стопа плотно прижата к полу, левая нога согнута в колене так, что стопа находится на одной вертикали с бедром (рис. 62).

1 – пяткой правой ноги давить в пол; 2-3 – удерживать статическую растяжку 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-7 раз каждой ногой ноги.




Рис. 62. Растяжка голени стоя

**Методические указания:** можно делать повторения каждой ногой поочередно.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца, задняя группа мышц бедра.

**Значимость мышц для бега**

Бегуны с нейтральной или избыточной пронацией часто испытывают закрепощенность мышц голени. Растяжка поможет избавиться от болей в хронически травмированных голенях и позволит предупредить травмы данной области, поддерживая мышцы в тонусе.

И.п. – стоя ногами на платформе, пятки на весу, упор руками в стену (рис. 63).

1 – максимально подняться на головках костей плюсны обеих стоп; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.




Рис. 63. Подъем на носках стоя с эксцентрической составляющей:

*а* – исходное положение; *б* – конечное положение

**Методические указания:** при выполнении упражнения не опускать пятки слишком низко, это создаст чрезмерную нагрузку на ахиллово сухожилие, максимальный подъем фиксировать.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

**Значимость мышц для бега**

Упражнение позволяет осуществлять концентрическое сокращение (укорочение) мышц голени во время подъема пятки, а также эксцентрическое сокращение (удлинение) мышц голени во время опускания пятки. Добавление эксцентрической (или негативной) составляющей движения повышает эффективность упражнения. Выявлено, что выполнение упражнений с эксцентрической составляющей сокращает время восстановления после травмы.

**Восстановление задней группы мышц бедра**

И.п. – сидя на скамье, правую прямую ногу положить на скамью, левую опустить на пол, ступню прижать к полу.

1 – наклон вперед от бедер, зафиксировать положение на 10 с; 2 – и.п.

Выполнить 4-6 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение способствует растяжению задней группы мышц бедра.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* грушевидные мышцы.

**Безопасность при выполнении**

Не тянуться вперед руками или обхватывать щиколотку, это может ухудшить технику выполнения упражнения и сделать растяжку менее эффективной. Выпрямлять ногу в колене необязательно. Выполняя упражнение с прямой ногой, в большей степени растягиваются сухожилия, а не задняя группа мышц бедра.

**Значимость мышц для бега**

Стиль бега с мелкими и частыми шагами, даже если спортсмен и показывает в среднем неплохие результаты, оказывается проигрышным при ускорении темпа бега или на финальном спринте. Упражнение помогает увеличить длину шага, не создавая

чрезмерной нагрузки на поясницу и область крестца, что позволит дольше поддерживать длинный шаг, и в итоге улучшит беговые показатели.

**Жим коленом сидя**

И.п. – сидя, упор спиной о стену, обе ноги немного согнуты в коленях, пятки на полу.

1 – медленно выпрямить правую ногу в колене; 2 – и.п.; 3 – медленно выпрямить левую ногу в колене; 4 – и.п.

Выполнить 4-6 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** при выполнении упражнения зафиксировать положение на 6 с.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* медиальная широкая мышца бедра.

*Дополнительные:* прямая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра, промежуточная широкая мышца бедра, задняя группа мышц бедра, икроножная мышца.

**Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* задняя крестообразная связка, связки тазобедренного сустава.

**Безопасность при выполнении**

Правильно выполняя упражнение, ощущается растяжка с тыльной стороны колена, а на медиальной стороне колена можно увидеть мышечный бугор, который указывает на сокращение медиальной широкой мышцы бедра. Повторить упражнение 10 раз каждой ногой.

**Значимость мышц для бега**

Боли в колене являются основной проблемой для многих бегунов. Упражнение укрепляет медиальную широкую мышцу бедра и отчасти противодействует латеральной тяге четырехглавой мышцы бедра, которая является причиной смещения и болей в области коленной чашечки. Не существует иного неоперационного решения этой проблемы, кроме развития медиальной широкой мышцы бедра. Данное упражнение должно занять важное место в тренировочных занятиях каждого студента, занимающегося бегом.

И.п. – лежа на спине на полу, ноги вместе, руки вдоль туловища (рис. 64).

1 – поднять левую согнутую в колене ногу под углом 90°, зафиксировать положение на 15-30 с; 2 – и.п.

Выполнять не более 5 повторений 2-3 раза в день на каждую ногу.




Рис. 64. Упражнение «колено к груди»

**Методические указания:** при выполнении упражнения обхватить левую ногу, растяжка мышц поясницы и верхней части ягодиц, одновременно удерживать правое бедро прижатым к полу.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* грушевидная мышца; мышца, выпрямляющая позвоночник.

**Значимость мышц для бега**

Обычно бегуны игнорируют состояние поясницы – до тех пор, пока не появляются боли. Это и последующие упражнения помогут вернуть пояснице силу и гибкость, что особенно важно, если бегать вверх или вниз по склону.

Спина способна приспособиться к изменениям наклона поверхности; с увеличением подвижности в бедрах и пояснице длина шага также возрастет. Как и во всех упражнениях, растяжка должна вызывать ощущение некоторого дискомфорта, но не боли.

И.п. – стоя на расстоянии 45 см от стены, ноги на ширине плеч, носки обращены внутрь (рис. 65).




Рис. 65. Жим к стене

1-3 – прижать таз к стене (отрегулировать расстояние до стены и угол поворота носков так, чтобы обеспечить лучшую растяжку камбаловидной мышцы), зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 6-8 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения пятки от пола не отрывать.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* камбаловидная мышца, икроножная мышца, передняя большеберцовая мышца.

**Значимость мышц для бега**

Рассеянные боли в передней части голени могут свидетельствовать о проблемах с мягкими тканями или большеберцовой костью, обусловленных избыточной пронацией, однако боли, связанные с мягкими тканями, зачастую связаны с горизонтальным отведением средней части стопы. Упражнение помогает предупредить мышечные боли в передних пучках икроножных мышц. Его можно делать несколько раз в день, упражнение дает эффект, если его выполнять регулярно.

И.п. – сидя на стуле со спинкой (рис. 66).




Рис. 66. Подъем пятки

1-3 – поднять пятку левой ноги, повернуть стопу, как балерина, зафиксировать положение на 15 с; 4 – и.п.

Повторить по 10 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение выполнять по 2-3 раза в день. И.п. – сидя на стуле со спинкой, закрепить резиновый бинт (рис. 67).

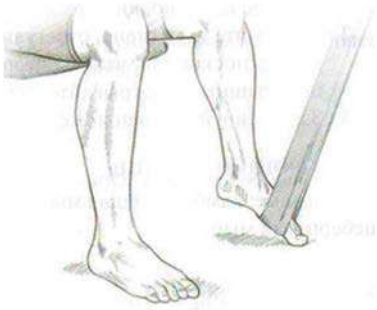


Рис. 67. Упражнение с резиновой лентой

1-3 – поднять пятку левой ноги, повернуть стопу, как балерина, с резиновым бинтом, зафиксировать положение на 15 с; 4 – и.п.

Повторить по 10 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение выполнять по 2-3 раза в день.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* передняя большеберцовая мышца.

**Значимость мышц для бега**

Функция передней большеберцовой мышцы заключается в том, чтобы придавать гибкость голеностопному суставу и стопе. Мышца позволяет сохранять стабильность во время бега по неровной поверхности, поскольку она помогает регулировать положение стопы и соответственно всей ноги. Поэтому продолжительный бег по пересеченной местности активно задействует переднюю большеберцовую мышцу. Если эта мышца не тренирована, она быстро устает, и темп бега замедляется. Кроме того, увеличивается вероятность растяжения голеностопного сустава. Укрепив переднюю большеберцовую мышцу, можно ограничить пронацию и супинацию стопы, что имеет большое значение для исключения дальнейших проблем.

И.п. – лежа на полу, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки на бедрах (рис. 68).

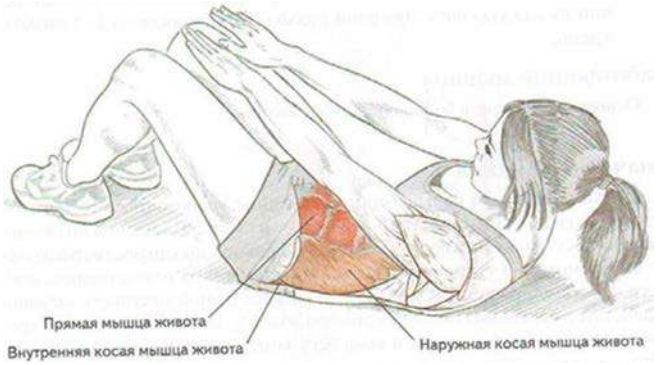



Рис. 68. Частичный подъем корпуса

1 – поднять руки на 5-10 см, медленно поднять голову и плечи от пола; 2-3 – потянуться руками к коленям и зафиксировать положение на 10 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-8 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на медленном выполнении движения.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота.

*Дополнительные:* поперечная мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

**Значимость мышц для бега**

Стабильность средней части тела имеет для бегуна огромное значение. Слабый брюшной пресс не способен поддерживать спину. Под весом верхней части тела корпус утрачивает вертикальное положение, движение во время бега затрудняется и становится болезненным. Упражнение помогает укрепить связь между брюшным прессом и нижними конечностями, а также делает подъем колена более мощным, что, в свою очередь, позволяет поддерживать достаточную длину бегового шага.

И.п. – упор сзади, сидя на полу, правая нога прямая, левая согнута в колене (рис. 69).

1-3 – отвести носок наружу и медленно поднять ногу на 15 см (удержать ее прямой), зафиксировать положение на 10 с; 4 – и.п.

Выполнить упражнение 10 раз за 10 секунд, затем тоже левой ногой.

**Методические указания:** при выполнении упражнения положение носка следует менять, чтобы равномерно проработать все мышцы передней группы. В первое время отягощения не использовать, по мере улучшения тренированности вес можно постепенно увеличивать до 5 кг.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* медиальная широкая мышца бедра.

*Дополнительные:* прямая мышца бедра, промежуточная широкая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра.

**Прорабатываемые мышцы**

*Основные:* большеберцовая коллатеральная связка, сухожилие надколенника.

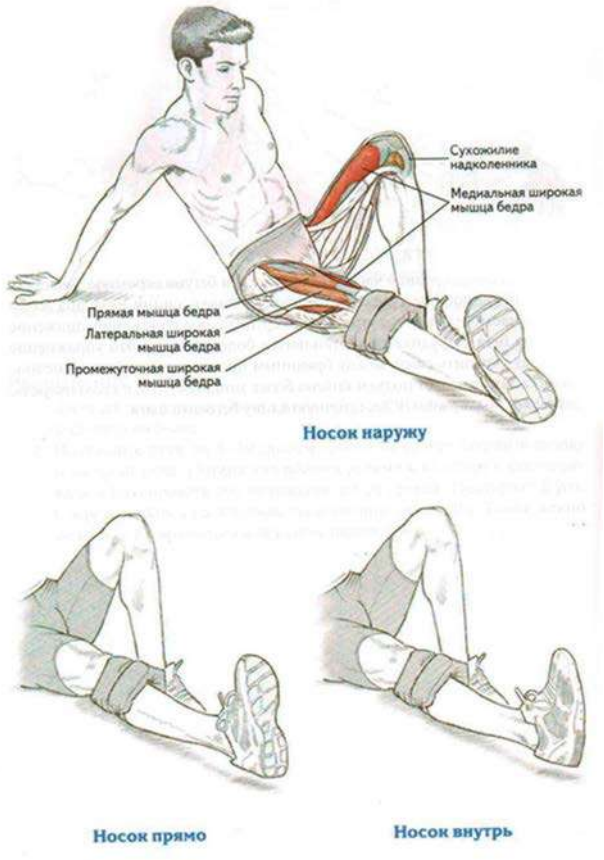



Рис. 69. Подъем прямой ноги сидя

**Значимость мышц для бега**

Очень многие тренеры уделяют основное внимание общему развитию четырехглавых мышц, не понимая роли медиальной широкой мышцы бедра в предупреждении болей в коленном суставе. Упражнение является наиболее эффективным способом укрепления медиальной широкой мышцы бедра и предупреждения болей в колене.

## Глава 4. ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА

Общая физическая подготовка является важным элементом занятий, т.к. она способствует предупреждению травм на занятиях с высокой ударной нагрузкой. Показательным примером таких упражнений является бег. Заменив беговую тренировку на суше тренировкой в воде, возможно значительно снизить ударную нагрузку, сохранив при этом все преимущества аэробной тренировки сердечно-сосудистой системы. Включив в программу силовых тренировок плиометрические упражнения, можно укрепить мышцы, что позволит лучше переносить нагрузки, сопровождающие долгие тренировочные забеги. Плиометрические упражнения также помогут восстановиться после травмы (если выполнять их в соответствующее время) и сделать бег более экономичным.

**Бег в воде**

Большинство спортсменов знакомятся с бегом в воде в ходе реабилитационной программы после травмы, которая не позволяет им бегать по суше. Бег в воде является средством поддержания здоровья сердечно- сосудистой и сердечно-респираторной систем. Однако бег в воде может использоваться не только как инструмент реабилитации после травмы. Бег в воде, особенно в глубокой воде (БГВ), отлично предупреждает травмы, обусловленные длительными нагрузками и связанные с большим объемом аэробных тренировок. Кроме того, функционально бег в воде отличается от бега по суше, что расширяет физические возможности спортсмена.

Бег в мелкой воде (БМВ) является вполне приемлемой альтернативой БГВ, и польза этого упражнения в значительной степени определяется техникой и интенсивностью его выполнения. Поскольку БМВ требует удара о дно бассейна, он имеет ударную составляющую (хотя сила удара смягчается плотностью воды). Для студента, восстанавливающегося после травмы, бег в мелкой воде может быть травмоопасным. Вместе с тем овладеть равновесием и техникой выполнения упражнения проще при БМВ, так как в этом случае нога ставится привычным образом. Для центрирования тела используется меньше мышц, чем в БГВ, а также увеличивается период контакта ноги с поверхностью.

В ходе занятий при БГВ важно сохранять правильное положение тела (рис. 70). Глубина воды должна быть достаточной для того, чтобы над поверхностью воды оставались только верхняя часть плеч, шея и голова, бегун не должен полностью касаться дна бассейна ступней. У бегунов телесного жира меньше, чем у пловцов, что снижает их плавучесть. Поэтому необходимо использовать средство, поддерживающее это качество. Иначе положение тела изменится и большая нагрузка придется на верхнюю часть тела и руки, чтобы удержать тело на плаву.



Рис. 70. Правильное положение тела при беге в глубокой воде

Освоившись в воде, необходимо принять положение, сходное с тем, которое принимается, когда выполняется бег по суше. Держать голову прямо, немного наклониться вперед от поясницы, грудь вперед, плечи отведены назад. Согнуть руки в локтях под углом 90°, движение рук начинается от плеч. Кисти рук удерживать в нейтральном положении, ладони не сжимать, но держать бо- лее твердо, чем на суше, чтобы преодолевать сопротивление воды (см. рис. 71). Очень пригодится сила, наработанная такими упражнениями, как подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье.



Рис. 71. Неправильное положение тела при беге в глубокой воде

Работа ног больше похожа на бег в высоком темпе, чем на аэробный бег, поскольку для преодоления сопротивления воды требуется достаточная сила. Бедро следует поднимать под углом примерно 75°. Затем нога почти полностью выпрямляется (без выключения в колене), сгибается, подтягивается практически к самой ягодице – и цикл повторяется для другой ноги.

В течение цикла бегового шага стопа меняет свое положение от нейтрального положения (вообразить себя стоящим на плоской поверхности) до полного сгибания. Это движение ноги способствует улучшению техники бега, а также повышает стабильность суставов и мышечную силу в результате преодоления сопротивления воды.

Так как бег осуществляется в неестественной для бегуна тренировочной среде и создается сопротивление движениям рук и ног, поначалу студенты используют неправильную форму БГВ. В частности, часто загребают передней ногой вместо того, чтобы резко опускать ее вниз. Ошибка вызвана усталостью задней группы мышц бедра, наступающей из-за необходимости преодолевать сопротивление воды. В результате страдает техника выполнения движения. Чтобы исправить ошибку, при первом же появлении усталости следует отдохнуть. Не спешить, в противном случае только закрепится неправильная форма, но и не улучшится физическая подготовка [4].

Техника БГВ (см. рис. 70) напоминает технику бега по суше, это лучшая техника бега в глубокой воде. Альтернатива – бег с высоким подъемом колена, но все же она

менее эффективна в плане отработки правильной техники. Она очень напоминает технику, используемую для работы на степпере. Сходство с бегом проявляется только на фазе подъема ноги, поэтому мышцы тренируются не совсем так, как требуется бегуну.

Бег в глубокой воде эффективен, так как подобен бегу по суше, позволяет повышать частоту сердцебиений. В связи со спецификой преодоления сопротивления воды он требует приложения большей силы, позволяя эффективнее укреплять мышцы и избегать травм, связанных с избыточной нагрузкой, характерных для бега по суше. В частности, бег в глубокой воде исключает ударную нагрузку, сопровождающую контакт стопы с землей во время бега по суше.

# Глава 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НОРМАТИВАМ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ

## 5.1. Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности

### 5.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 метров)

Нормативы:

- у студенток нормативы в беге на 100 метров следующие: 15.7 сек - 5 баллов; 16,0 - 4; 17,0 -3; 17,9 - 2; 18,7 - 1.

- студенты должны показать результаты в следующих пределах: 13,2 сек - 5 очков; 13,8 - 4; 14,0 - 3; 14,3 - 2; 14,6 - 1.

### 5.1.2. Техника выполнения упражнения

При анализе бега на 100 м. принято выделять следующие основные фазы:

- старт и стартовый разгон;

- бег по дистанции;

- финиширование.

Старт и стартовый разгон

Существует два вида старта: низкий и высокий. Экспериментальные данные показывают, что новичкам и спортсменам 2-го разряда лучше применять высокий старт. Такая закономерность наблюдается до результата 11,4-11,6 с. и объясняется технической сложностью низкого старта. Поэтому следует ограничиться только овладением техникой высокого старта.

По команде «На старт» занимающийся подходит к стартовой линии, ставит сильнейшую (толчковую ногу) вплотную к линии, маховая нога располагается на 1,5-2 стопы назад на носок, расстояние между ними 15-20 см. Туловище выпрямлено, руки опущены, вес тела распределяется равномерно на обе ноги.

По команде «Внимание» вес тела переносится на впереди согнутую стоящую ногу, разноименная рука вперед. Проекция плеч находится за стартовой линией на расстоянии 5-8 см. Взгляд направлен вперед - вниз.

По команде «Марш» бегун мощно разгибает толчковую ногу и стремится максимально быстро вынести маховую ногу вперед с постановкой ее сверху вниз на дорожку. Руки работают максимально активно, плечевой пояс не закрепощен, кисти расслаблены. Стартовый разгон характеризуется постепенным увеличением длины шагов, уменьшением наклона туловища и приближением стоп к средней линии.

Бег по дистанции

Перед бегущим стоит задача удержать развитую горизонтальную скорость до финиша. Этому будет способствовать сохранение длины и частоты шагов.

Во время бега маховая нога ставится с носка спереди проекции общего центра тяжести тела (ОЦТТ) сверху вниз. Взаимодействие маховой ноги с грунтом называется передним толчком. Задний толчок выполняется мощным разгибанием бедра и сгибанием стопы. Голова держится прямо. Руки согнуты (угол сгибания в локтевых суставах примерно 90 град.).

При движении руки вперед кисть поднимается до уровня плеч. Назад рука отводится до «отказа» и угол сгибания в локтевом суставе увеличивается. Пальцы рук слегка согнуты.

Финиширование

Наклон туловища увеличивается. На последних метрах дистанции необходимо стремиться не потерять свободы движений и пробегать финиш без снижения скорости.

**5.1.3. Методы самостоятельной тренировки**

- Повторный метод - повторное выполнение упражнений с около-предельной и предельной скоростью. Отдых продолжается до восстановления. Упражнения повторяются до тех пор, пока скорость не начнет снижаться.

- Переменный метод - когда пробегаются дистанции, например, с варьированием скорости и ускорения. Цель - исключить стабилизацию скорости («скоростной барьер»).

- Соревновательный метод - предполагает выполнение упражнений на быстроту в условиях соревнований. Эмоциональный подъем на соревнованиях способствует мобилизации на максимальные проявления быстроты, позволяет выйти на новый рубеж скорости.

**5.1.4. Средства тренировки быстроты**

Частоту движений, а вместе с ней и быстроту циклических движений развивают с помощью упражнений, которые можно выполнять с максимальной скоростью, а также с

помощью скоростно-силовых упражнений для ациклических движений. При этом упражнения должны отвечать следующим требованиям:

- техника упражнений должна обеспечивать выполнение движений на предельных скоростях;

- упражнения должны быть хорошо освоены, чтобы не требовалось волевого усилия для их выполнения;

- продолжительность упражнений должна быть такой, чтобы скорость не снижалась вследствие утомления - 20-22 с.

Основным средством отработки бега по дистанции является бег с максимальной скоростью. Такой бег выполняется 5-6 раз по 30-40 метров. В тренировке можно чередовать бег в обычных, облегченных (с горки, угол 4-5 град.) и затрудненных (в горку или с сопротивлением) условиях.

Для развития скоростной выносливости рекомендуется пробегать большую дистанцию (120-150 м), когда очередная пробежка начинается при пульсе 120 уд/мин.

Для тренировки в беге на 100 метров следует использовать кроссы (6 км, 30 мин), повторный бег на отрезках 200 м в 3/4 силы. Спортивные игры (баскетбол, футбол) также приносят пользу в развитии быстроты.

Можно рекомендовать и упрощенную методику, обеспечивающую минимально необходимый уровень подготовленности:

- повторный метод - в одном занятии 3-4 пробегания по 20-30 метров с максимальной скоростью и интервалами отдыха для восстановления пульса до 110-120 уд/мин;

- переменный метод - пробегание 2-х отрезков по 30 метров с максимальной скоростью и последующим переходом на спокойный бег 150--200 метров. Выполняется 3-4 подхода.

Для ощутимого сдвига в подготовленности такие тренировки рекомендуется проводить 3-4 раза в неделю.

**5.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива**

При подготовке к сдаче бега на 100 метров следует учитывать общие требования по питанию при занятиях физическими упражнениями:

1. По времени - прием пищи не менее чем за 2-3 часа.

2. По составу - не есть тяжелой пищи (мясо, яйца, масло, молочные продукты, жирную, долго перевариваемую пищу).

Не рекомендуется выходить на старт с переполненным желудком.

Непосредственно перед сдачей норматива необходимо провести разминку с использованием специальных упражнений:

1. Бег с высоким подниманием бедра.

2. Бег с «захлестыванием» голеней назад.

3. Семенящий бег.

4. Прыжки с ноги на ногу (шаги).

5. Бег в упоре стоя у гимнастической стенки.

6. Бег с ускорением с высокого старта с подачей стартовых команд (2-3 ускорения по 10-15 метров).

Разминка заканчивается за 10 минут до старта.

Непосредственно перед стартом нельзя отдыхать лежа, сидя, необходимо постоянно находиться в движении (прохаживаться, выполнять упражнения на растяжку). Частота сердечных сокращений непосредственно перед стартом должна быть 110 – 120 уд/мин.

Психологическая подготовка заключается в мысленном «прокручивании» в голове этапов преодоления дистанции: старта, стартового разбега, бега по дистанции, финиширования с концентрацией внимания на технике выполнения каждого этапа.

При выполнении теста не разрешается:

- наступать на линию старта (стартовая линия входит в дистанцию);

- перебегать на соседние дорожки.

**5.2. Тест на силовую подготовленность для женщин**

(поднимание (сед) и опускание туловища из положения лежа, ноги закреплены, руки за головой)

Нормативы: 60 раз - 5 баллов, 50 - 4, 40 - 3, 30 - 2, 20 - 1.

Это упражнение используется для оценки развития мышц живота (брюшного пресса).

О мышцах брюшного пресса следует сказать особо. Эта группа мышц участвует в большинстве движений. Она создает хороший «мышечный корсет», охватывающий брюшную полость и способствующий нормальному функционированию внутренних органов, что положительно влияет на состояние здоровья.

**5.2.1. Техника выполнения упражнения**

И.п. (исходное положение) – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, стопы прижаты к полу, руки в замок за головой, локти разведены.

Это силовое упражнение состоит из 4-х фаз:

- поднимание туловища;

- фиксация его в вертикальном положении;

- опускание;

- пауза в горизонтальном положении.

Голова держится прямо, локти в стороны, дыхание ритмично.

**5.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин (подтягивание на перекладине)**

Учебной программой по физической культуре предусмотрено тестирование студентов для определения уровня их силового развития. Нормативы следующие: 15 раз - 5 баллов, 12 - 4, 9 - 3, 7 - 2, 5 - 1;

**5.3.1. Техника выполнения упражнения**

Каждый цикл подтягивания в висе на перекладине включает:

- исходное положение - вис на вытянутых руках хватом сверху (большими пальцами внутрь);

- подъем до пересечения подбородком линии перекладины;

- опускание в исходное положение.

При выполнении теста разрешается сгибание, разведение ног, запрещаются рывковые движения туловищем и руками, хлестовые движения ногами. Выполнение засчитывается только при полном выпрямлении рук в локтевых суставах.

Наиболее экономично подтягивание при хвате рук на ширине плеч. Если кисти рук расположены ближе друг к другу, то положение тела становится менее устойчивым и отклонения придется компенсировать за счет дополнительных мышечных усилий, что будет увеличивать энерготраты и снижать результат. Возрастают энерготраты и при широком хвате (шире плеч). Это связано с тем, что для фиксации лопаток при широком хвате требуется большая, чем при хвате на ширине плеч, сила мышц, приближающих лопатки к позвоночному столбу.

Опускание в вис (в исходное положение) после подтягивания должно выполняться спокойно. Дыхание не задерживается.

**5.3.2. Методы развития силы**

На практике распространены следующие методы силовой подготовки:

- метод максимальных усилий;

- метод повторных усилий;

- метод динамических усилий.

Согласно методу максимальных усилий выполнение упражнений организуется таким образом, чтобы занимающийся смог подтянуться 1-3 раза в одном подходе (при условии, что он способен самостоятельно подтянуться как минимум 2-3 раза). Такое

достигается за счет применения дополнительного внешнего отягощения. Делается 5-6 подходов с перерывами 2-4 минуты.

По методу повторных усилий подтягивания в одном подходе выполняются до «отказа». Если занимающийся имеет максимальный индивидуальный показатель 10-15 подтягиваний и более, то следует применять отягощение весом 30-70% от максимального. Например, занимающийся может подтянуться 1 раз с максимальным отягощением 10 кг. Значит, для тренировки по методу повторных усилий следует подобрать вес отягощения 3-7 кг. Выполняется 3-6 подходов с отдыхом между ними 2-4 мин.

Разнообразить упражнения можно, применяя метод динамических усилий. Если занимающийся легко выполняет 10-15 подтягиваний, то следует применять отягощения до 30% от максимального. В одном подходе 10-15 повторений. Темп - максимально быстрый. Всего 3-6 подходов. Во время отдыха следует добиваться наиболее полного восстановления, чтобы в следующем подходе выполнить упражнение без существенной потери скорости.

Сравнивая динамический и статический методы развития силы, необходимо отметить следующее:

- При динамическом режиме работы мышц происходит достаточное кровоснабжение. Мышца функционирует как насос - при расслаблении наполняется кровью и получает кислород и питательные вещества.

- Во время статического усилия мышца постоянно напряжена и непрерывно давит на кровеносные сосуды. В результате она не получает кислород и питательные вещества. Это ограничивает продолжительность работы мышц.

**5.4. Тест на общую выносливость - бег 2000 и 3000 метров**

Нормативы:

- студентки - бег 2000 метров - 10 мин.15 сек. - 5 баллов; 10.50 - 4; 11.15 - 3; 11.50 - 2; 12.15 - 1;

- студенты - бег 3000 метров - 12.00 - 5; 12.35 - 4; 13.10 - 3; 13.50 - 2; 14.00 - 1.

**5.4.1. Техника бега на длинные дистанции**

Бег на средние и длинные дистанции начинается с высокого старта. По команде «На старт!» бегун ставит у линии более сильную ногу, а другую отставляет назад на носок (на 30 – 50 см), немного сгибает ноги, туловище наклоняет вперед и тяжесть тела переносит на впереди стоящую ногу. По команде «Марш!» бегун начинает бег, делая первые шаги в большом наклоне, который постепенно уменьшается. Длина шагов увеличивается, бег ускоряется, бегун набирает скорость и в короткое время переходит к свободному бегу на дистанции. Бег на дистанции. Во время бега на дистанции туловище

вертикально или слегка наклонено вперед (5-7°). Небольшой наклон туловища вперед позволяет лучше использовать силы отталкивания и быстрее продвигаться вперед. Слишком большой наклон приводит к «падающему» бегу, при котором труднее выносить вперед согнутую ногу, в связи с чем уменьшается длина шага, а следовательно, и скорость бега. Кроме того, при большом наклоне постоянно напряжены мышцы, удерживающие туловище от увеличивающегося наклона. Отсутствие наклона ухудшает условия отталкивания, однако улучшает возможность выноса вперед согнутой в коленном суставе свободной ноги. При правильном положении туловища создаются благоприятные условия для работы мышц и внутренних органов. Наклон туловища у бегунов изменяется в пределах 2-3°: увеличивается к моменту отталкивания и уменьшается в полетной фазе. Положение головы существенно влияет на положение туловища. Надо держать голову прямо и смотреть вперед. В фазе отталкивания таз подается вперед, что является важной особенностью техники бега на длинные дистанции и позволяет полнее использовать силу реакции опоры. В технике бега на длинные дистанции важнее всего движения ног. Нога, немного согнутая, ставится на грунт упруго и эластично с передней части стопы, а затем касается его всей стопой. Постановка ноги на переднюю часть стопы позволяет эффективнее использовать эластические свойства мышц голени, активно участвующие в отталкивании. Следы стоп на дорожке у бегунов находятся на одной линии, носки почти не разворачиваются в стороны. Эффективное отталкивание характеризуется выпрямлением ноги во всех суставах. Угол отталкивания в беге на средние дистанции примерно равен 50-55°. При правильном отталкивании таз подан вперед, голень маховой согнутой ноги параллельна бедру толчковой ноги. Быстрый вынос маховой ноги вперед облегчает отталкивание. Бегуны на длинные дистанции меньше поднимают бедро маховой ноги вверх, чем бегуны на средние и короткие дистанции. Длина шага на длинные дистанции не постоянна даже у одних и тех же бегунов. Колебания зависят от наступившего утомления, неравномерности пробегания отдельных участков дистанции, качества беговой дорожки, ветра и состояния бегуна. Обычно шаг с сильнейшей ноги на несколько сантиметров больше, чем шаг со слабейшей ноги. Длина шага равна 160 – 215 см. Повышение скорости бега за счет увеличения длины шага ограничено, так как слишком длинный шаг требует очень больших затрат сил. Кроме того, длина шага в основном зависит от индивидуальных данных бегуна. Поэтому скорость бега повышают за счет увеличения частоты шагов, которая зависит от тренированности бегуна. Движения плечевого пояса и рук связаны с движениями ног. Выполнять их надо легко, не напряженно. Это во многом зависит от умения расслаблять мышцы плечевого пояса. Движения рук помогают бегуну сохранять равновесие тела во время бега. Амплитуда

движения рук зависит от скорости бега. Кисти при движении вперед не пересекают средней линии тела и поднимаются примерно до уровня ключицы. При движении рук назад кисти доходят до задней линии туловища (если смотреть на бегуна сбоку). Руки двигаются маятникообразно, пальцы рук свободно сложены, предплечья не напряжены, плечи не поднимаются вверх. При финишировании, длина которого зависит от дистанции и оставшихся сил бегуна, движения руками делаются быстрее, наклон тела увеличивается, а угол отталкивания уменьшается. Спортсмен переходит на скоростной бег, при котором скорость повышается главным образом за счет увеличения частоты шагов. К концу дистанции вследствие утомления некоторые бегуны наклоняют туловище назад. Такое положение туловища не способствует эффективности бега, так как усилия отталкивания направляются больше вверх. Техника бега на вираже имеет некоторые особенности: туловище немного наклонено влево, к бровке, правая рука движется несколько размашистей левой, причем правый локоть дальше отводится в сторону, а правая стопа ставится с некоторым поворотом внутрь. Ритм дыхания зависит от индивидуальных особенностей и скорости бега (с увеличением скорости бега увеличивается и частота дыхания). Бегун не должен задерживать дыхание. Дышать следует одновременно через нос и полуоткрытый рот, при этом важно следить за полным выдохом.

**5.4.2. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения самостоятельных тренировок**

В некоторых случаях тренировка может стать причиной различных осложнений, включая травмы опорно-двигательного аппарата.

Основная причина травматизма опорно-двигательного аппарата - перенапряжение. Слишком быстрое увеличение тренировочных нагрузок является чрезмерным для детренированных мышц, связок и суставов. К дополнительным факторам, способствующим повреждению опорно-двигательного аппарата, можно отнести:

- бег по твердому грунту;
- избыточную массу тела;
- обувь, не пригодную для бега;
-грубые ошибки в технике.

Следовательно, меры по профилактике травм должны быть направлены на устранение или ослабление воздействия этих факторов:

- Во время кроссового бега часто болит в правом боку (печень), либо в левом боку (селезенка). Печень важный орган в жизнедеятельности нашего организма (синтез жиров и углеводов, обмен белков и витаминов) является кровяным депо. Так вот в результате переполнения кровью печени возникают колики. Глубокое дыхание снижает приток крови

к правому предсердию, уменьшает болевые ощущения. Бег не надо прекращать, необходимо снизить скорость передвижения и стараться дышать глубже.

- В процессе тренировок после значительного перерыва (отдыха) или при резком увеличении нагрузок могут появляться боли в мышцах, как правило, на другой день. Во время физической работы в организме образуются продукты распада, часть которых выводится из организма через мочевыделительную систему, а другая часть, в том числе, молочная кислота задерживается в мышечных тканях. Чтобы избавиться от нее, необходимо мышцу непосредственно после физической нагрузки заставить растянуться (с помощью упражнений на растяжение), а на следующий день выполнять какую-либо физическую работу, т.е. сокращаться. Эти меры помогут ускорить вывод молочной кислоты из мышц. Боли могут длиться несколько дней и если не предпринимать никаких мер, мышца теряет эластичность, становиться твердой. В этом случае могут помочь: массаж, банные процедуры, применение согревающих мазей и гелей.

- При выполнении напряженной физической работы длительное время, например, кроссовый бег, возникают такие состояния, которые получили название «мертвая точка» и «второе дыхание». Уже через некоторое время бега в организме начинаются изменения, которые заставляют нас прекратить мышечную деятельность. Такое временное снижение работоспособности получило название «мертвая точка». Механизм возникновения такого состояния недостаточно изучен. Предполагают, что он обусловлен временным нарушением деятельности скелетных мышц и органов, обеспечивающих доставку кислорода в организм. Эти нарушения приводят к изменениям в работе нервных центров, что, в свою очередь, приводит к нарушениям в работе отдельных физиологических систем. Время возникновения и продолжительность этого состояния зависит от многих факторов, в частности от длительности и интенсивности физической нагрузки (например, при беге на 5-10 км и более возникает через 5-6 мин бега), от тренированности. Чем лучше тренирован человек, тем позже возникает это состояние и протекает менее тяжело (почти незаметно). Преодоление этого состояния требует значительного волевого усилия. В процессе проведения учебных и тренировочных занятий необходимо приучать себя преодолевать это неприятное ощущение, возникающее при кислородной недостаточности и накоплении продуктов кислотно-щелочного распада при обмене веществ. Наступлению «второго дыхания» способствуют усиленные дыхательные упражнения, глубокие выдохи, освобождающие организм от накопившейся углекислоты, что способствует наступлению кислотно-щелочного баланса в организме. Преодолеть состояние «мертвой точки» можно, если снизить интенсивность физической нагрузки, но это нежелательно, т.к. не будет адаптации организма к такого рода деятельности.

- При занятиях физическими упражнениями могут возникнуть отклонения в деятельности сердца - учащенное сердцебиение. Оно может быть следствием стенокардии, ссоры, неурядицы в быту, семье, боязни, страха, дистрофий миокарда. Возникновение болей - сигнал опасности, в этих случаях необходимо прекратить занятия и обратиться к врачу.

- Существует состояние, называемое гравитационным шоком. Часто возникает при внезапной остановки после относительно интенсивного бега (чаще после финиша) в связи с прекращением действия «мышечного насоса». Большая масса крови застаивается в раскрытых капиллярах и венах мышц нижних конечностей, на периферии. Возникает анемия (обескровливание) мозга, недостаточное снабжение его кислородом. Появляется резкое побледнение, слабость, головокружение, тошнота, потеря сознания, исчезновение пульса. Пострадавшего необходимо уложить на спину, поднять вверх ноги (выше головы), обеспечив отток венозной крови к сердцу, улучшив снабжение головного мозга кислородом, поднести к носу ватку смоченную нашатырным спиртом. Основная профилактика гравитационного шока - исключение внезапной остановки, постепенное замедление бега.

- Гипогликемическое состояние - следствие недостаточного количества в организме сахара, нарушение углеводного обмена в результате длительной физической нагрузки. Ощущается сильный голод, головокружение, иногда потеря сознания. Профилактика – легко усваиваемые углеводы до начала длительной физической нагрузки (немного сахара, меда и т.п.) или специальные питательные смеси.

- Солнечный и тепловой удары - возникают при длительной работе под действием солнечных лучей на обнаженную голову или тело. Тепловой удар - остро развивающееся болезненное состояние, обусловленное перегреванием организма. Его признаками являются: усталость, головная боль, слабость, боли в ногах, спине, тошнота, шум в ушах, повышение температуры, потемнение в глазах, ухудшение дыхания (прерывистое), потеря сознания.

Первая помощь: пострадавшего поместить в прохладное место, снять одежду, приподнять голову, охладить область сердца (холодный компресс), напоить. Дать понюхать нашатырный спирт, сердечные средства. При нарушении дыхания сделать искусственное дыхание.

При обморожениях на охлажденном участке вначале чувствуется легкое пощипывание, затем чувствительность теряется. Особенно поддаются ему пальцы рук, ног, нос, уши. Если произошло обморожение нельзя растирать пораженные места снегом, это только повредит кожу. Необходимо поместить обмороженный участок в тепло не

растирать, а согревать при комнатной температуре. Обмороженные места смазать жиром (вазелином).

## Глава 6. АКТУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ГОТОВНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ЗАЧЕТНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ, НА ОСНОВЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДАПТАЦИИ К СМЕНЕ ВИДОВ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Выполнение контрольных нормативов требует от студента мобилизации всех своих сил и здесь следует принимать во внимание и учитывать все что может повлиять на конечный результат, в том числе характер учебно-познавательной деятельности, предшествующий зачетному занятию.

В течение учебного дня, занимаясь то одним видом учебно-познавательной деятельности, то другим, обучающиеся должны переключаться с выполнения одного вида задач на другой, и каждый раз проходит какое-то время, пока будет достигнуто оптимальное соответствие состояния личности и организма обучающегося к условиям проведения определенного вида учебно-познавательной деятельности – период адаптации.

Можно говорить о том, что к каждому учебному занятию кроме практической и теоретической подготовленности, определенного уровня умений и навыков по предмету, от студентов требуется некоторая психофизиологическая и физическая готовность. В этом случае под ней подразумевается готовность психических, физиологических и обеспечивающих двигательные действия систем человека к выполнению определенного рода учебно-познавательной деятельности.

Многообразие видов учебно-познавательной деятельности определяет многообразие психофизиологических и физических состояний обучающихся. Под психофизиологическим и физическим состоянием предлагается понимать целостные психофизиологические и физические реакции обучаемого на внешние и внутренние факторы, направленные на достижение полезного результата.

Параметром психофизиологического и физического состояния является величина, характеризующая какую-либо из реакций организма обучаемого на внешние или внутренние факторы.

Уровень психофизиологической и физической готовности к предстоящему занятию, зависит от индивидуальных особенностей личности обучаемого и определенных внешних факторов, воздействующих на него на предыдущем занятии. Эти факторы можно разделить на три вида:

- санитарно-гигиенические условия;
- временные условия;

- организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности.

К санитарно-гигиеническим условиям относятся температура и влажность воздуха, освещенность, содержание кислорода в воздухе, эргономичность учебных мест, запыленность, загазованность места проведения занятия. К временным условиям относятся: время дня, день недели, месяц семестра, время года, а также время, прошедшее после последнего приема пищи.

Вышеперечисленные факторы оказывают существенное влияние на психофизиологическую и физическую готовность. Второй фактор заставляет учитывать объективные закономерности колебания уровня работоспособности студентов в течение учебного дня, учебной недели, семестра. Как известно, в течение учебного дня объективно наблюдается два периода подъема работоспособности: один в первой половине дня, второй – в послеобеденное время. Каждому периоду характерны три фазы: врабатывание, повышенная работоспособность, снижение работоспособности. В течение недели те же фазы распределяются следующим образом: понедельник, вторник – врабатывание; среда, четверг – повышенная работоспособность; пятница, суббота – снижение работоспособности. Исследования показали, что и семестровый цикл разделяется на те же фазы.

Влияние фактора «организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности» в данном случае рассматривается, как влияние особенностей психофизиологической и физической деятельности обучаемых на предыдущем занятии на их психофизиологическую и физическую готовность к последующему виду учебно-познавательной деятельности, в нашем случае к зачету. Психофизиологическая деятельность характеризуется напряженностью и характером мыслительной деятельности, а также нервно-эмоциональной напряженностью учебной деятельности.

Физическая деятельность характеризуется интенсивностью, видом мышечных действий и работой обеспечивающих эту деятельность физиологических систем. Мышечные действия могут носить статический и динамический характер: поддержание рабочей позы «сидя», «стоя», выполнение чертежной, письменной работы, настройка и обслуживание аппаратуры, выполнение гимнастических упражнений и т.п. При этом используются, в той или иной степени, основные физические качества: сила, быстрота, выносливость, ловкость.

Влияние всех вышеперечисленных факторов преломляется через индивидуальные особенности личности, такие как типологические свойства нервной системы и темперамента, возрастные, морфологические, биохимические особенности организма, уровень физической подготовленности, состояние здоровья и другие, выливаясь, в итоге, в

психофизиологическую и физическую готовность студента к предстоящему виду учебно-познавательной деятельности.

Следует отметить, что особенно явно эти проблемы проявляются при чередовании занятий по общенаучным, общеинженерным и специальным дисциплинам с практическими занятиями по физической культуре. В этом случае происходит смена видов деятельности, в одном из которых доминирующую роль играет умственная работа с пониженной двигательной активностью и сохранением определенной рабочей позы, в другом – разнообразная активная двигательная деятельность с сопровождающей ее мыслительной работой.

Методика проведения занятий предусматривает проведение вводной (подготовительной) части для организации обучающихся, приведения их в состояние готовности к решению задач основной части, в нашем случае к сдаче контрольного норматива, и заключительной – для подведения итогов, приведения организма в относительно спокойное состояние (для занятий по физической культуре), но при проведении этих частей занятий, как правило, не учитывается характер предыдущей и последующей деятельности студентов. Неучтение этого факта отрицательно влияет на скорость адаптации к виду учебно-познавательной деятельности, что особенно наглядно проявляется при чередовании практических занятий по физической культуре с занятиями по общеинженерным и специальным дисциплинам.

Складывается противоречие между имеющим место в практике обучения несоответствием уровня психофизиологической и физической готовности обучающихся, объективно складывающейся в ходе проведения предшествующего занятия, видом учебно-познавательной деятельности последующего занятия и неучтением этого факта в общепринятых методиках проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий, в том числе, по дисциплине «физическая культура»

Это противоречие можно устранить, обеспечив управление процессом адаптации студентов к смене видов учебно-познавательной деятельности в ходе проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий.

Для каждой темы занятия по физической культуре в зависимости от педагогической ситуации, складывающейся из контекстной пары - вид предшествующего и вид последующего занятия, можно установить наиболее предпочтительные адаптирующие, предметно-ориентированные варианты проведения подготовительной и заключительной частей, оперативно поддерживающие достаточно высокий уровень психофизиологической и физической готовности при чередовании этих занятий с занятиями по другим дисциплинам.

Видится актуальной задача управления процессом адаптации обучаемых к смене видов учебно-познавательной деятельности с целью сокращения времени врабатывания и повышения эффективности как занятий, так и сдачи контрольных нормативов. Для решения этой задачи представляется наиболее целесообразным использовать проведение подготовительной (разминки) и заключительной частей занятий с адаптирующим, предметно-ориентированным содержанием.

В этом случае под управлением адаптацией следует понимать процесс педагогического воздействия с целью установления оптимального соответствия личности обучаемого и условий осуществления учебной деятельности в ходе осуществления им познавательной деятельности, которое позволяет индивидууму более эффективно удовлетворять актуальные познавательные потребности, и реализовывать связанные с ними значимые цели.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Амосов Н. М. Моя система здоровья / Н. М. Амосов. Киев: Здоров'я, 1997.

2. Амосов Н. М. Энциклопедия Амосова. Алгоритм здоровья / Н. М. Амосов. М.: ООО «Издательство АСТ»; Донецк: «Сталкер», 2004.

3. Жилкин А. И. Легкая атлетика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / А. И. Жилкин, В. С. Кузьмин, Е. В. Сидорчук. М.: Издательский центр «Академия», 2003.

4. Пулео Д. Анатомия бега / Д. Пулео, П. Милрой; перевод с англ. В. М. Баженова. Минск: «Попурри», 2011.

5. Легкая атлетика / под ред. Н. Г. Озолина, В. И. Воронкина, Ю. Н. Примакова. М., 1989.

6. Макаров А. Н. Легкая атлетика / А. Н. Макаров, В. З. Сирис, В. П. Теннов. М., 1987.

7. Гайс И. А. Оздоровительная ходьба / И. А. Гайс. М.: Советский спорт, 1990.

8. Грачев О. К. Физическая культура: учеб. пособие / под ред. Е. В. Харламова. М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д.: Издательский центр «МарТ», 2005.

9. Холодов Ж. К. Теория и методика физического воспитания и спорта: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. 2-е изд., испр. и доп. / Ж. К. Холодов, В. С. Кузнецов. М.: Издательский центр «Академия», 2003.

10. Ингерлейб М. Б. Анатомия физических упражнений / М. Б. Ингерлейб. 2-е изд. Ростов н/Д.: Феникс, 2009.

11. Андерсон В. Растяжка для каждого / В. Андерсон, Дж. Андерсон; пер. с англ. О. Г. Белошеева. Минск: ООО «Попурри», 2002.

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет геологии и геофизики**

**Кафедра Математики**




**В. Б. Сурнев**

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

# РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**Екатеринбург 2020**

Министерство высшего образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Уральский государственный горный университет

Факультет геологии и геофизики

Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

# РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург 2020

**УДК 512.64**
**ББЛ 22.143**
**С 90**

**С 90 В. Б. Сурнев**
**Высшая математика. Решебник задач по высшей математике:** -
Учебно-методическое пособие. Екатеринбург. ФГБОУ ВО УГГУ. 2020. – 338 с.

ISBN

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика», предусмотренные государственными стандартами подготовки специалистов специальности «Горное дело». В каждой главе пособия приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело»: специализация № 6 «Обогащение полезных ископаемых», специализация № 10 «Электрификация и автоматизация горного производства», специализация N 8 "Горнопромышленная экология", специализация № 9 "Горные машины и оборудование". Учебное пособие моет быть использовано и для других специальностей и направлений подготовки горно-геологического профиля высших учебных заведений.

**Рецензенты**:
Кафедра информатики ФГБОУ ВО УГГУ, зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент А. В. Дружинин

Д-р физ.-мат. наук, в. н. с., ИГФ УрО РАН им. Ю. П. Булашевича А. Ф. Шестаков.

Сурнев Виктор Борисович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ISBN

© Сурнев В. Б., 2020

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Уральский государственный горный университет (УГГУ)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**ПРЕДИСЛОВИЕ** **9**

**Часть 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ** **11**

**1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ**

**Практическое занятие 1. Теория множеств. Множества, операции, отношения** 11

Предварительные сведения 11

Примеры с решением 13

**Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа** 20

Предварительные сведения 20

Примеры с решением 22

**Задания для самостоятельной работы** 24

**2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ** 30

**Практическое занятие 1. Векторная алгебра** 30

Предварительные сведения 30

Примеры с решением 33

**Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения. Прямая линия и плоскость** 45

Предварительные сведения 45

Примеры с решением 46

**Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства** 52

Предварительные сведения 52

Примеры с решением 53

**Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ** 75

Предварительные сведения 75

Примеры с решением 76

**Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов** 91

Предварительные сведения 91

Примеры с решением 92

**Задания для самостоятельной работы** 101

**Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА** $E^n$ 113

**Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве** 113

Предварительные сведения 113

Примеры с решением 116

**Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства** 137

Предварительные сведения 137

Примеры с решением 138

**Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка** 145

Предварительные сведения 145

Примеры с решением 147

**Задания для самостоятельной работы** 157

**ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО** 162

**Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности** 162

Предварительные сведения 162

Примеры с решением 164

**Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции** 172

Предварительные сведения 172

Примеры с решением 173

**Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного** 179

Предварительные сведения 179

Примеры с решением 180

**Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления** 191

Предварительные сведения 191

Примеры с решением 192

**Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного** 201

Предварительные сведения 201

Примеры с решением 203

**Практическое занятие 6. Интегрируемость функций одного переменного** 210

Предварительные сведения 210

Примеры с решением 211

**Задания для самостоятельной работы** **217**

**ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. РЯДЫ** **224**

**Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных** **224**

Предварительные сведения 224

Примеры с решением 226

**Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных** **239**

Предварительные сведения 239

Примеры с решением 240

**Практическое занятие 3. Числовые ряды** **244**

Предварительные сведения 244

Примеры с решениями 245

**Практическое занятие 4. Функциональные и степенные рядь** 251

Предварительные сведения 251

Примеры с решением 253

**Задания для самостоятельной работы** 260

**ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** **266**

**Практическое занятие 1. Базисные векторные поля** **266**

Предварительные сведения 266

Примеры с решением 269

**Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы** **279**

Предварительные сведения 279

Примеры с решением 281

**Практическое занятие 3. Кратные интегралы** **284**

Предварительные сведения 284

Примеры с решением 287

**Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов** **296**

Предварительные сведения **296**

Примеры с решением **297**

**Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы** **302**

Предварительные сведения 302

Примеры с решением 303

**Практическое занятие 6. Векторный анализ** **307**

Предварительные сведения 307

Примеры с решением 310

**Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения** 319

Предварительные сведения 319

Примеры с решением 322

**Практическое занятие 8. Системы ОДУ** **337**

Предварительные сведения 337

Примеры с решением 342

**Задания для самостоятельной работы** 348

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ» предназначено для студентов технических направлений подготовки и технических специальностей университетов. Цель данного пособия – оказание помощи студентам в самостоятельной работе по освоению общего курса высшей математики технического вуза. Перечислим некоторые причины, побудившие автора к созданию данного пособия.

Хорошо известно, что без самостоятельной работы сколько-нибудь твёрдое освоение курса высшей математики совершенно невозможно. За то малое количество часов аудиторных занятий, которое отводится современными учебными планами, особенно для направлений подготовки бакалавров, никакой преподаватель не сможет обучить студентов даже основам математики, не говоря уже об овладении методами последней на уровне, нужном для плодотворного изучения специальных дисциплин учебных планов таких, как, например, теоретическая механика, теоретическая электротехника и так далее.

Желательно, чтобы студент научился самостоятельно выбирать метод решения задачи, поставленной в предметной области, и мог использовать для его реализации знания по высшей математике, полученные в университете. Последнее может быть достигнуто только упорным и творческим самостоятельным трудом, чему и призвано помочь данное пособие.

В настоящее время достаточно велико число желающих получить высшее образование с использованием дистанционных методов обучения. Несмотря на наличие у подавляющего большинства обучающихся в свободном доступе вычислительной техники разного уровня, «книжный вариант» самостоятельного изучения дисциплины математика не потерял своей актуальности. Для многих студентов наличие печатного пособия по практическому освоению курса высшей математики предпочтительнее её электронного варианта.

Предлагаемое учебное пособие появилось как результат многолетнего преподавания автором высшей математики в техническом вузе – ФГБОУ ВО Уральский государственный горный университет. Пособие содержит материал по основным разделам общего курса высшей математики. Некоторые разделы, включаемые обычно в общий курс высшей математики, в пособии не представлены.

В качестве примера назовём теорию функций комплексной переменной (ТФКП). По мнению автора ТФКП является по существу самостоятельной дисциплиной и требует отдельного издания. К тому же в русскоязычной литературе имеются в большом числе практические пособия по данной дисциплине.

Аналогично, теория вероятностей и математическая статистика в совокупности являются отдельной дисциплиной со своими теориями и методами. Поэтому включение теории вероятностей и

математической статистики в качестве раздела в пособие по общему курсу высшей математики нецелесообразно.

Также отсутствует в пособии теория уравнений с частными производными, которая является по мнению автора отдельной дисциплиной, имеющей своё историческое название – «Математическая физика».

Кроме перечисленных разделов высшей математики в пособии не представлена теория операторов, которая известна также под названием «Функциональный анализ». Данная математическая дисциплина вынужденно исключена из современных учебных планов и программ в связи с сокращением времени на изучение высшей математики.

Список разделов, включённых в данное пособие, легко увидеть из оглавления, поэтому перечислять их нет необходимости. Сделаем лишь несколько замечаний относительно структуры пособия.

Перед каждым разделом помещены краткие теоретические сводки, цель которых напомнить студенту, изучившему предварительно теоретический материал по лекционному курсу, необходимые для разбора предлагаемых примеров и решения заданий формулы.

Дальше приводятся с подробным решением примеры типовых задач, перемежающиеся иногда с дополнительными сведениями и с практико-ориентированными примерами из предметных областей.

После примеров с решениями приводятся в достаточном количестве задания для самостоятельной работы. В заданиях для самостоятельной работы ответы не приводятся. Сделано это намеренно, с целью побудить студентов в процессе самостоятельных занятий к общению между собой и с преподавателем.

В заключение отметим, что особое внимание в пособии уделяется трудным для освоения студентами разделов высшей математики, имеющих на первый взгляд абстрактный характер, например, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладной характер данных разделов не может быть обоснован на начальных стадиях обучения в вузе и выяснится лишь при изучении специальных дисциплин.

# ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

## Практическое занятие 1. Теория множеств

## Множества, операции, отношения

### Предварительные сведения

**Множество** – неопределяемое понятие. Множество можно задать. Конечное множество задаётся списком, например,

$$M = \{a, b, \ldots k\},$$

где $a, b, \ldots k$ – **элементы** множества.

Бесконечное множество задаётся при помощи признака, позволяющего установить принадлежность элементов данному множеству:

$$M = \{x : x \in K\}.$$

Читается: $M$ есть множество элементов $x$, обладающих свойством (свойствами) $K$, и только эти элементы являются элементами данного множества.

Над множествами можно производить операции.

Множества $M_1$ и $M_2$ считаются **равными**, если

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \wedge y \in M_2 \Rightarrow y \in M_1.$$

**Пересечение множеств**: $M_1 \bigcap M_2 \overset{def}{=} \{x : x \in M_1 \; и \; x \in M_2\}.$

**Объединение множеств**: $M_1 \bigcup M_2 \overset{def}{=} \{x : x \in M_1 \; или \; x \in M_2\}.$

**Разность множеств**: $M_1 - M_2 \equiv M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \; и \; x \notin M_2\}.$

**Произведение множеств**: $M_1 \times M_2 = \{\{x, y\} : x \in M_1, \; y \in M_2\}.$

Здесь $\{x, y\}$ – упорядоченная пара элементов $x \in M_1, \; y \in M_2$.

**Закон тождества** гласит:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1.$$

Пусть $x \in M \wedge y \in M$. **Бинарной алгебраической операцией** называется отображение

$$\varphi : \{x, y,\} \to z \in M.$$

Алгебраическая операция называется **ассоциативной**, если

$$(\forall x, y, z \in M)\ x*(y*z)=(x*y)*z.$$

Алгебраическая операция называется **коммутативной**, если

$$(\forall x, y \in M)\ x*y=y*x.$$

Алгебраическая операция $(\circ)$ называется **дистрибутивной** относительно алгебраической операции $(*)$, если $(\forall x, y, z \in M)$

1) $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$,
2) $z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$.

Множество $G\neq\varnothing$ с заданной на нём бинарной алгебраической (внутренней) операцией $(*)$, называется **группой**, если выполнены следующие аксиомы:

1) $(\forall\ x, y, z \in G)\ x*(y*z)=(x*y)*z$;
2) $(\exists\, e \in G):(\forall\ x \in G)\ x*e=e*x=x$;
3) $(\forall\ x \in G)\left(\exists\, x^{-1} \in G\right):\ x*x^{-1}=x^{-1}*x=e.$

Группа называется **абелевой**, или **коммутативной**, если алгебраическая (групповая) операция коммутативна.

Непустое множество $K$ с двумя алгебраическими операциями **сложением** и **умножением** называется **кольцом**, если выполнены аксиомы:

1) $K$ есть абелева группа по операции сложения (**аддитивная группа кольца**);
2) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x, y, z \in K)\ x(y+z)=xy+xz$ и $(y+z)x=yx+zx$.

Непустое множество $P$ вместе с двумя алгебраическими операциями – **сложением** и **умножением**, называется **полем**, если выполняются следующие аксиомы:

1) $P$ есть аддитивная абелева группа по сложению;
2) $P-\{0\}$ есть мультипликативная абелева группа по умножению;
3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall\, x, y, z \in P)\ x(y+z)=xy+xz,\ (y+z)x=yx+zx$.

**Примеры с решением**

**Пример 1.1.1.** Найти все подмножества множества $M = \{2, 7, 9\}$.

Р е ш е н и е. Подмножествами данного множества являются: пустое множество $\varnothing$; само множество $M$; одноэлементные множества $\{2\}, \{7\}, \{9\}$; двухэлементные множества $\{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\}$. $\otimes$

**Пример 1.1.2.** Найти пересечение, объединение и разность множеств $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{b, e, f, k\}$.

Р е ш е н и е. Пересечение множеств $A \bigcap B$ содержит три элемента

$$A \bigcap B = \{b, e, f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \bigcup B = \{a, b, c, d, e, f, k\},$$

разность

$$A - B = \{a, c, d\}. \otimes$$

**Пример 1.1.3.** Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1,\ 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что $x \in R^1$.

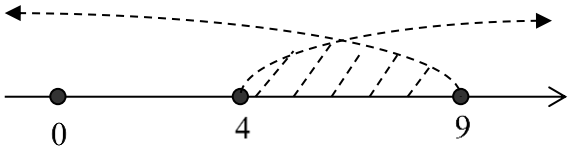



Рис. 1.

Р е ш е н и е. Решением первого неравенства является множество действительных чисел $x > 4$, решением второго неравенства является множество действительных чисел $x < 9$. Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество $M = \{x \in R^1 : 4 < x < 9\}$. $\otimes$

**Пример 1.1.4.** Найти произведение $A \times B$ множеств

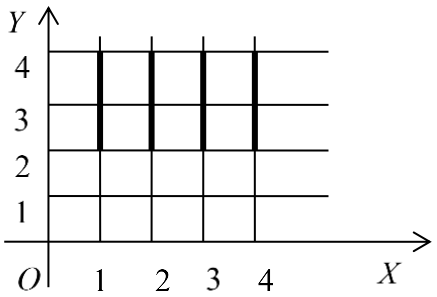
$$A = \{m, p\}, B = \{e, f, k\}.$$

Р е ш е н и е. Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества $A$, а второй – элемент множества $B$:

$$A \times B = \{\{m, e\}, \{m, f\}, \{m, k\}, \{p, e\}, \{p, f\}, \{p, k\}\}. \otimes$$

**Пример 1.1.5.** Изобразить на координатной плоскости произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \in R^1 : 2 \le y \le 4\}$.

Р е ш е н и е. Множество $A$ конечно, а множество $B$ – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа $1$, $2$, $3$ или $4$, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка $[2, 4]$. Множество пар координатной плоскости изобразится




в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2). $\otimes$

**Пример 1.1.6.** Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

Р е ш е н и е. Пусть $X, Y$ и $Z$ – произвольные множества. Покажем, что из $X = Y$ и $Y = Z \Rightarrow X = Z$.

Пусть $x \in X$. Тогда, так как $X = Y$, имеем $x \in Y$. Но так как $Y = Z$, получаем $x \in Z$.

Обратно, из $x \in Z$ следует, что $x \in X$. По закону тождества получаем $X = Z$. $\otimes$

**Пример 1.1.7.** Доказать, что для произвольных множеств $A$, $B$ и $C$ справедливо равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Откуда следует, что $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. То есть, $x \in A$ и $x \notin B$, или $x \in A$ и $x \notin C$. Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение $(A \setminus B) \bigcup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \bigcap C)$ доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$. $\otimes$

**Пример 1.1.8.** Проверить непосредственно, что для множеств

$$X = \{3, 5, 7\}, Y = \{7, 9\}, Z = \{0, 1\}$$

выполняется следующее равенство: $(X \bigcup Y) \times Z = (X \times Z) \bigcup (Y \times Z)$.

Р е ш е н и е. Для левой части равенства непосредственно получаем $X \bigcup Y = \{3, 5, 7, 9\}$ и далее имеем:

$$(X \bigcup Y) \times Z = \{3, 5, 7, 9\} \times \{0, 1\} =$$
$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{9, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}, \{9, 1\}\}.$$

Для правой части получаем аналогично:

$$(X \times Z) \bigcup (Y \times Z) = \{\{3, 5, 7\} \times \{0, 1\}\} \bigcup \{\{7, 9\} \times \{0, 1\}\} =$$
$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}\} \bigcup \{\{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\} =$$
$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\}.$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу. $\otimes$

**Пример 1.1.9.** Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$$

множества действительных чисел $R^1$ алгебраической операция $x * y = x^2$ и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

Р е ш е н и е. Пусть $x, y, z$ – любые элементы из $R^+$. Тогда, очевидно, $(\forall x \in R^+) x^2 \in R^+$, то есть операция $(*)$ является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$(\forall x \neq y) x * y = x^2 \neq y * x = y^2,$$

то операция $(*)$ не является коммутативной. Далее, так как

$$(\forall x \neq y \neq z \in R^+) x * (y * z) = x^2 \neq (x * y) * z = (x * y)^2 = x^4,$$

то операция $(*)$ не является ассоциативной. $\otimes$

**Пример 1.1.10.** Ассоциативна ли на множестве действительных чисел $R^1$ операция $x * y = \sin x \cdot \sin y$.

Р е ш е н и е. Для определённой операции имеем:

$$(\forall x, y, z \in R)(x * y) * z = \sin(\sin x \cdot \sin y) \cdot \sin z,$$

$$x * (y * z) = \sin x \cdot \sin(\sin y \cdot \sin z).$$

Очевидно, что $(x * y) * z = x * (y * z)$ выполняется не для всех $x, y, z$, следовательно, операция $(*)$ свойством ассоциативности не обладает. $\otimes$

**Пример 1.1.11.** На множестве $M = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «***меньше***». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.

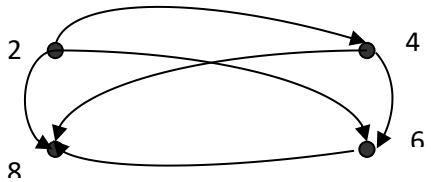



**Рис. 1.8.3**.

Р е ш е н и е. Отношение имеет вид:

$$2 < 4, 2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества $\Re \subset M \times M$ произведения множества $M$ на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3. $\otimes$

**Пример 1.1.12.** Пусть $M = \{f, p, q\}$ и задано подмножество $\Re$ множества $M \times M$

$$\{\{f, p\}, \{f, q\}, \{f, f\}, \{p, f\}, \{q, f\}, \{p, q\}, \{p, p\}, \{q, p\}, \{q, q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

Р е ш е н и е. Очевидно, что для элементов множества $\Re$ истинны следующие высказывания:

$$1)\ \{f, f\}, \{p, p\}, \{q, q\} \in \Re;$$

$$2)\ \{f,\ p\}\wedge\{p,\ f\}\in\Re,\ \{f,\ q\}\wedge\{q,\ f\}\in\Re,$$
$$\{p,\ q\}\wedge\{q,\ p\}\in\Re;$$
$$3)\ \{f,\ p\}\in\Re\wedge\{p,\ q\}\in\Re\Rightarrow\{f,\ q\}\in\Re,$$
$$\{f,\ q\}\in\Re\wedge\{q,\ p\}\in\Re\Rightarrow\{f,\ p\}\in\Re,$$
$$\{p,\ f\}\in\Re\wedge\{f,\ q\}\in\Re\Rightarrow\{p,\ q\}\in\Re.$$

Поэтому отношение $\Re$ на множестве $M$, заданное множеством упорядоченных пар элементов $M$, рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\otimes$

**Пример 1.1.13.** Показать, что отношение включения $\subset$ является отношением порядка.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $X$ – произвольное множество. Так как всегда $X\subset X$, то отношение $\subset$ рефлексивно. 2) Пусть $X, Y, Z$ – произвольные множества, для которых выполняются включения $X\subset Y$ и $Y\subset Z$. Если $x\in X$, то в силу $X\subset Y$ имеем $x\in Y$, а так как $Y\subset Z$, то и $x\in Z$. Поэтому $(X\subset Y\wedge Y\subset Z)\Rightarrow X\subset Z$, то есть отношение $\subset$ транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X\subset Y\wedge Y\subset X)\Leftrightarrow X=Y,$$

то отношение $\subset$ антисимметрично.

Отношение $\subset$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка. $\otimes$

**Пример 1.1.14.** Пусть функция $f: M_1\to M_2$, где $M_1\subset R^1$ и $M_2\subset R^1$, задана формулой $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Требуется: найти множество определения $M_1$ и множество значений $M_2$ этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли $f$ инъективной, сюръективной или биективной.

Р е ш е н и е. Множеством определения функции $f$ является множество $M_1=\{x\in R^1: -1\le x\le 1\}$, а множеством значений – множество $M_2=M_1$, следовательно $f$ осуществляет отображение $M_1$ на $M_1$, то есть является преобразованием. Так как $(\exists x\in M_1): f(x)=f(-x)$, то преобразование $f$ не является инъективным, но очевидно, что $f$ – сюръективно. Следовательно, отображение $f$ не является биективным. $\otimes$

**Пример 1.1.15.** Доказать, что множество натуральных чисел $N$ с операцией $(*): x*y=\min\{x,\ y\}$ является полугруппой.

Р е ш е н и е. Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция $(*)$ является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x,\, y \in N)\, x * y = \min\{x,\, y\} \in N,$$

то операция $(*)$ является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x,\, y,\, z \in N)\,(x * y) * z = \min\{\min\{x,\, y\},\, z\} = \min\{x,\, \min\{y,\, z\}\}.$$

Операция $(*)$ ассоциативна. Поэтому $(N, *)$ – полугруппа. $\otimes$

**Пример 1.1.16.** Доказать, что множество положительных действительных чисел $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$, в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$(\forall x,\, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R)\, x + y \overset{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \overset{def}{=} x^{\alpha},$$

является векторным пространством.

Р е ш е н и е. Согласно определению векторного пространства, в множестве $R^+$ должны выполняться две группы аксиом.

**Аксиомы сложения:**

1) $(\forall x,\, y \in A)\, x + y = y + x$ (**коммутативность**);

2) $(\forall x,\, y,\, z \in M)\ x * (y * z) = (x * y) * z$. (**ассоциативность**);

3) $(\exists 0 \in A) : (\forall x \in A)\, x + 0 = x$ (существование нулевого элемента);

4) $(\forall x \in A)(\exists (-x) \in A) :\ x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

**Аксиомы умножения на число:**

5) $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha,\, \beta \in R)\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

6) $(\forall x,\, y \in A \wedge \forall \alpha \in R)\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

7) $(\forall x \in A)\, 1 \cdot x = x$;

8) $\left(\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R\right)\ (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

Во множестве $R^+$ операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$\left(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1\right) x \cdot y \in R^+ \wedge x^\alpha \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x, y \in R^+\right) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x, y, z \in R^+\right)(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$\left(\forall x \in R^+\right) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как $\left(\forall x \in R^+\right) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, то

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, то

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как $x^1 = x$, то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как $x^{\alpha \cdot \beta} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha}$, то

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество $R^+$ с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел $R^1$.

$\otimes$

## Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа

### Предварительные сведения

**Комплексными числами** называются упорядоченные пары действительных чисел вида $(a, b)$, для которых операции сложения и умножения вводятся посредством определения результата их выполнения в соответствии со следующими аксиомами.

1. Два комплексных числа $(a, b)$ и $(c, d)$ считаются **равными** в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$, что при помощи логической символики записывается так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \qquad (3.1)$$

2. **Сумма** двух комплексных чисел $(a, b)$ и $(c, d)$ является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b) + (c, d) \overset{def}{=} (a + c, b + d). \qquad (3.2)$$

3. **Произведение** двух комплексных чисел $(a, b)$ и $(c, d)$ является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b)(c, d) \overset{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \qquad (3.3)$$

4. Комплексное число $(a, 0)$ **отождествляется с действительным (вещественным) числом** $a$: $(a, 0) \equiv a$. В частности, $(0, 0) \equiv 0$.

Числа вида $(0, b)$ называются **мнимыми числами**. Число $i \overset{def}{=} (0, 1)$ называется мнимой единицей, причём $i^2 = (-1, 0) \equiv -1$.

Нетрудно показать, что множество всех комплексных чисел является полем.

**Алгебраическая форма** комплексного числа

$$z = a + bi \equiv a + ib.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – **модуль** комплексного числа, $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$ – **аргумент** комплексного числа.

Операции над комплексными числами производятся путём обычного раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = (-1, 0) = -1$.

В тригонометрической форме операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Корни $n$-й степени из комплексного числа $\alpha$ существуют и все они даются формулой

$$\beta_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

при любом целом числе $k$.

**Примеры с решением**

**Пример 1.2.1.** Построить точку, изображающую комплексное число

$$z=-3-4i.$$

Р е ш е н и е. В данной задаче $z=a+bi=-3-4i$. Так как на комплексной плоскости $a=x$ и $b=y$, то точка, изображающая на комплексной плоскости число $z$, имеет координаты $x=-3$ и $y=-4$. $\otimes$

**Пример 1.2.2.** Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-4-4\sqrt{3}i$.

Р е ш е н и е. Модуль числа $|z|=\sqrt{(-4)^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=8$. Точка $z$ лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = arctg\sqrt{3}=-\frac{2\pi}{3}$. $\otimes$

**Пример 1.2.3.** Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}.$$

Р е ш е н и е. Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы $i^2=-1$. $\otimes$

**Пример 1.2.4.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $-2<\operatorname{Im} z\le 3$.

Р е ш е н и е. Так как на комплексной плоскости $\operatorname{Im} z=y$, то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями $y=-2$ и $y=3$, причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат. $\otimes$

**Пример 1.2.5.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $|z-1|<3$.

Р е ш е н и е. Положим $z=x+iy$. Тогда имеем $z-1=(x-1)+iy$, откуда получаем

$$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}<3,$$

или

$$(x-1)^2+y^2<9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса $3$ с центром в точке $(1;0)$. $\otimes$

**Пример 1.2.6.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $\log_3|z-3i|<1$.

Р е ш е н и е. Положим $z=x+iy$. Тогда для числа $z-3i$ имеем

$$z-3i=x+i(y-3),$$

откуда получаем

$$|z-3i|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}\,.$$

Решая неравенство

$$\log_3\sqrt{x^2+(y-3)^2}<1,$$

получаем $x^2+(y-3)^2<9$. Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса $3$ с центром в точке с координатами $(0;3)$. $\otimes$

**Пример 1.2.7.** Представить комплексное число

$$z=-\cos\vartheta+i\sin\vartheta$$

в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. По формулам приведения имеем $-\cos\vartheta=\cos(\pi-\vartheta)$. Поэтому, полагая $r=1$ и $\varphi=\pi-\vartheta$, получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z=\cos(\pi-\vartheta)+i\sin(\pi-\vartheta).\ \otimes$$

**Пример 1.2.8.** Представить комплексное число $z=4-4\sqrt{3}\cdot i$ в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. 1) Находим модуль: $|z|=\sqrt{4^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=8$.

2) Находим аргумент. Так как $\cos\varphi=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, $z=8\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. $\otimes$

**Пример 1.2.9.** Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя формулу умножения, получаем:

$$8\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}i.\otimes$$

**Пример 1.2.10.** Выполнить деление комплексных чисел:

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right):4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i.\otimes$$

**Пример 1.2.11.** Возвести комплексное $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ число в седьмую степень.

Р е ш е н и е. По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\left[2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]^7=2^7\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=-64\sqrt{2}+64\sqrt{2}\,i.\otimes$$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Пусть $M=\{4, 8, 11, 22\}$. Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти $X\cap Y,\ X\cup Y,\ X-Y,\ Y-X$.

3. Пусть $X=[1, 3)\cup(5, 7]$ и $Y=[2, 6]$. Найти $X\cap Y,\ X\cup Y,\ X-Y,\ Y-X$.

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x+4\geq 7x-16,\ |x-3|<1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а) $X=\{x: 2\leq x\leq 6\},\ Y=\{y: 3<y\leq 5\}$;

б) $X=R,\ Y=\{y: -2<y\leq 3\}$;

в) $[0, 1]\times[0, 1]$;

г) $[1, 2]\times(-\infty, +\infty)$;

д) $(0, +\infty)\times[-2, -3]$.

6 . Доказать, что для произвольных множеств $X$ , $Y$ , $Z$ справедливы равенства:

а) $X\cup(X\cap Y)=X$ ;

б) $X\cap(X\cup Y)=X$

в) $(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$;

г) $(X\setminus Y)\setminus Z=(X\setminus Z)\setminus Y$ ;

д) $Y\cup(X\setminus Y)=X\cup Y$ ;

е) $(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)$;

ж) $(X\cap Y)\times Z=(X\times Z)\cap(Y\times Z)$;

з) $(X-Y)\times Z=(X\times Z)-(Y\times Z)$;

и) $X\cup Y\subset Z\Rightarrow X\times Y=(X\times Z)\cap(Z\times Y)$.

7 . Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8 . Истинны или ложны для любых $X$ , $Y$ , $Z$ следующие высказывания:

а) $(X\subset Y\wedge Y\subset Z)\Rightarrow X\subset Z$ ;

б) $(X\neq Y\wedge Y\neq Z)\Rightarrow X\neq Z$ .

9 . Найти множество истинности предиката: $\left\langle\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}<0\right\rangle$.

10 . Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{array}{c} \textit{Корни системы} \\ \textit{уравнений} \end{array} \begin{cases} x-y=m-1 & \textit{одновременно} \\ 2x-y=3-m & \textit{положительны.} \end{cases} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката: $\langle x\cdot(x-2)\cdot(x+3)>0\rangle$.

12 . Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число $x$, что для любого числа $y$ справедливо равенство $x+y=0$»;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества $R$ действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а) $N$; б) $N_{2k}=\{2k : k\in N\}$; в) $N_{2k-1}=\{2k-1 : k\in N\}$;

г) $Z$; д) $Z_{2k}=\{2k : k\in Z\}$; е) $R$; ж) $R-\{0\}$;

з) $R^{+}=\{x\in R : x>0\}$; и) $R-Q$; к) $\{0,1\}$.

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве $R^{+}=\{x\in R : x>0\}$ множества действительных чисел $R$, и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1) $x*y=\dfrac{x+y}{2}$; 2) $x*y=x+y-1$; 3) $x*y=x^{2}y$;

4) $x*y=\sqrt{xy}$; 5) $x*y=|x-y|$; 6) $x*y=x^{y}$;

7) $x*y=x^{2}+y^{2}$; 8) $x*y=x\cdot y^{\frac{x}{|x|}}$.

15. На множестве $X=\{2,4,6,8\}$ рассматриваются отношения «$x$ равно $y$», «$x$ кратно $y$» и «$x$ больше $y$ на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества $X\times X$ задаёт соответствующее отношение?

а) $\{\{4,2\},\{6,2\},\{8,2\},\{6,4\},\{8,4\},\{8,6\},\{2,2\},\{4,4\},\{6,6\},\{8,8\}\}$;

б) $\{\{4,2\},\{6,4\},\{8,6\}\}$;

в) $\{\{2,2\},\{4,4\},\{6,6\},\{8,8\}\}$.

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел $N$ с операциями $(*): x*y=x$ и $(\circ): x\circ y=1$ является полугруппой;

б) множества всех целых чисел $Z$, всех рациональных чисел $Q$ и всех действительных чисел $R$ являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17. Найти действительные числа $x$ и $y$, если:

а) $\dfrac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2$; б) $\dfrac{2u+4i}{2x+y}-\dfrac{y}{x-i}=0.$

18. Найти $\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Im}z$, если:

а) $z=\dfrac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$; б) $z=\dfrac{3-2i}{1-4i}+i^9$;

в) $z=\dfrac{5i-2}{3i+1}+i+\dfrac{8i-3}{2-i}$; г) $z=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{17+31i}{7+i}+\dfrac{12}{(1+i)^4}\right)+i.$

19. Выполнить указанные действия:

1) $(1+2i)^6$;

2) $(2+3i)\cdot(4-5i)+(2-3i)\cdot(4+5i)$;

3) $(x-1-i)\cdot(x-1+i)\cdot(x+1+i)\cdot(x+1-i)$;

4) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;

5) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

6) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$;

7) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$;

8) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

9) $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$;

10) $\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;

11) $\left[\dfrac{1}{3}\left((1-i)^4+\dfrac{7-24i}{4-3i}\right)+i\right]\dfrac{8}{(1+i)^2}$.

20. Найти такие вещественные числа $x$ и $y$, что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-спряжёнными:

а) $z_1=y^2-2y+xy-x+y+(x+y)i$, $z_2=-y^2+2y+11-4i$;

б) $z_1=x+y^2+1+4i$, $z_2=ixy^2+iy^2-3$.

21. Решить уравнения:

1) $|z|+z=1+2i$;

2) $2|z|-4az+1+ai=0\ (a\in R)$;

3) $|z|+z=2-i$;

4) $3z^2-(14-8i)z+8(4-3i)=0$;

5) $2(2-i)z^2+(7-i)z+5(1+i)=0$;

6) $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$;

7) $z^4-12z^2+64=0$.

22. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}(1-i)x-(3+i)y=4,\\ 5x-(4+2i)y=4i;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1-i)x+3iy=5,\\ 2x-(3-3i)y=6.\end{cases}$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=5-i$; 3) $z_3=2i$; 4) $z_4=-\sqrt{2}i$.

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=-2i$; 3) $z_3=5-\sqrt{2}$.

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

1) $-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$; 2) $1\le|z+1|<3$; 3) $|z+i|=1$;

4) $\frac{\pi}{4} \le \arg(z-2+i) \le \pi$; 5) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi, \\ |1-2i-z| = 2; \end{cases}$

6) $|z-1-i| \ge |z-2+i|$; 7) $|z-1+2i| \ge 3$; 8) $|z-2i| + |z-i| = 1$.

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z = 16 - 16\sqrt{3}i$; 2) $z = -6\sqrt{3} - 6i$; 3) $z = (\sqrt{5} - 2)i$.

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

1) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

2) $z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)(-3 + \sqrt{3}i)$;

$4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) : (\sqrt{3} - i)$;

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)(1+i)$; $\left(-\sqrt{5} + \sqrt{5}i\right)^3 (1+i)^2$; $\frac{2\sqrt{3} - 2i}{(-1+i)(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)}$.

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

1) $\sqrt{-6 + 6\sqrt{3}i}$;

2) $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{2} - -13{,}5\sqrt{2}i}$;

3) $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$.

30. Представив комплексные числа

$z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$

в тригонометрической форме, вычислить выражение $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

## 2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## Практическое занятие 1. Векторная алгебра

### Предварительные сведения

Множество $X$ абстрактных элементов (**векторов**) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ называется **векторным пространством** над полем $P$, если для его элементов выполнены перечисленные ниже аксиомы.

$1^0$. Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in X$ однозначно определена **операция сложения**, результатом которой является вектор, обозначаемый $\vec{x}+\vec{y} \in X$ и называемый **суммой** векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, причём операция сложения обладает следующими свойствами:

1) $\left(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X\right)\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+\vec{z}=\vec{x}+\left(\vec{y}+\vec{z}\right)$ – **ассоциативность;**

2) $\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X\right) \vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{y}$ – **коммутативность**.

$2^0$. Существует однозначно определённый элемент $\vec{0} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X\right)$

$$\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x},$$

который называется **нуль-вектор**.

$3^0$. Существует однозначно определённый вектор $-\vec{x} \in X$, такой что $\left(\forall \vec{x} \in X\right)$

$$\vec{x}+\left(-\vec{x}\right)=\left(-\vec{x}\right)+\vec{x}=\vec{0},$$

который называется **обратным к вектору** $\vec{x} \in X$.

$4^0$. Для любого числа $\alpha \in P$ и для любого вектора $\vec{x} \in X$ определена операция **умножения вектора на число**, результатом которой является вектор $\alpha \cdot \vec{x} \in X$, называемый **произведением вектора $\vec{x}$ на число $\alpha$**, причём операция умножения векторов на числа обладает следующими свойствами: $(\forall \alpha, \beta \in P)$ и $\left( \forall \vec{x}, \vec{y} \in X \right)$

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;

2) $\alpha \cdot \left( \vec{x} + \vec{y} \right) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$;

3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$;

4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \left( \beta \cdot \vec{x} \right)$.

Система векторов $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \right\} \subset X$ называется **линейно независимой**, если

$$\left( \alpha_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 x_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \right) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** в противном случае.

Максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n,$$

(содержащая $n$ векторов), называется ***базисом векторного пространства***, само векторное пространство в этом случае называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается $X^n$. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве существует линейно независимая система,

содержащая только n векторов, а любая система, содержащая n+1 вектор будет уже линейно зависимой.

В реальном трёхмерном пространстве (в его математической модели) векторы – это направленные отрезки. Базис трёхмерного пространства $R^3$ состоит из трёх взаимно перпендикулярных векторов единичной длины:

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3,$$

которые образуют базис декартовой системы координат.

Любой вектор $\vec{x} \in X^n$ можно представить в виде разложения

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \ldots + x^n \vec{e}_n$$

по векторам как-либо выбранной линейно независимой системе $n$ векторов

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X^n,$$

образующей базис пространства.

Алгебраическая операция сложения векторов и внешняя операция умножения вектора на число определяются так:

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i + y^i\right) \vec{e}_i = \left(x^1 + y^1\right) \vec{e}_1 + \left(x^2 + y^2\right) \vec{e}_2 + \ldots + \left(x^n + y^n\right) \vec{e}_n;$$

$$\alpha \vec{x} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = \alpha x^1 \vec{e}_1 + \alpha x^2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha x^n \vec{e}_n.$$

**Линейная комбинация** векторов находится по формуле:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x^i + \beta y^i\right) \vec{e}_i.$$

В трёхмерном пространстве скалярное произведение векторов является функцией, значение которой находится по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

или по эквивалентной формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\| \cdot \cos\varphi,$$

где **норма вектора**

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2},$$

а $\varphi$ – угол, образованный приведёнными к общему началу векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

**Примеры с решением**

**Пример 2.1.1.** В декартовой системе координат задана точка $A(1; 5; 3)$. Найти координаты точки $B$, расположенной симметрично точке $A(1; 5; 3)$ относительно координатной плоскости $X^1OX^2$.

Р е ш е н и е. Координаты точки $B$ по осям $OX^1$ и $OX^2$ такие же, как и уточки $A$, а координата по оси $OX^3$ имеет противоположный знак. Следовательно, $B(1; 5; -3)$. $\otimes$

**Пример 2.1.2.** В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \vec{y} = 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{z} = 3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u} = 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ и взаимном расположении векторов.

Р е ш е н и е. Находим линейную комбинацию:

$$3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z} =$$

$$= 3\left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) + 2\left(2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве $R^3$, заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости. $\otimes$

**Пример 2.1.3.** В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора $\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y}$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y} = 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right) - 5\left(4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3\right) =$$

$$= -18\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3.$$

Находим норму вектора $\vec{z}$: $\left\|\vec{z}\right\| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-24)^2} = \sqrt{916}$. $\otimes$

**Пример 2.1.4.** На плоскости $R^2$ задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты $O(0;\,0),\ B(1;\,2),\ D(5;\,0)$ (рисунок 1.1). Найти:

1) координаты вершины $C$;

2) косинус угла между сторонами $OB$ и $OD$;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

Р е ш е н и е. 1) По определению координаты вершины $C$ равны координатам вектора $\vec{OC}$ (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, а $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$, то $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD}\right) = 5.$$

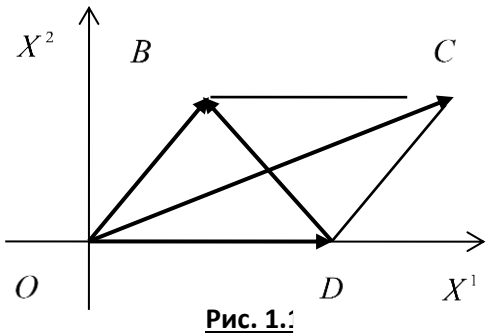



**Рис. 1.1**

3) Вычисляем длины векторов: $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left\|\vec{OB}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236;$$

$$\left\|\vec{OD}\right\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\}$: $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\} = \dfrac{5}{5 \cdot 2{,}236} \approx 0{,}447.$

5) Находим диагональ $\vec{DB}$:

$$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_1 = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 .$$

6) Далее, $\left\|\vec{OC}\right\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10};\ \left\|\vec{DB}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

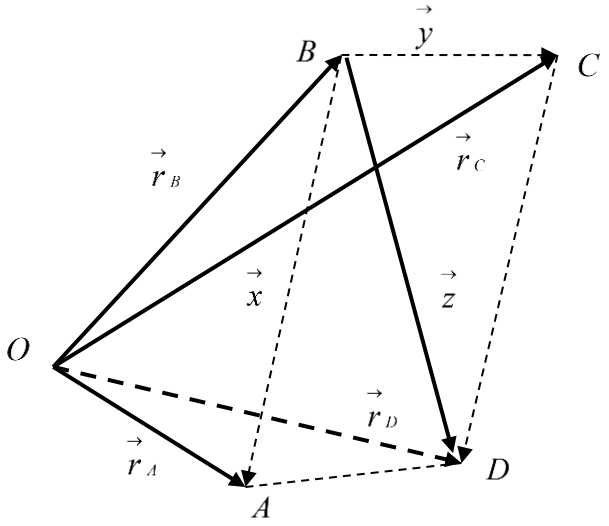
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\left\{\vec{OC}, \vec{DB}\right\} = \frac{\left(\vec{OC}, \vec{DB}\right)}{\left\|\vec{OC}\right\| \cdot \left\|\vec{DB}\right\|} = \frac{(-4) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \otimes$$

**Пример 2.1.5.** Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\vec{r}_A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{r}_B = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{r}_C = -7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3;$$

Р е ш е н и е. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.




Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{x},\ \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{z},$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{z} = \vec{r}_B + \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины. ⊗

**Пример 2.1.6.** В пространстве $R^2$ своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \sqrt{7}\,\vec{e}_2,\ \vec{y} = \vec{e}_1 + \sqrt{24}\,\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор $\vec{z}$, направленный по биссектрисе угла $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Находим длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = 4;$$

$$\left\|\vec{y}\right\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{e}_{\vec{x}} = \frac{1}{\left\|\vec{x}\right\|}\cdot\vec{x} = \frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\vec{e}_2;\ \vec{e}_{\vec{y}} = \frac{1}{\left\|\vec{y}\right\|}\cdot\vec{y} = \frac{1}{5}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5}\vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$:

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20}\vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7}+8\sqrt{6}}{20}\vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому найденный вектор $\vec{z}$ является искомым вектором. $\otimes$

**Пример 2.1.7.** В каноническом базисе декартовой системы координат пространства $R^3$ своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Р е ш е н и е. 1) Находим длину вектора:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2) Находим орт вектора: $\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}}\vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{e}_3.$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x},\vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}},\ \cos\left\{\vec{x},\vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}},\ \cos\left\{\vec{x},\vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}.\ \otimes$$

**Пример 2.1.8.** В каноническом базисе декартовой системы координат пространства $R^3$ своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,\ \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Найти скалярное произведение $\left(\vec{x}-2\vec{y},\,3\vec{x}+\vec{y}\right)$ двумя способами.

Р е ш е н и е. 1. Находим линейные комбинации $\vec{x}-2\vec{y}$ и $3\vec{x}+\vec{y}$:

$$\vec{x}-2\vec{y}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3-2\left(\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)=-\vec{e}_1-10\vec{e}_2+8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x}+\vec{y}=3\left(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3\right)+\left(\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}-2\vec{y},\,3\vec{x}+\vec{y}\right)$:

$$\left(-\vec{e}_1-10\vec{e}_2+8\vec{e}_3,\,4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+10\vec{e}_3\right)=$$

$$=-4+20+80=96.$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\left(\vec{x}-2\vec{y},\,3\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(\vec{x},\,3\vec{x}\right)+\left(\vec{x},\,\vec{y}\right)+\left(-2\vec{y},\,3\vec{x}\right)+\left(-2\vec{y},\,\vec{y}\right)=$$

$$=3\left(\vec{x},\,\vec{x}\right)+\left(\vec{x},\,\vec{y}\right)-6\left(\vec{y},\,\vec{x}\right)-2\left(\vec{y},\,\vec{y}\right)=$$

$$=3\left\|\vec{x}\right\|-5\left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x},\,\vec{y}\right\}-2\left\|\vec{y}\right\|.$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи. $\otimes$

**Пример 2.1.9.** Дано: $\left\|\vec{x}\right\|=3$, $\left\|\vec{y}\right\|=2\sqrt{5}$, $\left\{\vec{x},\,\vec{y}\right\}=\dfrac{\pi}{4}$. Найти

$$\left(\vec{x}+3\cdot\vec{y},\,3\cdot\vec{x}-\vec{y}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\left(\vec{x}+3\vec{y},\,3\vec{x}-\vec{y}\right)=3\left\|\vec{x}\right\|^2-\left(\vec{x},\,\vec{y}\right)+9\left(\vec{y},\,\vec{x}\right)-3\left\|\vec{y}\right\|^2=$$

$$=3\left\|\vec{x}\right\|^2+8\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x},\,\vec{y}\right\}-3\left\|\vec{y}\right\|^2=-33+24\sqrt{10}.\otimes$$

**Пример 2.1.10.** В пространстве $R^3$ своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=5\vec{e}_1-3\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы $\left\{\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3\right\}$ образуют новый базис в пространстве $R^3$.

2) Найти координаты вектора $\vec{x}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2+6\vec{e}_3$ относительно базиса $\left\{\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_2-2\alpha_3=0,\\ 2\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3=0,\\ -3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространства $R^3$.

2) Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ относительно нового базиса записываем разложение вектора $\vec{x}$ по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$. Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$. Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

**Пример 2.1.11.** В пространстве $R^3$ своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y},$$

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)$:

$$\left(\vec{x}, 2\vec{z}\right) = \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)\right) = 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2 = 2.$$

2) находим вектор $\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y}$:

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y} = 2\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\right) + \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3.$$

3) Находим скалярное произведение $\left(2\cdot\vec{x}, \vec{z}\right)$:

$$\left(2\cdot\vec{x}, \vec{z}\right) = \left(2\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\right), \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)\right) =$$

$$= \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) = 4 + 4 - 6 = 2.$$

4) Находим вектор $\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y}$:

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 22\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3.$$

5) Находим расстояние между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\rho\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{(-8)^2+4^2+1^2}=\sqrt{81}=9.\otimes$$

**Пример 2.1.12.** В пространстве $R^3$ своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки $A(2;4;6)$, $B(1;3;5)$, $C(0;2;3)$. Найти длины сторон треугольника $ABC$, косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора $\vec{AB}+\vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-5\vec{e}_3$.

Р е ш е н и е. 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3;$$

$$\vec{AC}=-2\vec{e}_1-2\vec{e}_2-3\vec{e}_3;$$

$$\vec{BC}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника $\Delta ABC$:

$$\left\|\vec{AB}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3};$$

$$\left\|\vec{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17};$$

$$\left\|\vec{BC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos\vartheta=\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|}=\frac{x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2}\sqrt{\left(y^1\right)^2+\left(y^2\right)^2+\left(y^3\right)^2}}:$$

$$\cos\left\{\vec{AB},\vec{AC}\right\}=\frac{\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|}=\frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA},\vec{BC}\right\}=\frac{\left(\vec{BA},\vec{BC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}=\frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA},\vec{CB}\right\}=\frac{\left(\vec{CA},\vec{CB}\right)}{\left\|\vec{CA}\right\|\cdot\left\|\vec{CB}\right\|}=\frac{10}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{6}}=\frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора $\vec{AB}+\vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-5\vec{e}_3$:

$$\Pr_{\vec{z}}\left\{\vec{AB}+\vec{AC}\right\}=\frac{(-3)\cdot1+(-3)\cdot2+(-4)\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{11}{\sqrt{30}}.\otimes$$

**Пример 2.1.13.** Пусть на плоскости $X^1OX^2$ даны две точки $A_1\left(x_1^1;\,x_1^2\right)$ и $A_2\left(x_2^1;\,x_2^2\right)$. Найти координаты точки $A\left(x^1;\,x^2\right)$, делящей отрезок $A_1A_2$ в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda$.

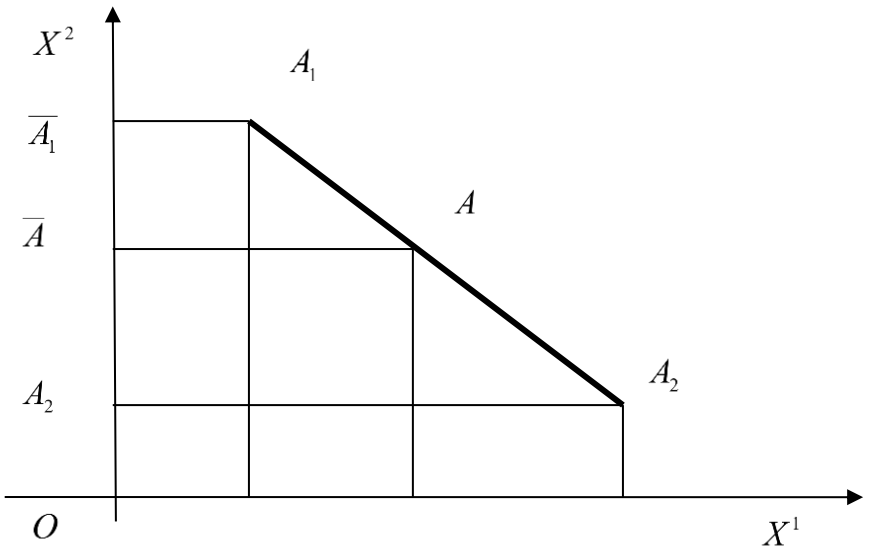
Р е ш е н и е. Предположим, что отрезок $A_1A_2$ не параллелен оси $OX^1$. Точки $A_1$, $A$, $A_2$ спроектируем на оси $OX^1$, и $OX^2$ (рисунок).

Имеем по условию задачи

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\overline{A_1}\,\overline{A}}{\overline{A}\,\overline{A_2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1 A} = \left|x_1^2 - x^2\right|,\ \overline{A A_2} = \left|x^2 - x_2^2\right| \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left|x_1^2 - x^2\right|}{\left|x^2 - x_2^2\right|}.$$




Точка $\overline{A}$ лежит между точками $A_1$ и $A_2$, поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left|x_1^2 - x^2\right|}{\left|x^2 - x_2^2\right|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^2 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2\right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1\right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки $A$:

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1\right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1\right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

# Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения.

## Прямая линия и плоскость

### Предварительные сведения

**Векторное произведение** векторов как результат алгебраической операции умножения векторов

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y^i \vec{e}_i = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

находится по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2 y^3 - x^3 y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3 y^1 - x^1 y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1 y^2 - x^2 y^3\right)\vec{e}_n.$$

**Смешанное произведение** векторов – это функция, значение которой находится по формуле

$$\left(\left[\vec{x}, \vec{y}\right], \vec{z}\right) = x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 - x^1 y^3 z^2 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1 .$$

**Параметрические уравнения** прямой линии в трёхмерном пространстве имеют вид

$$x^i = x_0^i + t \cdot a^i,$$

где $i = 1,2,3$, $x_0^i$ – координаты опорной точки, $a^i$ – координаты направляющего вектора, $t \in \left(-\infty, +\infty\right)$ – параметр.

Параметрические уравнения плоскости в трёхмерном пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + a_1^1 \cdot t_1 + a_2^1 \cdot t_2, \\ x^2 = x_0^2 + a_1^2 \cdot t_1 + a_2^2 \cdot t_2, \\ x^3 = x_0^3 + a_1^3 \cdot t_1 + a_2^3 \cdot t_2. \end{cases}$$

Неявное уравнение плоскости в трёхмерном пространстве записывается в виде

$$A \cdot x^1 + B \cdot x^2 + C \cdot x^3 + D = 0,$$

где коэффициенты при неизвестных суть координаты **нормального** вектора плоскости

$$\vec{N} = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3,$$

удовлетворяющего условию

$$\left(\vec{N}, \vec{x}\right) = 0,$$

где $\vec{x}$ – произвольный вектор на плоскости.

**Примеры с решением**

**Пример 2.2.1.** Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Если в некоторой декартовой системе координат векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3,\ \vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left((-2)\cdot(-6) - (-1)\cdot 1\right)\vec{e}_1 + \left((-1)\cdot(-2) - 3\cdot(-6)\right)\vec{e}_2 +$$

$$+\left(3\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\right)\vec{e}_3 = 13\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{570}. \otimes$$

**Пример 2.2.2.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| = 1 \text{ и } \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6}.$$

Р е ш е н и е. Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}\right] = 3\left[\vec{a}, \vec{a}\right] + \left[\vec{a}, \vec{b}\right] +$$

$$+ 9\left[\vec{b}, \vec{a}\right] + 3\left[\vec{b}, \vec{b}\right] = -8\left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S = \left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\| = 8\left\|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right\| = 8\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \otimes$$

**Пример 2.2.3.** Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Предлагается решить задачу самостоятельно. $\otimes$

**Пример 2.2.4.** Получить уравнение плоскости $H^2 \subset R^3$, проходящей через начало координат $O$ и через две точки $M_1(4; -2; 1),\ M_2(2; 4; -3)$.

Р е ш е н и е. Радиус-векторы точек $M_1$ и $M_2$

$$\vec{x} \equiv \vec{OM}_1 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} \equiv \vec{OM}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\vec{N} = \left[\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\right] \equiv \left[\vec{x}, \vec{y}\right] =$$

$$= \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3 =:$$

$$= \left[(-2)\cdot(-3) - 1\cdot 4\right]\vec{e}_1 + \left[1\cdot 2 - 4\cdot(-3)\right]\vec{e}_2 + \left[4\cdot 4 - (-2)\cdot 2\right]\vec{e}_3 =$$

$$= 2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 + 20\vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$$

текущей точки $M$ плоскости её нормальному вектору

$$\left(\vec{N}, \vec{OM}\right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \otimes$$

**Пример 2.2.5.** Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0,\ x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

Р е ш е н и е. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\right\} = \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right)}{\left\|\vec{N}_1\right\| \cdot \left\|\vec{N}_2\right\|} = \frac{3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. $\otimes$

**Пример 2.2.6.** Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0,\ x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

Р е ш е н и е. Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая линия принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3 =$$

$$= \left[1\cdot(-3) - 1\cdot(-1)\right]\vec{e}_1 + \left[1\cdot 1 - 1\cdot(-3)\right]\vec{e}_2 + \left[1\cdot(-1) - 1\cdot 1\right]\vec{e}_3 =$$

$$= -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости $X^1OX^3$, для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^3 = 2, \\ x^1 - 3x^3 = -6 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение $x_0^1 = 0,\ x_0^2 = 0,\ x_0^3 = 2$.

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 2}{-2}. \otimes$$

**Пример 2.2.7.** Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4},$$

и плоскости с уравнением $x^1 + x^2 + 2x^3 - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left(\vec{N},\, \vec{l}\right)=\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\,\vec{e}_3,\, \vec{e}_1+\vec{e}_2-4\,\vec{e}_3\right)=-6\neq 0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны. Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1=2+t, \\ x^2=3+t, \\ x^3=-1-4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра $t_0$, соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим $x^1, x^2, x^3$ из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём $t_0=-1$. Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1=1,\, x_0^2=2,\, x_0^3=3.\otimes$$

**Пример 2.2.8.** Найти расстояние от точки $M(1;\,0;\,1)$ до плоскости $H^2$ с уравнением $4x^1+6x^2+4x^3-25=0.$

Р е ш е н и е. Расстояние от точки $M$ до плоскости – это длина вектора $\vec{M_0M}$ с начальной точкой $M$ и конечной точкой $M_0$ – проекцией точки $M$ на плоскость $H^2$.

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1;\,0;\,1)$ перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1+6x^2+4x^3-25=0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор плоскости $\vec{l} = \vec{N} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2}{6} = \frac{x^3 - 1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 4t, \\ x^2 = \quad 6t, \\ x^3 = 1 + 4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0 = \frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции $M_0$ точки $M(1; 0; 1)$ на плоскость $H^2$:

$$x^1 = 2,\ x^2 = \frac{3}{2},\ x^3 = 2.$$

Вектор

$$\vec{M_0M} = (2-1)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)\vec{e}_2 + (2-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho\left(M, H^2\right) = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \otimes$$

# Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

## Предварительные сведения

Аддитивная абелева группа $E$ называется **абстрактным векторным пространством** (над полем $P$), если на ней определена внешняя бинарная операция – **умножение элементов группы $E$ на элементы поля $P$**, то есть $(\forall x \in E)$ и $(\forall \alpha \in P)\,(\exists \alpha \cdot x \in E)$, причём выполняются следующие аксиомы:

1) $(\alpha + \beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

3) $1 \cdot x = x$;

4) $(\alpha \cdot \beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Простейшим примером векторного пространства является множество обычных трёхмерных векторов, которое изучалось выше. Здесь отметим лишь, что из определения векторного пространства следует, что

$$(\forall x \in E) - x = (-1)x,$$

где $1-$единица поля $P$, и

$$0x = 0.$$

В последнем равенстве $0$ в левой части – это нуль поля $P$, $0$ в правой части равенства – это нулевой элемент из группы $E$. Элементы векторного пространства называются **абстрактными векторами**.

Система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ называется **линейно независимой**, если

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** – в противном случае. Если векторное пространство содержит линейно независимую систему из $n$ векторов, а любая система, содержащая $n+1$ векторов, уже линейно зависима, то говорят, что пространство $E$ является $n$ **мерным векторным пространством**. Любая линейно независимая система $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset E$ из $n$ векторов образует **базис** пространства. Любой вектор $x \in E$ можно представить в виде разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

где коэффициенты разложения называются **координатами** вектора относительно заданного базиса. Подмножество $L \in E$ называется **линейным многообразием** в $E$, если

$$(\forall \alpha, \beta \in P)(x, y \in L) \Rightarrow (\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in L).$$

Остальные определения теории векторных пространств, в том числе евклидовых, приведены выше на страницах 25-28.

**Примеры с решением**

**Пример 2.3.1.** Пусть $P$ – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля $P$:

1) $\left(\forall |a\rangle, |b\rangle \in P^n\right) |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \ldots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ $

$$2)\ \left(\forall |a\rangle \in P^n\right) \text{ и } \left(\forall \alpha \in P\right)\ \alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \cdots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Показать, что множество $P^n$ является $n$-мерным векторным пространством.

Р е ш е н и е. Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

**Аксиомы сложения**.

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле $P$, действительно

$$\left[|a\rangle + |b\rangle\right] + |c\rangle = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \cdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \cdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \cdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}\right] = |a\rangle + \left[|b\rangle + |c\rangle\right].$$

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле $P$, действительно

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \cdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = |b\rangle + |a\rangle$$

.

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$\left(\forall |a\rangle \in P^n\right) |a\rangle + |0\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ \cdots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$\left(\forall |a\rangle \in P^n\right) -|a\rangle = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \cdots \\ -a_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle + \left(-|a\rangle\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \cdots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ \cdots \\ a_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Аксиомы умножения вектор-столбца на числа.** Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

1) $\left(\forall |a\rangle \in P^n\right)$ и $\left(\forall \alpha \in P\right)$

$$\alpha\left(|a\rangle + |b\rangle\right) = \alpha\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \alpha(a_1 + b_1) \\ \alpha(a_2 + b_2) \\ \cdots \\ \alpha(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

2) $(\forall \alpha, \beta \in P)$

$$(\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha+\beta)a_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle;$$

3) $1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix};$

4) $$(\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_1) \\ \alpha(\beta a_2) \\ \dots \\ \alpha(\beta a_n) \end{pmatrix} = \dots = \alpha\left[\beta|a\rangle\right],$$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество $P^n$ является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца $|a\rangle$, он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или ***канонический*** базис в векторном пространстве $P^n$.

Теперь очевидно, что множество $P^n$ является $n$-мерным векторным пространством. $\otimes$

**Пример 2.3.2.** Показать, что если система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \right\}$ линейно независима, то и любая её подсистема также линейно независима.

Р е ш е н и е. Пусть $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\}$ – подсистема данной системы, то есть $m < n$.

Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\}$ линейно зависима. Тогда можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Учитывая свойство нуль вектора

$$\left( \forall \vec{x} \in X \right) \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\vec{0} = 0\vec{x}_{m+1} + \ldots + 0\vec{x}_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m + 0\vec{x}_{m+1} + \ldots + 0\vec{x}_n = \vec{0},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависимость векторов системы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \right\}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости ***произвольной*** подсистемы $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ линейно независимой системы $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ не верно. $\otimes$

**Пример 2.3.3.** Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

Р е ш е н и е. *Необходимость.* Если из двух векторов $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ хотя бы один равен нуль вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть система $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению найдутся такие числа $\alpha, \beta \in R$, что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа неравны нулю одновременно.

Пусть $\beta \neq 0$. Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\vec{x}.$$

Обозначая $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

*Достаточность.* Пусть теперь векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, покажем, что система $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть $\nu \neq 0$, тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu}\vec{x},$$

откуда получаем

$$\nu\vec{y} = \lambda\nu\vec{x},$$

или

$$\mu\vec{x} + \nu\vec{y} = \vec{0},$$

где $\mu = -\lambda\nu$. Так как $\lambda \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то система векторов $\left\{\vec{x},\ \vec{y}\right\}$ линейно зависима. $\otimes$

**Пример 2.3.4.** Показать, что система трёх векторов пространства $R^3$ линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

Р е ш е н и е. Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

*Необходимость.* Пусть система $\left\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\right\}$ линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in R$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}.$$

Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{x} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{y}.$$

Приложив векторы $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ к общей точке $O$, легко видеть, что вектор $\vec{z}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{x},\ \vec{b} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

*Достаточность.* Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны, покажем, что система $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{x} = \mu \vec{y} + \lambda \vec{z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ .⊗

**Пример 2.3.5.** Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, |a_4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle + \alpha_3|a_3\rangle + \alpha_4|a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов. $\otimes$

**Пример 2.3.6.** Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ можно выразить в виде разложения по векторам подсистемы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$.

Р е ш е н и е. Так как подсистема $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$ – максимальная по числу векторов линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор $\vec{a}_{m+1}$, получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие неравные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве $\alpha_{m+1} \neq 0$ так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ одновременно равны нулю. Но тогда система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$ будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}, \ \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}, \ \ldots, \ \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение. $\otimes$

**Пример 2.3.7.** Дана система функций

$$\left\{ e^t, e^{2t}, e^{3t} \right\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке $\left(-\infty, +\infty\right)$.

Р е ш е н и е. По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \ \left(\forall t \in \left(-\infty, +\infty\right)\right)$$

влечёт за собой выполнение условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим СЛАУ для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого положим в тождестве $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество по $t$ и полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Таким образом, система функций $\left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\}$ является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Поэтому множество функций вида

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций. $\otimes$

**Пример 2.3.8.** Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset E^4$, заданных в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ своими разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

Р е ш е н и е. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_2\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 -$$

$$-\frac{1}{4}(-4)\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{g}_3 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_2\right\|^2}\vec{a}_2 =$$

$$= 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) -$$

$$-\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4}\left( 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{ \vec{e}_{a1},\ \vec{e}_{a2},\ \vec{e}_{a3} \right\}$ ортонормированная. $\otimes$

**Пример 2.3.9.** Показать, что линейная оболочка $L\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$, где элементы $L$ вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left( \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1 \right),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

Р е ш е н и е. Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left( \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left( \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0;$$

$$\left( \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( -1 - 1 \right) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ является ортонормированной и, следовательно, её можно принять за один из базисов линейного многообразия $L$. $\otimes$

**Пример 2.3.10.** Пусть $X$ – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства $R^2$.

Р е ш е н и е. 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).

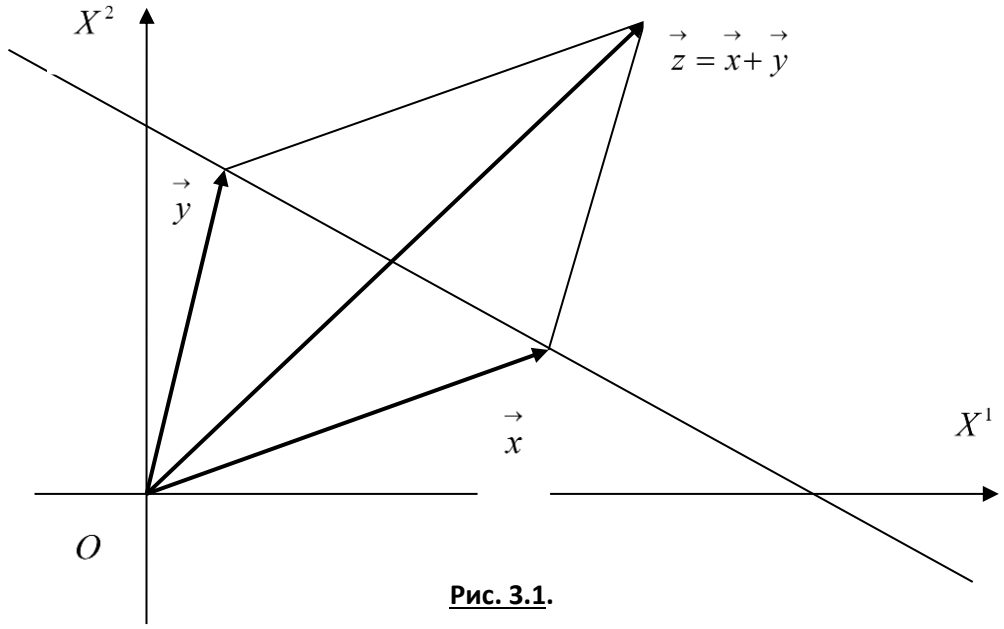



**Рис. 3.1.**

Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству $X$, так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество $X$ не является векторным подпространством пространства $R^2$.

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству $X$ и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество $X$ является векторным подпространством пространства $R^2$. $\otimes$

**Пример 2.3.11.** Дана система функций

$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$.

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где $\alpha, \beta, \lambda \in R^1$, является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Р е ш е н и е. Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке $(-\pi, \pi)$.

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях $t \in (-\pi, \pi)$ получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0,\ t = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ линейно независима на промежутке $(-\pi, \pi)$

.

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$, что и доказывает требуемой. $\otimes$

**Пример 2.3.12.** Показать, что система векторов

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $E^4$

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \tag{1}$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства $E^4$.

Р е ш е н и е. Находим значение скалярного произведения:

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 0.$$

Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова $E^4$, найдём векторы

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right) = 0, \\ \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая $x^3$ и $x^4$ за свободные неизвестные, то есть, например, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$. Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

или

$$\vec{x} = a\vec{a}_3 + b\vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система $\left\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$ ортогональна и в совокупности с векторами $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ также образует ортогональную систему $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$. Для получения ортонормированного базиса пространства $E^4$ нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{a}_1\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{a}_2\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{a}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\left\|\vec{a}_4\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_4\right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4\right\}$ ортонормирована. $\otimes$

**Пример 2.3.13.** В евклидовом пространстве $E^4$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,\ \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство $H^2$ пространства $E^4$. Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства $H^2$.

2) Найти базис $\left\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$ и построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$ к подпространству $H^2$, записать параметрические уравнения ортогонального дополнения $H^{2\perp}$.

Р е ш е н и е. 1) Координаты векторов системы $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ непропорциональны – векторы неколлинеарны. Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ линейно независимая. Векторы системы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2,$$

где $\vec{x}_0$ – вектор сдвига многообразия. Если $\vec{x}_0 = \vec{0}$, то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения $H^{\perp}$. Так как система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – базис подпространства $H$, то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left( \vec{a}_1, \vec{x} \right) = 0, \\ \left( \vec{a}_2, \vec{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённа, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $a$ и $b$ – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы $\left\{\vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}$ образуют линейно независимую систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$.

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$, параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства $H^2$:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{9}{5}\tau_1 - \frac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \frac{3}{5}\tau_1 + \frac{1}{5}\tau_2, \otimes \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases}$$

**Пример 2.3.14.** В аффинном пространстве $A^4$ координатами относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ заданы четыре точки:

$$A_1(1;\,4;\,2;\,0),\ A_2(3;\,7;\,3;\,2),\ A_3(2;\,6;\,3;\,-1),\ A_4(1;\,4;\,5;\,2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Р е ш е н и е. Обозначим точку $A_1$ через $O^* \equiv A_1$ и примем её за начало репера на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{O^*A_2} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4,\\
\vec{a}_2 &= \vec{O^*A_3} = \quad \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \quad \vec{e}_4,\\
\vec{a}_3 &= \vec{O^*A_4} = \qquad\qquad 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из этого результата заключаем, что система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ линейно независима и её можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$$

на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Пусть $M\left(x^1; x^2; x^3; x^4\right)$ – текущая точка гиперплоскости, координаты которой определены относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ вмещающего пространства $A^4$. Тогда её радиус-векторы $\vec{OM}$ относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ пространства $A^4$ и

$\vec{O^*M}$ относительно репера $\left\{O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ гиперплоскости $H^3 \subset A^4$ могут быть, соответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} &\vec{x} \equiv \vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4, \\ &\vec{O^*M} = t_1 \vec{a}_1 + t_1 \vec{a}_2 + t_1 \vec{a}_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{O^*M}, \tag{3}$$

где

$$\vec{x}_0 \equiv \vec{OO^*} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3. \tag{4}$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем ***параметрические уравнения***

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \tag{5}$$

гиперплоскости $H^3 \subset A^4$. Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра $t_1, t_2, t_3$ из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \tag{6}$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$t_1 = 2x^1 - x^2 + 2;$$

$$t_2 = -3x^1 + 2x^2 - 5;$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости $H^3 \subset A^4$, проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

## Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ

### Предварительные сведения

**Оператор** – это отображение $\hat{A}: X^m \to Y^n$. Оператор называется линейным, если

$$\left(\forall \alpha, \beta \in R^1\right) \wedge \left( \forall \vec{x}, \vec{y} \in X^m \right): \hat{A}\left( \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \right) = \alpha \hat{A}\vec{x} + \beta \hat{A}\vec{y}.$$

При фиксированных базисах в

$$\left\{ \vec{e}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m \right\} \subset X^m \text{ и } \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n \right\} \subset Y^n$$

линейный оператор имеет своим представителем **матрицу**:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы по столбцам находятся как коэффициенты разложения образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$ по базису пространства $Y^n$.

Действия с линейными операторами определяются следующим образом. Если

$$\hat{A}: X^m \to Y^n, \ \hat{B}: X^m \to Y^n,$$

то

$$\hat{C} \overset{def}{=} \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \left( \forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Матричные элементы матрицы суммы операторов вычисляются по формуле $c_j^i = a_j^i + b_j^i$.

Произведение оператора на число

$$\hat{T} = \alpha \hat{A} \Leftrightarrow \left( \forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C}\vec{x} = \alpha \left( \hat{A}\vec{x} \right).$$

Матричные элементы матрицы произведения на число вычисляются по формуле $c_j^i = \alpha a_j^i$.

Если $\hat{A} : X^m \to Y^n$ и $\hat{B} : X^m \to Y^n$, то композиция операторов $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{A}$:

$$\hat{C}\vec{x} \overset{def}{=} \left( \hat{B}\hat{A} \right)\vec{x} = \hat{B}\left( \hat{A}\vec{x} \right).$$

Элементы матрицы композиции линейных операторов находятся по формуле

$$c_k^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i a_k^j .$$

Формула разложения определителя матрицы оператора $\hat{A} : X^n \to X^n$ по элементам любой строки или любого столбца определителя, например для столбца с номером $k$, имеет вид:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_k^i M_k^i =$$

$$= (-1)^{1+k} a_k^1 M_k^1 + (-1)^{2+k} a_k^2 M_k^2 + \ldots + (-1)^{n+k} a_k^n M_k^n .$$

**Примеры с решением**

**Пример 2.4.1.** В пространстве $R^3$ оператор $\hat{P}$ действует по правилу

$$\left( \forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P}\vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору $\vec{x}$ его координатную проекцию на ось $OX^1$. Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P}\left( \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \alpha_1 \hat{P}\vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P}\vec{x}_2 .$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\hat{P}\left(\alpha_1 \vec{x}_1+\alpha_2 \vec{x}_2\right)=$$

$$=\hat{P}\left[\alpha_1\left(x_1^1 \vec{e}_1+x_1^2 \vec{e}_2+x_1^3 \vec{e}_3\right)+\alpha_2\left(x_2^1 \vec{e}_1+x_2^2 \vec{e}_2+x_2^3 \vec{e}_3\right)\right]=$$

$$=\hat{P}\left[\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1+\left(\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(\alpha_1 x_1^3+\alpha_2 x_2^3\right)\vec{e}_3\right]=$$

$$=\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1=\alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1+\alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1=\alpha_1 \hat{P}\vec{x}_1+\alpha_2 \hat{P}\vec{x}_2.$$

Определение выполняется и оператор $\hat{P}$ линейный.

Действуя оператором $\hat{P}$ последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\hat{P}\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_2=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_3=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3.$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{P}$ называется ***оператором ортогонального проектирования на ось*** $OX^1$. $\otimes$

**Пример 2.4.2.** Показать, что оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действующий по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)\ \hat{A}\vec{x}=\left[\vec{a},\left[\vec{x},\vec{b}\right]\right],$$

где фиксированные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями

$$\vec{a}=2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \vec{b}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$$

по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\hat{A}\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\right)=\left[\vec{a},\left[\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{b}\right]\right]=\left[\vec{a},\alpha\left[\vec{x},\vec{b}\right]+\beta\left[\vec{y},\vec{b}\right]\right]=$$

$$=\alpha\left[\vec{a},\left[\vec{x},\vec{b}\right]\right]+\beta\left[\vec{a},\left[\vec{y},\vec{b}\right]\right]=\alpha\hat{A}\vec{x}+\beta\hat{A}\vec{y}.$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

1) использовать свойства векторного произведения;

2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;

3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A}\vec{e}_k=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_k,\vec{b}\right]\right]$$

по формуле

$$\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\left(x^2y^3-x^3y^2\right)\vec{e}_1+\left(x^3y^1-x^1y^3\right)\vec{e}_2+\left(x^1y^2-x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Пусть $k=1$, тогда получаем:

$$\left[\vec{e}_1,\vec{b}\right]=\left(0\cdot1-0\cdot(-1)\right)\vec{e}_1+\left(0\cdot1-1\cdot1\right)\vec{e}_2+\left(1\cdot(-1)-0\cdot1\right)\vec{e}_3=-\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A}\vec{e}_1=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_1,\vec{b}\right]\right]=-5\vec{e}_1+2\vec{e}_2-2\vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A}\vec{e}_2=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_2,\vec{b}\right]\right]=-4\vec{e}_1+\vec{e}_2-4\vec{e}_3,$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_3, \vec{b}\right]\right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.4.3.** Показать, что если $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots., \vec{x}_m\right\} \subset X^n$ – линейно зависимая система векторов, то и система образов $\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots., \hat{A}\vec{x}_m\right\} \subset X^n$ при действии линейного оператора $\hat{A} : X^n \to X^n$ также линейно зависимая.

Р е ш е н и е. Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ равны нулю одновременно. Действуя на обе части последнего равенства оператором $\hat{A}$, в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{A}\vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ есть ненулевые, то система образов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots., \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

линейно зависима. $\otimes$

**Пример 2.4.4.** Показать, что если система

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots., \hat{A}\vec{x}_m\right\} \subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\} \subset X^n$$

при действии оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$ линейно независимая, то и сама система $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\} \subset X^n$ также линейно независимая.

Р е ш е н и е. Для системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\}$ потребуем выполнения равенства нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

то есть предположим, что система $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\}$ линейно зависимая.

Действуя на обе части равенства оператором $\hat{A}$, получим

$$\alpha_1 \hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{A}\vec{x}_m = \vec{0},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\}$$

неверное. Система линейно независимая. $\otimes$

**Пример 2.4.5.** Пусть $\vec{x} \in R^3$ – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\vec{x}\equiv\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$$

операторов $\hat{A}:R^3\to R^3$ и $\hat{B}:R^3\to R^3$, представленных в каноническом базисе пространства $R^3$ своими матрицами

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\5&2&1\\1&0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&2&4\\2&2&3\\4&2&0\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$AB-BA=\begin{pmatrix}1&4&6\\5&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4\\2&2&3\\4&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&4\\2&2&3\\4&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&6\\5&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}32&22&16\\8&16&26\\12&8&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&4&14\\15&12&23\\14&20&26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&18&2\\-7&4&3\\-2&-12&-22\end{pmatrix}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на произвольный вектор $\vec{x}\in R^3$, для чего находим координаты образа вектора:

$$\left(AB-BA\right)\left|x\right\rangle=\begin{pmatrix}18&18&2\\-7&4&3\\-2&-12&-22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18x^1+18x^2+2x^3\\-7x^1+4x^2+3x^3\\-2x^1-12x^2-22x^3\end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\vec{x}=\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}=\left(18x^1+18x^2+2x^3\right)\vec{e}_1+$$

$$+\left(-7x^1+4x^2+3x^3\right)\vec{e}_1+\left(-2x^1-12x^2-22x^3\right)\vec{e}_1.\otimes$$

**Пример 2.4.6.** В каноническом базисе трёхмерного пространства $R^3$ действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \; B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{x}$.

Р е ш е н и е. Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$2A + AB = 2\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты образа вектора $\vec{x}$, используя координатную форму записи:

$$\left(2A+AB\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-13&-16\\0&3&10\\6&-13&-16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x_1-13x_2-16x_3\\3x_2+10x_3\\6x_1-13x_2-16x_3\end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x}=\left(6x_1-13x_2-16x_3\right)\vec{e}_1+\left(3x_2+10x_3\right)\vec{e}_2+\left(6x_1-13x_2-16x_3\right)\vec{e}_3.\otimes$$

**Пример 2.4.7.** Найти $\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)$, если

$$\vec{x}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+6\vec{e}_3;\ \vec{y}=-3\vec{e}_1-\vec{e}_2-5\vec{e}_3;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим вектор $\hat{A}\vec{x}+\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$A|x\rangle+|y\rangle=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\17\\18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\16\\13\end{pmatrix};$$

$$\hat{A}\vec{x}+\vec{y}=22\vec{e}_1+16\vec{e}_2+13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор $\vec{x}+\hat{B}\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$|x\rangle+B|y\rangle=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-20\\-20\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\-17\\-8\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}+\hat{B}\vec{y}=-19\vec{e}_1-17\vec{e}_2-8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)=22\cdot(-19)+16\cdot(-17)+13\cdot(-8)=-794.\ \otimes$$

**Пример 2.4.8.** Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1-x^2+x^3-x^4=5, \\ x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ 3x^1+x^2-x^3+2x^4=-1. \end{cases} \quad (1)$$

Р е ш е н и е. 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ 2x^1-x^2+x^3-x^4=5, \\ 3x^1+x^2-x^3+2x^4=-1. \end{cases} \quad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное $x^1$ и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17. \end{cases} \quad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17. \end{cases} \quad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные $x^3, x^4$ за свободные неизвестные и, полагая $x^3=a$ и $x^4=b$, выражаем через них $x^2, x^1$, имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2=-\frac{17}{5}+a-\frac{7}{5}x^4,\ x^1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}b,\ x^3=a,\ x^4=b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, |x_0\rangle = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку” $|x_0\rangle$ и имеющее направляющие векторы $|a\rangle$ и $|b\rangle$. $\otimes$

**Пример 2.4.9.** Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент. Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 45 - 5 = 40. \otimes$$

**Пример 2.4.10.** Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Определитель матрицы $\det A = 5 \neq 0$. Матрица $A$ невырожденная, следовательно, обратная матрица $A^{-1}$ существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_1^1 = 1;\ A_2^1 = -3;\ A_3^1 = 1$$

$$A_1^2 = 3;\ A_2^2 = 1;\ A_3^2 = -2;$$

$$A_1^3 = -2;\ A_2^3 = 1;\ A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$adjA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ подтверждает правильность расчёта. $\otimes$

**Пример 2.4.11.** Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы: $A_1^1 = 4, A_2^1 = -2, A_1^2 = -3, A_2^2 = 1.$

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adjA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det A} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = 9, x^2 = -3. \otimes$$

**Пример 2.4.12.** Найти неизвестную матрицу $X$ из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Имеем матричное уравнение вида $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу $A^{-1}$ и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде $X = A^{-1}B.$

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы $A$ равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_1^1 = 3,\ A_2^1 = -1,\ A_1^2 = -5,\ A_2^2 = 2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу $A^{-1}$ слева:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение. $\otimes$

**Пример 2.4.13.** Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$x^1 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

Аналогично находим $x^2$ и $x^3$:

$$x^2 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -2;\ x^3 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3. \otimes$$

**Пример 2.4.14.** Пусть $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый (старый) базис пространства $X^4$ и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T}: X^4 \to X^4$ в этом базисе. Найти матрицу линейного оператора $\hat{T}$ в новом базисе

$$\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4\right\} \subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{a}_1,\ \vec{g}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{g}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3,\ \vec{g}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

Р е ш е н и е. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как $\det A = 1$. Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы $A$ :

$$A_1^1=1;\quad A_2^1=-1;\quad A_3^1=0;\quad A_4^1=0;$$
$$A_1^2=0;\quad A_2^2=1;\quad A_3^2=-1;\quad A_4^2=0;$$
$$A_1^3=0;\quad A_2^3=0;\quad A_3^3=1;\quad A_4^3=-1;$$
$$A_1^4=0;\quad A_2^4=0;\quad A_3^4=0;\quad A_4^4=1.$$

Теперь обратная матрица находится по формуле $\hat{A}=\frac{1}{\det A}adjA$ и имеет вид:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора $T$ преобразуется по формуле $T'=\left(A^{-1}\right)^T TA^T$. Проводя вычисления, получаем матрицу $T'$:

$$T'=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}.\otimes$$

## Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

### Предварительные сведения

**Ядро** оператора $\hat{A}:X^m\to Y^n$ – это множество векторов в $X^m$, удовлетворяющих условию

$$\hat{A}\vec{x}=\vec{0}.$$

Размерность ядра – **дефект** оператора. Множество значений оператора – это множество образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$. Размерность множества значений оператора – **ранг** оператора.

**Примеры с решением**

**Пример 2.5.1.** Найти ядро $K\left(\hat{A}\right)$ линейного оператора $\hat{A}: X^4 \to X^3$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4, \left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению ядро

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{\vec{x} \in X^4 : \hat{A}\vec{x} = \vec{0}\right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 0, \\ 3 \cdot x^2 + x^3 + 2 \cdot x^4 = 0, \\ -x^2 - 2 \cdot x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, метом Гаусса, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Принимая неизвестное $x^4$ за свободное неизвестное и, полагая $x^4 = t$, где $t$ может принимать произвольные значения из $R$, получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t,\ x^2 = -\frac{4}{5}t,\ x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{\vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t\,\vec{a};\ t \in R\right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \frac{2}{5}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием $L\left\{\vec{a}\right\}$ с направляющим вектором $\vec{a}$. $\otimes$

**Пример 2.5.2.** Пусть $Y$ – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

Р е ш е н и е. Сначала покажем, что множество $X$ квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве $X$ алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A + B = B + A;\ (A + B) + C = A + (B + C).$$

Во множестве $X$ имеется нейтральный элемент

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & -a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве $X$ каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц $Y$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства $X$. Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства $X$. Операции сложения и умножения на число не нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 + b_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1^1 & \alpha \cdot a_2^1 \\ \alpha \cdot a_2^1 & \alpha \cdot a_2^2 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.5.3.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. ***Первый метод*** (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству $r(A)\le \min(m,n)=3$ ($n-$число строк, $m-$число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A\cong\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Здесь символ $\cong$ использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы $r=2$.

2. ***Второй метод*** (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=5\ne 0.\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-2=0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2-2=0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы $r(A)=2.\otimes$

**Пример 2.5.4.** Найти ранг $r\left(\hat{A}\right)$, множество значений $\hat{A}\left(X^5\right)$ и дефект $d\left(\hat{A}\right)$ линейного оператора $\hat{A}: X^5 \to X^3$, если этот оператор в некоторых базисах пространств $X^5$ и $X^3$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пусть отмечены базисы

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right\} \subset X^5, \left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $r(A)=3$.

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ |a\rangle_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ |a\rangle_3=\begin{pmatrix}-2\\10\\-9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{a}_1=\vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2=\vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3=-2\vec{g}_1+10\vec{g}_2-9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$:

$$\hat{A}\left(X^5\right)=\left\{\vec{y}\in X^3:\left(\forall\alpha,\beta,\eta\in R^1\right)\vec{y}=\alpha\cdot\vec{a}_1+\beta\cdot\vec{a}_2+\eta\cdot\vec{a}_3\right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r\left(\hat{A}\right)+d\left(\hat{A}\right)=5,$$

откуда получаем $d\left(\hat{A}\right)=2$. Итак, $r\left(\hat{A}\right)=3$, $d\left(\hat{A}\right)=2$. $\otimes$

**Пример 2.5.5.** Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}=\left\{\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3\right\},$$

$$L_2\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right\}=\left\{\beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2+\beta_3\vec{b}_3\right\},$$

если $\alpha_k,\beta_k\in R^1$ и

$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3;$

$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$

Р е ш е н и е. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\dim L_2 = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Базисом $L_1$ является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом $L_2$ подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства $L_1 + L_2$, вычислим ранг матрицы, столбцами которой являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ базисный минор } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства $L_1 + L_2$ есть система $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\right\}$.

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \bigcap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис $L_1 \bigcap L_2$ состоит из одного вектора.

Вектор $\vec{b}_2$ разложим по базису $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\right\}$ подпространства $L_1 + L_2$:

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2,\ \alpha_2^2 = 1,\ \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства $L_1 \bigcap L_2$. $\otimes$

**Пример 2.5.6.** Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{array}\right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен $5\neq 0$. Все миноры третьего порядка, как у матрицы $A$, так и у матрицы $B$, равны нулю: ранги основной и расширенной матриц $r(A)=r(B)=2$. Следовательно, СЛАУ совместна. $\otimes$

**Пример 2.5.7.** Выяснить, при каких значениях параметра $a$ СЛАУ с основной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей $|b\rangle=(2\quad 1\quad a)^T$ является совместной.

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что ранг матрицы $A$ СЛАУ $r(A)=2$. Расширенная матрица имеет вид

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 1 & a\end{array}\right).$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & a\end{pmatrix}=3a+6.$$

Если $a\neq -2$, то $\det B\neq 0$ и $r(B)=3\neq r(A)$ – СЛАУ несовместна. Если $a=-2$, то $\det B=0$. Так как у матрицы $B$ имеются отличные от нуля миноры, то $r(B)=2=r(A)$. Поэтому при $a=-2$ СЛАУ совместна. $\otimes$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Даны векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

и норму (длину) вектора $\vec{u}$:

1) $\vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
$\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$;

2) $\vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$,
$\alpha = -4$, $\beta = 3$, $\gamma = -2$;

3) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$,
$\alpha = 7$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если:

1) $A(2; -2; 3)$, $B(1; -1; 2)$, $C(4; -4; 5)$;

2) $A(0; -2; 6)$, $B(-12; -2; -3)$, $C(-9; -2; -6)$;

3) $A(2; 3; -1)$, $B(4; 5; -2)$, $C(3; 1; 1)$.

3. На плоскости $R^2$ заданы своими координатами три вершины $A$, $B$ и $C$ параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины $D$;

2) косинус угла между сторонами $AB$ и $AC$;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

1) $A(-1; 2; -2)$, $B(3; 4; -5)$, $C(1; 1; 0)$;

2) $A(-2; -2; 0)$, $B(-1; -2; 4)$, $C(5; -2; 1)$;

3) $A(3; 3; -1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(4; 4; -1)$.

4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства $R^3$ своими координатами заданы векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти $\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\ \gamma\vec{x}+\lambda\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1+5\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{y}=\vec{e}_1+7\vec{e}_2+\vec{e}_3,$

$\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=1,\ \lambda=2;$

2) $\vec{x}=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2+8\vec{e}_3,\ \vec{y}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-7\vec{e}_3,$

$\alpha=-2,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \lambda=-2;$

3) $\vec{x}=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-8\vec{e}_3,\ \vec{y}=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+7\vec{e}_3,$

$\alpha=11,\ \beta=6,\ \gamma=2,\ \lambda=-7.$

5. Найти $\left(\vec{x}-4\vec{y},\ 6\vec{x}+\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\left\|\vec{x}\right\|=4,\ \left\|\vec{y}\right\|=5,\ \left\{\vec{x}\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{4};$

2) $\left\|\vec{x}\right\|=6,\ \left\|\vec{y}\right\|=1,\ \left\{\vec{x}\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{3};$

3) $\left\|\vec{x}\right\|=2{,}5,\ \left\|\vec{y}\right\|=1{,}5,\ \left\{\vec{x}\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{6}.$

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства $R^3$ своими координатами задан вектор $\vec{x}$. Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3;$

2) $\vec{x}=-\vec{e}_1-3\vec{e}_2+5\vec{e}_3;$

3) $\vec{x} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$.

7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

2) $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$;

3) $\vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 2\vec{e}_2,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если дано:

1) $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 1,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6}$;

2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 1,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{2}$.

9. В пространстве $R^3$ получить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3, 1, 2)$ и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

10. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки $A_1(0; 0; 0)$; $B_1(3; 3; 0)$; $C_1(0; 3; 3)$ и $A_2(4; 5; 0)$; $B_2(1; 6; 3)$; $C_2(2; 0; 7)$ соответственно.

11. В пространстве $R^3$ получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 7; 3)$ и имеющей нормальный вектор, заданный точками $M_1(-2; -1; -8)$ и $M_2(2; 1; 8)$. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{ON}_1$, $\vec{ON}_2$ и $\vec{ON}_3$, где $N_1$, $N_2$ и $N_3$ – точки пересечения данной плоскости и осей координат.

12. В пространстве $R^3$ найти угол между плоскостями, проходящими через точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $N_1$, $N_2$, $N_3$:

1) $M_1(0; 7; -4)$; $M_2(4; 8; -1)$; $M_3(-2; 1; 3)$;
$N_1(2; 3; 1)$; $N_2(2; 0; 3)$; $N_3(1; 2; 0)$;

2) $M_1(1; -2; 2)$; $M_2(-3; 2; 3)$; $M_3(3; 0; 6)$;
$N_1(0; 3; 5)$; $N_2(0; -1; 3)$; $N_3(4; 0; 0)$.

13. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

1) $\dfrac{x^1-2}{1}=\dfrac{x^2-3}{1}=\dfrac{x^3+1}{-4}$, $x^1+x^2+3x^3-10=0$;

2) $\dfrac{x^1+1}{2}=\dfrac{x^2-3}{-4}=\dfrac{x^3+1}{5}$, $x^1+2x^2-x^3+5=0$.

14. Найти координаты проекции точки $M_0$ на плоскость:

1) $M_0(0; -3; -2)$; $2x^1+10x^2+10x^3-1=0$;

2) $M_0(1; 0; -1)$; $2x^2+4x^3-1=0$.

15. В пространстве $R^3$ найти расстояние от точки $M_0$ до плоскости, проходящей через точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$:

1) $M_1(0; 7; -4)$, $M_2(4; 8; -1)$, $M_3(-2; 1; 3)$, $M_0(-10; 11; 13)$;

2) $M_1(5; 8; 3)$, $M_2(10; 5; 6)$, $M_3(8; 7; 4)$, $M_0(7; 17; 14)$;

3) $M_1(1; 3; 5)$, $M_2(-5; 5; 2)$, $M_3(7; -1; 8)$, $M_0(0; 0; 0)$.

16. Пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X^n$ – некоторый базис в векторном пространстве $X^n$, и $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса, найти базу и размерность этой системы векторов.

1) $\dim X^n = 4$:

$$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2) $\dim X^n = 5$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

17. Пусть $L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ и $L\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ – некоторые подпространства векторного пространства $X^4$, и пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый его базис. Найти базис суммы и пересечения этих подпространств.

1) $$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$$

2) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{cases} \begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{cases}$

18. Пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ – некоторый базис в евклидовом пространстве $E^4$, и $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортогональна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где $L_1^2 = L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$, а $L_2^2 = L_1^{2\perp}$.

1) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + = -6\vec{e}_3. \end{cases}$

19. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ – некоторый фиксированный вектор из $R^3$, а операторы $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$, действуют по правилам $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

1) $\hat{A}\vec{x} = \left(\vec{a}, \vec{x}\right)\vec{a}$, 2) $\hat{A}\vec{x} = \left[\vec{a}, \vec{x}\right]$.

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

20. Показать, что операторы

$\hat{A}: R^3 \to R^3$, $\hat{B}: R^3 \to R^3$, $\hat{C}: R^3 \to R^3$,

действие которых задано координатными соотношениями

1) $\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$,

2) $\hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix}$,

3) $\hat{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

являются линейными и записать их матрицы.

21. В каноническом базисе трёхмерного пространства $R^3$ действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \quad \hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

1) $\left(\hat{A}^2 + 2\hat{B}\right)\vec{x}$; 2) $\left(2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2\right)\vec{x}$; 3) $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$.

22. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1+3x_2- \quad x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1-2x_2- \quad x_3=4; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_1+3x_2+ \quad x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+3x_3=11, \\ 2x_1+4x_2- \quad x_3=-9. \end{cases}$$

24. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$$

25. Разложить вектор $\vec{x}$ по системе векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$:

1) $\vec{a}_1=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_3$, $\vec{a}_3=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+4\vec{e}_3$,

$\vec{x}=-2\vec{e}_1+9\vec{e}_3$.

2) $\vec{a}_1=\vec{e}_1-3\vec{e}_2$, $\vec{a}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{a}_3=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$,

$\vec{x}=5\vec{e}_1-12\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

3) $\vec{a}_1=3\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{a}_2=-3\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{a}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$,

$\vec{x}=2\vec{e}_2+4\vec{e}_3$.

26. В каноническом базисе пространства $R^3$ дана линейно независимая система векторов

$\vec{x}_1=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$,

$\vec{x}_2=2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$,

$$\vec{x}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов $\hat{A}\vec{x}_1,\ 2\hat{A}\vec{x}_2,\ 3\hat{A}\vec{x}_3$?

27. Проверить, что $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Вычислить многочлен

$$P(X) = X^3 - 3X + 2$$

от матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Найти матрицу $X$, удовлетворяющую условию:

а) $5A + 2X = 0$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

и) $(-1)A + 3X = 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

30. Вычислить определители:

ф) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

31. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

32. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

33. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

34. Решить матричные уравнения:

а) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

35. Решить методом Гаусса СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$

36. Пространство $R^3$ подвергается деформации под действием линейного оператора $\hat{A}$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0;\,0;\,0);\ B(3;\,3;\,0);\ C(0;\,3;\,3);\ D(3;\,0;\,3)$$

до и после деформации пространства.

37. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T} : X^4 \to X^4$. Найти матрицу оператора в базисе $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4$, если:

а) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4,\ \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4,$

$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$

б) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,$

$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4, \vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4.$

38. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$

39. При каких значениях параметра $a$ СЛАУ является совместной:

а) $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$

40. Найти ядро оператора, заданного в пространстве $R^3$ своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

41. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора $\hat{A} : R^m \to R^n$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m, \right\} \subset R^m, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

# Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

# ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА $E^n$

## Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

### Предварительные сведения

Пусть $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$ – линейный оператор. Тогда, если для вектора $\vec{x} \in X^n \left(\vec{x} \neq \vec{0}\right)$ и некоторого числа $\mu$ выполняется соотношение

$$\hat{T}\vec{x} = \mu\vec{x},$$

то вектор $\vec{x}$ называется **собственным вектором** оператора $\hat{T}$, соответствующим **собственному значению** $\mu$. Если в пространстве $X^n$ зафиксирован базис, то последнее равенство сводится к однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(t_1^1 - \mu\right)x^1 + t_2^1 x^2 + \dots + t_n^1 x^n = 0, \\ t_1^2 x^1 + \left(t_2^2 - \mu\right)x^2 + \dots + t_n^2 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \dots + \left(t_n^n - \mu\right)x^n = 0. \end{cases}$$

Система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\}$ собственных векторов линейного оператора $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, линейно независима.

Линейный оператор $\hat{T}$, действующий в $n$-мерном пространстве $X^n$ и имеющий $n$ попарно различных собственных значений, называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры имеет диагональный вид.

Из критерия нетривиальной совместности однородной СЛАУ следует, что

$$T(\mu) \overset{def}{=} \det\left(t_j^i - \mu\delta_j^i\right) = \begin{vmatrix} t_1^1-\mu & t_2^1 & \ldots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2-\mu & \ldots & t_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_n^n-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть **характеристическое уравнение**, а многочлен в левой части – **характеристический многочлен**. Из характеристического уравнения определяются собственные значения линейного оператора, а из однородной СЛАУ его собственные векторы.

Подпространство $X_{inv} \subset X^n$ называется **инвариантным подпространством оператора** $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$, если

$$\left(\forall \vec{x} \in X_{inv}\right) \vec{y} = \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}.$$

Пусть $\hat{T}: E^m \to E^n$ – некоторый линейный оператор. Оператор $\hat{T}^*: E^n \to E^m$ называется **сопряжённым по отношению к оператору** $\hat{T}$, если $\left(\forall \vec{x} \in E^m, \forall \vec{y} \in E^n\right)$ выполняется условие

$$\left(\hat{T}\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{T}^*\vec{y}\right).$$

Матрица оператора, сопряжённого с оператором $\hat{T}^*: E^n \to E^m$ связана следующим соотношением:

$$t_j^{k*} = \overline{t_k^j}\ .$$

В случае вещественных пространств комплексное сопряжение отсутствует.

Если $\hat{T}: E^m \to E^n$, $\hat{R}: E^m \to E^n$ – некоторые операторы и $\beta \in C$ – произвольное число, то справедливы следующие пять свойств сопряжённого оператора:

1) $\left(\hat{T}^*\right)^* = \hat{T}$; 2) $\left(\hat{T}^*\right)^{-1} = \left(\hat{T}^{-1}\right)^*$; 3) $\left(\beta\hat{T}\right)^* = \overline{\beta}\hat{T}^*$;

4) $\left(\hat{T}+\hat{R}\right)^* = \hat{T}^* + \hat{R}^*$; 5) $\left(\hat{T}\hat{R}\right)^* = \hat{R}^*\hat{T}^*$.

Линейный оператор $\hat{T}: E^n \to E^n$ называется **самосопряжённым (эрмитовым)**, если $\hat{T}^* = \hat{T}$. Матрица самосопряжённого оператора является симметрической, то есть связана с матрицей самого оператора соотношением

$$t_j^i = t_i^j.$$

Оператор $\hat{T}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве $E^n$, называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n\right)\left(\hat{T}\vec{x}, \hat{T}\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

Ортогональные операторы $\hat{T}: E^n \to E^n$ в вещественном евклидовом пространстве $E^n$ обладают следующими свойствами:

1) единичный оператор является ортогональным;

2) композиция ортогональных операторов также является ортогональным оператором;

3) оператор, обратный ортогональному оператору, также является ортогональным;

4) если $\hat{T}: E^n \to E^n$ – ортогональный оператор, то оператор $\alpha \cdot \hat{T}$ является ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$.

Оператор $\hat{T}: E^n \to E^n$ является ортогональным в том и только в том случае, если он переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.

Пусть $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$ и

$$F_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \in C[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_m\hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора $\hat{T}$ или ***операторным многочленом***.

**Примеры с решением**

**Пример 2.1.1.** В каноническом базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2$ оператор $\hat{T}$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(T - \mu \cdot I) = 0;\ \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 5.$

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_1 = 2$, для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1,\ x_1^2 = 1 \Rightarrow |x_1\rangle = c|a_1\rangle,\ c \in R^1 \Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = 5$, решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = c/2,\ x_2^2 = c,\ c \in R^1 \Rightarrow |x_2\rangle = c|a_2\rangle \Rightarrow |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\left\{\vec{a}_1\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1;\ t \in R^1\right\}$$

и

$$L\left\{\vec{a}_2\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2;\ t \in R^1\right\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2. \otimes$$

**Пример 2.1.2.** Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости $X^1OX^2$ в пространства $R^3$.

Р е ш е н и е. Оператор зеркального отражения в пространстве $R^3$ относительно координатной плоскости $X^1OX^2$, очевидно, действует по правилу (рисунок 2.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)\ \vec{y} = \hat{R}\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 - x^3\vec{e}_3.$$

Подействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R}\vec{e}_1 = \vec{e}_1;\ \hat{R}\vec{e}_2 = \vec{e}_2;\ \hat{R}\vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости $X^1OX^2$ получаем:

$$R=\begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\hat{R}$ имеет вид:

$$R(\mu)=\det\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix}=(1-\mu)\cdot(1-\mu)\cdot(-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень $\mu_1=-1$ и двукратный корень $\mu_2=1$.

1) Для собственного значения $\mu_2=-1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix},\ c\in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1=-1$, есть линейная оболочка вида

$$c\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow L\left\{\vec{e}_3\right\}=\left\{\vec{x}\in R^3:\vec{x}=c\cdot\vec{e}_3;\ c\in R^1\right\},$$

то есть ось $OX^3$.

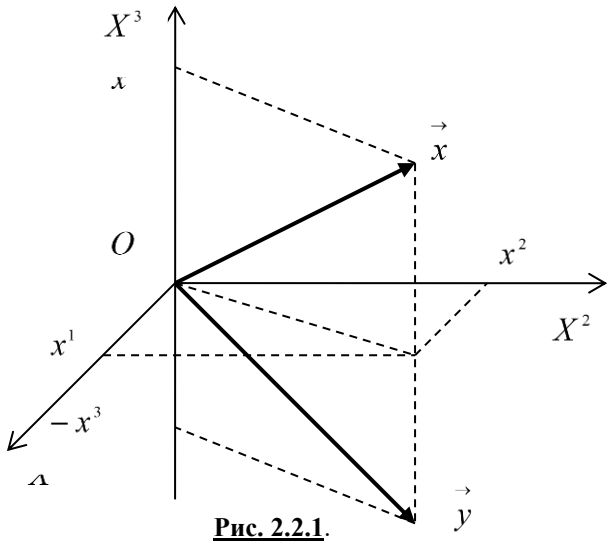



**Рис. 2.2.1**.

2) Для собственного значения $\mu_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R^1$ – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = 1$, являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2; a, b \in R^1\right\},$$

то есть координатной плоскостью $X^1OX^2$. Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств $OX^1 \oplus OX^2$. $\otimes$

**Пример 2.1.3.** В евклидовом пространстве $E^3$ в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение:

$$T = \begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 \\ 1 & 2-\mu & -1 \\ 1 & -1 & 2-\mu \end{pmatrix} \Rightarrow (3-\mu)\left(\mu^2 - 4\mu + 3\right) = 0.$$

Собственные значения $\mu_1 = 1,\ \mu_{2,3} = 3$.

Собственный вектор, соответствующий $\mu_1 = 1$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$\left|a_1\right\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_{2,3} = 3$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 0x^1 + 0^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; |x_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1 \right\}; \; X_2 = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1 \right\}. \otimes$$

**Пример 2.1.4.** Линейный оператор $\hat{T} : E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве $E^3$ ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Составим характеристический многочлен оператора $\hat{T}$:

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9, \; \mu_2 = 9, \; \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы оператора $\hat{T}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$.

1) Для собственного значения $\mu_1 = -9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L\left\{\vec{a}_1\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения $\mu_2 = 9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L\left\{\vec{a}_2\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения $\mu_3 = 18$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая $x^3 = a$, где $a$ – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{\vec{a}_3\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{x}_1\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}}\vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{x}_2\right\|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}}\vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{x}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}\vec{a}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A: \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \to \left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$$

имеет вид:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};\ \det A = -1 \neq 0;\ A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}adgA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \left(A^{-1}\right)^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$:

$$T_a = \left(A^{-1}\right)^T T_e A^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.1.5.** В евклидовом пространстве $E^3$ в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\hat{T}^*$ в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2,\ A_2^1 = 0,\ A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2,\ A_2^2 = -1,\ A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0,\ A_2^3 = -1,\ A_3^3 = 1;$$

$$adgA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\hat{T}^*$ в новом базисе:

$$T_g^* = \left(A^{-1}\right)^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.1.6.** Ранее показано, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы $L$ вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1\right),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ и матрицу сопряжённого оператора $\hat{D}^*$.

2) Выяснить, является ли оператор $\hat{D}$ симметрическим.

Р е ш е н и е. Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\hat{D}\vec{e}_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos x - \sin x\right) =$$

$$= 0\cdot\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\vec{e}_2;$$

$$\hat{D}\vec{e}_2 = \frac{d}{dx}\left(\sin x - \cos x\right) = \cos x + \sin x = \sqrt{3}\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2.$$

Следовательно, матрица оператора $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора $\hat{D}^*$ равна транспонированной матрице оператора $\hat{D}$, то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ для матрицы оператора $\hat{D}$ имеем $d_2^1 \neq d_1^2$, оператор не является симметрическим. $\otimes$

**Пример 2.1.7.** В евклидовом пространстве $E^3$ линейный оператор $\hat{T}$ переводит систему векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ в систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$. Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По условию задачи имеем

$$\hat{T}\vec{a}_1 = \vec{g}_1, \hat{T}\vec{a}_2 = \vec{g}_2, \hat{T}\vec{a}_3 = \vec{g}_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_2^3 + t_3^3 = 1; \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3; \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} t_1^1 + t_2^1 = -5, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{array}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\left(\forall i \neq j = 1, 2, 3\right) t_i^j = t_j^i$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ является самосопряжённым. $\otimes$

**Пример 2.1.8.** Матрица линейного оператора $\hat{T} : E^3 \to E^3$ в базисе векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ имеет вид:

$$T' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор $\hat{T}$ ортогональным, если в ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \; \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \; \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Р е ш е н и е. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n\right)\left(\hat{T}\vec{x}, \hat{T}\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$ в произвольном базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j ,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \; \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующий результат:

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j = 2x^1y^1 + x^1y^2 + x^1y^3 +$$

$$+ x^2y^1 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^1 + x^3y^2 + 2x^3y^3.$$

Находим координаты образов векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при действии оператора $\hat{T}$:

$$\hat{T}\vec{x}=\vec{u}\Rightarrow T|x\rangle=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&0\\-1&0&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x^1+x^2\\-x^1\\\frac{2}{3}x^1+x^3\end{pmatrix};$$

$$\hat{T}\vec{y}=\vec{v}\Rightarrow T|y\rangle=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&0\\-1&0&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}y^1+y^2\\-y^1\\\frac{2}{3}y^1+y^3\end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и метрических коэффициентов $g_{ij}$ в формулу для скалярного произведения

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}u^iv^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения прообразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\left(\vec{x},\vec{y}\right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ к новому базису $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$ и обратная к ней матрица имеют, соответственно, вид:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T' = \left(A^{-1}\right)^T T A^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ получаем:

$$T = A^T T' \left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу $T$ на транспонированную матрицу $T^T$, получим

$$TT^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство $T^T = T^{-1}$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ и, соответственно, его матрица являются ортогональными. $\otimes$

**Пример 2.1.9.** Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если $X_{inv}^{(1)}$, $X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, то $X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}$ и $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ также являются инвариантными подпространствами оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. Пусть $X_{inv}^{(1)}$, $X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$. Предположим, что вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}$. Но тогда вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$ и $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, следовательно, и его образ

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$

Теперь очевидно, что образ вектора $\vec{x}$ принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$. Тогда, по определению суммы подпространств

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{x}_1 \in X_{inv}^{(1)},\ \vec{x}_2 \in X_{inv}^{(2)},$$

откуда в силу того, что снова $\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, получаем

$$\hat{T}\vec{x} = \hat{T}\vec{x}_1 + \hat{T}\vec{x}_2 \in X_{ivn}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \otimes$$

**Пример 2.1.10.** Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если оператор $\hat{T}$ биективный, то его инвариантное подпространство $X_{inv}$ является инвариантным подпространством и для обратного оператора $\hat{T}^{-1}$.

Р е ш е н и е. Известно, что линейный оператор $\hat{T} : X \to X$ взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\} \subset X_{inv}^m$$

– базис в $X_{inv}^m$, тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1 \hat{T} \vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{T} \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{T} \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\left( \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m \right) = \vec{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь $\left( \forall \vec{x} \in X^m_{inv} \right)$. Разложим вектор $\vec{x}$ по базису из образов векторов исходного базиса подпространства $X^m_{inv}$, то есть представим вектор $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x} = x^1 \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T} \vec{a}_2 + \ldots + x^m \hat{T} \vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя на обе части оператором $\hat{T}^{-1}$, получаем

$$\hat{T}^{-1} \vec{x} = x^1 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_2 + \ldots + x^m \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_m =$$

$$= x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \ldots + x^m \vec{a}_m,$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \ldots + x^m \vec{a}_m \in X^m_{inv},$$

так как он разложен по базису $X_{inv}$.

Итак, получили, что если $\vec{x} \in X^m_{inv}$, то $\hat{T}^{-1}\vec{x} \in X^m_{inv}$. $\otimes$

**Пример 2.1.11.** Показать, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}: X^n \to X^n$ является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_p\hat{T}^p .$$

Р е ш е н и е. Пусть операторы $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$ имеют одно и тоже инвариантное подпространство $Y^m \subset X^n$. Тогда

$$\left(\forall \vec{x} \in Y^m\right) \vec{y}_1 = \hat{A}\vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B}\vec{x} \in Y^m .$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства $Y^m$ снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x} + \beta \cdot \hat{B}\vec{x} = \left(\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}\right)\vec{x} \in Y^m .$$

То есть подпространство $Y^m \subset X^n$, инвариантное относительно операторов $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$, инвариантно и относительно оператора $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$. Далее, из того, что подпространство $Y^m \subset X^n$ является инвариантным относительно оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$, следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора $\hat{A}^k \ (k = 0, 1, \ldots, p)$.

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}$ является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_p\hat{T}^p . \otimes$$

# Практическое занятие 2. Некоторые задачи геометрии евклидова пространства

## Предварительные сведения

Система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\} \subset E^n$ линейно зависима в том и только в том случае, если определитель Грама системы

$$G\left( \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \left( \vec{x}_1, \vec{x}_1 \right) & \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2 \right) & \ldots & \left( \vec{x}_1, \vec{x}_m \right) \\ \left( \vec{x}_2, \vec{x}_1 \right) & \left( \vec{x}_2, \vec{x}_2 \right) & \ldots & \left( \vec{x}_2, \vec{x}_m \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left( \vec{x}_m, \vec{x}_1 \right) & \left( \vec{x}_m, \vec{x}_2 \right) & \ldots & \left( \vec{x}_m, \vec{x}_m \right) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Рассмотрим в $n$-мерном евклидовом пространстве $E^n$ некоторое подпространство $L^m$ размерности $m < n$. Пусть дан некоторый вектор $\vec{x} \in E^n$, причём $\vec{x} \notin L^m$. Можно показать, что справедливо представление вектора $\vec{x}$ в виде следующего разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где вектор $\vec{g}_L$ принадлежит подпространству $L^m$, а вектор $\vec{h}^{\perp}$ ортогонален к этому подпространству. векторы $\vec{x}$ и $\vec{g}_L$ называются, соответственно, **наклонной** к подпространству $L^m$ и **проекцией** наклонной $\vec{x}$ на подпространство $L^m$. Вектор $\vec{h}^{\perp}$ называется **перпендикуляром**, опущенным из конца наклонной $\vec{x}$ на подпространство $L^m$.

Пусть в евклидовом пространстве $E^n$ зафиксирована система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\} \left( m < n \right).$$

Обозначим $\vec{h}_m^{\perp}$ перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\vec{x}_{m+1}$ на подпространство

$$L\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\} \ (m = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Формула для вычисления объёма $m$-мерного параллелепипеда в пространстве $E^n$ имеет вид:

$$V^2 = G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right) \equiv \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}.$$

**Примеры с решением**

**Пример 2.2.1.** Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3$, если имеют место разложения

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \ \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \ \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14, \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33, \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33, \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78, \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47, \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111, \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствие с критерием Грама система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\}$ является линейно зависимой. $\otimes$

**Пример 2.2.2.** Радиус-вектор $\vec{x}$ в пространстве $R^3$ имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость $X^1OX^2$ как $L^2$.

Представить вектор $\vec{x}$ в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где $\vec{g}_L \in L^2$, $\vec{h}^{\perp} \in L^{2\perp}$.

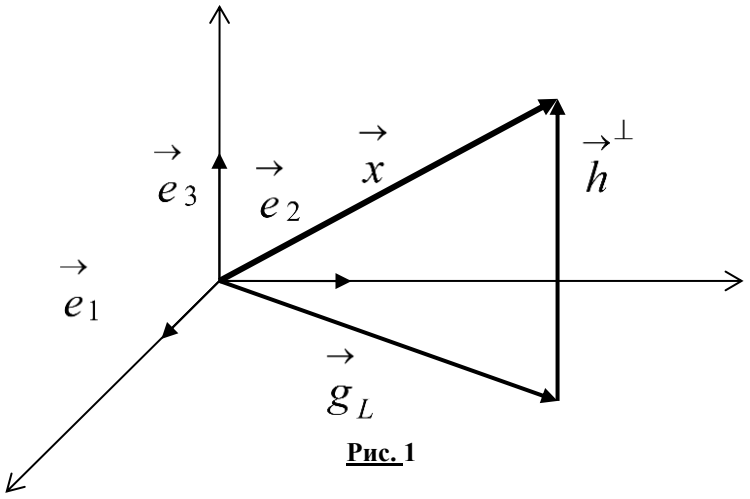



**Рис. 1**

Р е ш е н и е. Разложим вектор $\vec{g}_L$ по базису подпространства $L^2$:

$$\vec{g}_L = g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства $L^2$. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству $L^2$, состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{e}_1\right) = 0,$$

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{e}_2\right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases}\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_1\right) = 0, \\ \left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_2\right) = 0,\end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases}\left(g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2, \vec{e}_1\right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1\right), \\ \left(g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2, \vec{e}_2\right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_2\right).\end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases}g^1 = 3, \\ g^2 = 4.\end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2\right) = 5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \otimes$$

**Пример 2.2.3.** В пространстве $R^4$ опустить перпендикуляр из точки $P(-1; 5; 3; 2)$ на гиперплоскость $H^3$, проходящую через заданные точки

$$A_1(1; 4; 2; 0),\ A_2(3; 7; 3; 2),\ A_3(2; 6; 3; -1),\ A_4(1; 4; 5; 2).$$

Р е ш е н и е. В пространстве $R^4$ все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$. Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\vec{a}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

Проверим, что точка $P(-1; 5; 3; 2)$ не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23\cdot(-1) - 14\cdot 5 + 2\cdot 3 - 3\cdot 2 + 29 = -64 \neq 0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке $P(-1; 5; 3; 2)$ её радиус-вектор

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где вектор $\vec{g}_L \in H^3$, а вектор $\vec{h}^{\perp} \in H^{3\perp}$.

Вектор

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L \in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства $H^3$. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству $H^3$ (плоскость проходит через начало системы координат), состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp},\vec{a}_1\right)=0,\left(\vec{h}^{\perp},\vec{a}_2\right)=0,\left(\vec{h}^{\perp},\vec{a}_3\right)=0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L,\vec{a}_1\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L,\vec{a}_2\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L,\vec{a}_3\right)=0.$$

Представляя наклонную $\vec{g}_L$ разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_1\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_1\right),$$

$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_2\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_2\right),$$

$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_3\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_3\right),$$

или в виде

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_1\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_1\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_1\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_1\right),$$

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_2\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_2\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_2\right),$$

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_3\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_3\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_3\right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_1) \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_3) & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) & (\vec{a}_3, \vec{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases} 18g^1 + 7g^2 + 7g^3 = 20, \\ 7g^1 + 7g^2 + g^3 = 10, \\ 7g^1 + g^2 + 13g^3 = 13. \end{cases}$$

Решение Слау ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции $\vec{g}_L$ на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left( -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3 \right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по векторам ортонормированного базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$, то получим вектор $\vec{h}$ – перпендикуляр, опущенный из конца наклонной $\vec{g}_L$ на плоскость $H^3$. $\otimes$

**Пример 2.2.4.**[*)] Записать матрицу оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1 o x^2}$ ортогонального проектирования на координатную плоскость $X^1OX^2$ в пространстве $R^3$.

Р е ш е н и е. Этот оператор любому вектору пространства $R^3$ ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость $X^1OX^2$ параллельно координатной оси $OX^3$. Согласно изложенной выше теории, оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1 o x^2}$ является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1 o x^2} : R^2_{x^1 o x^2} \to R^2_{x^1 o x^2}$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{o x^3} : R^1_{o x^3} \to R^1_{o x^3}.$$

На главной диагонали его матрицы расположены $2 \times 2$ клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $1 \times 1$ клетка вида $(0)$. Остальные элементы равны нулю:

$$P^{\perp}_{x^1ox^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора $\vec{x}$ из предыдущей задачи на координатную плоскость $X^1OX^2$. Запишем для этого образ вектора

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

при действии оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ в координатной форме

$$P^{\perp}_{x^1ox^2}\left|x\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи. $\otimes$

## Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

### Предварительные сведения

**Квадратичной формой** $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ от $n$ переменных называется формальное выражение

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}x^i x^j \ ,$$

где $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ $\left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right)$ – симметрические вещественные коэффициенты.

При изменении базиса в пространстве в пространстве $R^n$ матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$\Phi' = A^T \Phi A.$$

Квадратичная форма, определённая на векторах пространства $R^n$, является положительно определённой в том и только в том случае, если в каком-либо базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\} \subset R^n$ все угловые миноры её матрицы $\phi_{ij}\left(\vec{a}_i, \vec{a}_j\right)$ положительны, то есть

$$M_1 = \varphi_{11} > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ M_n = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

**Поверхностью второго порядка** в пространстве $R^3$ называется множество точек $\vec{x} \in R^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}x^i x^j + 2\sum_{k=1}^{3}b_k x^k + c = 0.$$

В пространстве $R^2$ существуют две **кривые второго порядка**, называемые **центральными**. Эти кривые описываются каноническими уравнениями вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

и называются, соответственно, **эллипсом** и **гиперболой**.

В пространстве $R^3$ существует три типа **невырожденные**, центральные поверхности второго порядка, определяемых каноническими уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Поверхности, задаваемые в пространстве $R^3$ этими уравнениями, называются соответственно, **эллипсоидом**, **однополостным гиперболоидом** и **двуполостным гиперболоидом**.

В трёхмерном пространстве $R^3$ существует **коническая поверхность** с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

В пространстве $R^3$ существуют две невырожденные нецентральные поверхности с каноническими уравнениями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3$$

– **эллиптический параболоид**;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3$$

– **гиперболический параболоид**.

В пространстве $R^3$ общий вид **вырожденной поверхности** получается параллельным переносом вдоль оси $OX_3$ какой-либо кривой второго порядка на плоскости $X_1OX_2$. При этом для эллипса, гиперболы и параболы получаются поверхности, носящие соответственно названия **эллиптический**, **гиперболический** и **параболический цилиндры**. Пара параллельных, пересекающихся или слившихся прямых приводит, соответственно, к **паре параллельных**, **пересекающихся** или **слившихся плоскостей**

## Примеры с решением

**Пример 2.3.1.** Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве $R^3$ вид

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+4x^1x^3-2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Р е ш е н и е. Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}\subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=$$

$$=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+\left(2x^1x^2+2x^2x^1\right)+\left(2x^1x^3+2x^3x^1\right)-\left(x^2x^3+x^3x^2\right)=$$

$$=2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^1+3\left(x^2\right)^2-x^2x^3+2x^3x^1-x^3x^2+3\left(x^3\right)^2.$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 2 & 2 \\ 2 & 3-\mu & -1 \\ 2 & -1 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^3 - 6\mu^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -2,\ \mu_{2,3} = 4$.

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай $\mu_1 = -2$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай $\mu_{2,3} = 4$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ ортогональны вектору $\vec{x}_1$, но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_1,\ \vec{g}_2 = \vec{x}_2,\ \vec{g}_3 = \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2.$$

Так как должно быть $\left(\vec{g}_2, \vec{g}_3\right) = 0$, то

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2\right) = 0,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) + \alpha\left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\alpha = 0,\ \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{g}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\left\|\vec{g}_1\right\| = \sqrt{6},\ \left\|\vec{g}_2\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \left\|\vec{g}_3\right\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \Rightarrow \left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$ как $\left\{y^1, y^2, y^3\right\}$, запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = -2\left(y^1\right)^2 + 4\left(y^2\right)^2 + 4\left(y^3\right)^2. \otimes$$

**Пример 2.3.2.** Найти значения параметра $\lambda$, при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4\left(x^1\right)^2 + 2x^1x^2 + \left(x^2\right)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda\left(x^3\right)^2.$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, $\lambda > \frac{52}{3}$. $\otimes$

**Пример 2.3.3.** Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение перепишем в виде

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_{1'} = x_1 + 1,\ x_{2'} = x_2 - 1.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку $O'(-1;\ 2)$, в которой уравнение принимает вида

$$x_{1'}^2 + x_{2'}^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке $O'(-1;\ 2)$ радиуса $R = \sqrt{5}$. $\otimes$

**Пример 2.3.4.** Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}\ .$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке $O'(-2;\ 1)$ радиуса $R = \sqrt{15}$, лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением $x_2 = 1$. $\otimes$

**Пример 2.3.5.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение описывает точку $M(2;1)$. $\otimes$

**Пример 2.3.6.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2 + 25x_2^2 + 200x_1 - 100x_2 - 200 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1 + 1)^2 + 25(x_2 - 2)^2 = 400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(-1;2)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 4$ . $\otimes$

**Пример 2.3.7.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1 = -2\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}\,.$$

Р е ш е н и е. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2 + 4(x_2 + 3)^2 = 16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{(x_2 + 3)^2}{4} = 1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке $O'(0;-3)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 2$, лежащую слева относительно оси $OX_2$. $\otimes$

**Пример 2.3.8.** Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2$ уравнением

$$11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 - 20x^1 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 =$$

$$= 11(x^1)^2 - 10x^1x^2 - 10x^2x^1 - 4(x^2)^2$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ ставим в соответствие симметрический оператор $\hat{T}$ с матрицей $T = \Phi$ и записываем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\mu & -10 \\ -10 & -4-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\mu^2 - 7 \cdot \mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$. Находим собственные векторы оператора $\hat{T}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$, для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_1\right\|}\vec{x}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_2\right\|}\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы $A$ равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^T=A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы $A^{-1}$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1\left(y^1\right)^2+\mu_2\left(y^2\right)^2=-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1=-\frac{20}{\sqrt{5}}y^1+\frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}y^1-\frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2-\frac{36}{\sqrt{5}}y^1+\frac{32}{\sqrt{5}}y^2+1=0.$$

Выделяя полный квадрат по $y^1$, $y^2$ и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+16\left(y^2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5=0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}},\ z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{\left(z^1\right)^2}{5/9} - \frac{\left(z^2\right)^2}{5/16} = 1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол $\varphi$, что $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$ и $\sin\varphi = 2/\sqrt{5}$. Далее, в соответствии с формулами

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}},\ z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $\otimes$

**Пример 2.3.9.** Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 -$$
$$-14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора $\mu_1 = -2,\ \mu_{2,3} = 4$. Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$
$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3,$$
$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ( $A^{-1} = A^T$ ).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы $A$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'}.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2 - 40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'} + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4\left(x_{1'} - 5\sqrt{6}\right)^2 - 2\left(x_{2'} - 3\sqrt{5}\right)^2 + 4x_{3'}^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения $y_1 = x_{1'} - 5\sqrt{6}$, $y_2 = x_{2'} - 3\sqrt{5}$, $y_3 = x_{3'}$, получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида. $\otimes$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \to R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ матрицу:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства: $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

1) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix}$; 2) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix}$;

3) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}$; 4) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$; 6) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}$.

3. Линейный оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ задан матрицей:

1) $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $T=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

3) $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $T=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Построить в пространстве $E^3$ ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

4. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$. Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{\vec{e}_1\right\}, L\left\{\vec{e}_2\right\}, L\left\{\vec{e}_3\right\}, L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}, L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_3\right\}, L\left\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора $\hat{A}$.

5. Пусть подпространства $L_1 \subset X^n$ и $L_2 \subset X^n$ инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n.$$

Показать, что подпространства $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$ также инвариантны относительно оператора $\hat{A}$.

6. Показать, что если $L \subset X^n$ – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n,$$

то $L$ является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}\left(\hat{A}\right) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \ldots + a_m \hat{A}^m.$$

7. Пусть $\hat{A}: X^n \to X^n$ – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор $\hat{A}$ биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

8. Пусть $\hat{T}: R^2 \to R^2$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть $\hat{T}: R^3 \to R^3$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

1) $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Пусть $\hat{T}: R^4 \to R^4$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Показать, что линейная оболочка

$$L\left\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\right\}$$

является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}$.

11. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости $H^m \subset R^n$, проходящей через заданные точки

$$A_1(0; 6; 3; 5; 1),\ A_2(-3; 2; 4; 1; 0),$$
$$A_3(5; 1; 4; 3; 2),\ A_4(-1; 3; -4; 2; -1).$$

12. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3$:

1) $\vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,$
$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$\$

2) $\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,$
$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$
$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.$

13. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\right\} \subset R^4$:

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

14. Пусть $L^3\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ – линейное многообразие в $E^4$, а $\vec{x}$ – наклонная к многообразию $L^3$. Найти наименьший угол между вектором $\vec{x}$ и многообразием $L^3$, если:

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

15. В ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ пространства $E^4$ задана система векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$.

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе новый ортонормированный базис пространства $R^4$.

16. В пространстве $R^5$ найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

1) $\vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$

2) $\vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$

17. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

18. В пространстве $R^4$ даны две плоскости $H_1$ и $H_2$ с направляющими векторами

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\} \subset H_1, \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

1) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$
$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$

2) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$
$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$

19. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

1) $x_2 = -1 - \frac{3}{5}\sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2}$;

2) $x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1;$

3) $x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}$.

20. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

1) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0;$

2) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0.$

21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

1) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0;$

2) $\alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0,$

где $\alpha = 5$ или $\alpha = 0$.

# ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности

### Предварительные сведения

Если каждому натуральному числу $n$ по некоторому закону ставится в соответствие вполне определённое действительное число, то говорят, что задана **бесконечная числовая последовательность**

$$\left(a_n\right) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots.$$

Числа $a_n \ \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right)$ называются **элементами** (**членами**) последовательности $\left(a_n\right)$.

Числовая последовательность $\left(a_n\right)$ называется **монотонно возрастающей** (**монотонно убывающей**), если

$$\left(\forall n \in N\right):\ a_n \le a_{n+1} \ \left(a_n \ge a_{n+1}\right),$$

и **строго монотонно возрастающей** (**строго монотонно убывающей**), если

$$\left(\forall n \in N\right):\ a_n < a_{n+1} \ \left(a_n > a_{n+1}\right).$$

Пусть $\varepsilon \in R^1 \ \left(\varepsilon > 0\right)$ и $x_0 \in R^1$. Тогда множество

$$U_\varepsilon\left(x_0\right) \overset{def}{=} \left\{x \in R^1 : \left|x - x_0\right| < \varepsilon\right\}$$

называется $\varepsilon$ **-окрестностью** числа (точки) $x_0$.

Последовательность $\left(x_n\right)$ действительных чисел **сходится к действительному числу** $x_0$, если для каждого (сколь угодно малого) положительного числа $\varepsilon$ найдётся номер $n_0$, такой, что начиная с этого номера, то есть, для всех номеров $n \ge n_0$, выполняется неравенство

$$\left|x_n - x_0\right| < \varepsilon.$$

Пусть $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$ – числовые последовательности, сходящиеся, соответственно, к пределам $x_0$ и $y_0$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $x_n \equiv c$, где $c$ – некоторая постоянная величина (число), то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c;$$

2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right)$, причём

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 + y_0;$$

3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right)$, причём

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 y_0;$$

4) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne 0$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}$, причём

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x_0}.$$

**Примеры с решением**

**Пример 3.1.1.** Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1.$

Р е ш е н и е. Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ имеем:

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|\frac{n+1-n}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперёд заданного $\varepsilon>0$ мы нашли номер $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, такой, что $\left(\forall\, n\ge n_0\right)\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$, следовательно, $1$ является пределом данной последовательности. $\otimes$

**Пример 3.3.1.2.** Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}\Rightarrow x_{n+1}>x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом $x_1$. При любом $n$, очевидно, $\dfrac{1}{2^n+1}<\dfrac{1}{2^n}$. Последовательность ограничена сверху:

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=$$

$$=\frac{1/2-1/2^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. $\otimes$

**Пример 3.3.1.3.** Доказать, что последовательность $\left(x_n\right)$ есть бесконечно малая последовательность, если

1) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $x_n=\dfrac{2n}{n^3+1}$; 3) $x_n=\dfrac{1}{n!}$; 4) $x_n=(-1)^n\cdot 0{,}999^n$.

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,001 | 0,0001 | … |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | | | | |

Р е ш е н и е. 1) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\colon (\forall n \geq n_0)\ \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу $\varepsilon$ мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда

$$n_0 = \left[\frac{1}{1/10}\right] + 1 = 11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений $\varepsilon$. Искомая таблица принимает вид:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,001 | 0,0001 | … |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | 11 | 1001 | 10001 | … |

2) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\colon (\forall n \geq n_0)\ \left|\frac{2n}{n^3+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$n > \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] \Rightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу $\varepsilon$ мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{1/10}} \right\rfloor + 1 \approx [4{,}472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений $\varepsilon$. Искомая таблица принимает вид:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,001 | 0,0001 | … |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | 5 | 46 | 142 | … |

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения. $\otimes$

**Пример 3.3.1.4.** Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1} = 2\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1} = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1} = 2\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 2. \otimes$$

**Пример 3.3.1.5.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n} = \left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 3 = 6. \otimes$$

**Пример 3.3.1.6.** Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

**Пример 3.3.1.7.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

**Пример 3.3.1.8 (неперово число $e$).** Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Р е ш е н и е. Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности: $e = 2{,}71828\ldots$.

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что

$$(\forall b > -1) \wedge (\forall n \in N)\ (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по $n$:

1) при $n=1$ имеем $1+b \geq 1+b$, что всегда выполняется;

2) предположим, что $(\forall n = k)\ (1+b)^k \geq 1+kb$;

3) покажем, что $(\forall b > -1) \wedge (n = k+1)\ (1+b)^{k+1} \geq 1+(k+1)b$.

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k (1+b) \geq (1+b)(1+kb) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+(k+1)b,$$

так как $kb^2 > 0$.

Так как неравенство справедливо при $n=1$, оно справедливо и при любом $n \in N$. Итак, $(\forall b > -1)$ и $(\forall n \in N)$

$$(1+b)^n \geq 1+nb. \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+1/(n-1)\right)^n}{\left(1+1/n\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}\cdot(n-1)}{(n-1)^n\cdot(n+1)^{n+1}\cdot(n-1)} =$$

$$= \frac{\left(n^2\right)^{n+1}\cdot(n-1)}{\left(n^2-1\right)^{n+1}\cdot n} = \frac{\left(n^2-1+1\right)^{n+1}}{\left(n^2-1\right)^{n+1}}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} \geq \{используем(1)\} \geq$$

$$\geq \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = 1.$$

Таким образом,

$$(\forall n \in N)\ \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно, $y_n \le y_{n-1}$, то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + 1/n\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + 1/n\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+1/n\right)^{n+1}}{\left(1+1/n\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \otimes$$

**Пример 3.3.1.9.** Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Р е ш е н и е. Неравенство справедливо при $n = 1, 2$, что легко проверяется.

Например, для $n = 2$ имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 \ge 1 + x_1 + x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, то есть

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при $n = k+1$. Имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \ge (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1+x_{k+1}) =$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_k)x_{k+1} \ge$$
$$\ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}.$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом $k = n$. $\otimes$

**Пример 3.3.1.10.** Показать, что если $x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ (n>1),$$

причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

Р е ш е н и е. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство. $\otimes$

**Пример 3.3.1.11.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n\left[\ln(n+3) - \ln n\right].$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n\left[\ln(n+3) - \ln n\right] = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3} = 3\cdot\ln e = 3. \otimes$$

**Пример 3.3.1.12.** Доказать, что последовательность $\left(a^n\right)$ является:

1) бесконечно большой последовательностью при $|a|>1$;

2) бесконечно малой последовательностью при $|a|<1$.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $|a|>1$. Покажем, что последовательность $\left(a^n\right)$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть $(\forall A>0)\,(\exists n_0 \in N)\colon (\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \qquad (1)$$

Зададимся произвольным числом $A>0$. Для нахождения номера $n_0$ решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \left[\log_{|a|} A\right].$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \left[\log_{|a|} A\right]+1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $|a|<1$. Если $a=0$, то $(\forall n \in N)\ a^n = 0$ и, следовательно, последовательность $\left(a^n\right)$ бесконечно малая. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Так в этом случае $\frac{1}{|a|} > 1$, то последовательность $\left(\frac{1}{a^n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при $|a| < 1$ последовательность $\left(a^n\right)$ – бесконечно малая последовательность. $\otimes$

**Пример 3.3.1.13.** Показать, что если $\left(x_n\right)$ – сходящаяся последовательность, а $\left(y_n\right)$ – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$\left(z_n\right) = \left(x_n + y_n\right)$$

– бесконечно большая последовательность.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$\left(\forall A > 0\right)\left(\exists n_0 \in N\right): \left(\forall n \geq n_0\right)\ |x_n + y_n| > A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность $\left(x_n\right)$ ограничена, то есть

$$\left(\exists M > 0\right): \left(\forall n \in N\right)\ |x_n| < M. \qquad (1)$$

Пусть задано произвольное $A > 0$. Так как последовательность $\left(y_n\right)$ бесконечно большая, то для числа $A + M$

$$\left(\exists n_0 \in N\right): \left(\forall n \geq n_0\right)\ |y_n| > A + M. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем: $|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| > A + M - M = A.$

Что и требовалось доказать. $\otimes$

**Пример 3.3.1.14.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\cos n. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Так как $\left(\forall x \in R^1\right)|\cos x| < 1$, то последовательность $\left(\cos n\right)$ ограничена.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ – бесконечно малая последовательность. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cos n=0.\otimes$$

## Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции

### Предварительные сведения

Функция $f:M\to f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0\in M$, если для каждой последовательности $(x_n)$ точек множества $M$, сходящейся к точке $x_0$, последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции $f$ сходится к значению $f(x_0)$ функции в этой точке (определение непрерывности по Гейне).

Функция $f:M\to f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0\in M$, если

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0):\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(определение непрерывности по Коши).

Говорят, что функция $f$, определённая на множестве $M$, имеет **предел** $C$ при $x\to x_0$, и пишут

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=C,$$

если для каждой последовательности точек

$$x_n\in M-\{x_0\}:\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции сходится к точке (числу) $C$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=C.$$

Говорят, что функция $f$, определённая на множестве $M$, имеет предел $C$ при $x\to x_0$, и при этом пишут

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=C,$$

если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x$ удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - C| < \varepsilon.$$

Пусть $x_0$ – предельная точка множества $M$. Функция $\alpha : M \to \alpha(M)$ называется **бесконечно малой функцией при условии** $x \to x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

*Пусть* $f$ *и* $g$ *– две действительные функции, имеющие одно и то же множество определения* $M \subset R^1$, $\alpha \in R^1$ *– некоторое действительное число, а* $x_0$ *– предельная точка множества* $M$. *Тогда если пределы этих функций в точке* $x_0$ *существуют и соответственно равны*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b,$$

*где* $a, b \in R^1$, *то справедливы следующие правила выполнения рациональных операций с пределами функций:*

1) $\lim_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha a$;

2) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$;

3) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = ab$;

4) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, *если* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

**Примеры с решением**

**Пример 3.3.1.15.** Вычислить предел функции в точке: $\lim_{x \to 1} (3x^2 + x + 5)$.

Р е ш е н и е. Выбираем произвольную последовательность значений аргумента $(x_n)$, сходящуюся к $1$, то есть такую, что $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$. Используем определение по Гейне:

$$\lim_{x\to 1}\left(3x^2+x+5\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3x_n^2+x_n+5\right)=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}5=3+1+5=9\,.\otimes$$

**Пример 3.3.1.16.** Показать, что $\lim\limits_{x\to 6}\left(2x-5\right)=7\,.$

Р е ш е н и е. Выбираем произвольное $\varepsilon>0$. Найдём для него такое $\delta>0$, что из неравенства

$$\left|x-6\right|<\delta\ \Rightarrow 6-\delta<x<6+\delta\,. \qquad (1)$$

будет следовать неравенство

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon\,.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|2x-12\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ 2\left|x-6\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|x-6\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 6-\frac{\varepsilon}{2}<x<6+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что $\lim\limits_{x\to 6}\left(2x-5\right)=7\,.\otimes$

**Пример 3.3.1.17.** Показать, что

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.$$

Р е ш е н и е. По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right):\ \left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon\,.$$

Решаем неравенство

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|15x-5|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15}<x<\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x\in\left(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15},\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}\right),$$

так сразу

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon.$$

Из этого следует, что $\delta=\frac{\varepsilon}{15}$. Итак,

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}\Rightarrow\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon,$$

а значит $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.\otimes$

**Пример 3.3.1.18.** Найти предел функции в точке: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}$.

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то есть получаем так называемую ***неопределённость вида*** $\dfrac{0}{0}$. Для «раскрытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно приравняв их к нулю $\left(x^2-3x+2=0,\ 3x^2+x-4=0\right)$ и решив соответствующие квадратные уравнения. В результате получаем:

$$\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}.$$

Так как $x\to 1$, но $x\neq 1$, то на множитель $(x-1)$, дающий в пределе $x\to 1$ нуль, можно сократить. В результате получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{3\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}=-\frac{1}{7}.\ \otimes$$

**Пример 3.3.1.19.** Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция $f(x)=5x^2+5$ непрерывна в точке $x_0=8.$

Р е ш е н и е. Значение функции в точке $x_0=8$ равно $f(8)=325$. По определению функция будет в точке $x_0=8$ непрерывной, если

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0):\ |x-8|<\delta\Rightarrow\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси $M$ такой, что как только $x\in M$, так сразу $\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon$. Имеем:

$$\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|5x^2-320\right|<\varepsilon\Rightarrow 64-\frac{\varepsilon}{5}<x^2<64+\frac{\varepsilon}{5}\Rightarrow$$

$$\sqrt{64-\frac{\varepsilon}{5}}<x<\sqrt{64+\frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in \left( \sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} \right) \Rightarrow \left| \left(5x^2 + 5\right) - 325 \right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке $x_0 = 8$ непрерывна. $\otimes$

**Пример 3.3.1.20.** Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty, 0], \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках $0$ и $\dfrac{\pi}{2}$.

Так как

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (2 - x) = 2, \ \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \cos x = 1,$$

то $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) - \lim_{x \to 0+0} f(x) = 2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0, \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0.$$

Так как $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, то

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси $R$, кроме точки $x = 0$, которая является точкой разрыва первого рода. $\otimes$

**Пример 3.3.1.21.** Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2-9}, & x\neq 3,\\ 1, & x=3.\end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

Р е ш е н и е. Вычислим односторонние пределы при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{3x^2-9}=\frac{1}{18};$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{3x^2-9}=\frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\frac{1}{18}\neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва. $\otimes$

**Пример 3.3.1.22.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x\to 0}(2x\cdot\sin x)=0,\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при $x\to 0$ являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$ функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то есть, $\sin x\approx x$ при $x\to 0$.

Далее, вспоминая, что $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и заменяя $\sin\dfrac{x}{2}\approx\dfrac{x}{2}$, получим, что

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\approx 2\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2/2}=4.\ \otimes$$

# Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного

## Предварительные сведения

Пусть $M \subset R^1$ – допустимое множество. Действительная функция $f : M \to f(M)$ называется **дифференцируемой в точке** $x_0 \in M$, если выполняется условие:

$$(\exists U(x_0) \subset M) : (\forall x \in U(x_0))$$

$$f(x) = f(x_0) + D(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$

Пусть $f$ – функция, определённая на множестве $M \subset R^1$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in M$. Тогда величина $D(x_0)$, определённая предельным соотношением

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D(x_0),$$

называется **первой производной функции** $f$ **в точке** $x_0$ и обозначается

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv f^{(1)}(x_0).$$

Линейная по смещению $x - x_0$ часть

$$df(x_0) \overset{def}{=} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0)(x - x_0)$$

приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

дифференцируемой в точке $x_0$ функции $f$, называется **первым дифференциалом** этой функции в точке $x_0$.

Пусть функции $f, f_1, f_2$ определены на одном и том же множестве $M$ и дифференцируемы в точке $x_0 \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сумма $f_1 + f_2$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\frac{d\left(f_1+f_2\right)}{dx}\left(x_0\right)=\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)+\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right);$$

2) если $c\in R^1$, то функция $cf$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\frac{d\left(cf\right)}{dx}\left(x_0\right)=c\frac{df}{dx}\left(x_0\right);$$

3) произведение $f_1f_2$ дифференцируемо в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\frac{d\left(f_1f_2\right)}{dx}\left(x_0\right)=\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)f_2\left(x_0\right)+f_1\left(x_0\right)\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right);$$

4) если $f\left(x_0\right)\neq 0$, то функция $1/f$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)\left(x_0\right)=-\frac{1}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2}\frac{df}{dx}\left(x_0\right);$$

5) если $f_2\left(x_0\right)\neq 0$, то частное $f_1/f_2$ дифференцируемо в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\left(x_0\right)=\frac{1}{\left[f_2\left(x_0\right)\right]^2}\left[\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)f_2\left(x_0\right)-f_1\left(x_0\right)\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right)\right].$$

**Примеры с решением**

**Пример 3. 2.1.** Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f\left(x\right)=4x^5-25x^{1/5}-2\sqrt{x^3}+7\sqrt[4]{x^{17}}\ .$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную производную $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$:

$$f'\left(x\right)=\left(4x^5-25x^{1/5}-2\sqrt{x^3}+7\sqrt[4]{x^{16}}\right)'=$$

$$=\left(4x^5-25x^{1/5}-2x^{3/2}+7x^4\right)'=20x^4-5x^{-4/5}-3x^{1/2}+\frac{119}{4}x^{\frac{13}{4}}=$$

$$= 20x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке $x$) $df(x) = f'(x)dx$, то имеем:

$$df(x) = \left(20x^4 + 9x^2 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}\right)dx. \otimes$$

**Пример 3. 2.2.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

Р е ш е н и е. В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x) = \left(\frac{g_1}{g_2}\right)'(x) = \frac{g_1'(x)\cdot g_2(x) - g_1(x)\cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right)' = 2x - 2,\ g'(x) = \left(x^2 + 2x + 5\right)' = 2x + 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$f'(x) = \left[\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right]' = \frac{g_1'(x)\cdot g_2(x) - g_1(x)\cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2} = \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}\right]' =$$

$$= \frac{(2x-2)\left(x^2 + 2x + 5\right) - \left(x^2 - 2x + 3\right)(2x+2)}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 4x - 16}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2} = 4\frac{x^2 + x - 4}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2}. \otimes$$

**Пример 3. 2.3.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x - a)\cdot\left(x^2 + ax + a^2\right) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить $f'(5)$ при $a = 3,\ b = 10.$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f'(x)=\left[a^2\cdot(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)+x^2-2bx+b^2\right]'=$$

$$=a^2\left(x^3-a^3\right)'+\left(x^2-2bx+b^2\right)'=3a^2x^2+2(x-b).$$

Далее получаем при $a=3,\ b=10$:

$$f'(5)=3\cdot3^2\cdot5^2+2\cdot(5-10)=675-10=665.\ \otimes$$

**Пример 3. 2.4.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}\right]=\frac{(2x-2\sin x)\cdot\sin x-\left(x^2+2\cos x\right)\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2x\sin x-x^2\cos x-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{2x\sin x-x^2\cos x-2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2x}{\sin x}-x^2\frac{ctgx}{\sin x}-\frac{2}{\sin^2 x}.\ \otimes$$

**Пример 3. 2.5.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(2x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'(2x-1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x(2x-1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}. \otimes$$

**Пример 3. 2.6.** Найти производную функцию для функции, действие которой определённо формулой

$$f(x) = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$f'(x) = \left[\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot \left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)' =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot 2\cdot(x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} =$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}. \otimes$$

**Пример 3. 2.7.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, и вычислить производные $f'(e), f'\left(\frac{1}{e}\right), f'\left(e^2\right).$

Р е ш е н и е. Сначала находим производную функцию:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e)=\frac{1-\ln e}{e^2}=0;\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{1+1}{\frac{1}{e^2}}=2e^2;$$

$$f'\left(e^2\right)=\frac{1-2\ln e}{\left(e^2\right)^2}=\frac{1-2}{e^4}=-e^{-4}.\otimes$$

**Пример 3. 2.8.** Найти производную функцию $f''(x)$ для функции $f$, если $f(x)=e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot(-1)\cdot 2x=-2x\cdot e^{-x^2},$$

$$f''(x)=\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)'=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}=$$

$$=2\cdot\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}.\otimes$$

**Пример 3. 2.9**[*)]**.** Найти производную функцию $f'''(x)$ для функции $f$, если $f(x)=x^2\cdot\sin x$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sin x\right)=2x\sin x+x^2\cos x;$$

$$f''(x)=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x;$$

$$f'''(x)=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x.\otimes$$

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде $(\forall x\in M)$

$$f(x)=g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\ldots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где $M \subset R^1$ – общее множество определения для функций $g_k^{\alpha_k}(x)$, а числа $\alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – показатели степени. Предположим, что функция $f$ удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M)\ f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции $f(x)$, очевидно, затруднительно даже для малых $(k = 1, 2, \ldots)$. Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right] =$$
$$= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \ldots + \alpha_m \ln g_m(x).$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow\ f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$f'(x) = f(x) \cdot u'(x) =$$
$$= g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x) \left[\alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}\right].$$

Выражение

$$u' = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется ***логарифмической производной функции*** $f(x)$.

**Пример 3. 2.10.** Найти производную функцию для функции

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$u=\ln f=\ln x-\ln(x+1)-\ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{-(x^2-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$f'(x)=f(x)\cdot u'(x)=$$

$$=\frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot\frac{-(x^2-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{-(x^2-2)}{(x+1)^2\cdot(x+2)^2}.\otimes$$

**Пример 3. 2.11**[*)]**.** Найти производную функцию для функции

$$f(x)=x^2\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя, имеем:

$$u(x)=\ln f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$u'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)},$$

$$f'(x)=x^2\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}=\frac{x\cdot(8x^2+7x-4)}{2\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.\otimes$$

Если функция, определённая формулой $y=f(x)$, задана неявно, то есть посредством уравнения $F(x,\,y)=0$, то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по $x$, помня, что $y=f(x)$, и разрешить уравнение относительно $y'$.

**Пример 3. 2.12.** Найти первую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Р е ш е н и е. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что $y = f(x)$, получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем $y' = \dfrac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$. $\otimes$

**Пример 3. 2.13.** Найти вторую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя по $x$ обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy' y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя $y'$ полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2} = \frac{2y}{(1 - y^2)^3}. \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt,\ dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\psi'(t)}{dx}\right)}{\varphi'(t)}.$$

**Пример 3. 2.14.** Найти первую и вторую производную функцию для функции $y$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{3t^2}\right)}{2t} = -\frac{2}{3t^2}.$$

Так как из второго уравнения для $x$ имеем $t = \sqrt[3]{x-5}$, отсюда получаем:

$$y_x'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}}. \otimes$$

**Пример 3. 2.15**[*)]**.** Найти первую производную функцию для функции $y$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{3\cos t}{3\sin t} = -ctgt. \otimes$

**Пример 3. 2.16.** Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x)=\frac{3\cdot\cos x}{2x+1}.$$

Р е ш е н и е. Находим дифференциал функции $y$, используя определение:

$$dy=y'(x)dx=-3\frac{2x\sin x+\sin x+2\cos x}{(2x+1)^2}dx.\otimes$$

**Пример 3. 2.17.** Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x)=e^{x^3}.$$

Р е ш е н и е. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy=y'(x)dx=\left(e^{x^3}\right)'=3x^2e^{x^3}dx.\otimes$$

**Пример 3. 2.18.** Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y=f(x)=\left(2x^2-3\right)^5.$$

Р е ш е н и е. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x)=5\cdot\left(2x^2-3\right)^4\cdot 4x\cdot dx=20x\left(2x^2-3\right)^4dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$d^2df(x)=\left[20x\left(2x^2-3\right)^4\right](dx)^2=60\cdot\left(2x^2-3\right)^3\left(6\cdot x^2-1\right)\cdot(dx)^2;$$

$$d^3df(x)=\left[12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(6x^2-1\right)+12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^3\right]\cdot(dx)^3=$$

$$=720x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(8x^2-4\right)\cdot(dx)^3=$$

$$=2880\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(2x^2-1\right)\cdot(dx)^3.\otimes$$

**Пример 3. 2.19.** Вычислить приближённо $\sin 32^0$.

Р е ш е н и е. Используя приближённую формулу

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

получаем:

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+df(x_0).$$

Определяя функцию $f$ формулой $f(x)=\sin x$, видим, что нам нужно вычислить значение $f(x)$ в точке $x=32^0$ при $x_0=30^0$, или в радианах $x=\frac{\pi}{180}\cdot 32,\ x_0=\frac{\pi}{6}$. Учитывая, что $\frac{d\sin(x)}{dx}=\cos x$, имеем:

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0),$$

или

$$\sin 32^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{32}{180}\cdot\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \approx 0{,}5 + \frac{1{,}73\cdot 3{,}14}{90} \approx 0{,}5 + 0{,}03 = 0{,}53.$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков $\sin 32^0 = 0{,}5299$. $\otimes$

**Пример 3. 2.20**[*)]**.** Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f$, определив её формулой $f(x)=\sqrt{x}$. По приближённой формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0+\Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = a^2$, $\Delta x = h$, получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2+h} \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2}}\cdot h = a + \frac{h}{2a}.$$

Вычислим $\sqrt{101}$ и $\sqrt{1{,}04}$:

$$\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}\approx 10+\frac{1}{20}=10{,}05;$$

$$\sqrt{1{,}04}=\sqrt{1+0{,}04}\approx 1+\frac{0{,}04}{2}=1{,}02.\ \otimes$$

**Пример 3. 2.21**[*)]**.** Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)$$

функции, определённой формулой $y=x^2$ при $x_0=2,\ \Delta x=x-x_0=0{,}01.$

Р е ш е н и е. Из приближённой формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

имеем

$$f(x)-f(x_0)\approx \frac{df}{dx}(x_0)\cdot(x-x_0)=df(x_0).$$

Подставляя в формулу $x_0=2,\ \Delta x=x-x_0=0{,}01$, получаем:

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=(2+0{,}01)^2-2^2\approx 2\cdot 2\cdot 0{,}01=0{,}04.\ \otimes$$

## Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

### Предварительные сведения

Говорят, что функция $f: M\to f(M)$ имеет в точке $x_0\in M$ **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$, что

$$f(x_0)=\max_{U\cap M} f\ \left(f(x_0)=\min_{U\cap M} f\right).$$

**Теорема Ферма**. Если функция $f$ определена и дифференцируема на открытом множестве $J=(a,b)$ и имеет в точке $x_0\in J$ локальный экстремум (всё равно, максимум или минимум), то $\frac{df}{dx}(x_0)=0$.

**Теорема Ролля**. Если функция $f$ определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J}=[a,b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J=(a,b)$, причём $f(a)=f(b)=c$, то

$$(\exists x_0 \in J):\ \frac{df}{dx}(x_0) = 0.$$

**Теорема Лагранжа**. Если функция $f$ определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J} = [a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J = (a, b)$, то

$$(\exists x_0 \in (a, b)):\ f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Теорема Коши**. Если функции $f$ и $g$ непрерывны на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J} = [a, b]$ и дифференцируемы на открытом промежутке $J = (a, b)$, причём

$$(\forall x \in J)\ \frac{dg}{dx}(x) \neq 0,$$

то $g(b) \neq g(a)$ и

$$(\exists x_0 \in J):\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Теорема Тейлора.** Если функция $f : J \to f(J)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $[x_0, x] \subset J$ и $n+1$ раз дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $(x_0, x)$, а её производные до порядка $n$ включительно имеют предельные значения $f^{(k)}(x_0)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$, то существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что для функции $f$ справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Примеры с решением**

**Пример 3.3.1.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x) = 3 - x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке $(1, 4)$.

Р е ш е н и е. Данная функция на промежутке $(1,4)$ монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке $1$, а минимума в точке $4$. Следовательно, в промежутке $(1, 4)$ не существует точки $x_0$ локального экстремума, в которой $f'(x_0) = 0$. Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет. $\otimes$

**Пример 3.3.2.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=3+2x-x^2,$$

на промежутке $[0,4]$ условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (0,4)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. На промежутке $(0,4)$ функция дифференцируема, следовательно $(\exists x_0 \in (0,4))f'(x_0)=0$. Находим эту точку:

$$f'(x)=2-2x \Rightarrow 2-2x_0=0 \Rightarrow x_0=1. \otimes$$

**Пример 3.3.3.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=x^2+6x-35,$$

на промежутке $[-5,-1]$ условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5)=f(-1)=-40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$, существует. Найдём её:

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0+6=0 \Rightarrow x_0=-3. \otimes$$

**Пример 3.3.4.** На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y=x^3-3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(3;18)$.

Р е ш е н и е. Функция определена на промежутке $[-1,3]$, непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке $(-1,3)$. Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка $x_0 \in (-1,3)$, что

$$f'(x_0)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=4.$$

Так как $f'(x)=\left(x^3-3x\right)=3x^2-3$, то имеем $3x^2-3=4$. Из этого уравнения находим $x_{01}=+\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_{02}=-\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как из этих двух точек $x_{01}\in[-1,3]$ а $x_{02}\notin[-1,3]$, то $x_0=x_{01}=\sqrt{\frac{7}{3}}$. $\otimes$

**Пример 3.3.5.** В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y=f(x)=x^2-8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1;9)$, $B(5;-15)$.

Р е ш е н и е. На промежутке $[-1,5]$ функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому имеем:

$$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{-24}{6}=-4\Rightarrow f'(x_0)\equiv 2x_0-8=-4\Rightarrow x_0=2.$$

Подставляя это значение $x$ в формулу для функции, получаем

$$y=f(2)=-12.$$

Таким образом, искомой является точка $C(2;-12)$. $\otimes$

**Пример 3.3.6.** Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x)=x^3,\ g(x)=x^2$$

на промежутке $[1,2]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку $x_0$, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции непрерывны на промежутке $[1,2]$ и дифференцируемы на промежутке $(a,b)=(1,2)$, причём $(\forall x\in(a,b))g(x)\neq 0$. Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{3x_0^2}{2x_0}=\frac{3}{2}x_0=\frac{7}{3}\Rightarrow x_0=\frac{14}{9}.\ \otimes$$

**Пример 3.3.7.** Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x)=x^2-2x+3,\ g(x)=x^3-7x^2+20x-5$$

на промежутке $[1,\ 4]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку $x_0$, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x)=2x-2,\ g'(x)=3x^2-14x+20.$$

Кроме этого, производная функции $g$ в точках промежутка $(1,\ 4)$ не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения $3x^2-14x+20=0$ имеем $D=b^2-4ac=-44<0$ (график функции $g$ не имеет точек пересечения с осью $OX$). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{11-2}{27-9}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2x_0-2}{3x_0^2-14x_0+20}=\frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2-6x_0+8=0\Rightarrow\ x_{01}=4,\ x_{02}=2$$

Так как из этих двух точек промежутку $(1,\ 4)$ принадлежит только точка $x_{02}=2$, то она и является искомой точкой. $\otimes$

**Пример 3.3.8.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(e^x+x^{-x}\right)\cdot(1+x)\right)=2.\otimes$$

**Пример 3.3.9.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+1}{9x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{18x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.\otimes$$

**Пример 3.3.10.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=\left[-\infty\cdot 0\right]$. Для раскрытия неопределённости заменим переменную:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=\{x=-t\}=\lim_{t\to\infty}\left(-t^3\cdot e^{-t}\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{e^t}=-6\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0.\otimes$$

**Пример 3.3.11.** Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\left[\infty-\infty\right]$. Для раскрытия неопределённости приводим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right).$$

Получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+1-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.\otimes$$

**Пример 3.3.12.** Разложить многочлен

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$$

по степеням $x-1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+$$

$$+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

где $x_0=1$. Находим значение многочлена и его производных в точке $x_0=1$:

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1,\quad P(1)=0;$$
$$P^{(1)}(x)=5x^4-8x^3+3x^2-2x+2,\quad P^{(1)}(1)=0;$$
$$P^{(2)}(x)=20x^3-24x^2+6x-2,\quad P^{(2)}(1)=0;$$
$$P^{(3)}(x)=60x^2-48x+6,\quad P^{(3)}(1)=18;$$
$$P^{(4)}(x)=120x-48,\quad P^{(4)}(1)=72;$$
$$P^{(5)}(x)=120,\quad P^{(5)}(1)=120.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x)=3\cdot(x-1)^3+3\cdot(x-1)^4+(x-1)^5.\otimes$$

**Пример 3.3.13.** Разложить многочлен

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$$

по степеням $x+1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. Вычисляя значение многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$, получаем:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, \qquad P(-1) = -9;$$
$$P^{(1)}(x) = 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4, \qquad P^{(1)}(-1) = 22;$$
$$P^{(2)}(x) = 12x^2 + 12x - 16, \qquad P^{(2)}(-1) = -16;$$
$$P^{(3)}(x) = 24x + 12, \qquad P^{(3)}(-1) = -12;$$
$$P^{(4)}(x) = 24, \qquad P^4(-1) = 24.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x) = -9 + \frac{22}{1!}\cdot(x+1) + \frac{-16}{2!}\cdot(x+1)^2 + \frac{-12}{3!}\cdot(x+1)^3 +$$
$$+ \frac{24}{4!}\cdot(x+1)^4 = -9 + 22\cdot(x+1) - 8\cdot(x+1)^2 -$$
$$- 2\cdot(x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \otimes$$

**Пример 3.3.14.** Представить функцию $f(x) = e^x$ в виде разложения по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств: $(\forall n \in N)$

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{d^2 x}(0) = \ldots = \frac{d^n f}{d^n x}(0) = e^0 = 1.$$

Кроме этого, очевидно, что $\frac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x) = e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить $\xi = \theta \cdot x$, где $0 < \theta < 1$. $\otimes$

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь многочлен Тейлора

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \frac{(x - x_0)^1}{1!} +$$

$$+ \frac{d^2 f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

При условии $\Delta x \to 0$ выполняется

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = o\left((x - x_0)^n\right) = o\left((\Delta x)^n\right).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + o\left((\Delta x)^n\right).$$

Последняя форма записи называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***.

**Пример 3.3.15.** Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Рассмотрим производные функции $f(x) = \sin x$ в точке $x$:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

……;

$$\frac{d^k}{dx^k}\sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\sin(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos\theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \cos\theta x.$$

Здесь мы положили $\xi = \theta x$, где $0 < \theta < 1$, $x \in (a, b)$.

Формула Маклорена принимает вид

$$\sin x = \sin 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \alpha^{(2n+1)}(x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x.$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

**Пример 3.3.16.** Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Записываем для $\sin x$ разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

**Пример 3.3.17.** Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\cdot\sin x}$.

Р е ш е н и е. Используем разложение для $e^x$, $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3\cdot\left(x + \alpha_{(2)}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^5\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1 + \frac{o\left(x^5\right)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes$$

## Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного

### Предварительные сведения

Пусть функция $f: J \to f(J)$ дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и монотонно возрастает (монотонно убывает) на нём. Тогда на этом множестве её производная неотрицательна (неположительна), то есть

$$(\forall x \in (a, b))\ f'(x) \geq 0\ \left(f'(x) \leq 0\right).$$

Пусть функция $f: J \to f(J)$ дифференцируема на $J = (a, b)$ и существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$. Тогда если при переходе через точку $x_0$ в направлении

роста аргумента $x$ производная $f'$ функции $f$ меняет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то в точке $x_0$ функция имеет локальный максимум (локальный минимум). Если же знак производной $f'$ при переходе через точку $x_0$ не меняется, то функция в точке $x_0$ экстремума не имеет.

График $G_f$ функции $f: J \to f(J)$, дифференцируемой на $J = (a, b)$, называется **выпуклым в окрестности** $U(x_0)$ **точки** $x_0 \in J$, если точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика лежат ниже касательной к графику в точке $x_0$. Если же все точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика $G_f$ функции лежат выше касательной к нему в точке $x_0$, то график называется **вогнутым в окрестности** $U(x_0)$ **точки** $x_0$. ●

Пусть функция $f: J \to f(J)$ определена и дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Тогда если при переходе через точку $x_0$ (в направлении роста аргумента $x$) график функции $G_f$ меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), то точка $(x_0; f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции.

Пусть $f: J \to f(J)$, где $J = (a, b)$. Тогда, если вторая производная функция $f''$ для функции $f$ во всех точках множества $J$ положительна (отрицательна), то график функции $G_f$ является вогнутым (выпуклым) на этом множестве.

Пусть дана функция $f: M \to f(M)$ и $G_f$ – её график. Прямая линия, с уравнением $x = a$, где $a \in M$, называется **вертикальной асимптотой графика функции** $f$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

не существует.

Прямая линия с уравнением

$$y = kx + b$$

называется **наклонной асимптотой графика** $G_f$ **функции** $f: M \to f(M)$ (**правой** при $x \to +\infty$ и **левой** при $x \to -\infty$), если

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Справедливо представление

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$. Нетрудно видеть также, что справедливы формулы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx].$$

**Примеры с решением**

**Пример 3.4.1.** Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой $f(x)=x^3+3x^2-9x-2.$

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f'=3x^2+6x-9=3\left(x^2+2x-3\right)=3(x+1)^2-12.$$

Поэтому имеем:

$$f'>0\Rightarrow x^2+2x-3>0\Rightarrow 3\cdot(x+1)^2-12>0;$$

$$f'<0\Rightarrow x^2+2x-3<0\Rightarrow 3\cdot(x+1)^2-12<0.$$

Корни уравнения

$$x^2+2x-3=0$$

есть

$$x_1=-3,\ x_2=1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x_0=-1,\ y_0=-12.$ Следовательно, неравенство $f'(x)>0$ выполняется при $x<-3$ и $x>1$, а неравенство $f'(x)<0$ при $-3<x<1.$

На множестве $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ функция строго монотонно возрастает, а на множестве $(-3,1)$ строго монотонно убывает. $\otimes$

**Пример 3.4.2.** Предприятие производит $x$ единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi=-0{,}01\cdot x^3+300\cdot x-500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

Р е ш е н и е. Производная от $\Phi$ равна:

$$\Phi'=-0{,}03\cdot x^2+300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi'=-0{,}03\cdot x^2+300<0,$$

откуда имеем $x^2 - 10000 > 0$. Из последнего неравенства получаем: $x_1 > 100$, $x_2 < -100$. Имеет экономический смысл только неравенство $x_1 > 100$. Следовательно, при $x > 100$ финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше $100$ единиц становится экономически не выгодно. $\otimes$

**Пример 3.4.3.** Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции $f$ есть

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}, x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной $f'(x)$ справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

| $x$ | $x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $-\sqrt{\frac{5}{3}} < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$ | $x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ | $x > \sqrt{\frac{5}{3}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f$ | | Максимум $f(x_1) = 6{,}3$ | | Минимум $f(x_2) = -2{,}3$ | |

4. Вычисляем значения функции в точках $x_1, x_2$ и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум $f(x_1) = 6{,}3$, а в точке

$$x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимуму $f(x_2) = -2{,}3$. $\otimes$

**Пример 3.4.4.** Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3.$$

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось $R$.

1) Находим производную функции:

$$f'(x) = x^2 + 5x + 4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

В результате решения имеем корни: $x_1 = -1,\ x_2 = -4$. Критические точки разбивают $R^1$ на промежутки

$$-\infty < x < -4,\ -4 < x < -1,\ -1 < x < \infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке $(-\infty, -4)$ имеем $y' > 0$;

в промежутке $(-4, -1)$ имеем $y' < 0$;

в промежутке $(-1, \infty)$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, в точке $-4$ имеем **максимум**; в точке $-1$ имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-4) \approx 5{,}67;\ \min f(x) = f(-1) = 1{,}17.\ \otimes$$

**Пример 3.4.5.** Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим производную функции:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0,\ x^4 - x^2 = 0,\ x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0;\ f''(1) = 30;\ f''(-1) = -30.$$

В точке $x_2 = 1$ функция имеет **минимум**, а в точке $x_3 = -1$ - **максимум**. В точке $x_1 = 0$ функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака. $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

**Пример 3.4.6.** Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = (x^2 + 7x) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции $M = R$. Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка $x = -1$ является нулём второй производной $f''(x)$, а точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода второй производной $f''(x)$. Эти точки делят множество определения функции $f(x)$ на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

$2)$ Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$$(\forall x \in (-\infty, -1))\ f''(x) < 0;$$

$$(\forall x \in (-1, 0))\ f''(x) > 0;$$

$$(\forall x \in (0, +\infty))\ f''(x) > 0.$$

Следовательно: на $(-\infty, -1)$ график функции ***выпуклый***; на $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ график функции ***вогнутый***.

$3)$ Так как функция в точке $x_0 = -1$ определена, а $f''(-1) = 0$, то в точке $x_0 = -1$ график функции испытывает перегиб, а точка

$$(x_0; f(x_0)) = (-1; 3)$$

является точкой перегиба графика функции. $\otimes$

**Пример 3.4.7.** Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Р е ш е н и е. $1)$ Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 3$.

$2)$ По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем $x$, то есть

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением $y=-x+4$. $\otimes$

**Пример 3.4.8.** Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x.$$

Р е ш е н и е. $1)$ Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

$2)$ Из представления функции в виде

$$f(x)=(kx+b)+\alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_+=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx],$$

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_-=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx].$$

Правый предел:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2\right)=-1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y=-x.$$

Левый предел:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\{x=-z\}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}+2z}{-z}=$$

$$=-\lim_{z\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}+2\right)=-3;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+3x\right)= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y=-3x.\ \otimes$$

**Пример 3.4.9.** Исследовать функцию, заданную формулой $y(x)=x\cdot e^{-x}$.

Р е ш е н и е. 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел $R$.

2) Нуль функции – точка $x=0$, причём $\lim\limits_{x\to0}y(x)=0$. Следовательно, функция в точке $x=0$ асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x)=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=e^{-x}\cdot(1-x)\Rightarrow x=1.$$

4) Имеем два промежутка $(-\infty,1)$ и $(1,\infty)$. На этих промежутках

$$(\forall x\in(-\infty,1))\ \ y'(x)>0,$$

$$(\forall x\in(1,\infty))\ y'(x)<0,$$

соответственно. Следовательно, при $x\in(-\infty,1)$ функция строго монотонно возрастает, а при $x\in(1,\infty)$ функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x)=-e^{-x}\cdot(1-x)-e^{-x}=e^{-x}\cdot(x-2).$$

Так как в точке $x=1$ вторая производная равна

$$y''(1)=\frac{1-2}{e}=-\frac{1}{e}<0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный $\frac{1}{e}$.

6) Вторая производная функции в точке $x=2$ обращается в нуль, а при переходе через это точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при $x=2$ имеет перегиб,

причём при $x<2$ график функции выпуклый, а при $x>2$ – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2)=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}.\otimes$$

## Практическое занятие 6. Интегрируемость функции одного переменного

### Предварительные сведения

Определённым интегралом от определённой на промежутке $[a,b]$ функции $f$ называется предел последовательности интегральных сумм Римана

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1}),$$

если он существует. Можно показать, что этот предел существует для непрерывной на $[a,b]$ функции.

Свойства определённого интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx=0$;

2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$;

4) $\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$;

5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ при $a<c<b$;

6) $\int_a^b f(x)dx>0$, если $\left(\forall x\in[a,b]\right)\ f(x)>0$.

Пусть $f$ и $F$ – две функции, определённые на открытом промежутке $M=(a,b)\subset R^1$. Функция $F$ называется **первообразной** (**примитивной**) **функцией** для функции $f$ на промежутке $M$, если она дифференцируема на этом промежутке и выполняется следующее условие:

$$\left(\forall x\in(a,b)\right)\ \frac{d}{dx}F(x)=f(x).$$

**Неопределённым интегралом** от функции $f$ на промежутке $(a,b)$ действительной числовой оси называется бесконечное множество $H(x)$ всех её первообразных. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$H(x)=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Если $F$ – первообразная функция для функции $f$ на промежутке $\overline{J}=[a,b]$, то определённый интеграл от функции $f$ по заданному промежутку равен разности значений первообразной на концах промежутка (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

**Примеры с решением**

**Пример 3.5.1.** Найти неопределённый интеграл

$$I=\int \sqrt[3]{x^2}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно имеем:

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{2/3}dx=\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.\otimes$$

**Пример 3.5.2.** Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx=6\int x^2dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int dx=$$

$$=2x^3-2x^{3/2}+5x+C=2x^3-2\sqrt{x^3}+5x+C,$$

где все постоянные интегрирования объедены в одну постоянную $C$. $\otimes$

**Пример 3.5.3.** Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=5\int x^2dx+11\int dx-3\int\sin x dx+2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 11x + 3\cos x + 2\ln|x| + ctgx + C. \otimes$$

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int (\ln f(x))' dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется ***методом подведения под дифференциал***.

**Пример 3.5.4.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+1}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx = d(x+1)$ и, используя табличную первообразную для функции $\frac{1}{x}$, в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C. \otimes$$

**Пример 3.5.5.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, имеем:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C. \otimes$$

**Пример 3.5.6.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Р е ш е н и е. Так как $xdx = \frac{1}{2} d\left(1 + x^2\right)$, получаем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C. \otimes$$

**Пример 3.5.7.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5} dx.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3\left(x+5\right)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\int \frac{3x+2}{x+5} dx = \int \left(3 - \frac{13}{x+5}\right) dx = 3\int dx - 13\int \frac{1}{x+5} dx =$$

$$= 3x - 13\ln\left|x+5\right| + C. \otimes$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена на промежутке $\overline{J} \in \left[\alpha, \beta\right]$, имеет непрерывную производную на $\left(\alpha, \beta\right)$ и принимает значения в промежутке $\overline{M} \in \left[a, b\right]$, а функция $f : \overline{M} \to f\left(\overline{M}\right)$ – непрерывная функция, определённая при всех $x \in \overline{M}$. Тогда в неопределённом интеграле

$$I = \int f(x)dx + C$$

можно заменить переменную $x$ функцией $\varphi\left(t\right)$ от переменной $t$, причём $dx$ заменяется на $\frac{d\phi}{dt}(t)dt$, то есть, справедлива формула **замены переменной**

$$\int f(x)dx = \int f\left(\phi(t)\right)\frac{d\phi}{dt}(t)dt + C.$$

Если функции $u$ и $v$ имеют непрерывные производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$, то

$$\int u\left(x\right)dv\left(x\right) = u\left(x\right)v\left(x\right) - \int v\left(x\right)du\left(x\right)$$

(**формула интегрирования по частям**).

**Пример 3.5.8.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3} dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную по формуле $t = x + 3 \Rightarrow dx = dt$, получаем:

$$\int \sqrt{x+3}dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.9.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\frac{dt}{x^2+1},$$

получаем:

$$\int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9\left(x^3+3x+1\right)^3} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.10.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $\cos x dx = d(\sin x)$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d(\sin x), & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes$$

**Пример 3.5.11.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int x \cdot \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x dx + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.12.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

Р е ш е н и е. Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Полученное число $\frac{1}{3}$ имеет смысл площади криволинейного треугольника с вершинами в точках

$O(0,0), A(1,1), B(1,0)$. $\otimes$

**Пример 3.5.13.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \otimes$$

**Пример 3.5.14.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^2 2^{3x-4} dx.$$

Р е ш е н и е. Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-4) \right\} = \frac{1}{3}\int_1^2 2^{3x-4} d(3x-4) =$$

$$= \left\{ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x-4}}{\ln 2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}. \otimes$$

**Пример 3.5.15.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx.$$

Р е ш е н и е. Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную $t = 2 - x^2$. Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d\left(2 - x^2\right) = -2xdx \Rightarrow \; xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x = 0 \Rightarrow t = 2;\; x = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\int\limits_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx = \left\{ \begin{array}{l} dt = d\left(2 - x^2\right) = -2xdx;\; xdx = -\frac{1}{2}dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = 2;\; x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int\limits_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \cdot \left(64 - 1\right) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}. \otimes$$

**Пример 3.5.16.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Р е ш е н и е. Используя замену переменной интегрирования $t = \ln x$, имеем:

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} t = \ln x, & x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ dt = \frac{dx}{x}, & x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \otimes$$

**Пример 3.5.17.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Р е ш е н и е. Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, & v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{-x} d\left(-x\right) = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2 \cdot e^{-1} = 1 - 2/e = e - 2/e. \otimes$$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

1) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$; 2) $\left(\frac{n}{5^n}\right)$; 3) $\left(\frac{n}{4n-3}\right)$; 4) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$; 5) $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

2. Используя определение, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, если:

1) $x_n = \frac{3n+1}{5n+2}$, $x_0 = \frac{3}{5}$; 2) $x_n = \frac{2n-2}{3n-1}$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

3) $x_n = \frac{4n-2}{2n+3}$, $x_0 = 2$; 4) $x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}$, $x_0 = 4$;

5) $x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}$, $x_0 = -1$; 6) $x_n = \frac{6n-2}{2n+1}$, $x_0 = 3$;

7) $x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}$, $x_0 = 2$; 8) $x_n = \frac{5n+2}{3n+1}$, $x_0 = \frac{5}{3}$.

3. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2+n)^3}{(n+2)^2-(n+1)^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2-(n+5)^3}{(3-n)^3}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+\frac{n}{2^n}}{n^2-1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn}-an\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n}\sin x\right)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^n$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

23. Найти множество определения $M$ и множество значений $f(M)$ функции $f(x)=\lg x$.

24. Найти множество определения $M$ следующих функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+4}$; 3) $f(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$;

4) $f(x)=\lg(x-2)-\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$; 5) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$.

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

1) $f(x)=1-x$; 2) $f(x)=x^3+x$; 3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;

4) $f(x)=x^5-x^3+x$; 5) $f(x)=x^2+x-1$.

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1) $f(x)=5$; 2) $f(x)=\sin(5x+3)$; 3) $f(x)=\cos x^2$;

4) $f(x)=2[x]+1$, где $[x]$ – целая часть $x$.

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)=x^2+3x+3$ непрерывна в любой точке действительной числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках $x_0$:

1) $f(x)=3x-5,\ x_0=2$; 2) $f(x)=4x^2-1,\ x_0=2$;

3) $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=4$; 4) $f(x)=4x^2+1,\ x_0=8$;

5) $f(x)=\sin x-\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

29. Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}<0$.

30. Найти предел данной функции при $x\to x_0$:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x2^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$.

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

1) $f(x)=\ln\dfrac{5-4x^2}{3+7x^2}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\ln\dfrac{(1+x^2)\cdot(1-2x)^3}{(x^2-5)^2}$;

3) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x=1$, $x=1x=e$, $x=\dfrac{1}{e}$, $x=\dfrac{1}{e^2}$;

4) $f(x)=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-7\cos x+tg(3x^2+2)+ctg6x$;

5) $f(x)=\ln^2(1-\cos x)$; 6) $f(x)=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\cdot\ln 3)}{1+\ln^2 3}$;

7) $f(x)=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$; 8) $f(x)=\ln(1+\sqrt{thx})$.

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}+(1+x^2)\cdot ctgx.$$

34. Найти $f'(0)$ и $df(0)$, если $f(x)=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

35. Найти $f'(x)$ и $df(x)$, если $f(x)=\ln(5e^x+7)$.

36. Пусть функции $f$ и $g$, определённые на одном и том же множестве $M \subset R$, $n$-раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также $n$-раз дифференцируемы на $M$.

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1) $f(x) = \ln(2x-3),\ f''(x) = ?;$

2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x,\ f'''(x) = ?;$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3},\ f'''(x) = ?;$

4) $f(x) = \ln(3x+1),\ f'''(x) = ?;$

5) $f(x) = 3^{2x+1},\ f'''(x) = ?;$

6) $f(x) = x^2 \cdot \sin x,\ f^{(3)} = ?.$

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1) $f(x) = \cos^2 x,\ f''(x) = ?,\ d^2 f(x) = ?;$

2) $f(x) = e^x \cos x,\ f^{(3)}(x) = ?,\ d^{(3)} f(x) = ?.$

30. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции $f(x) = 3x^2 - 1$ на промежутке $[1, 2]$.

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x$ на промежутке $[0, 1]$.

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции $f(x) = 2x - x^2$ на промежутке $[1, 3]$. Найти точку $\xi$, удовлетворяющую условию $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right];$ 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right];$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty];$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right];$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

1) $\int\left(x^6-6x^5+40x^3-24x^2\right)dx$; 2) $\int\sqrt[3]{x^2}\left(8\sqrt[3]{x}-1\right)dx$;

3) $\int\dfrac{\left(4-3\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$; 4) $\int\dfrac{x+2}{x+3}dx$; 5) $\int\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k\right)dx$;

6) $\int\left(2x^2+1\right)^3dx$; 7) $\int\left(1+\sqrt{x}\right)^4dx$; 8) $\int\dfrac{(x+1)\cdot\left(x^2-3\right)}{3x^2}dx$;

9) $\int\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$; 10) $\int\left(5^x-1\right)\left(5^{-x}+1\right)dx$;

11) $\int\dfrac{x^2+3}{x^2+1}dx$; 12) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$; 13) $\int\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{\cos 4x}dx$;

14) $\int\dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 15) $\int\dfrac{dx}{2+3x^2}dx$.

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

1) $\int\dfrac{dx}{ax+b}$, где $a,b$ – постоянные;

2) $I=\int\dfrac{xdx}{1+x^2}$;

3) $\int\sqrt{x+3}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x+3$);

4) $I=\int\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=e^x$);

5) $\int\dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx$; 6) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

7) $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}dx$; 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

9) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^3}dx$; 10) $\int \frac{\sin 2x-\cos x}{(\cos^2 x+\sin x)^2}dx$.

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

1) $\int x\cdot e^{x^2}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x^2$);

2) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; 3) $\int (12x-5)^7 dx$; 4) $\int e^{4-3x}dx$;

5) $\int 6^{5x+2}dx$; 6) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$; 7) $\int \frac{e^x dx}{2e^x+7}$; 8) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

9) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx$; 10) $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}}dx$; 11) $\int \sin x\cos^2 xdx$;

12) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$; 13) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{5tgx}}{\cos^2 x}dx$; 15) $\int e^{4\cos x-1}\sin xdx$.

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int x^2\cdot\cos xdx$; 2) $\int x^2\cdot\sin xdx$; 3) $\int x\cdot e^x dx$;

4) $\int (x^2+2x+3)\cdot\cos xdx$; 5) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int e^{2x}\cos xdx$;

7) $\int x^2 e^x dx$; 8) $\int x\ln xdx$.

47. Найти определённый интеграл:

1) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$; 2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; 3) $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$; 5) $\int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x}dx$; 6) $\int_{-2}^5 \sqrt[3]{5x+2}dx$;

7) $\int\limits_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{0,5} e^{\sin \pi x}\cos \pi x dx$; 9) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$;

10) $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x dx$; 11) $\int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin x dx$; 12) $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$;

13) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 14) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\cos x}dx$; 15) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$; 16) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$.

# ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## РЯДЫ

## Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных

### Предварительные сведения

Функция $f: R^n \to R^1$ называется дифференцируемой в области $\Omega \subset R^n$, если выполняется следующее условие:

$$\left(\forall \vec{x}_0 \in \Omega\right)\left(\exists U\left(\vec{x}_0\right) \subset \Omega\right): \left(\forall \vec{x} \in U\left(\vec{x}_0\right)\right)$$

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(\vec{x}_0\right) \cdot \Delta x^k + o\left(\left\|\Delta \vec{x}\right\|\right).$$

Здесь

$$\Delta \vec{x} = \sum_{k=1}^{m} \left(x^k - x_0^k\right)\vec{e}_k \equiv \sum_{k=1}^{m} \Delta x^k \vec{e}_k,$$

$$\lim_{\left\|\Delta \vec{x}\right\| \to 0} \frac{o\left(\left\|\Delta \vec{x}\right\|\right)}{\left\|\Delta \vec{x}\right\|} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right) \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{f\left(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}\ x^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^m\right) - f\left(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}\ x_0^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^m\right)}{\Delta x^k} -$$

частная производная по переменной $x^k$ первого порядка.

Частные производные функции нескольких переменных высших порядков находятся посредством рекуррентной формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}\left(\vec{x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right); \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}\right).$$

Вторая формула даёт выражение для смешанной частной производной второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

Пусть $f : M \to f(M)$ ($M \subset R^n$ и $f(M) \subset R^1$) – некоторая дифференцируемая в окрестности $U\left(\vec{x}_0\right) \subset M$ точки $\vec{x}_0 \in M$ функция. Тогда, если в окрестности $U\left(\vec{x}_0\right)$ существуют (смешанные) частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}\left(\vec{x}\right),$$

непрерывные в точке $\vec{x}_0$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}_0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}\left(\vec{x}_0\right).$$

Теорема обобщается и на смешанные производные любого порядка, вычисленные одинаковое число раз по одним и тем же переменным, даже в разном порядке.

Высшие дифференциалы определяются аналогично высшим производным посредством рекуррентной формулы следующего вида

$$d^n f\left(\vec{x}\right) \overset{def}{=} d\left(d^{n-1} f\left(\vec{x}\right)\right).$$

Так, например, второй дифференциал функции $f : M \to f(M)$ в точке $\vec{x} \in M \subset R^n$ вычисляется по формуле:

$$d^2 f\left(\vec{x}\right) = d\left(df\left(\vec{x}\right)\right) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}\right) dx_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}\right) dx_k\right) dx_j.$$

## Примеры с решением

**Пример 4.1.1.** Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке $M_0(5;1)$.

Р е ш е н и е. Для частной производной по переменной $x$ имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение $y = y_0$, находим сужение функции $z(x, y)$ на прямую линию $y = y_0$, параллельную оси $Ox$. На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции $z(x, y)$ является функцией одной переменной $x$. Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения $z(x, y_0)$.

1) Придавая переменной $x$ приращение $\Delta x$ в точке $(x_0; y_0)$, получим:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) = x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 +$$
$$+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5.$$

2) Находим приращение функции $z(x, y_0)$ в точке $(x_0; y_0)$, придавая переменной $x$ приращение $\Delta x$:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 y_0 + 4.$$

4) Подставляя координаты точки $(x_0; y_0) = (5; 1)$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5,1)=\left(2x_0y_0+4\right)\Big|_{\substack{x_0=5\\y_0=1}}=14.$$

Аналогично находим частную производную в точке $(x_0;\,y_0)=(5;1)$ по второй переменной $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5,1)=\left(x_0^2-2\right)\Big|_{\substack{x_0=5\\y_0=1}}=23.\ \otimes$$

**Пример 4.1.2.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=x^3+3x^2y-y^3.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y)=3x^2+6xy;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)=3x^2-3y^2.\ \otimes$$

**Пример 4.1.3.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=\frac{xy}{x+y}.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{y^2}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{x^2}{(x+y)^2}.\ \otimes$$

**Пример 4.1.4.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=(1-x)^{y^2}.$$

Р е ш е н и е. Для вычисления частной производной по переменной $x$ фиксируем переменную $y$ и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной $y$ фиксируем переменную $x$ и используем формулу $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot (1-x)^{y^2} \cdot \ln(1-x). \otimes$$

**Пример 4.1.5.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 + 2\ln y + yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + \frac{2x}{y} + x^y \ln x. \otimes$$

**Пример 4.1.6.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1+xy)^y.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменную $y$ и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной $x$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной $y$ фиксируем переменную $x$ и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x, y) = y\ln(1+xy) \to z'_y = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \to$$

$$z' = \frac{u'}{u} \to \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (1+xy)^y \cdot \ln(1+xy) + (1+xy)^y \frac{xy}{1+xy} =$$

$$= (1+xy)^y \left[ \ln(1+xy) + \frac{x \cdot y}{(1+xy)} \right]. \otimes$$

**Пример 4.1.7.** Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

в точке $M_0(1; -1; -2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{2x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{2x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_2}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{2x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_3}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(1; -1; -2) = -\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(1; -1; -2) = \frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(1; -1; -2) = -\frac{2}{\sqrt{216}}. \otimes$$

**Пример 4.1.8.** Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u(x_1, x_2, x_3) = \exp\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \equiv e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

в точке $M(0; 1; 2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = 0;$$

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = 2e^5;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_3 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M) = 4e^5. \otimes$$

**Пример 4.1.9.** Показать, что функция, заданная формулой

$$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции в произвольной точке $(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}=0.\otimes$$

**Пример 4.1.10.** Показать, что функция

$$u(x_1,\,x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\,x_2)=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\,x_2)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=$$

$$=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x_1}\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{1}{x_2}\left[\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}\right]=$$

$$=\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}-\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)}{x_2}=\frac{u(x_1,\,x_2)}{x_2^2}.$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1,\,x_2)}{x_2^2}=\frac{u(x_1,\,x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция $u(x_1,\,x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}.\otimes$$

**Пример 4.1.11.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \otimes$$

**Пример 4.1.12.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \otimes$$

**Пример 4.1.13.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных $u(x, y) = \sin(x + y)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y); \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x+y). \otimes$$

**Пример 4.1.14.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2-1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2-1)x_1^{x_2-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2-1} + x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2. \otimes$$

**Пример 4.1.15.** Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M_0(1; -1)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции:

1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

2) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

3) $dz\left(1,-1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}dx + \frac{\sqrt{2}}{4}dy$. $\otimes$

**Пример 4.1.16.** Вычислить приближённо $\left(0{,}98\right)^{2{,}01}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $z = x^y$. В точке $\left(1;\,2\right)$ значение функции $z\left(1;\,2\right) = 1$. Вычислим значение функции в точке $\left(0{,}98;\,2{,}01\right)$. Имеем $\Delta x = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Находим частные производные функции $z = x^y$ в точке $\left(1;\,2\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$\left(0{,}98\right)^{2{,}01} = z\left(1;\,2\right) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0{,}04 = 0{,}96. \otimes$$

**Пример 4.1.17.** Найти дифференциал функции

$$f = f\left(x+y^2,\, y+x^2\right)$$

в точке $M\left(-1;\,1\right)$.

Р е ш е н и е. Обозначим, например,

$$u = x+y^2,\, v = y+x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - 2\frac{\partial f}{\partial v}(0; 2)\right]dx + \left[2\frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2)\right]dy. \otimes$$

**Пример 4.1.18.** Найти дифференциал второго порядка функции

$$f = f(x + y, xy).$$

Р е ш е н и е. Обозначим $u = x + y$, $v = xy$. Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy)\cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy)\cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot x + \frac{\partial^{f2}}{\partial u \partial v}\cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot xy + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x+y)\frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot x + \frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v}\cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes$$

Пусть функция $u = f(x, y)$ задана ***параметрическим способом***, то есть, с помощью формул

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Тогда функция $u$ является функцией одного переменного $t$:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке $t$, то есть, существуют производные

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}(t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt}(t).$$

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема, то придавая переменной $t$ приращение $\Delta t$, видим, что все функции получат соответствующие приращения $\Delta x$, $\Delta y$ и $\Delta u$, причём по определению дифференцируемости

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \beta = 0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$, то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

**Пример 4.1.19.** Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = x^3 - x^2 y,\ x = 1 - t^2,\ y = t^4.$$

Р е ш е н и е. Находим непосредственно:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(3x^2 - 2xy\right)2t + \left(-x^2\right)4t^3 =$$

$$= 4t^7 + 2t^6 + 8t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 2t\,. \otimes$$

**Пример 4.1.20.** Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \ln\frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sin\left(x_1 + x_2 + x_3\right),$$

$$x_1 = a\sin t,\ x_2 = b\cos t,\ x_3 = ce^{-kt},$$

где $a, b, c, k$ – некоторые постоянные.

**Пример 4.1.21.** Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ для функции $z = x^3 e^y$, если

$$x = ts,\ y = t^2 - s^2.$$

Р е ш е н и е.

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=e^{t^2-s^2}t^2s^3\left(3+2t^2\right).$$

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=e^{t^2-s^2}t^3s^2\left(3-2s^2\right).\otimes$$

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ ***задана неявно посредством уравнения***

$$F\left(x,\,y\right)=0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,\,y\right)+\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

где учтено, что $\frac{dx}{dx}=1$. Если $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)\neq 0$, то получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,\,y\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F\left(x,\,y,\,u\right)=0$$

задаёт функцию двух переменных $u=\varphi\left(x,\,y\right)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

**Пример 4.1.22.** Найти частные производные функции $z=z\left(x,\,y\right)$, заданной неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1=0.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$F\left(x,\,y,\,z\right)=x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y; \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y - 4; \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x+y}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2-x-y}{z}. \otimes$$

## Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

### Предварительные сведения

Пусть $f : M \to f(M)$ – некоторая функция n переменных, дифференцируемая в области $M \subset R^n$, а $N_0$ и $N$ – точки множества её определения. Тогда **производной по направлению** вектора $\vec{N_0N} = t\vec{h}$, где $t \in R^+ \bigcup \{0\}$, в точке $N_0$ (с радиус-вектором $\vec{x}_0$) функции $f$ называется правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0+0} \frac{f\left(\vec{x}_0 + t\vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right)}{t}.$$

**Градиентом функции** $f : M \to f(M)$ **в точке** $\vec{x}_0 \in M$ называется вектор, имеющий в каноническом базисе пространства $R^n$ координаты $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то есть вектор

$$\vec{\operatorname{grad}} f\left(\vec{x}_0\right) \equiv \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_k.$$

Связь производной по направлению и градиента даётся формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right) = \left(\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right), \vec{h}\right) = \left\|\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)\right\| \cdot \left\|\vec{h}\right\| \cdot \cos\left\{\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right), \vec{N_0N}\right\} =$$

$$= \left\|\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)\right\| \cdot \cos\left\{\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right), \vec{N_0N}\right\}.$$

Внутренняя точка $\vec{x}_0 \in M$ называется **точкой локального минимума** (**точкой локального максимума**) функции $f$, если существует окрестность $U\left(\vec{x}_0\right)$ такая, что $\left(\forall \vec{x} \in U\left(\vec{x}_0\right)\right)$ выполняется неравенство

$$f\left(\vec{x}_0\right) \le f\left(\vec{x}\right) \left(f\left(\vec{x}_0\right) \ge f\left(\vec{x}\right)\right).$$

Справедлива теорема, позволяющая исследовать на экстремум функцию двух переменных.

Пусть функция $f : M \to f(M),\ M \subset R^2,\ f(M) \subset R^1$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in M$ и удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0}.$$

Составим определитель следующего вида

$$D\left(\vec{x}_0\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\vec{x}_0\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\vec{x}_0\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\vec{x}_0\right) \end{vmatrix}.$$

Тогда в точке $\vec{x}_0$ функция $f$:

1) имеет локальный минимум, если $D\left(\vec{x}_0\right) > 0$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) > 0$;

2) имеет локальный максимум, если $D\left(\vec{x}_0\right) > 0$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) < 0$;

3) не имеет экстремума, если $D\left(\vec{x}_0\right) < 0$.

**Примеры с решением**

**Пример 4.2.1.** Найти $\vec{grad}\, f$ и $\left\|\vec{grad}\, f\right\|$ для функции, определённой формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке $M_0(1; -1; 2)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = -4.$$

Теперь имеем:

$$\vec{grad}\, f(M_0) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\left\| \vec{grad}\, f \right\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}. \otimes$$

**Пример 4.2.2.** Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M_0(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, где $M(2; 4; -3)$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\vec{M_0M} : \vec{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке $M_0(1; 2; -1)$:

$$\vec{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3 = (2x - 2z)\vec{e}_1 + 2y\,\vec{e}_2 - 2x\,\vec{e}_3,$$

$$\vec{grad}\, u(M_0) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора $\vec{M_0M}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{M_0M}}(M_0)=\frac{\left(\vec{grad}\,u\Big|_M,\vec{M_0M}\right)}{\left\|\vec{M_0M}\right\|}=\frac{4\cdot1+4\cdot2+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$=\frac{4+8+4}{\sqrt{9}}=\frac{16}{3}.\otimes$$

**Пример 4.2.3.** Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой: $z(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases}z'_x=0,\\ z'_y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=2,\\ x+2y=3.\end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\ 4/3\end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3>0.$$

Точка $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)>0,$$

то точка $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{7}{3}.\ \otimes$$

**Пример 4.2.4.** Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x,\,y)=x^2+y^2+\frac{(x+2y-16)^2}{2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=16, \\ x+3y=16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=14>0.$$

Точка $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$ является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)>0,$$

то точка $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$z(M_0)\approx 36{,}6$. $\otimes$

## Практическое занятие 3. Числовые ряды

### Предварительные сведения

Пусть $(a_k)=a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ – некоторая последовательность действительных чисел $(a_k \in R,\ k=1, 2, 3, \ldots)$. Сопоставим из элементов этой последовательности новую последовательность, определив её члены так:

$s_1 = a_1,$

$s_2 = a_1 + a_2,$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

……,

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$

……..

Формула для общего члена получившейся последовательности имеет, очевидно, вид

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Последовательность $(s_n)$ определяет **числовой ряд**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + a_{n+1} + \ldots \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и называется последовательностью частичных сумм числового ряда.

Бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся** (**расходящимся**), если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Если ряд сходится, то его **суммой** называется число

$$S \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Необходимое условие сходимости числового ряда даётся следующей теоремой.

Последовательность $(a_k)$ членов сходящегося числового ряда сходится к нулю.

**Геометрическая прогрессия** $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ при $|q|<1$ сходится к

$$S = \frac{1}{1-q},$$

а при $|q| \geq 1$ расходится.

**Гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с положительными членами.

Если для почти всех $k$ выполняется неравенство $a_k \leq b_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **минорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – **мажорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Признак сравнения**. Каждая миноранта сходящегося ряда сходится, а каждая мажоранта расходящегося ряда расходится.

**Признак Даламбера**. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с положительными членами. Если существует такое число $q \in (0,1)$, что для почти всех номеров $k$ выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, то ряд сходится. Если же для почти всех $k$ выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, то ряд расходится.

Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

где $(a_k)$ – последовательность положительных чисел, называется **знакочередующимся рядом**.

Знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

сходится в том и только в том случае, если последовательность из абсолютных величин его членов монотонно убывает и сходится к нулю.

### Примеры с решением

**Пример 4.3.1.** Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots.$$

Р е ш е н и е. Общий член ряда равен

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\ldots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

**Пример 4.3.2.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right] = \frac{1}{2}. \otimes$$

**Пример 4.3.3.** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots.$$

Р е ш е н и е. Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства $q = \frac{1}{2} < 1$ сходится и имеет сумму

$$S = \frac{1}{1-q} = 2. \otimes$$

**Пример 4.3.4.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. ⊗

**Пример 4.3.5.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. ⊗

**Пример 4.3.6.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

Р е ш е н и е. Для почти всех $n$ выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1+2^{2n}}<\frac{2^n}{2^{2n}}=\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ является минорантой ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ по признаку сравнения сходится. ⊗

**Пример 4.3.7.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям: $(\forall n\in N)$

$$-1\le\sin n\le 1;\ 1<2+\sin n<3;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}>0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1}<2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}<\frac{2n^{3/2}}{n^2}=\frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{1/2}}$ является так называемым обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^{\alpha}}$, который при $0<\alpha<1$ расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1}>\sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}\ge\frac{n^{3/2}}{3n^2}=\frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^{1/2}}$ расходится, то и исходный ряд также расходится.

$\otimes$

**Пример 4.3.8.** Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n},a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех $n$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Поэтому ряд сходится по признаку Даламбера. $\otimes$

**Пример 4.3.9.** Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n=\frac{n^n}{n!},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех $n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера расходится. $\otimes$

**Пример 4.3.10.** Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots.$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится. ⊗

**Пример 4.3.11.** Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена: $\Delta<0{,}2$. ⊗

**Пример 4.3.12.** Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Для всех $n$, очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}<1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно. ⊗

**Пример 4.3.13.** Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Р е ш е н и е. Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех $n$ (начиная с $n=2$) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно. ⊗

## Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

### Предварительные сведения

Последовательность функций $(f_n)$ называется сходящейся на множестве $M$ **поточечно** (или **в обычном смысле**), если для **каждой точки** $x_0 \in M$ сходится числовая последовательность $(f_n(x_0))$.

**Предельной функцией,** или **пределом** $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ сходящейся поточечно последовательности функций $(f_n)$, называется функция $f$, определённая на множестве $M$ условием: $(\forall x_0 \in M)\ f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Таким образом, для поточечно сходящейся функциональной последовательности неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется для каждой точки $(\forall x_0 \in M)$ и для своего $\varepsilon$, то есть $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$.

Функциональная последовательность $(f_n)$ называется **равномерно сходящейся на множестве** $M$ **к предельной функции** $f$, если для произвольного положительного числа $\varepsilon$ и **для**

**любой точки** $x \in M$ найдётся такой номер $n_0$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, для равномерно сходящейся на множестве $M$ функциональной последовательности неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех $x \in M$ и, следовательно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k : M \to f_k(M)$ называется **сходящимся на множестве** $M$ **поточечно или в обычном смысле**, если на этом множестве поточечно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left( \sum_{k=1}^{n} f_k \right).$$

Функция $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ называется **суммой ряда** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, и при этом пишут

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k .$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ называется **равномерно сходящимся на множестве** $M \subset R^1$, если на $M$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left( \sum_{k=1}^{n} f_k \right).$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, где $f_k : M \to f_k(M)$ – функциональный ряд. Тогда если $|f_k(x)| \leq a_k$ для всех точек $x \in M$ и для почти всех номеров $k \in N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на множестве $M$ абсолютно и равномерно.

Функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ называется **степенным рядом с центром в точке** $x_0$. Числа $a_k$ называются **коэффициентами** степенного ряда.

**Первая теорема Абеля.** Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

сходится в некоторой точке $x_1$, то он сходится абсолютно и равномерно во всякой точке $x$, удовлетворяющей условию $|x-x_0|<|x_1-x_0|$.

Кроме этого, для каждой такой точки $x$ существуют такие числа $S>0$, $0<q<1$, что для всех номеров $k$ справедливо неравенство

$$|a_k|\cdot|x-x_0|^k \le Sq^k.$$

Причём, если $x\neq x_0$, $x_1\neq x_0$ то $q=\dfrac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}$, а число $S$ от $x$ не зависит.

**Вторая теорема Абеля.** Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$$

в точке $x_1$ не сходится абсолютно (например, расходится), то он расходится в каждой точке $x$, удовлетворяющей условию

$$|x-x_0|>|x_1-x_0|.$$

Число

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

называется **радиусом сходимости**, а открытое множество $M_r=\{x:|x-x_0|<r\}$ – **множеством (интервалом) сходимости степенного ряда** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

### Примеры с решением

**Пример 4.4.1.** Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+\ldots$$

в точках $x_1=0$ и $x_2=1$.

Р е ш е н и е. 1) В точке $x_1=0$ имеем

$$2+\frac{1}{3}\cdot2^2+\frac{1}{5}\cdot2^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot2^n+\ldots.$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{2^n}{2n-1};\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+1};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2^n}=2\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=2\cdot\frac{2n+1-2}{2n+1}=2\cdot\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)>1.$$

Поэтому в точке $x_1=0$ ряд расходится.

2) В точке $x_2=1$ имеем

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots.$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{1}{3^n\cdot(2n-1)};\ u_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n+1-2}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<1.$$

Поэтому в точке $x_2=1$ ряд сходится. $\otimes$

**Пример 4.4.2.** Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. В точке $x=0$ не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.

1) На промежутке $(-\infty,0)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{-(n-1)x}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)\cdot(-x)}=\{-x=t\}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)t},$$

где $t\in(0,\infty)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n-1)t}\neq 0$. Снова не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд на промежутке $(-\infty,0)$ расходится.

2) На промежутке $(0,\infty)$ выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}}=\frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}.$$

На $(0,\infty)$ всегда $\dfrac{1}{e^x}<1$. Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1+\frac{1}{e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{e^x}\right)^n+\ldots.$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{e^x}<1$. Поэтому сумма ряда равна

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x-1}. \otimes$$

**Пример 4.4.3.** Исследовать сходимость степенного ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1<x<1.$

Если $x=1$, имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Если $x=-1$, то получаем ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots.$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $x\in[-1,1)$, который можно задать двойным неравенством $-1\le x<1. \otimes$

**Пример 4.4.4.** Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{n^2};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

На левом конце промежутка сходимости $x = 1$ имеем ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\ldots.$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости $x = 3$ имеем ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.$$

Этот ряд сходится, так как при $p > 1$ сходится ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $1 \le x \le 3$. $\otimes$

**Пример 4.4.5.** Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots+n!(x-5)^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда

$$a_n = n!;\ a_{n+1} = (n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при $x-5=0$, то есть в точке $x = 5$. $\otimes$

**Пример 4.4.6.** Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty,\infty)$.

Р е ш е н и е. Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}=-\frac{1}{x^4+1^2}+\frac{2}{x^4+2^2}-\frac{3}{x^4+3^2}+\ldots.$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1|=\frac{1}{x^4+1}>|u_2|=\frac{2}{x^4+4}>|u_3|=\frac{3}{x^4+9}>\ldots.$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{x^2}{n}\right)^2+1}=0.$$

Ряд сходится для любых $x\in(-\infty,\infty)$.

Для остатка ряда имеем

$$|r_n|=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right|<|u_{m+1}|=\left|\frac{(-1)^{(m+1)}\cdot(m+1)}{x^4+(m+1)^2}\right|<\frac{1}{m+1},$$

так как $x^4>0$. Рассмотрим неравенство $\dfrac{1}{m+1}<\varepsilon$. Из этого неравенства получаем $m>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. Если теперь мы выберем $m_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, то $(\forall m\ge m_0)$ получаем $|r_m|<\dfrac{1}{m+1}<\varepsilon$. Таким образом, ряд сходится на $(-\infty,\infty)$ независимо от $x$, то есть равномерно по $x\in(-\infty,\infty)$. $\otimes$

Ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

для бесконечно дифференцируемой функции $f: M \to f(M)$, вне зависимости от его сходимости и суммы, называется **рядом Тейлора** для этой функции. При $x_0 = 0$ ряд называется **рядом Маклорена**.

**Пример 4.4.7.** Разложить функцию

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням $x$ $(x_0 = 0)$ в ряд Тейлора.

Р е ш е н и е. Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ t\in(-1,1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}},\ x\in(-2,2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости:

$$M=(-1,1)\cap(-2,2)=(-1,1).\ \otimes$$

**Пример 4.4.8.** Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой $f(x)=\sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x)=\sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x)=2\cdot\cos 2x=2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x)=-4\cdot\sin 2x=2^2\cdot\sin\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x)=-8\cdot\cos 2x=2^3\cdot\sin\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right);$$

……;

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\cdot\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x)=2^{n}\cdot\sin\left[2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

……

Вычисляем производные в точке $x=0$:

$$f^{(0)}(0)=0;$$

$$f^{(1)}(0)=0;$$

$$f^{(2)}(0)=2;$$

$$f^{(3)}(0)=0;$$

$$f^{(4)}(0)=2^3;$$

$$f^{(5)}(0)=0;$$

$$f^{(6)}(0)=2^5;$$

……

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \frac{2^n \cdot \sin\left(2\cdot\xi + \frac{n\cdot\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\sin\left(2\cdot\xi + \frac{n\cdot\pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,\ \left|\sin\left(2\cdot\xi + \frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right| \le 1,$$

получаем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Поэтому функция $f(x) = \sin^2 x$ может быть разложена в ряд Маклорена

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}\cdot x^2 - \frac{2^3}{4!}\cdot x^4 + \frac{2^5}{6!}\cdot x^6 - \frac{2^7}{8!}\cdot x^8 + \ldots$$

на любом промежутке $[-b, b]$. $\otimes$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

1) $u(x, y) = x^3 \sin y + y^4$; 2) $u(x, y) = x^2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

2. Найти частные производные в заданных точках:

1) $u(x, y) = \frac{1-xy}{1+xy}$, $A(0; 1)$;

2) $u(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$, $A(1; 1)$;

3) $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ , $A(\sqrt{2}; 1)$.

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $u = \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$;

3) $u = \ln\sin(x_1 - 2x_2)$; 4) $u = x^2 yz^4$; 5) $u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3)$.

4. Пусть функция задана формулой $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$. Вычислить $df(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) = \left(-1; \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

1) $u = \frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $dx_1 = \frac{1}{2}$, $dx_2 = -\frac{1}{3}$;

2) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}3$, $dz = 0{,}2$.

6. Вычислить приближённое значение выражения $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$.

7. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

8. Найти $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$, если $f = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

9. Функция задана уравнением $e^u = \cos x \cos y$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{3},$$

в точке $M_0(1; 2; 3)$ по направлению вектора $\vec{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$$

32*). Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$

33*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге $x^2 + y^2 \le 1.$

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$; 2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$;

3) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^2(2 + \sin n)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot\left(1+2^n\right)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{n^4+3}{n^4+2}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{3^n+n}{7^n+2n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{2n^3}}-1\right)$.

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n!)^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(n^5-1\right)}{n!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$.

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

1) $\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3;$

2) $\frac{1!}{1}\left(x^2-4x+6\right)+\frac{2!}{2^2}\left(x^2-4x+6\right)^2+\ldots+\frac{n!}{n^2}\left(x^2-4x+6\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3.$

41. Найти область сходимости функционального ряда

1) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)^n}+\ldots;$

2) $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots;$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left(x^2-6x+10\right)^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\left(x^2-5x+9\right)^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2\left(x^2+3\right)^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(x^2-4x+8\right)^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\left(x^2-2x+6\right)^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^x}$.

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$;

2) $1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\ldots+\frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}}+\ldots$;

3) $2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+\ldots+\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}+\ldots$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{\left(2n^3+3n\right)4^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}$.

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

1) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$; 2) $f(x)=\frac{x}{3+2x}$;

3) $f(x)=\sqrt[4]{16+x}$; 4) $f(x)=2^x$;

5) $f(x)=\cos^2 x$; 6) $f(x)=e^{-x^2}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ по степеням $x-2$; 8) $f(x)=3^x$;

9) $f(x)=e^{-2x}$; 10) $f(x)=\sqrt{x+2}$.

# ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## Практическое занятие 1. Базисные векторные поля

### Предварительные сведения

**Регулярной системой координат** в области $D\subset E^n$ называется система гладких функций

$$\begin{cases} q^1=q^1\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\\ q^2=q^2\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ q^n=q^n\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right), \end{cases},$$

задающих взаимно однозначное (биективное) отображение области $G\subset R^n$ на область $D\subset E^n$, и удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial q^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial q^1}{\partial x^n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \dfrac{\partial q^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial q^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial q^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial q^n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial q^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial q^n} \end{vmatrix}\neq 0$$

во всех точках области $D$.

Если радиус-вектор является функцией декартовых координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}\left(x^1, x^2, x^3\right) = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^3} dx^3 \equiv dx^j \vec{e}_j .$$

Если радиус-вектор является функцией криволинейных координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}\left(q^1, q^2, q^3\right) =$$

$$= x^1\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_1 + x^2\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_2 + x^3\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_3,$$

или в скалярной форме

$$\begin{cases} x^1 = x^1\left(q^1, q^2, q^3\right), \\ x^2 = x^2\left(q^1, q^2, q^3\right), \\ x^3 = x^3\left(q^1, q^2, q^3\right), \end{cases}$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} dq^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^3} dq^3 \equiv dq^j \vec{g}_j,$$

где по определению введены новые векторы

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j},$$

**которые зависят от криволинейных координат** и являются, следовательно, не векторами, а **векторными полями**.

Можно показать, что векторные поля $\vec{g}_k$ при выполнении приведённого выше условия регулярности отображения, образуют базис пространства $E^3$. Эти поля называются **натуральными базисными векторными полями**.

**Взаимные базисные векторные поля** определяются по формуле

$$\vec{g}^{\,i} \overset{def}{=} \nabla q^i,$$

или формулами

$$\vec{g}^{\,i} \overset{def}{=} g^{ij} \vec{g}_j,$$

где $g^{ij}$ – некоторая, пока произвольная невырожденная симметрическая матрица.

**Полярные координаты** $\left\{q^1; q^2\right\} \equiv \left\{r; \varphi\right\}$ **на плоскости** $R^2$ задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^2\{r;\varphi\} \to R^2\{x^1; x^2\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Координата $r$ называется **полярным радиусом**, а координата $\varphi$ – **полярным углом**. Якобиан этого преобразования равен:

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r,\varphi)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

**Цилиндрические координаты в пространстве** $R^3$ задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r;\varphi;h\} \to R^3\{x^1; x^2; x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \\ x^3 = h. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \left\{\{r;\varphi;h\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < h < +\infty\right\}.$$

Якобиан преобразования

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r,\varphi,h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

***Сферические координаты*** в пространстве $R^3$ задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r,\varphi,\theta\} \to R^3\{x^1, x^2, x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид (рисунок 1.3)

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ x^3 = r\cos\theta. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \left\{\{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < \theta \le \pi\right\}.$$

Якобиан преобразования (1.35)

$$\det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, \theta)}\right) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\sin\theta.$$

**Примеры с решением**

**Пример 5.1.1.** Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2,\ \vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi. \qquad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = A_{\cdot j}^{i\cdot}\vec{e}_i. \qquad (4)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (5)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_{\varphi}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial\varphi}\equiv\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x^{2}}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_{1}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_{2}=$$

$$=-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}. \qquad (6)$$

Так как

$$\left\|\vec{g}_{r}\right\|=\sqrt{\left(\vec{g}_{r},\vec{g}_{r}\right)}=\sqrt{\cos^{2}\varphi+\sin^{2}\varphi}=1,$$

то базисное векторное поля $\vec{g}_{r}$ нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r\rangle}\equiv\vec{g}_{r}=\cos\varphi\cdot\vec{e}_{1}+\sin\varphi\cdot\vec{e}_{2}. \qquad (7)$$

Векторное поле $\vec{g}_{\varphi}$ не нормировано, а его норма

$$\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|=\sqrt{\left(\vec{g}_{\varphi},\vec{g}_{\varphi}\right)}=\sqrt{\left(-r\sin\varphi\right)^{2}+\left(r\cos\varphi\right)^{2}}=r. \qquad (8)$$

Орт векторного поля $\vec{g}_{\varphi}$ равен

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}=\frac{1}{\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|}\vec{g}_{\varphi}=\frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}\right)=$$

$$=-\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}. \qquad (9)$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу. $\otimes$

**Пример 5.1.2.** В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^{1}(t)=r(t)\cdot\cos\varphi(t),\ x^{2}(t)=r(t)\cdot\sin\varphi(t), \qquad (1)$$

где $t$ – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Р е ш е н и е. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r\sin\varphi \cdot \vec{e}_2. \qquad (2)$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2. \qquad (3)$$

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$v_r \equiv \Pr_{\vec{e}_r}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle r\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\sin\varphi = \frac{dr}{dt}, \qquad (4)$$

$$v_\varphi \equiv \Pr_{\vec{e}_\varphi}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle\varphi\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\cos\varphi =$$

$$= r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (5)$$

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{g}_{\langle r\rangle} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}. \qquad (6)$$

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt} = -\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 - \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle} + \frac{dr}{dt}\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right) +$$

$$+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} +$$

$$+r\frac{d\varphi}{dt}\left(-\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 - \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right) =$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle} + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle} + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}. \otimes \qquad (7)$$

**Пример 5.1.3.** Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r = t\cdot\sin 3t, \\ \varphi = t^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 1\,c$. Радиус дан в метрах.

Р е ш е н и е. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0{,}141;\ \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t\cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \qquad (2)$$

При $t = 1\,c$ имеем:

$$\dot{r}(1) = -2{,}829,\ \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2{,}829\ \frac{м}{c};\ v_\varphi(1) = r(1)\cdot\dot{\varphi}(1) = 0{,}423\ \frac{м}{c}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2{,}860\ \frac{м}{c}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1{,}883\ \frac{м}{c};\ v^2(1) = -2{,}148\ \frac{м}{c}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2} = 2{,}85\ \frac{м}{c}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6\cos 3t - 9t\sin 3t\,;\ \ddot{\varphi} = 6t\,.$$

При $t = 1$ имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9{,}74;\ \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1) = \ddot{r}(1) - r(1)\dot{\varphi}^2(1) = -11{,}01\ \frac{м}{c^2};$$

$$w_\varphi(1) = r(1)\ddot{\varphi}(1) + 2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1) = -16{,}128\ \frac{м}{c^2}.$$

8) Норма ускорения

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 19{,}52\ \frac{м}{c^2}.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\sin\varphi \equiv w_r\cos\varphi - w_\varphi\sin\varphi;$$

$$w^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\cos\varphi = w_r\sin\varphi + w_\varphi\cos\varphi.$$

При $t = 1$ имеем:

$$w^1(1) = 7{,}602;\ w^2(1) = -17{,}95.$$

Проверка:

$$w = \sqrt{\left(w^1\right)^2 + \left(w^2\right)^2} = 19{,}49\,.\ \otimes$$

**Пример 5.1.4.** Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r = 22\cdot\frac{1 - \dfrac{t^2}{121}}{t};\ \ \varphi = \arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 9\,c$. Радиус дан в метрах.

**Ответ:**

| $r$ | $\dot{r}$ | $\varphi$ | $\dot{\varphi}$ | $v_r$ | $v_\varphi$ | $v$ | $v^1$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| м | м/с | рад | рад/сек | | | м/с | | |
| 0,81 | -0,45 | 0,61 | -0,16 | -0,45 | -0,13 | 0,47 | -0,3 | -0,37 |

**Пример 5.1.5.** Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \\ x^3 = h, \end{cases} \det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{\{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\right\}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\varphi\,\vec{e}_2 + h\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j}\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r}h\cdot\vec{e}_3 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_r$

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\varphi} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial\varphi}h\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= -r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_\varphi$

$$\left\|\vec{g}_\varphi\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi\right)} = \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} = r,$$

то поле $\vec{g}_\varphi$ ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\varphi\right\|}\vec{g}_\varphi = \frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2\right) =$$

$$= -\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + \cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_h$ имеем:

$$\vec{g}_h = \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial h} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial h} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial h}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial h}h\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3.$$

Таким образом, базисное векторное поле $\vec{g}_h$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h\rangle} = \vec{e}_3. \otimes$$

**Пример 5.1.6.** Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ x^3 = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, \theta)}\right) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\sin\theta,$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{\{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < \theta \le \pi\right\}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cdot\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\cdot\sin\varphi\,\vec{e}_2 + r\cos\theta\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\theta\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\theta\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\theta)\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= -r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_\varphi\right\| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta} = r\sin\theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\varphi\right\|}\vec{g}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_2\right) =$$

$$= -\sin\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\theta$ имеем:

$$\vec{g}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)\cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)\cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\right)\cdot \vec{e}_3 =$$

$$= r\cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - r\sin\theta \cdot \vec{e}_3.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_\theta\right\| = \sqrt{\left(r\cos\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(r\cos\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(-r\sin\theta\right)^2} = r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\theta\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\theta\right\|}\vec{g}_\theta = \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - r\sin\theta \cdot \vec{e}_3\right) =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - \sin\theta \cdot \vec{e}_3. \otimes$$

## Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

### Предварительные сведения

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по параметризованному замкнутому пути $\hat{W}\left(\overline{J}\right),\ \overline{J} = [\alpha, \beta]$

$$\vec{x}\left(t\right) = \sum_{k=1}^{3} w_k\left(t\right)\vec{e}_k$$

имеет вид:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(\vec{x}(t)\right)dl \equiv \int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(x_1, x_2, x_3\right)dl = \int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(\vec{x}(t)\right)\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}(t)\right\|dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(w_1(t), w_2(t), w_3(t)\right)\cdot\sqrt{\left[\frac{dw_1(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dw_2(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dw_3(t)}{dt}\right]^2}\,dt.$$

В случае естественной параметризации

$$y = y(x),\ z = z(x),\ x \in \overline{J}$$

формула принимает вид

$$\int\limits_{L_{a,b}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x), z(x))\cdot\sqrt{1 + \left[\frac{dy(x)}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2}\,dx,$$

где $a = x(\alpha),\ b = x(\beta)$/

Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода для общего случая параметризации имеет вид:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\beta}} F_1\left(\vec{x}(t)\right)dx^1 + F_2\left(\vec{x}(t)\right)dx^2 + F_3\left(\vec{x}(t)\right)dx^3 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Bigg[ F_1\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_1(t)}{dt} + F_2\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_2(t)}{dt} +$$

$$+ F_3\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_3(t)}{dt}\Bigg]dt.$$

Если путь задан естественной параметризацией

$$y = y(x),\ z = z(x),$$

то есть параметром является переменная $x$, формула переписывается так:

$$I_{W_{a,b}} = \int\limits_{W_{a,b}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{a}^{b}\Bigg[ P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x))\frac{dy(x)}{dx} + R(x, y(x), z(x))\frac{dz(x)}{dx}\Bigg]dx,$$

где

$$a = x(\alpha),\ b = x(\beta)$$

– пределы изменения переменной $x$ и учтено, что $\frac{dx}{dx} = 1$. Аналогичные формулы можно записать и в тех случаях, когда в качестве параметра рассматривается переменная $y$ или $z$.

## Примеры с решением

**Пример 6.2.1.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x + y)dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками $A(0, 0, R)$, $B\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности:

$$x = t,\ y = t,\ z = \sqrt{R^2 - 2t^2}\ ,\ 0 \le t \le \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x, y, z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2}\, dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x + y)dl = \int_0^{R/2} 2t \frac{\sqrt{2}Rdt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2\left(\sqrt{2} - 1\right). \otimes$$

**Пример 6.2.2.** Найти массу $1/4$ окружности

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = R^2,$$

если $\rho(x_1, x_2) = x_2$ и $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t, \\ x_2 = R\sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$M = \int\limits_W \rho(x_1, x_2)dl =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t dt = R^2. \otimes$$

**Пример 6.2.3.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_W (x+y)dx - xdy,$$

где путь $W$ – отрезок прямой, соединяющий точки $M_0(0;0)$ и $M_1(4;2)$.

Р е ш е н и е. Используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода для случая плоского пути:

$$I_{W_{a,b}} = \int\limits_{W_{a,b}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left[ P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x))\frac{dy(x)}{dx} \right] dx.$$

Здесь

$$\vec{M_0M_1} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{M_0M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\vec{M_0M} = t\cdot\vec{M_0M_1},\ \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases}\ y = \frac{1}{2}x,\ x \in [0,4].$$

Имеем:

$$\int\limits_W (x+y)dx - xdy = \int\limits_0^4 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x\right)dx = \int\limits_0^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8. \otimes$$

**Пример 6.2.4.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_W x^2 ydx + y^2 xdy$$

по пути с параметризацией $x = t,\ y = t^3,\ t \in [0,1]$.

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\beta}} F_1\left(\vec{x}\right)dx_1 + F_2\left(\vec{x}\right)dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[ F_1\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)\frac{dx_2(t)}{dt}\right]dt$$

Получаем:

$$\int\limits_{W} x^2 y dx + y^2 x dy = \int\limits_{0}^{1}\left(t^5 + 3t^9\right)dt = \left(\frac{t^6}{6} + 3\frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

**Пример 6.2.5.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\hat{W}}\left({x_2}^2 - {x_3}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - {x_1}^2dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, начальной и конечными точками $M_0(0;0;0)$, $M_1(1;1;1)$ соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$I_{W_{a,b}} = \int\limits_{W_{a,b}} F_1\left(\vec{x}\right)dx_1 + F_2\left(\vec{x}\right)dx_2 + F_3\left(\vec{x}\right)dx_3 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[ F_1\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)\frac{dx_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)\frac{dx_3}{dt}(t)\right]dt.$$

Пределы изменения параметра $t \in [0, 1]$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Подстановка данных задачи даёт:

$$\int\limits_{\hat{W}}\left({x_2}^2 - {x_3}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - {x_1}^2dx_3 = \int\limits_{0}^{1}\left[\left(t^4 - t^6\right) + 4t^6 - 3t^4\right]dt =$$

$$= \int_0^1 \left(3t^6 - 2t^4\right)dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{35}. \otimes$$

**Пример 6.2.6.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x+y)dx + (x-y)dy,$$

где $W$ – окружность с уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$

Р е ш е н и е. Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t) = (1+2\cos t)\vec{e}_1 + (1+2\sin t)\vec{e}_2,$$
$$0 \le t \le 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1\left(\vec{x}\right)dx + F_2\left(\vec{x}\right)dy = \int_\alpha^\beta \left[F_1\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dx(t)}{dt} + F_2\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}\right]dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\sin t,\ \frac{dy(t)}{dt} = 2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x+y)dx + (x-y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t\cdot\cos t + 4\cos 2t)dt = 0. \otimes$$

## Практическое занятие 3. Кратные интегралы

### Предварительные сведения

Формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

Пусть

$$P = \left\{(x;\, y) \subset R^2 : a \le x \le b;\, c \le y \le d\right\}$$

– замкнутый прямоугольник, $f : P \to R^1$ – непрерывная функция двух переменных $x,\ y$ и

$$\iint\limits_P f(x,\ y)d\mu \equiv \iint\limits_P f(x,\ y)dxdy$$

– двойной интеграл от функции $f : P \to R^1$ по прямоугольнику $P$. Тогда, если для каждой точки $x \in [a,\ b]$ существует определённый интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,\ y)dy,$$

то существует и **повторный интеграл** от функции $f(x,\ y)$ вида

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x,\ y)dy\right),$$

причём справедливо равенство:

$$\iint\limits_P f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x,\ y)dy\right).$$

Таким образом, формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \iint\limits_P f(x,\ y)dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,\ y)dy\right)dx \equiv \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d dyf(x,\ y)\right).$$

Формула вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат через последовательное вычисление трёх (одномерных) определённых интегралов имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,\ y)}^{z=u_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz.$$

Формула вычисления двойного интеграла в криволинейной системе координат имеет следующий вид

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} f(\varphi(\xi,\ \eta),\ \psi(\xi,\ \eta))\left|\det\left(\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(\xi,\ \eta)}\right)\right|d\xi d\eta,$$

где положено

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi,\ \eta), \\ y = \psi(\xi,\ \eta), \end{cases} \left|\det\left(\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(\xi,\ \eta)}\right)\right| \equiv \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{pmatrix}\right|.$$

В частности, вычисление двойного интеграла в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

производится по формуле

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

где якобиан

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right) = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r.$$

Формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$x = r\cdot\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\varphi,\ z = z,\ \begin{pmatrix}\xi \\ \eta \\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r \\ \varphi \\ z\end{pmatrix},$$

где

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,$$

имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxddz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} rdr \int\limits_{z_1}^{z_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz,$$

где якобиан

$$J = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = r.$$

Аналогично, Формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \begin{pmatrix}\xi \\ \eta \\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r \\ \varphi \\ \theta\end{pmatrix},$$

где

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f\left(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta\right) r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi dr =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 f\left(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta\right) dr.$$

**Примеры с решением**

**Пример 6.3.1.** Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\, y) dy.$$

Р е ш е н и е. Область интегрирования $D$ ограничена линиями

$$x = -1,\; x = 1,\; y = -\sqrt{1-x^2},\; y = 1 - x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке $(0;\, 1)$, ветви параболы направлены вниз. Область $D$ представим объединением двух областей: области $D_1$, ограниченной ветвями параболы $x = \pm\sqrt{1-y}$ и прямыми линиями $y = 0$, $y = 1$; области $D_2$, ограниченной линиями $x = \pm\sqrt{1-y^2}$, $y = -1$, $y = 0$. Тогда имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\, y) dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x,\, y) dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,\, y) dx. \otimes$$

**Пример 6.3.2.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} x\ln y dx dy,$$

где $D = \{(x,\, y) : 0 \le x \le 4;\, 1 \le y \le e\}$.

Р е ш е н и е. Так как область $D$ является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y) dx dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,\, y) dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D x\ln y dxdy = \int\limits_0^4 xdx \int\limits_1^e \ln y dy = \left\{ \begin{matrix} u = \ln y, & du = \dfrac{dy}{y}, \\ dv = dy, & v = y. \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^4 xdx \left\{ y\ln y \Big|_1^e - \int\limits_1^e dy \right\} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \left\{ y\ln y \Big|_1^e - y\Big|_1^e \right\} = 8\cdot\left(e - e + 1\right) = 8. \otimes$$

**Пример 6.3.3.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x + 2y\right)dxdy$ по области $D$, ограниченной линиями $y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3.$

Р е ш е н и е. Область $D$ ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией $x = 2$, справа – вертикальной прямой линией $x = 3$, сверху – прямой линией $y = 2x$, снизу – прямой линией $y = x$. Область простая относительно оси $OY$, следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f\left(x,\, y\right)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\left(x,\, y\right)dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D \left(x + 2y\right)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} \left(x + 2y\right)dy = \int\limits_2^3 dx\left(xy + y^2\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= \int\limits_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2\right)dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes$$

**Пример 6.3.4.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(2x - y\right)dxdy$ по области $D$, ограниченной линиями $x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = x^2.$

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint\limits_D \left(2x - y\right)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} \left(2x - y\right)dy = \int\limits_1^2 dx\left(2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_1^2 \left( 2x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{10}. \otimes$$

**Пример 6.3.5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y - y^2,\ x + y = 6.$$

Р е ш е н и е. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x = 0, \\ x + y = 6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий: $A(4;\ 2),\ B(3;\ 3)$. Поэтому площадь фигуры равна

$$S \equiv \mu(D) = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left( x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_2^3 \left( -y^2 + 5y - 6 \right) dy = \left( -\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6}. \otimes$$

**Пример 6.3.6.** Найти массу пластины $D$ с поверхностной плотностью

$$\sigma(x,\ y) = 16x + \frac{9}{2}y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x = \frac{1}{4},\ y = 0,\ y^2 = 16x,\ y \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$x = \frac{1}{16}y^2,$$

то $x \geq 0$. Поэтому область $D$ можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4},\ 0 \leq y \leq 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D) = \iint_D \sigma(x,\ y) dxdy = \iint_D \left( 16x + \frac{9}{2}y^2 \right) dxdy =$$

$$= \int_0^{1/4} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2}y^2\right)dy = \int_0^{1/4} \left(16xy + \frac{3}{2}y^3\right)\Big|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160\int_0^{1/4} x^{3/2}dx = 2. \otimes$$

**Пример 6.3.7.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,$$

переходя к полярным координатам, где область $D$ – 1-я четверть круга

$$x^2 + y^2 \le a^2.$$

Р е ш е н и е. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega = \left\{(r;\varphi): 0 \le r \le a; 0 < \varphi\frac{\pi}{2}\right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_\Omega \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} r^3\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \otimes$$

**Пример 6.3.8.** Вычислить двойной интеграл $\iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, переходя к полярным координатам, если область $D$ – кольцо, заключённое между окружностями $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

Р е ш е н и е. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint_\Omega \ln r^2 rdrd\varphi = 2\iint_\Omega r\ln r drd\varphi =$$

$$= \left\{\Omega: 0 \le \varphi \le 2\pi; e \le r \le e^2\right\} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r\ln r dr = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln r, & du = \dfrac{dr}{r}, \\ dv = rdr, & v = \dfrac{r^2}{2}. \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2}\ln r \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} rdr \right\} = 2\int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4}e^2\left(3e^2 - 1\right) \right] d\varphi = \pi e^2\left(3e^2 - 1\right). \otimes$$

**Пример 6.3.9.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 4.$$

Р е ш е н и е. Тело ограничено кругом на плоскости $XOY$ с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)rdr = 16\int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi =$$

$$= 16\left[ \varphi - \frac{\sqrt{2}}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi) \right] \Big|_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes$$

**Пример 6.3.10.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D xdxdy,$$

где область $D$ ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0;\ y^2 - 8y + x^2 = 0;\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x;\ x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область $D$ неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2+x^2=4;\ (y-4)^2+x^2=16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты $(0;\ 2)$ и $(0;\ 4)$, а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область $D$ лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2+x^2\geq 4;\ (y-4)^2+x^2\leq 16.$$

Кроме этого, область $D$ лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси $OX$, то область $D$ лежит над прямой линией $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и справа от прямой линии $x=0$. Поэтому координаты точек области $D$ удовлетворяют неравенствам

$$y\geq\frac{x}{\sqrt{3}},\ x\geq 0.$$

Таким образом,

$$D=\begin{cases}(y-2)^2+x^2\geq 4,\\ (x;\ y):(y-4)^2+x^2\leq 16,\\ y\geq\frac{x}{\sqrt{3}},\ x\geq 0.\end{cases}$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint\limits_D xdxdy=\iint\limits_\Omega r\cos\varphi rdrd\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получаем

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \\ (r;\varphi): \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} (r\sin\varphi - 2)^2 + r^2\cos^2\varphi \geq 4, \\ (r\sin\varphi - 4)^2 + r^2\cos^2\varphi \leq 16, \\ r\sin\varphi \geq \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}},\ r\cos\varphi \geq 0. \end{array} \right.$$

Решение этих неравенств относительно $r$ и $\varphi$ имеет вид

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \\ (r;\varphi): \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \dfrac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 4\sin\varphi \leq r \leq 8\sin\varphi. \end{array} \right.$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint\limits_D x dx dy = \iint\limits_\Omega r\cos\varphi r dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

**Пример 6.3.11.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z) dx dy dz,$$

где область $V$ – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 1.$$

Р е ш е н и е. Используя формулу (1.50)

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dx dy dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

получаем:

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z) dx dy dz = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^1 (x - 2y + z) dz = -18. \otimes$$

**Пример 6.3.12.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz,$$

где область $V$ – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 2.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение плоскости

$$z = 2 - x - y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).

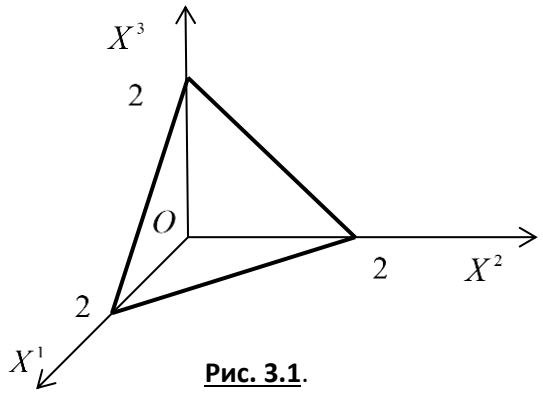



**Рис. 3.1**.

Применяем для решения формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$I = \iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} (x + y + z)dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left[ x \cdot z + y \cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int\limits_0^2 \left[ 2y - x \cdot \frac{y^2}{2} - y \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left( \frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[ \frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2. \otimes$$

**Пример 6.3.13.** Найти объём кругового цилиндра высоты $H$ с радиусом основания $R$.

Р е ш е н и е. Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^H dz = \pi R^2 H \ . \otimes$$

**Пример 6.3.14.** Найти объём шара радиуса $R$.

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x,\, y,\, z) = f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \ . \otimes$$

**Пример 6.3.15.** Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz,$$

где область $V$ ограничена поверхностями

$z = \dfrac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ (конус),

$z = \dfrac{11}{2} - x^2 - y^2$ (эллиптический параболоид).

Р е ш е н и е. Область $V$ – тело вращения вокруг оси $OZ$, поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz = \iiint\limits_\Omega \cos^2\varphi\, rdrd\varphi dz \, .$$

Задаём область $\Omega'$ неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2 \text{ и } \frac{11}{2} - r^2 \le z \le \frac{9}{2}r.$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение $r = 1$, следовательно, $0 \le r \le 1$. При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ \frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \cos^2\varphi\, r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \ldots = \pi. \otimes$$

## Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов

### Предварительные сведения

Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\int_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl, \qquad (1)$$

где $\vec{x}_0$ – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right)=\frac{dQ\left(\vec{x}\right)}{dl}.$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\iint_{D'} r^2\left(\varphi\right)drd\varphi.$$

Формула Грина имеет вид

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,\,y)dxdy=\oint_\Gamma P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy$$

**Примеры с решением**

**Пример 6.4.1.** Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной $L$, имеющей форму дуги окружности радиуса $r$, в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

Р е ш е н и е. Так как $\gamma\left(\vec{x}\right)=const$, то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_W\frac{\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl=$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_W \frac{x_0 - x}{\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_W \frac{y_0 - y}{\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl\right)\vec{e}_2\right]. \qquad (2)$$

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\cos t \cdot \vec{e}_1 + r\sin t \cdot \vec{e}_2 \qquad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \qquad (4)$$

– скалярная форма.

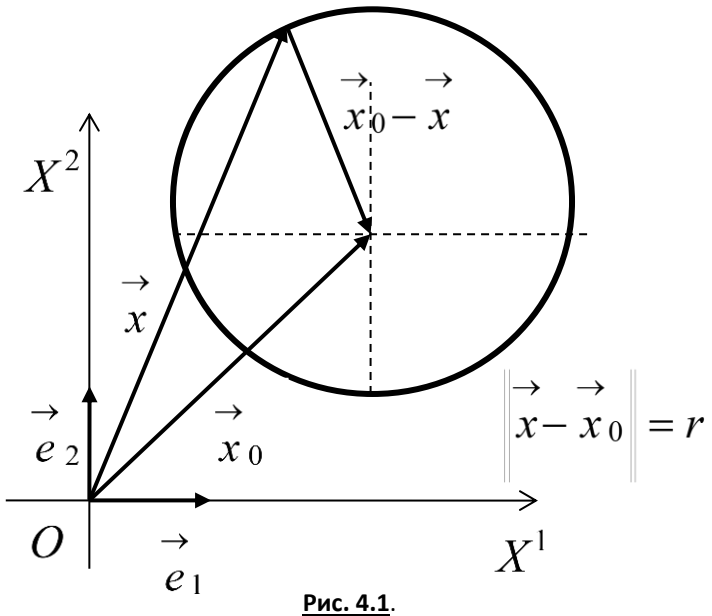



**Рис. 4.1**.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int\limits_W f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}(t)\right]^2}\, dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой $dl = \left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\| dt$. По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r\sin t \cdot \vec{e}_1 + r\cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = rdt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| = \left\| \vec{x}_0 - \vec{x} \right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int_W \frac{x_0 - x}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl\right)\vec{e}_1 + \left(\int_W \frac{y_0 - y}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r\cos t}{r^3} rdt\right)\vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r\sin t}{r^3} rdt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\cos t}{r} dt\right)\vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\sin t}{r} dt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos t dt\right)\vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin t dt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\sin t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_1 + \left(-\cos t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1 - \underbrace{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}_{=0}\vec{e}_2\right] = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1.$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\vec{e}_1. \qquad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E = \left\|\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)\right\| = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (7)$$

из которой следует:

1) $E = \dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ при $\alpha = \pi$;

2) $E = 0$ при $\alpha = 2\pi$. $\otimes$

**Пример 6.4.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ x = 0.$$

Р е ш е н и е. Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi.$$

При переходе к полярным координатам область $D$ перейдёт в область $D'$, ограниченную линиями

$$r = 4\cos\varphi,\ r = 8\cos\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна $S = \iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi$. В полярных координатах область $D'$ задаётся неравенствами

$$D'=\begin{cases} \dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 4\cos\varphi\le r\le 8\cos\varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S=\iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr.$$

Результат получается интегрированием:

$$S=\iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr=24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi=\left\{\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right\}=$$

$$=12\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi+6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d(2\varphi)=8\pi-\left(6+3\sqrt{3}\right).\otimes$$

**Пример 6.4.3.** Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 y dx+xy^2 dy, \qquad (1)$$

где $\Gamma$ – окружность с уравнением $x^2+y^2=R^2$, причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Формула Грина имеет вид:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,\,y)dxdy=\oint\limits_{\Gamma} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что $P(x,\,y)=-x^2 y$, $Q(x,\,y)=xy^2$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,\,y)=x^2+y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 y dx+xy^2 dy=\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \otimes$$

**Пример 6.4.4.** Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2,\ x = y^2,\ 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

Р е ш е н и е. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью $OY$ и $OX$ соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right),\ B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{OA} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{AB} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{BO} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8} \int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int_{1/4}^{0} \sqrt{x} dx = \frac{1 + 3\ln 2}{24} \approx 0{,}13. \otimes$$

## Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

### Предварительные сведения

Формула вычисления поверхностного интеграла первого рода имеет вид

$$\iint_F f\left(x^1, x^2, x^3\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{G^{12}} f\left(x^1, x^2, \varphi\left(x^1, x^2\right)\right)\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\left(x^1, x^2\right)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\left(x^1, x^2\right)\right]^2}\,dx^1dx^2,$$

где двойной интеграл в правой части формулы вычисляется по проекции $G^{12}$ поверхности $F$, задаваемой уравнением $x^3=\varphi\left(x^1,x^2\right)$ на координатную плоскость $X^1OX^2$.

Если поверхность $F$ однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то **общий поверхностный интеграл второго рода** является суммой частных интегралов

$$\iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3+H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1+H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2 \overset{def}{=}$$

$$= \iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3+\iint\limits_F H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1+$$

$$+\iint\limits_F H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2,$$

где

$$\iint\limits_F H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2 = \iint\limits_{G^{12}} H_3\left(x^1, x^2, \varphi^3\left(x^1, x^2\right)\right)dx^1dx^2,$$

$$\iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3 = \iint\limits_{G^{23}} H_1\left(\varphi^1\left(x^2, x^3\right), x^2, x^3\right)dx^2dx^3,$$

$$\iint\limits_F H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1 = \iint\limits_{G^{13}} H_2\left(x^1, \varphi^2\left(x^1, x^3\right), x^3\right)dx^1dx^3$$

– двойные интегралы, вычисляемые по однозначным проекциям поверхности на координатные плоскости.

### Примеры с решением

**Пример 6.5.1.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_F\left(x^2+y^2\right)dS,$$

где $F$ – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями $z=0$ и $z=1$.

Р е ш е н и е. Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_F f(x, y, z)dS =$$

$$= \iint\limits_{G^{12}} f\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\,dxdy. \qquad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint\limits_F \left(x^2 + y^2\right)dS = \iint\limits_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)dxdy.$$

Так как область $G^{12}$ – это круг, определённый неравенством $x^2 + y^2 \le 1$, то

$$\iint\limits_F \left(x^2 + y^2\right)dS = \iint\limits_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)dxdy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi\,. \otimes$$

**Пример 6.5.2.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_F \left(\sqrt{a^2 - x^2} + z\right)ydS,$$

где $F$ – поверхность цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

заключённая между плоскостями $y = b$ и $y = c$.

Р е ш е н и е. Из уравнения

$$x^2 + z^2 = a^2$$

следует

$$z = \varphi^3(x, y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Поверхность $F$ разбилась на две части: $F_1\ (z \ge 0)$ и $F_2\ (z \le 0)$. Определим элемент поверхности $dS$ в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0;$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy = \frac{a dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_F f(x, y, z)dS = \iint\limits_G f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy,$$

получим:

$$\iint\limits_F \left(\sqrt{a^2 - x^2} + z\right) y dS =$$

$$= \iint\limits_{F_1} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS + \iint\limits_{F_2} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS =$$

$$= \iint\limits_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, y \frac{a dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint\limits_{G_1} y dxdy =$$

$$= 2a \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{b}^{c} y dy = 2a^2 \left(c^2 - b^2\right). \otimes$$

**Пример 6.5.3.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_F x^2 y^2 z dxdy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость $XOY$ является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint\limits_F x^2 y^2 z dx dy = \iint\limits_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\iint\limits_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx dy = \iint\limits_{G^{12}} r^5 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \sqrt{R^2 - r^2}\, dr d\varphi =$$

$$= 4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \sqrt{R^2 - r^2} = t;\ R^2 - r^2 = t^2; \\ r dr = -t dt;\ r^4 = \left(R^2 - t^2\right)^2. \end{matrix} \right\} == \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - t^2\right)^2 t^2 dt$$

$$= \frac{2}{105} \pi R^7 . \otimes$$

**Пример 6.5.4.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_F x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где $F$ – верхняя сторона части плоскости с уравнением $x + z - 1 = 0$, отсечённая плоскостями с уравнениями $y = 0,\ y = 4$ и лежащая в первом октанте.

Р е ш е н и е. Заданная поверхность изображена на рисунке5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_F P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iint\limits_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz + \iint\limits_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz +$$

$$+ \iint\limits_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y)) dx dy.$$

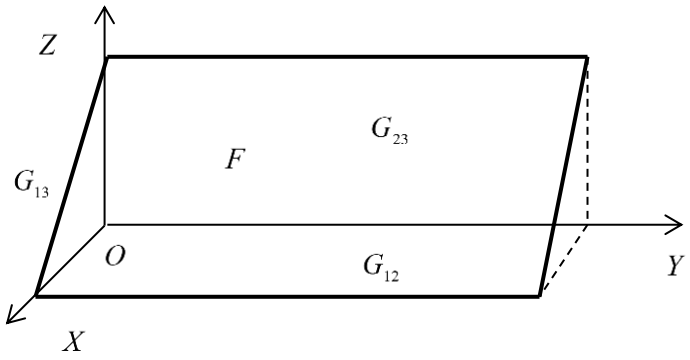



**Рис. 5.1**.

Так как плоскость параллельна оси $OY$, то

$$\iint\limits_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z)dxdz = 0.$$

Получаем:

$$\iint\limits_{F} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{G_{23}} (1-z)dydz + \iint\limits_{G_{12}} (1-x)dxdy = 4. \otimes$$

## Практическое занятие 6. Векторный анализ

### Предварительные сведения

В декартовой системе координат градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\vec{e}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\vec{e}_3.$$

Производная скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ в точке $N_0$ по направлению, заданному вектором $\vec{N_0N}$, имеющим орт

$$\vec{h} = \frac{1}{\left\|\vec{N_0N}\right\|}\vec{N_0N}$$

по определению равна

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0+0}\frac{f\left(\vec{x}_0 + t\vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right)}{t}$$

и вычисляется по одной из следующих формул

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{h}}\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right),\vec{h}\right)=\frac{\left(\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right),N_0N\right)}{\left\|\vec{N_0N}\right\|}=\Pr_{\vec{h}}\left\{\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right)\right\}.$$

Дивергенция векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ в некоторой точке $\vec{x}$ в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$div\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{\nabla},\vec{A}\left(\vec{x}\right)\right).$$

Формула для нахождения ротора векторного поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$rot\,\vec{A}=\left[\vec{\nabla},\vec{A}\left(\vec{x}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}.$$

**Потоком** $\Phi$ векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ через поверхность $F$ называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Phi\overset{def}{=}\iint\limits_F\left(\vec{A},d\,\vec{s}\right)=\iint\limits_F\left(\vec{A}\left(\vec{x}\right),\vec{n}\right)dS=$$

$$=\iint\limits_F\left(A_1\left(\vec{x}\right)\cos\theta_1+A_2\left(\vec{x}\right)\cos\theta_2+A_3\left(\vec{x}\right)\cos\theta_3\right)dS=$$

$$=\iint\limits_F A_1\left(\vec{x}\right)\cos\theta_1dS+\iint\limits_F A_2\left(\vec{x}\right)\cos\theta_2dS+\iint\limits_F A_3\left(\vec{x}\right)\cos\theta_3dS=$$

$$=\iint\limits_{G^{23}}A_1\left(\omega\left(x^2,x^3\right),x^2,x^3\right)dx^2dx^3+\iint\limits_{G^{13}}A_2\left(x^1,\psi\left(x^1,x^3\right),x^3\right)dx^1dx^3+$$

$$+\iint\limits_{G^{12}}A_3\left(x^1,x^2,\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)dx^1dx^2,$$

где

$$d\vec{s} = \left\| d\vec{s} \right\| \frac{d\vec{s}}{\left\| d\vec{s} \right\|} = ds\,\vec{n}\ .$$

**Теорема Остроградского-Гаусса.** Поток векторного поля через замкнутую поверхность (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью:

$$\oiint_F \left( \vec{A}\left(\vec{x}\right), d\vec{s} \right) = \iiint_V \left( \vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right) dV\ .$$

**Циркуляцией** векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ по замкнутому контуру $\Gamma$ называется криволинейный интеграл второго рода

$$C_A \overset{def}{=} \oint_\Gamma \left( \vec{A}, \vec{dl} \right) = \oint_\Gamma A_l dl\ .$$

**Теорема Стокса**. *Циркуляция векторного поля* $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ *по замкнутому контуру* $\Gamma$ *равна потоку векторного поля*

$$rot\,\vec{A}\left(\vec{x}\right) = \left[ \vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right]$$

*через поверхность, ограниченную контуром* $\Gamma$:

$$\oint_\Gamma \left( \vec{A}\left(\vec{x}\right), \vec{dl} \right) = \iint_S \left( \left[ \vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right], d\vec{s} \right) \equiv \iint_S \left( rot\,\vec{A}\left(\vec{x}\right), \vec{n} \right) ds\ .$$

Приведём краткую сводку наиболее часто используемых формул векторного анализа:

$$grad(\varphi\psi) = \varphi \cdot grad\psi + \psi \cdot grad\varphi;$$

$$div\left( \psi\vec{A} \right) = \psi \cdot div\vec{A} + \left( \vec{A}, grad\psi \right);$$

$$div\left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left( \vec{B}, rot\,\vec{A} \right) - \left( \vec{A}, rot\,\vec{B} \right);$$

$$rot\left( \psi\vec{A} \right) = \psi \cdot rot\,\vec{A} + \left[ grad\psi, \vec{A} \right];$$

$$gradf(\xi) = f'(\xi) \cdot grad\xi;$$

$$rot\,rot\,\vec{A} = grad\,div\vec{A} - \nabla^2\vec{A};$$

$$div\,grad\,\psi \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\psi\right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)\psi = \vec{\nabla}^2\,\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\left(x^1\right)^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\left(x^2\right)^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\left(x^3\right)^2}.$$

В декартовых координатах справедлива также формула

$$\vec{\nabla}^2\,\vec{A} = \vec{e}_1\vec{\nabla}^2\,A^1 + \vec{e}_2\vec{\nabla}^2\,A^2 + \vec{e}_3\vec{\nabla}^2\,A^3.$$

**Примеры с решением**

**Пример 6.6.1.** Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где $r = \left\|\vec{r}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Р е ш е н и е. По определению градиента имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r)\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r)\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}\vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y}{r}\vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z}{r}\vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \otimes$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$, называется ***потенциальным полем***, а скалярная функция $\varphi$ называется ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}$. Само векторное поле $\vec{a} = \dfrac{d\varphi}{dr}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$ называется ***потенциальным*** полем. Иногда потенциальное поле определяют соотношением $\vec{a} = -\operatorname{grad}\varphi$.

**Пример 6.6.2.** Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$.

Р е ш е н и е. По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \varphi(r)\vec{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)x] + \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)y] + \frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\cdot r + 3\varphi(r). \otimes$$

Векторное поле называется ***соленоидальным***, если выполнено условие $div\vec{a} = 0. \otimes$

**Пример 6.6.3.** Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

Р е ш е н и е. Условие соленоидальности $\mathrm{div}\,\vec{a} = 0$ для поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr}\cdot r + 3\varphi(r) = 0$$

С разделяющимися переменными. Разделяя переменные и учитывая, что в случае функций одного переменного производная $\frac{d\varphi}{dr}$ – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -3\frac{dr}{r}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем $\ln|\varphi| = -3\ln r + C_1$. Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде $C_1 = \ln C$, где $C$ – произвольная положительная постоянная, получаем $\varphi = \frac{C}{r^3}$. Здесь $C$ уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная. $\otimes$

**Пример 6.6.4.** Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r},$$

где $r = \left\|\vec{r}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Р е ш е н и е. Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r} = \varphi(r)x\,\vec{e}_1 + \varphi(r)y\,\vec{e}_2 + \varphi(r)z\,\vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)z]-\frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)y]\right\}\vec{e}_1+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)x]-\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)z]\right\}\vec{e}_2$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)y]-\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)x]\right\}\vec{e}_3=\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{yz}{r}-\frac{zy}{r}\right)\vec{e}_1+$$

$$+\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{zx}{r}-\frac{xz}{r}\right)\vec{e}_2+\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{xy}{r}-\frac{yx}{r}\right)\vec{e}_3=\vec{0}\,.\otimes$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение $rot\,\vec{a}=\vec{0}$, называется ***безвихревым*** полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

**Пример 6.6.5.** Доказать, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\right)-\left(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\right). \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Для решения применим правило действия оператора $\vec{\nabla}$ на произведение функций

$$\vec{\nabla}(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi)=$$

$$=\vec{\nabla}\left(\overset{\vee}{\varphi}\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi\right)+\vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\overset{\vee}{\omega}\cdot\ldots\cdot\psi\right)+\ldots+\vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\overset{\vee}{\psi}\right), \qquad (2)$$

где символ $\vee$ над функцией устанавливает порядок действия оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right) = \left(\vec{\nabla}, \left|\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B}\right|\right) + \left(\vec{\nabla}, \left|\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}}\right|\right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left(\vec{\nabla}, \left|\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B}\right|\right) = \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right], \vec{B}\right) = \left(\vec{B}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right) = \left(\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}\right). \qquad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left(\vec{\nabla}, \left|\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}}\right|\right) = -\left(\vec{\nabla}, \left|\overset{\vee}{\vec{B}}, \vec{A}\right|\right) = -\left(\vec{A}, \left[\vec{\nabla}, \vec{B}\right]\right) = -\left(\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}\right). \qquad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). $\otimes$

**Пример 6.6.6.** Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\left(u \cdot \vec{A}\right) = \left[\operatorname{grad} u, \vec{A}\right] + u \cdot \operatorname{rot}\vec{A},$$

где $u(M)$ – скалярное, а $\vec{A}(M)$ – векторное поля.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть:

$$\operatorname{rot}\left(u \cdot \vec{A}\right) = \left[\vec{\nabla}, u \cdot \vec{A}\right] = \left[\vec{\nabla}, \overset{\vee}{u} \cdot \vec{A}\right] + \left|\vec{\nabla}, u \cdot \overset{\vee}{\vec{A}}\right| =$$

$$= \left[\vec{\nabla} u, \vec{A}\right] + u \cdot \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \left[\operatorname{grad} u, \vec{A}\right] + u \cdot \operatorname{rot}\vec{A}. \otimes$$

**Пример 6.6.7.** Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A},$$

где $\Delta$ – ***оператор Лапласа*** $\Delta=\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)$.

Р е ш е н и е. Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right),$$

полагая $\vec{A}=\vec{B}=\nabla$, получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}.\otimes$$

**Пример 6.6.8.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A}=x^3\vec{e}_1-y^2\vec{e}_2+y\vec{e}_3$$

по замкнутому контуру $\left(t\in[0,2\pi]\right)$, заданному уравнениями

$$x=\cos t,\ y=3\sin t,\ z=\cos t-\sin t.$$

Р е ш е н и е. По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{A},d\vec{x}\right)=\oint\limits_{\Gamma}x^3dx-y^2dy+ydz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённому интегралу:

$$\oint\limits_{\Gamma}x^3dx-y^2dx^2+ydx^3=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\cos^3t\sin t-27\sin^2t\cos t-3\sin^2t-3\sin t\cos t\right)dt=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}\cos^3t\sin tdt-27\int\limits_0^{2\pi}\sin^2t\cos tdt-3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2tdt-3\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos^3td(\cos t)-27\int\limits_0^{2\pi}\sin^2td(\sin t)-$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)d(2t)-3\int_0^{2\pi}\sin t\,d(\sin t)=-3\pi\,.\otimes$$

**Пример 6.6.9.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=-\omega x_2\,\vec{e}_1+\omega x_1\,\vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом $R$, в положительном направлении.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности

$$x_1=R\cos t,\ x_2=R\sin t,$$

где $t\in[0,\,2\pi]$. Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$C=\oint_\Gamma\left(\vec{F},\,d\,\vec{x}\right)=\oint_\Gamma-\omega x_2dx_1+\omega x_1dx_2=$$

$$=\omega\int_0^{2\pi}\left(R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t\right)dt=2\pi R^2\omega.\otimes$$

**Пример 6.6.10.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=\left(x_1+3x_2+2x_3\right)\vec{e}_1+\left(2x_1+x_3\right)\vec{e}_2+\left(x_1-x_2\right)\vec{e}_3$$

по контуру треугольника $ABC$, если $A(2;\,0;\,0),\ B(0;\,3;\,0),\ C(0;\,0;\,1)$.

Р е ш е н и е. Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C=\oint_\Gamma\left(\vec{F},\,d\,\vec{x}\right)=\iint_S\left(\vec{n},\,rot\,\vec{F}\right)ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{1}=1,$$

или

$$3x_1+2x_2+6x_3=6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1+3x_2+2x_3 & 2x_1+x_3 & x_1-x_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1-x_2)-\frac{\partial}{\partial x_3}(2x_1+x_3)\right]\vec{e}_1-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_2)-\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1+3x_2+2x_3)\right]\vec{e}_2+$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1+x_3)-\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+3x_2+2x_3)\right]\vec{e}_3=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Теперь циркуляция

$$C=\oint_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\iint_{S}\left(\vec{n},rot\vec{F}\right)ds=$$

$$=-2\iint_{G^{23}}dx_2dx_3+\iint_{G^{13}}dx_3dx_1-\iint_{G^{12}}dx_1dx_2=$$

$$=-2\int_0^3 dx_2\int_0^{1-x_2/3}dx_3+\int_0^1 dx_3\int_0^{2-x_3}dx_1-\int_0^2 dx_1\int_0^{3-3x_1/2}dx_2=$$

$$=-2\left[x_2-\frac{1}{6}x_2^2\right]_0^3+\left[2x_3-x_3^2\right]_0^1-\left[3x_1-\frac{3}{4}x_1^2\right]_0^2=-5.\otimes$$

**Пример 6.6.11.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=x_2\vec{e}_1-x_1\vec{e}_2+a\vec{e}_3\ (a=const)$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0$$

в положительном направлении двумя способами.

Р е ш е н и е. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид $(R=1)$:

$$x_1 = \cos t\,,\ x_2 = \sin t\,.$$

Теперь имеем:

$$C = \oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},\, d\vec{x}\right) = \oint\limits_{\Gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\sin t(-\sin t) - \cos t\cos t\right]dt = -\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = -2\pi\,.$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & a \end{vmatrix} = -2\,\vec{e}_3\,.$$

Нормаль плоскости треугольника $\vec{n} = \vec{e}_3$. Следовательно, имеем

$$C = \oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},\, d\vec{x}\right) = \iint\limits_{S}\left(\vec{n},\, rot\,\vec{F}\right)ds = -2\iint\limits_{S}\left(\vec{n},\, \vec{e}_3\right)ds = -2\iint\limits_{S} dx_1 dx_2 =$$

$$= -2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} r\,dr = -2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = -2\pi\,. \otimes$$

**Пример 6.6.12.** Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность $F$, ограничивающую область $\Omega$, имеющую объём $V$.

Р е ш е н и е. Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\mathrm{div}\,\vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oiint\limits_{F}\left(\vec{r},\, d\vec{s}\right) = \iiint\limits_{V}\left(\vec{\nabla},\, \vec{r}\right)dV = 3\iiint\limits_{V} dV = 3V\,.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления объёма области $\Omega$ при помощи поверхностных интегралов

$$V = \frac{1}{3}\oiint_F \left(\vec{r}, \vec{n}\right) ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V = \frac{1}{3}\oiint_F \left(xn_1 + yn_2 + zn_3\right) ds = \frac{1}{3}\oiint_F \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right) ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – координаты орта нормали $\vec{n}$. $\otimes$

**Пример 6.6.13.** Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ z = 0\ \ (0 \le z \le 1).$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) ds = \iiint_V div\vec{F}\, dv.$$

Так как

$$\operatorname{div}\vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке $(0;\ 0;\ 1)$, ограниченный плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{r}, \vec{n}\right) ds = \iiint_V div\vec{r}\, dv = 3\iiint_V dv = 3\iiint_\Omega r\,d\varphi\,dr\,dz =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_0^{1-r} dz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1-r)\,dr = 3\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi\,.\ \otimes$$

**Пример 6.6.14.** Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint\limits_S \left( \vec{F}, d\vec{s} \right) = \iint\limits_S \left( \vec{F}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \iint\limits_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds.$$

Так как $r = R = const$ и скалярное произведение ортов

$$\left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) = 1,$$

получаем:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \iint\limits_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} \iint\limits_S ds = \frac{q 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{4\pi q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}. \otimes$$

## Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### Предварительные сведения

Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Его общее решение находится по определению первообразной:

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C,$$

где $C$ – произвольная постоянная величина.

Уравнение с разделёнными переменными имеют вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0.$$

Общее решение этого уравнения находится по формуле

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P(x)T(y)dx + Q(x)S(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \frac{S(y)}{T(y)}dy = 0,$$

решая которое, получаем общее решение в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int \frac{S(y)}{T(y)}dy = C.$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка в приведённой форме записи имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Однородное уравнение решается путём разделения переменных, а неоднородное методом вариации произвольной постоянной. Формула для общего решения неоднородного уравнения имеет вид

$$z(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + A\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Простейшее ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его общее решение находится путём последовательного интегрирования и имеет вид:

$$y(x) = \int\int\ldots\int f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{n\ раз} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + C_3 + \ldots$$

$$+ C_{n-2}\frac{x^2}{2!} + C_{n-1}x + C_n.$$

Линейное ОДУ высшего порядка, соответственно, неоднородное и однородно, имеет вид:

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x),$$

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = 0.$$

**Задача Коши** для уравнения (неоднородного, или однородного) ставится так: **найти решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям**

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_0^1,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = y_0^{n-1}.$$

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = f(x).$$

Находя линейно независимую систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_2y=0,$$

– **фундаментальную систему решений** (ФСР) $\{y_1, y_2\}$, можем составить общее решение однородного уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений.

При подстановке в однородное уравнение функции $e^{kx}$ приходим к характеристическому уравнению

$$k^2+p_1k+p_2=0.$$

В зависимости от того, какие решения будут у характеристического уравнения, приходим к следующим трём случаям построения общего решения однородного дифференциального уравнения.

1) Корни характеристического уравнения простые и вещественные, то есть $k_1\neq k_2\in R^1$. Тогда ФСР есть $\left\{e^{k_1x}, e^{k_2x}\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

2) Корень $k$ вещественный, кратности 2. Тогда ФСР есть $\left\{e^{kx}, xe^{kx}\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=e^{kx}(C_1+xC_2).$$

3) Корни комплексно-сопряжённые $k_1=\alpha+\beta i,\ k_2=\alpha-\beta i$. Тогда ФСР есть $\left\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Для решения неоднородного уравнения применяется **метод Лагранжа**. Решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$z(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

Составляется СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1(x)\dfrac{dC_1(x)}{dx}+y_2(x)\dfrac{dC_2(x)}{dx}=0, \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx}\dfrac{dC_1(x)}{dx}+\dfrac{dy_2(x)}{dx}\dfrac{dC_2(x)}{dx}=f(x). \end{cases}$$

Здесь $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – новые функции, подлежащие определению, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – элементы ФСР соответствующего однородного уравнения. Решение СЛАУ относительно производных новых функций ищется любым методом. В общем виде это решение записывается так

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1(x)}{dx} = \varphi(x), \\ \dfrac{dC_1(x)}{dx} = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти независимые простейшие ОДУ, и подставляя результаты в общий вид решения неоднородного уравнения, получаем общее решение в форме

$$z(x) = A_1 y_1(x) + A_2(x) y_2(x) + y_1(x)\int \varphi(x)dx + y_2(x)\int \psi(x)dx.$$

**Примеры с решением**

**Пример 6.7.1.** Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx.$$

Р е ш е н и е. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y\left(x^2+3\right)dy = 3x\left(2+y^2\right)dx.$$

2) Замечаем, что $x^2+3>0,\ 2+y^2>0.$ Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на $\left(x^2+3\right)\left(2+y^2\right)$:

$$\frac{2y}{2+y^2}dy = \frac{3x}{x^2+3}dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int \frac{2y}{2+y^2}dy + C_1 = \int \frac{3x}{x^2+3}dx + C_2;$$

$$\ln\left(2+y^2\right) = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right) + C;$$

$$C = C_2 - C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2\ln\left(2+y^2\right) - 3\ln\left(x^2+3\right) = C;$$

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3} = C.$$

**Ответ:** Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3}=C$$

при всевозможных значениях параметра $C$. $\otimes$

**Пример 6.7.2.** Найти частное решение уравнения

$$\left(1+y^2\right)dx=xydy,$$

если $y=1$ при $x=2$.

Р е ш е н и е. 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{dx}{x}+\ln C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln|x|+\ln C;$$

$$\left(1+y^2\right)=Cx^2.$$

Так как $C$ – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2=Cx^2-1$$

3) Используем начальные условия:

$$4=2C;\ C=2;\ x^2=2\left(1+y^2\right).$$

4) Частный интеграл:

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}.$$

**Ответ:** $y=\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}$. $\otimes$

**Пример 6.7.3.** Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\frac{y}{x}-5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2-6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x)=\frac{y}{x},$$

где $u(x)-$ новая искомая функция. Так как

$$y'=u+xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u-5u^2}{2-6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{2-6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что $1+u^2\neq 0,\ x\neq 0$:

$$\frac{2-6u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2arctgu-3\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+C.$$

Заменяя $u(x)=\frac{y}{x}$, получаем:

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^{2}\right)-\ln|x|=C.$$

**Ответ:** Интегральные кривые определяются уравнением

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^{2}\right)-\ln|x|=C.\otimes$$

**Пример 6.7.4.** Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Здесь $p(x)=3,\ f(x)=e^{2x}$.

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx}=-3y;$$

$$\frac{dy}{y}=-3dx;$$

$$\ln|y|=-3x+\ln C_1;$$

$$|y|=C_1e^{-3x};$$

$$y=C_2e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде $z=C_2(x)e^{-3x}$. Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx}=e^{5x};$$

$$C_2(x)=\int e^{5x}dx+C;$$

$$C_2(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}.$$

**Ответ:** общее решение имеет вид

$$z=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}.\otimes$$

**Пример 6.7.5.** Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием $y(1)=1.$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C\right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C\right)=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(-2\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}dx}\right)=\frac{1}{x}+Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2}+C=1,$$

откуда $C=0$. Решение задачи Коши принимает вид:

$$z=\frac{1}{x}.$$

**Ответ:** $y=\frac{1}{x}.\otimes$

**Пример 6.7.6.** Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1,\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0.$

Р е ш е н и е. Интегрируем уравнение последовательно:

1) $\frac{dy}{dx} = \int xe^x dx + C_1 = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{matrix} \right\} = xe^x - \int e^x dx + C_1 =$

$= (x-1)e^x + C_1;$

2) $y = \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \left\{ \begin{matrix} u = x-1, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{matrix} \right\} =$

$= (x-2)e^x + C_1 x + C_2.$

Так как в силу первого начального условия $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$, получаем:

$$(0-1)e^0 + C_1 = 0,\ C_1 = 1.$$

Так как в силу второго начального условия $y\big|_{x=0} = 1$, получаем:

$$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1,\ C_2 = 3.$$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$y = (x-2)e^x + x + 3.$ ⊗

**Пример 6.7.7.** Найти общее решение ОДУ

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Решаем уравнение относительно $z = \frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}=1,\ \frac{dy}{dx}=x+C_1,\ y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2;$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}=2,\ \frac{dy}{dx}=2x+C_3,\ y=x^2+C_3x+C_4.$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2-3z+2=(z-z_1)(z-z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y-\frac{1}{2}x^2-C_1x-C_2\right)\cdot\left(y-x^2-C_3x-C_4\right)=0.\ \otimes$$

Пример 6.7.8. **Найти общее решение ОДУ**

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3.$$

**Р е ш е н и е. Положим** $\frac{d^2y}{dx^2}=z$**, тогда из уравнения получаем**

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3.$$

**Интегрируя получившееся уравнение, получаем**

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3,\ \frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{2}dx,\ \frac{1}{z^2}=x+C_1,\ z^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

**Заменяя** $z=\frac{d^2y}{dx^2}$**, получаем уравнение**

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

**Уравнение содержит только $x$ и $y$. Разрешая его относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, получаем**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\pm 1}{\sqrt{x+C_1}}.$$

**Это уравнение интегрируем последовательно:**

$$\frac{dy}{dx}=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x+C_1}}+C_2=\left\{dx=d\left(x+C_1\right)\right\}=$$

$$=\pm\int\left(x+C_1\right)^{-1/2}d\left(x+C_1\right)+C_2=\pm\left(x+C_1\right)^{1/2}+C_2$$

$$y_1=\int\left(x+C_1\right)^{1/2}dx+C_2x+C^3=\left(x+C_1\right)^{3/2}+C_2x+C^3,$$

$$y_2=-\int\left(x+C_1\right)^{1/2}dx+C_2x+C^3=-\left(x+C_1\right)^{3/2}+C_2x+C^3.\otimes$$

**Пример 6.7.9.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2+k-2=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=-2,\ k_2=1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-2x},\ e^x\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x.\otimes$$

**Пример 6.7.10.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2-2k+1=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=k_2=1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^x,\ xe^x\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^x.\ \otimes$$

**Пример 6.7.11.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2-4k+13=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=2+3i,\ k_2=2-3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin x\right).\ \otimes$$

**Пример 6.7.12.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2-k+2=0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$\left(k^2-1\right)\left(k-2\right)=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=-1,\ k_2=1,\ k_3=2.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\ e^{x},\ e^{2x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}.\ \otimes$$

**Пример 6.7.13.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}-4y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3-4k^2+6k-4=0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3-4k^2+6k-4=\left(k-2\right)\left(k^2-2k+2\right).$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(k-2\right)\left(k^2-2k+2\right)=0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1=2,\ k_2=1+i,\ k_3=1-i.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{2x},\ e^{x}\cos x,\ e^{x}\sin x\right\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x)=C_1e^{2x}+e^{x}\left(C_2\cos x+C_3\sin x\right).\ \otimes$$

**Пример 6.7.14.** Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2 - x + 1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1,\ k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\ e^{x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{x}.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x} \dfrac{dC_1}{dx} + e^{x} \dfrac{dC_2}{dx} = 0, \\ -e^{-x} \dfrac{dC_1}{dx} + e^{x} \dfrac{dC_2}{dx} = x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2} e^{x}\left(x^2 - x + 1\right);\ \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2} e^{-x}\left(x^2 - x + 1\right).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int e^x\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_1 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\right)e^x + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int e^{-x}\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_2 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12\right)e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^x - x^2 + x - 1. \otimes$$

**Пример 6.7.15.** С аэростата, падающего с высоты $H$ со скоростью $v_0$, сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время $t_0$ аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна $m$, а сила сопротивления воздуха $R$ и подъёмная сила аэростата $T$ постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

Р е ш е н и е. Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось $OZ$ направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m\ddot{z} = T + R - G, \qquad (1)$$

где $G = mg$ – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте $H$, поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H,\ \dot{z}(0) = -v_0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m\dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \qquad (3)$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

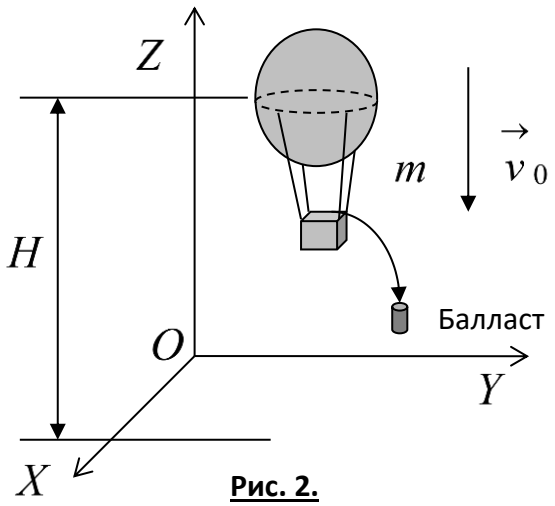



**Рис. 2.**

Используя начальные условия (2), получаем для постоянных: $C_1 = -mv_0$, $C_2 = mH$. Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T+R-G}{m}t - v_0, \tag{5}$$

$$z = \frac{T+R-G}{2m}t^2 - v_0 t + H. \tag{6}$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m\ddot{z} = T - R - G, \tag{7}$$

$$z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0. \tag{8}$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m\dot{z} = (T-R-G)t + C_1, \tag{9}$$

$$mz = \frac{T-R-G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \tag{10}$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m} t^2 . \qquad (11)$$

Обозначим время падения аэростата $t_1$, а время подъёма $t_2$. Из условия задачи $t_0 = t_1 + t_2$. Подставляя $t = t_1,\ \dot{z}(t_1) = 0,\ z(t_1) = 0$ в (5) и (6) и $t = t_2,\ z(t_2) = H$ в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{T + R - G}{m} t_1 - v_0 = 0, \\ \dfrac{T + R - G}{2m} t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \dfrac{T - R - G}{2m} t_2^2 = H. \end{cases} \qquad (12)$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные $H$ и $v_0$ с учётом того, что $t_2 = t_0 - t_1$, получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \dfrac{\sqrt{T + R - mg}}{T - R - mg}} . \otimes$$

**Пример 6.7.16.** Грузовик массой $m$ имеет максимальную скорость $v_{\max}$ и разгоняется с места до скорости $v_*$ за время $t_*$. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

Р е ш е н и е. Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя $\vec{F}$ постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения $\vec{R} = k\vec{v}$, где коэффициент динамического трения $k > 0$ неизвестен; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (дороги); $\vec{G}$ – сила тяжести.

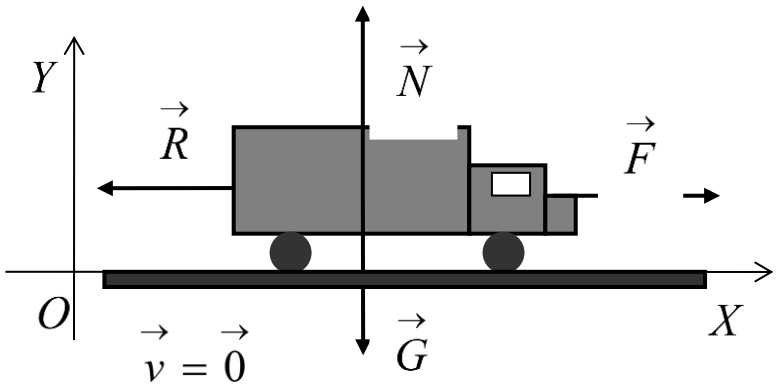



**Рис. 2**.

Обозначая $\dot{x} = v$, получаем:

$$m\dot{v} = F - kv \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{mdv}{F - kv} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k}\int\frac{d(F - kv)}{F - kv} = t + C \Rightarrow -\frac{m}{k}\ln(F - kv) = t + C.$$

Начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Из условия на скорость получаем, что $C = -\frac{m}{k}\ln F$. Подстановка даёт

$$t = -\frac{m}{k}\ln(F - kv) + \frac{m}{k}\ln F = -\frac{m}{k}\ln\frac{F - kv}{F} \Rightarrow t = -\frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{kv}{F}\right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость $v_{\max}$, то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0 \Rightarrow k = \frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем:

$$t_* = -\frac{m}{F/v_{\max}}\ln\left(1 - \frac{(F/v_{\max})v_*}{F}\right) \Rightarrow t_* = -\frac{mv_{\max}}{F}\ln\left(1 - \frac{v_*}{v_{\max}}\right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}-v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}}{v_{\max}-v_*}. \otimes$$

## Практическое занятие 8. Системы ОДУ

### Предварительные сведения

Системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} = f^1\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right), \\ \dfrac{dy^2}{dt} = f^2\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy^n}{dt} = f^n\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right). \end{cases}$$

называются **системами ОДУ в нормальной форме**, или просто нормальными системами.

Если функции в правой части системы нормальной ОДУ зависят от искомых функций $\left\{y^1(t), y^2(t), \ldots, y^n(t)\right\}$ линейным образом, то есть

$$f^k\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k y^j + f^k\left(t\right),$$

то нормальную систему ОДУ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^1 y^j + f^1\left(t\right), \\ \dfrac{dy^2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2 y^j + f^2\left(t\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy^n}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^n y^j + f^n\left(t\right). \end{cases}$$

Эквивалентная матрично-векторная форма имеет вид

$$I\frac{d}{dt}\left|y(t)\right\rangle + P(t)\left|y(t)\right\rangle = \left|f(t)\right\rangle,$$

где введены обозначения для матричного дифференциального оператора

$$L = I\frac{d}{dt} + P(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

и вектор-столбцов

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \; |f(t)\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейная однородная система ОДУ в нормальной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в матрично-векторной записи

$$I\frac{d}{dt}|y(t)\rangle + P(t)|y(t)\rangle = |0\rangle.$$

Система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из $n$ частных решений системы

$$|y_1\rangle = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \\ \dots \\ y_1^n(t) \end{pmatrix}, \; |y_2\rangle = \begin{pmatrix} y_2^1(t) \\ y_2^2(t) \\ \dots \\ y_2^n(t) \end{pmatrix}, \; \dots, \; |y_m\rangle = \begin{pmatrix} y_m^1(t) \\ y_m^2(t) \\ \dots \\ y_m^n(t) \end{pmatrix}$$

называется **линейно независимой на промежутке** $(a, b)$, если $(\forall t \in (a, b))$

$$\alpha_1|y_1(t)\rangle + \alpha_2|y_2(t)\rangle + \dots + \alpha_n|y_n(t)\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Линейно независимая система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из $n$ частных решений однородно системы ОДУ в нормальной форме называется **фундаментальной системой решений** (**ФСР**) этой системы. Векторы ФСР можно расположить в виде матрицы, составленной из их координат по столбцам:

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ – линейно независимая система частных решений системы уравнений (4.30), то любое её решение имеет вид

$$|y(t)\rangle = \sum_{k=1}^{n} C_k |y_k(t)\rangle.$$

Общее решение записывается через фундаментальную матрицу в виде:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

или

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Решение задачи Коши

$$I\frac{d}{dt}|y\rangle + P(t)|y\rangle = |0\rangle,\ |y(t_0)\rangle = |y_0\rangle$$

получается из последней формулы за счёт выбора произвольного числового вектора $|C\rangle$. Действительно, имеем

$$|y_0\rangle = Y(t_0)|C\rangle \Rightarrow |C\rangle = Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle,$$

причём обратная матрица $Y^{-1}(t_0)$ существует, так как матрица $Y(t_0)$ невырожденная. Подставляя найденный вектор $|C\rangle$ в формулу для общего решения, получаем решение задачи Коши в виде

$$|y(t)\rangle = Y(t)Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle.$$

Матричная функция

$$G(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

называется ***функцией Коши***.

Решение однородной системы ОДУ

$$\frac{dy^i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j(t) = 0$$

Ищется в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t},\ y^2(t) = x^2 e^{-\mu t},\ \dots,\ y^n(t) = x^n e^{-\mu t}.$$

Подстановка в систему ОДУ приводит к однородной СЛАУ

$$\begin{cases} \left(a_1^1-\mu\right)x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=0, \\ a_1^2x^1+\left(a_2^2-\mu\right)x^2+\ldots+a_n^2x^n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\ldots+\left(a_n^n-\mu\right)x^n=0. \end{cases}$$

Условие разрешимости СЛАУ имеет вид уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1^1-\mu & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\mu & \ldots & a_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n-\mu \end{vmatrix}=0,$$

которое называется **характеристическим уравнением**.

В зависимости от структуры матрицы СЛАУ реализуются три случая существования решений характеристического уравнения и, соответственно, три случая построения фундаментальной матрицы для системы ОДУ в нормальной форме.

**Случай 1.** Пусть все корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ уравнения (4.69) различные и вещественные. Этот случай реализуется, если матрица $A$ является матрицей простой структуры. Совершая последовательные подстановки $\mu_k \ \left(k=\overline{1,n}\right)$ в СЛАУ (4.68), получим $n$ экземпляров СЛАУ для нахождения собственных векторов матрицы $A$:

$$\begin{cases} \left(a_1^1-\mu_k\right)x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=0, \\ a_1^2x^1+\left(a_2^2-\mu_k\right)x^2+\ldots+a_n^2x^n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\ldots+\left(a_n^n-\mu_k\right)x^n=0. \end{cases} \qquad (4.70)$$

Решив $n$ экземпляров СЛАУ (4.70), найдём линейно независимую систему собственных векторов матрицы $A$:

$$\left|x_1\right\rangle=\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \ldots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \left|x_2\right\rangle=\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \ldots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \ldots, \left|x_n\right\rangle=\begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \ldots \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы однородной линейной ОДУ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 e^{-\mu_1 t} & x_2^1 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ x_1^2 e^{-\mu_1 t} & x_2^2 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n e^{-\mu_1 t} & x_2^n e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 x_1^1 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^1 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ C_1 x_1^2 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^2 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_1^n e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^n e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

**Случай 2.** Пусть корни характеристического уравнения (4.69) различные, но среди них имеются комплексно-сопряжённые. Тогда частные решения (4.72) и, следовательно, общее решение (4.75) будут комплексными функциями. Выделим одну из пар комплексно-сопряжённых корней: $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре корней соответствуют вещественные частные решения. Исследуем их.

Построим частное решение, соответствующее корню $\mu_1 = \alpha + i\beta$. Это ***комплексное*** решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \dots \\ y_1^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_1^1 + iz_1^1 \\ x_1^2 + iz_1^2 \\ \dots \\ x_1^n + iz_1^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_2^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_2^1 + iz_2^1 \\ x_2^2 + iz_2^2 \\ \dots \\ x_2^n + iz_2^n \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_n^1 + iz_n^1 \\ x_n^2 + iz_n^2 \\ \dots \\ x_n^n + iz_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вещественная и мнимая части решения сами являются решениями однородной системы ОДУ. Эти решения в совокупности образуют линейно независимую систему, которую можно использовать для построения фундаментальной матрицы.

**Случай 3.** Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень $\mu_1$ кратности $k$. Можно показать, что тогда ему соответствует решение системы ОДУ вида

$$y^1 = F_1(t)e^{-\mu_1 t},\ y^2 = F_2(t)e^{-\mu_1 t},\ \dots,\ y^n = F_n(t)e^{-\mu_1 t},$$

где $F_1(t),\ F_2(t),\ \dots,\ F_n(t)$ – многочлены от $t$ степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности $k$ произвольных коэффициентов. Полагая последовательно в этом решении, что один из

произвольных коэффициентов многочленов равен единице, а остальные – нулю, получим линейно независимую систему $k$ частных решений системы уравнений ОДУ.

Если $\mu_1$ – вещественное характеристическое число, то полученные частные решения будут вещественными.

Если $\mu_1 = \alpha + i\beta$ – комплексное характеристическое число, то имеется комплексно-сопряжённое характеристическое число $\alpha - i\beta$ той же кратности.

Построив $k$ линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых частных решений. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых характеристических чисел $\alpha \pm i\beta$ кратности $k$ соответствует $2k$ линейно независимых вещественных частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение, каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному корню характеристического уравнения кратности $k$ соответствуют $k$ линейно независимых частных решения, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности $k$ характеристического уравнения соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения. В совокупности получается $n$ линейно независимых частных решений, из которых можно составить фундаментальную матрицу и, следовательно, записать общее решение системы ОДУ.

Описанная совокупность действий носит название «Метод Эйлера интегрирования линейной однородной системы ОДУ».

### Примеры с решением

**Пример 6.8.1.** Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \dfrac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

Р е ш е н и е. Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t},\ y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель $e^{-\mu t}$, получаем

$$\begin{cases} (1-\mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu+4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2,\ \mu_2 = -1.$$

1) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая $x^2 = a \in R^1$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая $x^2 = b \in R^1$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1e^{2t} - C_2e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 6.8.2.** Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1e^{-\mu t},\ y_2 = x_2e^{-\mu t},\ y_3 = x_3e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2,\ \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню $\mu_1 = -2$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$|y_1\rangle = a|a_1\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при $\mu_2 = \mu_3 = 1$ равен $1$, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая $x_2 = a$, $x_3 = b$, получаем решение в виде

$$|x\rangle = a|a_2\rangle + b|a_3\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$|y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, |y_3\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{2t}-C_2e^{-t}-C_3e^{-t} \\ C_1e^{2t}+C_2e^{-t} \\ C_1e^{2t}+C_3e^{-t} \end{pmatrix}. \otimes$$

Для решения линейной неоднородной системы ОДУ в нормальной форме можно использовать метод Лагранжа. Продемонстрируем его на примере.

**Пример 6.8.3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}-y_2=0, \\ \dfrac{dy_2}{dt}-y_1=\dfrac{1}{t^2}+\ln t. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}-y_2=0, \\ \dfrac{dy_2}{dt}-y_1=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя $y_1=x_1e^{-\mu t}$ и $y_2=x_2e^{-\mu t}$, записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \mu^2-1=0:\ \mu_1=-1;\ \mu_2=1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для $\mu_1=-1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_2=a \Rightarrow x_1=a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_2 = 1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1|y_1\rangle + C_2|y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},\ y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}. \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирований и приведения подобных

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t + \dfrac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = 0, \\ \dfrac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t - \dfrac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = \dfrac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2}+\ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2}+\ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)+A_1,\ C_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t}-\ln t\right)+A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1e^{t} + A_2e^{-t} - \ln t, \\ z_2(t) = A_1e^{t} - A_2e^{-t} - \frac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

**Задания для самостоятельной работы**

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_W xydl,$$

где путь $W$ – контур треугольника с вершинами: $A(-1;0),\ B(1;0),\ C(0;1).$

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x+y)dx - xdy,$$

где путь $W$ – отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0;0),\ B(2;0),\ C(4;2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W xdy - ydx,$$

где $W$ – путь, заданный неявным уравнением $y = x^3$, соединяющий точки $A(0;0)$ и $B(2;8)$

.

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x^2 dx + y^2 dy,$$

где $W -$ путь, заданный неявным уравнением $y = \sqrt{x}$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$

.

5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D \left(5x^2 y - 2y^3\right) dxdy$$

по прямоугольнику $D = \{(x, y) \in R_2 : 2 \le x \le 5 \wedge 1 \le y \le 3\}$.

6. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy$$

по области, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где $D$ – круг $x^2 + y^2 \le 1$;

б) $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, где $D$ – круг $x^2 + y^2 \le 4$;

в) $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, где $D$ – круг $x^2 + y^2 \le 2x$;

г) $\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$, где $D$ – первая четверть круга $x^2 + y^2 \le 1$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а) $y = \ln x,\ x - y = 1,\ y = -1$;

б) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ x = 2,\ x = -2$.

9. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, где область $V$ ограничена плоскостями с уравнениями

$x = 0,\ y = 0, z = 0,\ x + y + z = 1$;

б) $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, где область $V$ ограничена плоскостями с уравнениями

$x=0,\ y=0, z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1.$

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где область $V$ ограничена поверхностями с уравнениями

$x^2+y^2=1,\ z=2;$

б) $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область $V$ ограничена поверхностями с уравнениями $x^2+y^2=1,$

$z=0,\ z=a\ (a>0).$

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где область $V$ – это шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$;

б) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где область $V$ – это верхняя половина шара

$x^2+y^2+z^2\le R^2.$

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_F (x+18y+24z)ds$, где поверхность $F$ задана неявным уравнением

$x+2y+3z=1,$

и неравенствами $x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0;$

б) $\iint\limits_F (x^2+y^2)ds$, где поверхность $F$ задана неявным уравнением

$x^2+y^2-z^2=0,$

и неравенствами $0\le z\le 1.$

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint\limits_F zdxdy$, где поверхность $F$ – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2+y^2+z^2=9;$$

б) $\iint\limits_F \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где поверхность $F$ – верхняя сторона части параболоида с уравнением

$$z=1-x^2-y^2,$$

отсечённая плоскостью $z=0$.

14. Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2-3x+2y$ по направлению радиуса-вектора точки $M(3;\,4)$ в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля $u=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке $M(2;1)$.

16. Найти производную функции, определённой формулой $u=\dfrac{xyz}{3}$, в точке $M_0(1;\,2;\,3)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, если $M(4;1;6)$.

17. Доказать, что

а) $\operatorname{grad} r=\dfrac{\vec{r}}{r}$; б) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

19. Найти

а) $\operatorname{div}\vec{r}$; б) $\operatorname{div}\left(r^4\,\vec{r}\right)$; в) $\operatorname{div}\left(\left(\vec{A},\,\vec{r}\right)\vec{B}\right)$.

20. Найти $\operatorname{div}\vec{A}$, если:

а) $\vec{A}=(x-y)(y-z)\vec{e}_1+(y-z)(z-x)\vec{e}_2+(z-x)(x-y)\vec{e}_3$;

б) $\vec{A}=\left(x^2+y^2\right)(y-z)\vec{e}_1+\left(y^2+z^2\right)(z-x)\vec{e}_2+\left(z^2+x^2\right)(x-y)\vec{e}_3$.

21. Найти ротор векторного поля $\vec{A}(M)$:

а) $\vec{A} = \frac{y}{x}\vec{e}_1 + \frac{z}{y}\vec{e}_2 + \frac{x}{z}\vec{e}_3$;

б) $\vec{A} = yz\,\vec{e}_1 + z(x+2y)\vec{e}_2 + y(x+y)\vec{e}_3$.

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что для произвольного скалярного поля $\varphi(M)$ и для произвольных векторных полей $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$ справедливы следующие формулы:

а) $\left(\vec{A}, \nabla\right)\varphi\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{A}, \nabla\varphi\right) + \varphi\left(\vec{A}, \nabla\right)\vec{B}$;

б) $\vec{C}\cdot\nabla\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\left(\left(\vec{C}, \nabla\right), \vec{B}\right) + \vec{B}\cdot\left(\left(\vec{C}, \nabla\right), \vec{A}\right)$;

в) $\left(\vec{C}, \nabla\right)\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left[\vec{A}, \left(\vec{C}, \nabla\right)\vec{B}\right] - \left[\vec{B}, \left(\vec{C}, \nabla\right)\vec{A}\right]$.

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

а) $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)$;

б) $\operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad}\psi)$;

в) $\operatorname{rot}\left[\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{\mathrm{B}}\right]$.

24. Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_1 + 6x\,\vec{e}_2$;

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2x\,\vec{e}_1 + 3y\,\vec{e}_2$;

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_2 + 6z\,\vec{e}_3$.

25. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = y\,\vec{e}_1 - z\,\vec{e}_2 + x^2 y\,\vec{e}_3,$

$x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ t \in [0, 2\pi];$

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = z\,\vec{e}_1 - x\,\vec{e}_2 + yz\,\vec{e}_3,$

$x = 2\cos t,\ y = 6\sin t,\ z = 3,\ t \in [0, 2\pi];$

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 4y\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 + y\,\vec{e}_3,$

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2 - \cos t - \sin t,\ t \in [0, 2\pi].$

26. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1) Решить уравнение $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$

2) Решить уравнение $\left(1 + e^x\right)yy' = e^x.$

3) Решить уравнение $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$

27. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

1) Найти интегральные кривые уравнения $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

2) Найти интегральные кривые уравнения $y' = \frac{y}{x} - 1.$

3) Найти интегральные кривые уравнения

$\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0.$

28. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

1) $(2x+1)\dfrac{dy}{dx}=4x+2y.$

2) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0,\ y(0)=0.$

3) $x\dfrac{dy}{dx}+y-e^x=0,\ y(a)=b.$

4) $\dfrac{dy}{dx}\cos^2 x+y=\operatorname{tg}x,\ y(0)=0.$

5) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ y(e)=\dfrac{e^2}{2}.$

6) $\dfrac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\cos x,\ y(0)=0.$

7) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{\sin x},\ y(0)=0.$

8) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2.$

9) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3.$

10) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y.$

11) $\dfrac{dy}{dx}-ay=e^{bx}.$

29. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

1) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-8y=0.$ 2) $\dfrac{d^4y}{dx^3}-y=0.$ 3) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-5\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$

4) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+\dfrac{d^3y}{dx^3}+8\dfrac{d^2y}{dx^2}+8\dfrac{dy}{dx}+4y=0.$

5) $\dfrac{d^5y}{dx^5}-6\dfrac{d^4y}{dx^4}+9\dfrac{d^2y}{dx^2}=0.$

30. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=-12x^2+6x-4.$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=4e^x.$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=-4e^x+3.$

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=6\sin 2x.$

5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+y=-13\sin 2x.$

31. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера.

1) $\begin{cases}\dfrac{dy^1}{dt}-2y^1+3y^2=0,\\ \dfrac{dy^2}{dt}-3y^1-2y^2=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{dy^1}{dt}-2y^1+3y^2=0,\\ \dfrac{dy^2}{dt}-3y^1-2y^2=0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}-4y_1+y_2=0,\\ \dfrac{dy_2}{dt}-3y_1-y_2+y_3=0,\\ \dfrac{dy_3}{dt}-y_1-y_3=0.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}+y_1-y_2-y_3=0,\\ \dfrac{dy_2}{dt}-y_1+y_2-y_3=0,\\ \dfrac{dy_3}{dt}-y_1-y_2+y_3=0.\end{cases}$

5) $\dfrac{d}{dt}|y\rangle=A|y\rangle,\ |y\rangle=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

6) $\dfrac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle,\ |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

32. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$




**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный университет»**

**О. В. Садырева, И. Г. Коршунов**

# Ф И З И К А

## *МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*
## ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

**Екатеринбург**

**2020**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



ОДОБРЕНО
Учебно-методическим советом УГГУ

Председатель совета
_____Упоров С.А.

# ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург, 2020

Методические указания рассмотрены на заседании кафедры физики 5 октября 2020 года (протокол № 117) и рекомендованы для издания в УГГУ

ФИЗИКА. Методические указания для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки/Садырева О.В., Коршунов И.Г.; Урал.гос. горный ун-т.–Екатеринбург, 2019.– 29 стр.

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.
- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

## 1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S= 800 + 8t – 0,5 t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/$^2$ , при спуске с ускорением 9,8 м/с$^2$.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 м/$^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин$^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8с$^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

## 2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом $C_2$ $H_2$ при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно $10^5$ Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 $см^3$ воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, $\gamma$=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до $10^{-15}$ мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 $см^3$ при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана $CH_4$ до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода СО, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°С до 100° С надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° С, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° С до 2000° С. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° С. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° С. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

## 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 $см^2$ ?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 $см^2$. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ( $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора 1, 5 $\cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре $30^0$ С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 мм$^2$, $\rho = 0{,}017$(Ом$\cdot$ мм$^2$ /м ), $\alpha = 0{,}0044$ град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную
индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ² находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 $см^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 $см^2$, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

## 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с

амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин$^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин$^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин$^{-1.}$ Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с$^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний у =0,1sin0,5πt (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3 \cdot 10^3$ кг/м$^3$.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4 \pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени $10^{-4}$ с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см$^2$ и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см$^2$.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5 \cdot^{10\text{-}6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см$^2$ имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см$^2$ каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 $м^2$ и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 $см^2$
имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 $см^2$ каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 $см^2$ каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

## 5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете ($\lambda$ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda$=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт.
Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое
тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно 2,2·10-7Н/$м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$за одну секунду?

## 6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна 1,097·107$м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.
136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона 9,1·$10^{-31}$кг, масса протона 1,67·$10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью 6·$10^6$м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda$мин =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной *l* находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса $L_Z$ орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *l*
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

## 7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_{7}N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. ( m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_{6}C^{12}$, если известно, что m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^{6}$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_{8}O^{16}$, если m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{8}O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если $m\ _{11}Na^{23} = 22{,}98977$а.е.м.; $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что $m\ _3Li^7 = 7{,}01601$ а.е.м.; $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: $m\ _5B^{11} = 11{,}00931$ а.е.м.; $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.; $m\ _{11}Na^{23} = 22{,}98977$ а.е.м.; $m\ _{11}Na^{22} = 21{,}99444$ а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.; $m\ _2He^4 = 4{,}00260$ а.е.м.; $m\ _2He^3 = 3{,}01603$ а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.; $m\ _8O^{16} = 15{,}99491$ а.е.м.; $m\ _7N^{15} = 15{,}00011$ а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если $m\ _{13}Al^{27} = 2\ 6{,}98154$ а.е.м.; $m\ _2He^4 = 4{,}00260$ а.е.м.; $m\ _{15}P^{30} = 29{,}97263$ а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если
$m\ _1H^2 = 2{,}01410$ а.е.м.; $m\ _1H^3 = 3{,}01605$ а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м.; $m\ _2He^4 = 4{,}00260$ а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. ($m\ _2He^3 = 3{,}01603$ а.е.м.; $m\ _1H^2 = 2{,}01410$ а.е.м.; $m\ _2He^4 = 4{,}00260$ а.е.м.; $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. ($m\ _7N^{1\,4} = 14{,}00307$а.е.м.; $m\ _0n^1 = 1{,}00867$ а.е.м ; $m\ _6C^{14} = 14{,}00324$ а.е.м.; $m\ _1H^1 = 1{,}00783$ а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H^2$= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.( m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{19}K^{41} + 2He^4$. (m $_{20}Ca^{4\ 4}$= 43,95549 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## Основная литература

### 8.1 Основная литература

.


| | |
|---|---|
| 1. | И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с. |
| 2. | В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.) |
| 3. | Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks». |
| 4. | Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks». |
| 5. | Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с. |


## Дополнительная литература


1. И..Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

| Физическая постоянная | Обозначение | Значение |
|---|---|---|
| Скорость света в вакууме | $c$ | $3.00 \cdot 10^{8}$ м/с |
| Гравитационная постоянная | $G$ | $6.67 \cdot 10^{-11}$ м$^3$/(кг·с$^2$) |
| Число Авогадро | $N_A$ | $6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ |
| Молярная газовая постоянная | $R$ | 8.31 Дж/(моль·К) |
| Постоянная Больцмана | $k$ | $1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К |
| Атомная единица массы | *1а.е.м.* | $1.660 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Элементарный заряд | $e$ | $1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл |
| Масса покоя электрона | $m_e$ | $9.11 \cdot 10^{-31}$ кг |
| Масса покоя протона | $m_p$ | $1.67 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Электрическая постоянная | $\varepsilon_0$ | $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м |
| Магнитная постоянная | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м |
| Постоянная Планка | $h$<br>$\hbar$ | $6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с<br>$1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с |

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

| Приставка | | | Множитель | Приставка | | | Множитель |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Наименование | Обозначение | | | Наименование | Обозначение | | |
| | русское | международное | | | русское | международное | |
| экса | Э | E | $10^{18}$ | деци | д | d | $10^{-1}$ |
| пэта | П | P | $10^{15}$ | санти | с | c | $10^{-2}$ |
| тера | Т | T | $10^{12}$ | милли | м | m | $10^{-3}$ |
| гига | Г | G | $10^{9}$ | микро | мк | μ | $10^{-6}$ |
| мега | М | M | $10^{6}$ | нано | н | n | $10^{-9}$ |
| кило | к | k | $10^{3}$ | пико | п | p | $10^{-12}$ |
| Гекто | г | h | $10^{2}$ | фемто | ф | f | $10^{-15}$ |
| Дека | да | da | $10^{1}$ | атто | а | a | $10^{-18}$ |
| *П р и м е ч а н и е*: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.) | | | | | | | |

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

| Величина | Единица | |
|---|---|---|
| | Наименование | Обозначение |
| Длина | метр | м |
| Масса | килограмм | кг |
| Время | секунда | с |
| Плоский угол | радиан | рад |
| Телесный угол | стерадиан | ср |
| Сила, вес | ньютон | Н |
| Давление | паскаль | Па |
| Напряжение (механическое) | паскаль | Па |
| Модуль упругости | паскаль | Па |
| Работа, энергия | джоуль | Дж |
| Мощность | ватт | Вт |
| Частота колебаний | герц | Гц |
| Термодинамическая температура | кельвин | К |
| Разность температур | кельвин | К |
| Теплота, количество теплоты | джоуль | Дж |
| Количество вещества | моль | моль |
| Электрический заряд | кулон | Кл |
| Сила тока | ампер | А |
| Потенциал электрического поля, электрическое напряжение | вольт | В |
| Электрическая емкость | фарад | Ф |
| Электрическое сопротивление | ом | Ом |
| Электрическая проводимость | сименс | См |
| Магнитная индукция | тесла | Тл |
| Магнитный поток | вебер | Вб |
| Индуктивность | генри | Гн |
| Сила света | кандела | кд |
| Световой поток | люмен | лм |
| Освещенность | люкс | лк |
| Поток излучения | ватт | Вт |
| Поглощенная доза излучения (доза излучения) | грэй | Гр |
| Активность изотопа | беккерель | Бк |

Приложение 4

## Внесистемные единицы

| Наименование величины | Единица | | |
|---|---|---|---|
| | Наименование | Обозначение | Соотношение с единицей СИ |
| Масса | тонна<br>атомная единица массы | т<br>а.е.м. | $10^3$ кг<br>$1.66 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Время | минута<br>час<br>сутки | мин<br>ч<br>сут | 60 с<br>3600 с<br>86400 с |
| Плоский угол | градус<br>минута<br>секунда<br>град | …•<br>…′<br>…″<br>град | $1.74 \cdot 10^{-2}$ рад<br>$2.91 \cdot 10^{-4}$ рад<br>$4.85 \cdot 10^{-6}$ рад<br>(π/200) рад |
| Объем, вместимость | литр | Л | $10^{-3}$ м$^3$ |
| Длина | астрономическая единица<br>световой год<br>парсек | а.е.<br>св. год<br>пк | $1.50 \cdot 10^{11}$ м<br>$9.46 \cdot 10^{15}$ м<br>$3.08 \cdot 10^{16}$ м |
| Оптическая сила | диоптрия | Дптр | 1 м$^{-1}$ |
| Площадь | гектар | Га | $10^4$ м$^2$ |
| Энергия | электрон-вольт | эВ | $1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж |
| Полная мощность | вольт-ампер | В·А | |
| *П р и м е ч а н и е:* Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками. | | | |

Приложение 5

## Плотность некоторых твердых тел

| Твердое тело | Плотность, г/см$^3$ | Твердое тело | Плотность, г/см$^3$ |
|---|---|---|---|
| Алюминий | 2.70 | Цезий | 1.90 |
| Барий | 3.50 | Каменная соль | 2,2 |
| Ванадий | 6.02 | Латунь | 8,55 |
| Висмут | 9.80 | Марганец | 7,40 |
| Железо (чугун, сталь) | 7.88 | Платина | 21,4 |
| Литий | 0.53 | Золото | 19,3 |
| Медь | 8.93 | Висмут | 9,8· |
| Никель | 8.90 | Уран | 18,7 |
| Свинец | 11.3 | Цинк | 7.15 |
| Серебро | 10.5 | Вольфрам | 19,3 |

Приложение 6

## Плотность некоторых жидкостей и газов

| Жидкость (при 15° С) | Плотность, г·/см$^3$ | Газ (при нормальных условиях | Плотность, кг/м$^3$ |
|---|---|---|---|
| Вода ( дистиллированная при 4°С) | 1.00 | Водород | 0.09 |
| Глицерин | 1.26 | Воздух | 1.29 |
| Керосин | 0.8 | Гелий | 0.18 |
| Ртуть | 13.6 | Аргон | 1,78 |
| Масло (оливковое, смазочное) | 0.9 | Азот | 1,25 |
| Масло касторовое | 0.96 | Кислород | 1.43 |
| Сероуглерод | 1.26 | | |
| Эфир | 0.7 | | |
| Спирт | 0.80 | | |

Приложение 7

## Удельное сопротивление $\rho$ некоторых материалов

| Материал | Удельное сопротивление, Ом·м | Материал | Удельное сопротивление, Ом·м |
|---|---|---|---|
| Алюминий | $2{,}53\cdot10^{-8}$ | Ртуть | $9{,}6\cdot10^{-7}$ |
| Алюминий провод | $2{,}87\cdot10^{-8}$ | Свинец | $2{,}08\cdot10^{-7}$ |
| Бумага | $10^{15}$ | Серебро | $1{,}6\cdot10^{-8}$ |
| Вода дистиллированная | $10^{4}$ | Сталь литая | $1{,}3\cdot10^{-7}$ |
| Вода морская | 0,3 | Сталь чистая | $1{,}01\cdot10^{-7}$ |
| Вольфрам | $5{,}5\cdot10^{-8}$ | Стекло | $10^{11}$ |
| Графит | $3{,}9\cdot10^{-6}$ | Стекло кварцевое | $10^{16}$ |
| Железо чистое | $9{,}8\cdot10^{-8}$ | Угольные щётки | $4\cdot10^{-5}$ |
| Железо | $8{,}7\cdot10^{-8}$ | Цинк | $5{,}9\cdot10^{-8}$ |
| Золото | $2{,}2\cdot10^{-8}$ | Чугун серый | $1\cdot10^{-6}$ |
| Константан | $5\cdot10^{-7}$ | Никель | $8{,}7\cdot10^{-8}$ |
| Масло парафиновое | $10^{14}$ | Нихром | $1{,}12\cdot10^{-6}$ |
| Магний | $4{,}4\cdot10^{-8}$ | Олово | $1{,}2\cdot10^{-7}$ |
| Манганин | $4{,}3\cdot10^{-7}$ | Платина | $1{,}07\cdot10^{-7}$ |
| Медь | $1{,}72\cdot10^{-8}$ | Медь провод | $1{,}78\cdot10^{-8}$ |

Приложение 8

## Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

| Вещество | Проницаемость | Вещество | Проницаемость |
|---|---|---|---|
| Ацетон | 21,4 | Парафин | 2,0 |
| Вакуум | 1,0 | Парафинированная бумага | 2,0 |
| Воздух | 1,000594 | Полиэтилен | 2,2 |
| Вода | 81 | Слюда | 7,0 |
| Вода дистиллированная | 31 | Спирт этиловый | 25,1 |
| Воск | 7,8 | Спирт метиловый | 33,5 |
| Керосин | 2,0 | Стекло | 7,0 |
| Масло | 5,0 | Фарфор | 5,0 |
| Масло трансформаторное | 2,2 | Эбонит | 2,6 |

Приложение 9

## Греческий алфавит

| Обозначения букв | Название букв | Обозначения букв | Название букв |
|---|---|---|---|
| A, α | Альфа | N, ν | ню |
| B, β | Бета | Ξ, ξ | кси |
| Γ, γ | Гамма | O, o | омикрон |
| Δ, δ | Дэльта | Π, π | пи |
| E, ε | Эпсилон | P, ρ | ро |
| Z, ς | Дзета | Σ, σ | сигма |
| H, η | Эта | T, τ | тау |
| Θ, θ | Тэта | Y, υ | ипсилон |
| J, i | Иота | Φ, φ | фи |
| K, κ | Каппа | X, χ | хи |
| Λ, λ | Ламбда | Ψ, ψ | пси |
| M, μ | Ми | Ω, ω | омега |

СОДЕРЖАНИЕ


| | |
|---|---|
| Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ | 3 |
| 1. Механика | 4 |
| 2. Молекулярная физика и термодинамика | 7 |
| 3. Электричество и магнетизм | 9 |
| 4. Механические и электромагнитные колебания и волны | 11 |
| 5. Волновая и квантовая оптика | 15 |
| 6. Квантовая физика и физика атома | 18 |
| 7. Элементы ядерной физики | 20 |
| Список литературы | 23 |
| Приложения | 24 |

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

# Б1.О.09 ОСНОВЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2021

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры Электрификации горных предприятий | Рассмотрена методической комиссией Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол №1 от 28.09.2021 г. | Протокол №2 от 12.10.2021 г. |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение…….2
2. Тематический план дисциплины…….....4
3. Методические указания к лекционному курсу……5
4. Вопросы по дисциплине…….6
5. Учебно-методическое обеспечение дисциплины……7
5.1. Основная литература…….7
5.2. Дополнительная литература…….7

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Методические материалы по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

**Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4.1), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов, или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная

организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 2.ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

**Для студентов очной формы обучения:**

| № | Тема, раздел | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | Практическая подготовка | Самостоятельная работа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | лекции | практич. занятия и др. формы | лаборат. занятия | | |
| 1. | Современный энергоресурсный потенциал мировой экономики | 2 | - | - | - | 2 |
| 2. | Традиционная и альтернативная электроэнергетика | 4 | - | - | - | 10 |
| 3. | Электроэнергетическая система России | 2 | - | - | - | 4 |
| 4. | Электроснабжение горных предприятий | 2 | - | - | - | 6 |
| 5. | Особенности электрооборудования горных предприятий | 2 | - | - | - | 8 |
| 6. | Основы безопасной эксплуатации электротехнических комплексов горных предприятий | 2 | - | - | - | 12 |
| 7. | Современное состояние и пути развития электрификации и автоматизации горных производств | 2 | - | - | - | 3 |
| 8. | Квалификационная характеристика горного инженера-электрика | 2 | - | - | - | - |
| 9. | Подготовка к зачету | | - | - | - | 9 |
| | **ИТОГО** | **18** | **-** | **-** | **-** | **54** |

**Для студентов заочной формы обучения:**

| № | Тема, раздел | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | Практическая подготовка | Самостоятельная работа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | лекции | практич. занятия и др. формы | лаборат. занятия | | |
| 1. | Современный энергоресурсный потенциал мировой экономики | - | - | - | - | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | Традиционная и альтернативная электроэнергетика | - | - | - | - | 14 |
| 3. | Электроэнергетическая система России | - | - | - | - | 6 |
| 4. | Электроснабжение горных предприятий | 0,5 | - | - | - | 7,5 |
| 5. | Особенности электрооборудования горных предприятий | 0,5 | - | - | - | 9,5 |
| 6. | Основы безопасной эксплуатации электротехнических комплексов горных предприятий | 0,5 | - | - | - | 13,5 |
| 7. | Современное состояние и пути развития электрификации и автоматизации горных производств | - | - | - | - | 5 |
| 8. | Квалификационная характеристика горного инженера-электрика | 0,5 | - | - | - | 1,5 |
| 9. | Подготовка к зачету | | - | - | - | 9 |
| | **ИТОГО** | **2** | **-** | **-** | **-** | **70** |

## 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛЕКЦИОННОМУ КУРСУ

Лекционный курс по дисциплине «Основы профессиональной деятельности» начинается с рассмотрения общих сведений **об энергетических ресурсах** и мировых запасах основных энергоресурсов. Рассматриваются невозобновляемые источники энергии: органическое, неорганическое и ядерное топливо. Приводятся сведения о возобновляемых источниках энергии, к которым относят гидроэнергетические ресурсы, геотермальные ресурсы, энергию ветра, солнечную энергию. Приводится состав и основные свойства органических твердых, жидких и газообразных топлив. Теплота сгорания топлива. Калориметрический и аналитический способы определения теплоты сгорания топлива. Дается понятие об условном топливе. Приводятся краткие сведения о неорганических топливах.

**Производство тепловой и электрической энергии на тепловых электростанциях** начинает рассматриваться с классификации типов тепловых электростанций. Технологические схемы конденсационных электростанций (КЭС). Энергетический баланс КЭС. Способы повышения эффективности КЭС. Особенности технологической схемы теплоэлектроцентралей (ТЭЦ). Энергетический баланс ТЭЦ. Современные экологические и технологические проблемы существующих тепловых электростанций. Газотурбинные (ГТУ) и парогазовые (ПГУ) энергетические установки. Технологические схемы и основные технические характеристики.

**Производство электрической энергии на гидроэлектростанциях.** Гидроэнергетические установки. Основы использования водной энергии, работа водного потока. Гидротехнические сооружения ГЭС. Схемы концентрации напора, водохранилища и характеристики бьефов ГЭС. Регулирование речного стока водохранилищами ГЭС.

Особенности технологического процесса на гидроаккумулирующих электростанциях (ГАЭС). Мировой опыт эксплуатации ГАЭС. Состояние и перспективы развития гидроаккумулирующей энергетики в России.

Приливная энергетика. Природа возникновения приливной волны. Технологическая схема приливных электростанций (ПЭС). Особенности функционирования приливных электростанций.

Современные экологические и технологические проблемы существующих гидроэлектростанций.

**Производство тепловой и электрической энергии на атомных электростанциях.** Типы атомных электростанций. Циклы АЭС и их эффективность. Энергетический баланс АЭС. Ядерные энергетические установки, типы ядерных реакторов. Особенности АЭС с реакторами на быстрых нейтронах. Современные экологические и технологические проблемы существующих АЭС.

Лекционный курс заканчивается рассмотрением структуры **электроэнергетической системы России.** Объединенные (ОЭС) и районные (РЭС) энергосистемы. Задачи и сущность реформы ЕЭС России. Номинальные напряжения источников и приемников электрической энергии.

Более подробная информация по вопросам рабочей программы дисциплины ««Основы профессиональной деятельности» может быть получена студентами при проработке основной и дополнительной литературы, указанной в рабочей программе дисциплины. Не исключается использование ресурсов Интернета и печатной литературы, изданной в последние годы.

## 4. ВОПРОСЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Энергетические ресурсы. Понятие, разновидности ресурсов, их использование.
2. Органические твердые, жидкие и газообразные топлива. Элементарный состав и основные свойства.
3. Теплота сгорания рабочего топлива. Условное топливо: понятие, использование.
4. Возобновляемые источники энергии. Основные характеристики.
5. Производство электроэнергии на КЭС. Технологическая схема, распределение тепловых потоков, основные показатели.
6. Производство электроэнергии на ТЭЦ. Технологическая схема, особенности, основные показатели.
7. Производство электроэнергии на приплотинных гидроэлектростанциях (ГЭС). Технологическая схема, основные показатели.
8. Производство электроэнергии на гидроаккумулирующих электростанциях (ГАЭС). Технологическая схема, основные показатели.
9. Производство электроэнергии на приливных электростанциях (ПЭС). Технологическая схема, основные показатели.
10. Производство электроэнергии на атомных электростанциях. Технологическая схема АЭС на тепловых нейтронах.
11. Производство электроэнергии на атомных электростанциях. Технологическая схема АЭС на быстрых нейтронах.
12. Единая энергетическая система России.
13. Уровни стандартных номинальных напряжений источников и электроприемников.
14. Основные требования к системам внешнего электроснабжения горных предприятий.
15. Классификация электроприемников по степени надежности их электроснабжения.
16. Радиальные и магистральные схемы внешнего электроснабжения предприятий. Их особенности, достоинства и недостатки.
17. Типовые схемы внешнего электроснабжения горных предприятий. Способы резервирования источников и электрических сетей.

18. Особенности использования электроэнергии на предприятиях с подземными горными работами.
19. Особенности использования электроэнергии на предприятиях с открытыми горными работами.
20. Особенности использования электроэнергии на обогатительных фабриках.
21. Классификация производственных помещений в отношении опасности поражения электрическим током.
22. Уровни взрывозащиты рудничного электрооборудования. Область применения, основные требования к рудничному электрооборудованию.
23. Виды взрывозащиты рудничного электрооборудования. Основные требования НТД к различным видам взрывозащиты рудничного электрооборудования.
24. Маркировка рудничного электрооборудования.
25. Воздействие электрического тока на человека. Ощутимый ток. Неотпускающий ток. Фибрилляционный ток.
26. Виды поражений электрическим током.
27. Факторы, определяющие опасность поражения электрическим током.
28. Общие требования ПУЭ к безопасному устройству электроустановок. Меры защиты от прямого прикосновения.
29. Общие требования ПУЭ к безопасному устройству электроустановок. Меры защиты при косвенном прикосновении.
30. Электрозащитные средства, применяемые в электроустановках напряжением до и выше 1000 В. Основные и дополнительные электрозащитные средства.
31. Общие правила пользования электрозащитными средствами, применяемыми в электроустановках напряжением до и выше 1000 В.
32. Освобождение пострадавшего от токоведущих частей электроустановок.
33. Первая доврачебная помощь пострадавшему от электрического тока.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1 Основная литература

| № п/п | Наименование | Кол-во экз. |
|---|---|---|
| 1 | Основы современной энергетики [Электронный ресурс]: Учебник для вузов: в 2 т. / Под общ.ред. Аметистова Е. В. – М.: Изд-во МЭИ, 2010. http://www.iprbookshop.ru/366.html | Эл. ресурс |

### 5.2 Дополнительная литература

| № п/п | Наименование | Кол-во экз. |
|---|---|---|
| 2 | Быстрицкий Г. Ф., Гасангаджиев Г. Г., Кожиченков В. С. Общая энергетика (Производство тепловой и электрической энергии): учебник – М.: КНОРУС, 2013. – 408 с. – (Бакалавриат). | 20 |
| 3 | Электрификация горного производства: Учебник для вузов: В 2 т. / Под ред. Л. А. Пучкова и Г. Г. Пивняка. – М.: Издательство МГГУ, 2007. | 41 |
| 4 | Цапенко Е. Ф., Шкундин С. З. Электробезопасность на горных предприятиях: Учебное пособие – 2-е изд., стер. – М.: Издательство МГГУ, 2003. – 103 с. | 13 |
| 5 | Чеботаев Н. И. Электрификация горного производства. Часть 1. Безопасность при эксплуатации электротехнических устройств горного | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| | производства: Учебное пособие для вузов. – М.: Издательство МГГУ, 2006. – 138 с. | |

Методические материалы для самостоятельной работы студентов составил: доцент кафедры ЭГП Стариков В. С., доцент, канд. техн. наук.

Методические материалы одобрены на заседании кафедры электрификации горных предприятий (ЭГП).

Заведующий кафедрой ЭГП, профессор А. Л. Карякин

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

# РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

# ОСНОВЫ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ САНИТАРИИ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

год набора: 2022

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
| Безопасность горного производства | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Елохин В.А. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 14.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

Содержание

1 Методические указания для выполнения практических работ…… 3
2 Методические указания для выполнения самостоятельной работы…… 25
Список литературы……44

# 1 Методические указания для выполнения практических работ

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1**

«Выявление опасных и вредных производственных факторов»

Безопасность условий труда на рабочем месте определяется наличием опасных и вредных производственных факторов (ОВПФ), которые могут возникнуть при выполнении технологических операций или видов работ (ГОСТ 12.0.003 — 74 «ССБТ. Опасные и вредные производственные факторы»). При этом учитываются источники механических травм; источники шума, вибрации, ионизирующих излучений; определяются условия микроклимата в помещениях; оценивается освещенность в помещениях и на конкретном рабочем месте; определяется возможность получения электротравм; исследуется токсичность применяемых веществ; проводится оценка пожаро- и взрывоопасности объекта; определяется возможность использования грузоподъемных машин и механизмов, а также сосудов, находящихся под давлением.

*Идентификация опасных и вредных производственных факторов* - это распознавание опасностей, установление причин их возникновения, пространственных и временных характеристик опасностей, вероятности, величины и последствий их появления.

*Опасным* называется производственный фактор, воздействие которого на работающего в определенных условиях приводит к травме или другому внезапному резкому ухудшению здоровья.

*Вредным* называется производственный фактор, воздействие которого на работающего в определенных условиях приводит постепенному ухудшению здоровья, профессиональному заболеванию или снижению работоспособности.

ГОСТ 12.0.003-74 подразделяет опасные и вредные производственные факторы по природе действия на четыре группы:

*Физические опасные и вредные производственные факторы:*

движущиеся машины и механизмы, и их незащищенные подвижные части;

передвигающиеся изделия, материалы, заготовки;

разрушающиеся конструкции;

обрушивающиеся горные породы;

повышенная запыленность, загазованность воздуха рабочей зоны;

повышенная или пониженная температура поверхностей оборудования, материалов;

повышенная или пониженная температура рабочей зоны;

повышенные уровни шума, вибрации, ультразвука, инфразвуковых колебаний;

повышенное или пониженное барометрическое давление и его резкое изменение;

повышенные или пониженные влажность, подвижность, ионизация воздуха;

повышенный уровень ионизирующих излучений;

повышенные значения напряжения в электрической цепи;

повышенные уровни статического электричества, электромагнитных излучений;

повышенная напряженность электрического и магнитного полей;

отсутствие и недостаток естественного света;

недостаточная освещенность рабочей зоны;

повышенная яркость света;

пониженная контрастность;

прямая и отраженная блескость;

повышенная пульсация светового потока;

повышенные уровни ультрафиолетовой и инфракрасной радиации;

острые кромки, заусеницы и шероховатость на поверхности заготовок, инструментов и оборудования;

расположение рабочего места на значительной высоте относительно пола (земли).

*Химические опасные и вредные производственные факторы:*

химические вещества, которые по характеру воздействия на организм человека подразделяются на:

токсические (бензол, толуол, ксилол, нитробензол, ртуть, органические соединения, тетраэтилсвинец, дихлорэтан);

раздражающие (кислоты, щелочи, фосген, аммиак, оксиды серы и азота, сероводород);

сенсибилизирующие вещества (соединения ртути, платина, формальдегид);

канцерогенные вещества (ПАУ, 3,4 – бенз(а)пирен, мазут, гудрон, битум, масла, сажа, асбест, ароматические амины).

вещества, обладающие мутагенной активностью (органические перекиси, иприт, оксид этилена, формальдегид)

вещества, влияющие на репродуктивную функцию (бензол, сероуглерод, свинец, сурьма, марганец, марганец, ядохимикаты, никотин, соединение ртути).

*Биологические опасные и вредные производственные факторы:*

патогенные микроорганизмы (бактерии, вирусы, рилкетсин, спирохеты, грибы, простейшие)

продукты жизнедеятельности микроорганизмов;

растения;

животные.

*Психофизиологические опасные и вредные производственные факторы:*

статические перегрузки;

динамические перегрузки;

умственные перенапряжения;

перенапряжение анализаторов;

монотонность труда;

эмоциональные перегрузки.

Воздействие опасных и вредных производственных факторов на организм человека

В производственных условиях, как правило, действует комплекс вредностей и опасностей.

Движущиеся машины и механизмы, подвижные части оборудования, передвигающиеся изделия, разрушающиеся конструкции способствуют возникновению механических травм (ушибов, переломов, ран, увечий и т.д.), запыленности и загазованности воздуха рабочей зоны, повышенных уровней шума, статического электричества, напряжения зрительных анализаторов, статических перегрузок, монотонности труда и т.д. Все опасности в комплексе усиливают воздействие на организм человека в процессе труда.

*Запыленность, загазованность воздуха рабочей зоны.* Вредными являются вещества, которые при контакте с организмом человека могут вызвать производственные травмы, профессиональные заболевания или отклонения в состоянии здоровья, обнаруживаемые современными методами, как в процессе работы, так и отдалённые сроки жизни настоящего и последующих поколений (ГОСТ 12.1.007-76 «ССБТ. Вредные вещества, классификация и общие требования безопасности»). В санитарно-гигиенической практике принято разделять вредные вещества на химические вещества и производственную пыль.

Действие вредных химических веществ на организм человека обусловлено их физико-химическими свойствами. Согласно ГОСТ 12.0.003-2015 группа химически опасных и вредных производственных факторов по характеру воздействия на организм человека подразделяется на следующие подгруппы:

обще токсические; раздражающие; сенсибилизирующие; канцерогенные; мутагенные; влияющие на репродуктивную функцию.

По степени воздействия на организм человека все вредные вещества подразделяются на четыре класса (ГОСТ 12.1.007-76).

**1 класс** – вещества чрезвычайно опасные (ртуть, свинец).

**2 класс** – вещества высоко опасные (оксиды азота, бензол, йод, марганец, медь, сероводород).

**3 класс** – вещества умеренно опасные (ацетон, ксилол, сернистый ангидрид, метиловый спирт).

**4 класс** – вещества малоопасные (аммиак, бензин, скипидар).

Производственная пыль является очень распространённым опасным и вредным производственным фактором. Пыль может оказывать на организм человека фиброгенное, раздражающее и токсическое действие. Поражающие действия пыли во многом определены её дисперсностью (размером частиц пыли). Наибольшей фиброгенной активностью обладают аэрозоли с размером частиц до 5мкм.

Степень опасности пыли зависит также от формы частиц, их твердости, волокнистости, электрозаряженности. Вредность производственной пыли обуславливает её способность вызывать профессиональные заболевания легких (пневмокониозы), пылевые бронхиты, пневмонии, астматические риниты, бронхиальную астму. Аэрозоли металлов, пыль ядохимикатов может привести к хроническим и острым отравлениям.

*Параметры микроклимата.* Трудовая деятельность человека всегда протекает в определенных метеорологических условиях, которые определяются сочетаниями температуры воздуха, скорости его движения и относительной влажности, барометрическим давлением и тепловым излучениям от нагретых поверхностей. Эти показатели в совокупности (за исключением барометрического давления) принято называть микроклиматом производственного помещения. При благоприятных сочетаниях параметров микроклимата человек испытывает состояние теплового комфорта, что является важным условием производительности труда и предупреждением заболеваний.

Параметры микроклимата могут изменяться в очень широких пределах, в то время как необходимым условием жизнедеятельности человека является сохранения постоянства температуры тела. При отклонении метеорологических параметров от оптимальных в организме человека для поддержания постоянства температуры тела начинают происходить процессы, направленные на регулирование теплопродукции и теплоотдачи. Эта способность организма человека сохранять постоянство температуры тела получила название терморегуляции.

При температуре воздуха более чем $30^{O}$С и значительном тепловом излучении от нагретых поверхностей наступает нарушение терморегуляции организма, что может привести к перегреву. При этом наблюдается нарастающая слабость, головная боль, шум в ушах, искажение восприятия (окраска всего в красный или зелёный цвет), тошнота, рвота, повышается температура тела. Дыхание и пульс учащаются,

артериальное давление вначале возрастает, затем падает. В тяжелых случаях наступает тепловой удар, возможна судорожная болезнь, характеризующаяся слабостью, головной болью, резкими судорогами, преимущественно в коленях.

Длительное и сильное воздействие низких температур может вызвать различные неблагоприятные изменения в организме человека. Местное и общее охлаждение организма является причиной таких заболеваний, как миозиты, невриты, радикулиты, простудные заболевания.

Физиологически оптимальной является влажность воздуха 40-60%. Повышенная относительная влажность воздуха (более 75-85%) в сочетании с низкими температурами оказывает значительное охлаждающее действие, а в сочетании с высокими – способствует перегреванию организма. Относительная влажность менее 25% приводит к высыханию слизистых оболочек и снижении защитной деятельности мерцательного эпителия верхних дыхательных путей.

Человек начинает ощущать движение воздуха при его скорости 0,1 м/с. Большая скорость воздуха в сочетании с низкими температурами ведет к охлаждению организма.

Тепловое воздействие облучения на организм человека зависит от длины волны, интенсивности потока излучения, величины облучаемого участка тела, длительности облучения, угла падения лучей, виды одежды человека. Наибольшей проникающей способностью обладают красные лучи, которые плохо задерживаются кожей и глубоко проникают в биологические ткани, вызывая повышение их температуры.

*Ионизирующие излучения.* Биологическое действие радиации на живой организм начинается на клеточном уровне. Ионизирующее излучение вызывает поломку хромосом, что приводит к изменению генного аппарата и образованию дочерних клеток, неодинаковых с исходными, что ведёт к мутациям, которые могут проявляться на последующих поколениях. При ионизирующих излучениях происходит локальное повреждение кожи (лучевой ожог), возникает катаракта глаз (потемнение хрусталика), повреждение половых органов (кратковременная или постоянная стерилизация). Воздействие ионизирующего излучения может привести к лучевой болезни, представляющей собой комплекс стойких изменений в центральной нервной системе, крови, кроветворных органах, кровеносных сосудах, железах внутренней секреции.

*Электромагнитные поля.* Электромагнитное поле (ЭМП) обладает определенной энергией и распространяется в виде электромагнитных волн. Основными параметрами электромагнитных колебаний являются: длина волны, частота колебаний и скорость распространения.

Основной характеристикой постоянного магнитного (магнитостатического) поля (ПМП) является напряженность магнитного поля, определяемая по силе, действующей в поле на проводник с током, единицей является ампер на метр (А/м).

Основной характеристикой постоянного электрического (электростатического) поля (ЭСП) является его напряженность, определяемая по силе, действующей в поле на электрический заряд, выражается в вольтах на метр (В/м).

Переменное электромагнитное поле представляет собой совокупность магнитного и электрического полей и распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн. Область распространения электромагнитных волн от источника излучения условно разделяют на три зоны: ближнюю (зону индукции), промежуточную (зону интерференции) и дальнюю (волновую или зону излучения). Дальняя зона начинается с расстояния от излучателя, равного примерно 6 длинам волн. Между ними располагается промежуточная зона.

Степень воздействия электромагнитных излучений на организм человека зависит от диапазона частот. Интенсивности воздействия соответствующего фактора, продолжительности облучения, характера излучения (непрерывное или модулированное), режима облучения, размеров облучаемой поверхности тела и индивидуальных особенностей организма.

Длительное воздействие электрического поля (ЭП) низкой частоты вызывает функциональные нарушения центральной нервной и сердечно-сосудистой систем человека, а также некоторые изменения в составе крови, особенно выраженные при высокой напряженности ЭП.

Биологическое действие электромагнитных полей (ЭМП) более высоких частот связывают в основном с их тепловым и аритмическим эффектом. Тепловое действие может привести к повышению температуры тела и местному избирательному нагреву тканей, органов, клеток вследствие перехода электромагнитной энергии в тепловую. Биологическая активность ЭМП увеличивается с возрастанием частоты колебаний и является наибольшей в области СВЧ. Облучение ЭМП большой интенсивности может привести к разрушительным изменениям в тканях и органах. Тяжелые поражения возникают только в аварийных случаях и встречаются крайне редко. Длительное хроническое воздействие ЭМП небольшой интенсивности (не вызывающих теплового эффекта) приводит к различным нервным и сердечно-сосудистым расстройствам (головной боли, утомляемости, нарушению сна, боли в области сердца и т.п.). Возможны нарушения со стороны эндокринной системы и изменение состава крови. На ранних стадиях нарушения в состоянии здоровья носят обратимый характер.

В зависимости от диапазона частот в основу гигиенического нормирования электромагнитных излучений положены разные принципы. Критерием безопасности для человека, находящегося в электрическом поле промышленной частоты, принята напряженность этого поля.

*Лазерное излучение.* Основной особенностью лазерного излучения является его острая направленность (малая расходимость пучка излучения). Воздействие лазерного излучения на организм человека носит сложный характер:

термическое вызывает ожог, некроз тканей человека, нагрев, плазмо- и парообразование тканей, и, как следствие, их механическое разрушение.

нетермическое действие вызывает облучение организма электромагнитной энергии, облучение глаз человека, возможность поражения электрическим током, запыленность и загазованность воздуха рабочей зоны, повышение уровней шума и вибрации при работе лазера.

*Ультрафиолетовое излучение.* Длительное воздействие УФИ на человека может привести к серьезным положениям глаз и кожи. Острые поражения обычно проявляются в виде кератитов (воспаленная роговица) и помутнение хрусталика. Длительное воздействие УФИ на кожу человека может привести к раку кожи.

*Производственный шум.* Многочисленными исследованиями установлено, что шум является общебиологическим раздражителем и в определенных условиях может влиять на все органы и системы организма человека. Наиболее полно изучено влияние шума на слуховой орган человека. Интенсивный шум при ежедневном воздействии приводит к возникновению профессионального заболевания – тугоухости, основным симптомом которого является постепенная потеря слуха на оба уха, первоначально лежащая в области высоких частот (4000 Гц), с последующим распространением на более низкие частоты, определяющие способность воспринимать речь.

При очень большом звуком давлении может произойти разрыв барабанной перепонки. Наиболее неблагоприятными для органа слуха является высокочастотный шум (1000...4000 Гц).

Кроме непосредственного воздействия на орган слуха шум влияет на различные отделы головного мозга, изменяя нормальные процессы высшей нервной деятельности. Это так называемое неспецифическое воздействие шума может возникнуть даже раньше, чем изменения в органе слуха. характерными являются жалобы на повышенную утомляемость, общую слабость, раздражительность, апатию, ослабление памяти, потливость и т.п.

Многочисленными исследованиями установлено, что шум является биологическим раздражителем. Интенсивный шум при ежедневном воздействии приводит к возникновению профессионального заболевания – тугоухости, при очень большом звуковом давлении может произойти разрыв барабанной перепонки. Шум влияет на различные отделы головного мозга, изменяя нормальные процессы высшей нервной деятельности. Это воздействие может возникнуть раньше, чем изменение в органе слуха. Исследованиями последних лет установлено, что под влиянием шума наступают изменения в органе зрения человека и вестибулярном аппарате, нарушаются функции желудочно-кишечного тракта, повышается внутричерепное давление. Шум, особенно прерывистый, импульсный, ухудшает точность выполнения рабочих операций, затрудняет прием и восприятие информации.

*Производственная вибрация.* В производственных условиях длительное воздействие вибрации приводит к нарушениям деятельности нервной системы, сердечно-сосудистой системы, вестибулярного аппарата, нарушению обмена веществ и, в конечном счете, – к «вибрационной болезни».

При работе с ручными машинами, вибрация которых наиболее интенсивна в высокочастотной области спектра (выше 125 Гц), возникают сосудистые растройства, спазм периферических сосудов. Локальная вибрация, имеющая широкий частотный спектр, часто с наличием узоров (клепка, бурение, срубка) вызывает различную степень сосудистых, нервно-мышечных, костно-суставных и других нарушений.

*Ультразвук.* Наиболее опасным является контактное воздействие ультразвука, которое возникает при удержании инструмента во время пайки, лужения. Воздействие ультразвука может привести к поражению периферической нервной и сосудистой систем человека в местах контакта (вегетативные полиневриты, мышечная слабость пальцев, кистей и предплечья).

*Инфразвук.* Инфразвук оказывает неблагоприятное воздействие весь организм человека, в том числе и на орган слуха, понижая слуховую чувствительность на всех частотах. Инфразвуковые колебания воспринимаются как физическая нагрузка: возникает утомление, головная боль, головокружение, вестибулярные нарушения, снижается острота зрения и слуха, нарушается периферическое кровообращение, появляется чувство страха. Особенно неблагоприятные последствия вызывают инфразвуковые колебания с частотой 2…15 Гц в связи с возникновением резонансных явлений в организме человека, причем наиболее опасна частота 7 Гц, т.к. колебания с такой частотой совпадают с альфа-ритмом биотоков мозга.

*Повышенные уровни напряжения в электрической цепи.* Электрические установки, с которыми приходится иметь дело работающим на производстве, представляет для человека большую потенциальную опасность, которая усугубляется тем, что органы чувств человека не могут на расстоянии обнаружить наличие электрического напряжения на оборудовании. Проходя через тело человека, электрический ток оказывает сложное воздействие, являющееся совокупностью термического (нагрев тканей и биологических сред), электролитического (разложение крови и плазмы) и биологического (раздражение и возбуждение нервных волокон) воздействий. Наиболее сложным является биологическое действие, свойственное только живым организмам.

Алгоритм выполнения практического задания

1. Изучить теоретический материал и нормативно-правовую базу.
2. Согласно профилю специальности обучающегося выбрать произвольно три варианта наименования рабочих мест из предложенных.
3. В соответствии с ГОСТ 12.0.003 — 2015 провести идентификацию опасных и вредных производственных факторов, которые могут возникнуть при выполнении технологических операций (видов работ) на выбранных для анализа рабочих местах.
4. Выявить оборудование (материалы, инструменты и т.п.), которые являются непосредственными источниками идентифицированных факторов.
5. По результатам проведенного анализа на каждое рабочее место выбранных профессий заполняются столбцы таблицы с указанием идентифицированных производственных факторов и оборудования (материалов, изделий, инструментов), при работе с которыми они встречаются.
6. Оформить отчет о практической работе в соответствии с требованиями к оформлению практических работ и защитить ее у преподавателя.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2
## «Идентификация опасных и вредных производственных факторов»

Цель занятия: Получить практические навыки определения опасных и вредных производственных факторов на рабочем месте.

Безопасность условий труда на рабочем месте определяется наличием опасных и вредных производственных факторов (ОВПФ), которые могут возникнуть при выполнении технологических операций или видов работ (ГОСТ 12.0.003-2015 «ССБТ. Опасные и вредные производственные факторы. Классификация»). При этом учитываются источники механических травм; источники шума, вибрации, ионизирующих излучений; определяются условия микроклимата в помещениях; оценивается освещенность в помещениях и на конкретном рабочем месте; определяется возможность получения электротравм; исследуется токсичность применяемых веществ; проводится оценка пожаро- и взрывоопасности объекта; определяется возможность использования грузоподъемных машин и механизмов, а также сосудов, находящихся под давлением.

*Идентификация опасных и вредных производственных факторов* - это распознавание опасностей, установление причин их возникновения, пространственных и временных характеристик опасностей, вероятности, величины и последствий их появления.

*Опасным* называется производственный фактор, воздействие которого на работающего в определенных условиях приводит к травме или другому внезапному резкому ухудшению здоровья.

*Вредным* называется производственный фактор, воздействие которого на работающего в определенных условиях приводит постепенному ухудшению здоровья, профессиональному заболеванию или снижению работоспособности.

ГОСТ 12.0.003-2015 подразделяет опасные и вредные производственные факторы по характеру происхождения на следующие группы:

1) факторы, порождаемые физическими свойствами и характеристиками состояния материальных объектов производственной среды *(*движущиеся машины и механизмы, и их незащищенные подвижные части; передвигающиеся изделия, материалы, заготовки; разрушающиеся конструкции; обрушивающиеся горные породы; повышенная запыленность, загазованность воздуха рабочей зоны; повышенная или пониженная температура поверхностей оборудования, материалов; повышенная или пониженная температура рабочей зоны; повышенные уровни шума, вибрации, ультразвука, инфразвуковых колебаний; повышенное или пониженное барометрическое давление и его резкое изменение; повышенные или пониженные влажность, подвижность, ионизация воздуха; повышенный уровень ионизирующих излучений; повышенные значения напряжения в электрической цепи; повышенные уровни статического электричества, электромагнитных излучений; повышенная напряженность электрического и магнитного полей; отсутствие и недостаток освещения; расположение рабочего места на значительной высоте относительно пола (земли); невесомость и т.д.);

2) факторы, порождаемые химическими и физико-химическими свойствами используемых или находящихся в рабочей зоне веществ и материалов.

Опасные и вредные производственные факторы, обладающие свойствами химического воздействия на организм работающего человека, называемые для краткости химическими веществами, представляют из себя физические объекты (или их составные компоненты) живой и неживой природы, находящиеся в определенном физическом состоянии и обладающие такими химическими свойствами, которые при взаимодействии с организмом человека в рамках биохимических процессов его функционирования приводят к повреждению целостности тканей организма и (или) нарушению его нормального функционирования (кислоты, щелочи)

Химические вещества могут находиться в твердом, пастообразном, порошкообразном, жидком, парообразном, газообразном, аэрозольном состояниях, в том числе наноразмеров.

По составу химические вещества подразделяют на индивидуальные вещества и смеси.

3) факторы, порождаемые биологическими свойствами микроорганизмов, находящихся в биообъектах и (или) загрязняющих материальные объекты производственной среды (патогенные микроорганизмы (бактерии, вирусы), продукты жизнедеятельности микроорганизмов; растения; животные);

4) факторы, порождаемые психическими и физиологическими свойствами и особенностями человеческого организма и личности работающего (физические и нервно-психические перегрузки);

Физические перегрузки подразделяются на статические и динамические.

Нервно-психические перегрузки подразделяются на: умственное перенапряжение, перенапряжение анализаторов, монотонность труда, эмоциональные перегрузки.

5) факторы, порождаемые поведенческими реакциями и защитными механизмами живых существ (укусы, ужаливания, выброс ядовитых или иных защитных веществ и т.п.);

6) факторы, порождаемые социально-экономическими и организационно-управленческими условиями осуществления трудовой деятельности (плохая организация работ, низкая культура безопасности и т.п.).

В производственных условиях, как правило, действует комплекс вредностей и опасностей.

Движущиеся машины и механизмы, подвижные части оборудования, передвигающиеся изделия, разрушающиеся конструкции способствуют возникновению механических травм (ушибов, переломов, ран, увечий и т.д.), запыленности и загазованности воздуха рабочей зоны, повышенных уровней шума, статического электричества, напряжения зрительных анализаторов, статических перегрузок, монотонности труда и т.д. Все опасности в комплексе усиливают воздействие на организм человека в процессе труда.

Порядок выполнения практического задания

1 Изучить теоретический материал.

2 Из таблицы 1 выбрать вариант задания.

3 В соответствии с ГОСТ 12.0.003-2015 провести идентификацию опасных и вредных производственных факторов, которые могут возникнуть при выполнении технологических операций (видов работ) на рабочих местах.

4. Выявить оборудование (материалы, инструменты и т.п.), которые являются непосредственными источниками идентифицированных факторов

По результатам проведенного анализа на каждое рабочее место выбранных профессий заполняются столбцы таблицы 2 с указанием идентифицированных производственных факторов и оборудования (материалов, изделий, инструментов), при работе с которыми они встречаются.

Таблица 1. Варианты заданий

| № | Профессии | Перечень оборудования |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 1 | Стекольщик | Стекла, зеркала, стеклорезы, зажимы, различные присоски, шаблоны для фигурной резки |
| 2 | Библиотекарь | ПЭВМ, книги |
| 3 | Плотник | Верстак, топор, молоток, гвоздодер, долото, отвертка, клещи, гаечный ключ, измерительный инструмент, ножовка, рубанок, стамеска, нож |
| 4 | Кухонный рабочий | Посудомоечная машина, посуда |
| 5 | Дворник | Хозяйственный инвентарь |
| 6 | Сборщик радиодеталей | Конденсаторы, плавкие предохранители, резисторы, сборочный и измерительный инструмент |
| 7 | Электромеханик по испытанию и ремонту электро-оборудования | Электроагрегаты и их узлы, электроизмерительные приборы, паяльный инструмент |
| 8 | Воспитатель | ПЭВМ, принтер |
| 9 | Кладовщик продуктового магазина | ряды стеллажей и холодильные установки, весы |
| 10 | Садовник (уборщик территории) | Ручной инструмент; Газонокосилка бензиновая; кусторез; бензопила; снегоуборочная машина |
| 11 | Дорожный рабочий | Щебень, гравий, маячные рейки, шаблоны, барьерное и тросовое ограждение, пистолет-распылитель |
| 12 | Сварщик | Электросварочные машины и аппараты для дуговой сварки, горелки для сварки |
| 13 | Грузчик | Гидравлическая тележка |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | Лифтер | Лифт |
| 15 | Сборщик ртути | Ртуть, шлаки, баллоны, вакуумные установки, щелочные и водородные холодильники |
| 16 | Сторож | ПЭВМ |
| 17 | Бурильщик эксплуатационного и разведочного бурения скважин на нефть и газ | Насосно-компрессорные трубы, буровые установки, бурильные и обсадные трубы, химические реагенты |
| 18 | Врач-стоматолог | Стоматологическая установка; лампа фотополимеризационная; облучатель; стерилизатор |
| 19 | Медицинская сестра | Стерилизатор; Установка ультразвуковая, облучатель |
| 20 | Машинист экскаватора | Одноковшовые экскаваторы, роторные экскаваторы, механическое, гидравлическое и электрическое оборудование |

Таблица 2

| Рабочее место | Группа ОПВФ по ГОСТ | Индентифицированные опвф | Источник ОПВФ (оборудование, материалы) |
|---|---|---|---|
| | физические | | |
| | химические | | |
| | биологические | | |
| | психофизиологические | | |

Контрольные опросы:

1. Что такое опасный производственный фактор?
2. Что такое вредный производственный фактор?
3. Как происходит идентификация опасных и вредных производственных факторов?
4. Как подразделяются опасные и вредные производственные факторы по характеру происхождения?
5. Документ, в котором прописана классификация опасных и вредных производственных факторов.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

ТЕМА: Снижение уровня шума с помощью различных технических методов

Шумом называют любой нежелательный звук или сочетание звуков, вызывающих неприятные ощущения у человека.

С физической точки зрения звук представляет собой волнообразно распространяющееся колебательное движение частиц упругой среды.

Для защиты от акустических колебаний (шума, инфра- и ультразвука) можно использовать следующие методы:

- снижение звуковой мощности источника звука;
- размещение рабочих мест с учетом направленности излучения звуковой энергии*;*
- удаление рабочих мест от источника звука*;*
- акустическая обработка помещений*;*
- звукоизоляция*;*
- применение глушителей*;*
- применение средств индивидуальной защиты.

*Снижение звуковой мощности источника звука.* Снижения шума механизмов и машин достигается изменением технологического процесса (например, замена клепки сваркой).

Аэродинамический шум, вызываемый движением потоков воздуха и газа и обтеканием им элементов механизмов и машин, — наиболее мощный источник шума, снижение которого в источнике наиболее сложно. Для уменьшения интенсивности генерации шума улучшают аэродинамическую форму элементов машин, обтекаемых газовым потоком, и снижают скорость движения газа.

*Изменение направленности излучения шума*. При размещении установок с

направленным излучением необходима соответствующая ориентация этих установок по отношению к рабочим и населенным местам, поскольку величина направленности может достигать 10...15 дБ. Например, отверстие воздухозаборной шахты вентиляционной установки или устье трубы сброса сжатого газа необходимо располагать так, чтобы максимум излучаемого шума был направлен в противоположную сторону от рабочего места.

*Удаление рабочих мест от источника звука.* Увеличение расстояния от источника звука в 2 раза приводит к уменьшению уровня звука на 6 дБ.

*Акустическая обработка помещения* — это мероприятие, снижающее интенсивность отраженного от поверхностей помещения (стен, потолка, пола) звука. Для этого применяют звукопоглощающие облицовки поверхностей помещения (рисунок 1.1, *а)* и штучные (объемные) поглотители различных конструкций (рисунок 1.1, б), подвешиваемые к потолку помещения. Поглощение звука происходит путем перехода энергии колеблющихся частиц воздуха в теплоту за счет потерь на трение в пористом материале облицовки или поглотителя. Для большей эффективности звукопоглощения пористый материал должен иметь открытые со стороны падения звука незамкнутые поры.

Звукопоглощающие материалы характеризуются *коэффициентом звукопоглощения* $\alpha$, равным отношению звуковой энергии, поглощенной материалом, и энергии, падающей на него. Звукопоглощающие материалы должны иметь коэффициент звукопоглощения не менее 0,3. Чем это значение выше, тем лучше звукопоглощающий материал. Звукопоглощающие свойства пористых материалов определяются толщиной слоя, частотой звука, наличием воздушной прослойки между материалом и поверхностью помещения.

Штучные звукопоглотители применяют при недостаточности свободных поверхностей помещения для закрепления звукопоглощающих облицовок. Поглотители различных конструкций, представляющие собой объемные тела, заполненные звукопоглощающим материалом (тонкими волокнами), подвешивают к потолку равномерно по площади.

*Звукоизоляция.* При недостаточности указанных выше мероприятий для снижения уровня шума до допустимых значений или невозможности их осуществления применяют звукоизоляцию. Снижение шума достигается за счет уменьшения интенсивности прямого звука путем установки ограждений, кабин, кожухов, экранов (рисунок 1.2). Сущность звукоизоляции состоит в том, что падающая на ограждение энергия звуковой волны отражается в значительно большей степени, чем проходит через него.

Перегородки выполняют из бетона, кирпича, дерева и т. п. Наиболее шумные механизмы и машины закрывают кожухами, изготовленными из конструкционных материалов — стали, сплавов алюминия, пластмасс и др., и облицовывают изнутри звукопоглощающим материалом.

*Экранирование* источников шума или рабочих мест. Защитные свойства экрана возникают из-за того, что при огибании прямой звуковой волной кромок экрана за ним образуется зона звуковой тени тем большей протяженности, чем меньше длина волны (выше частота звука). Так как экран защищает только от прямой звуковой волны, его применение эффективно только в области превалирования прямого шума над отраженным. Поэтому экраны надо устанавливать между источником шума и рабочим местом, если они расположены недалеко друг от друга.

*Глушители* применяют для снижения аэродинамического шума. Глушители шума принято делить на абсорбционные, использующие облицовку поверхностей воздуховодов звукопоглощающим материалом; реактивные - типа расширительных камер, резонаторов,

узких отростков, длина которых равна ¼ длины волны заглушаемого звука; комбинированные, в которых поверхности реактивных глушителей облицовывают звукопоглощающим материалом; экранные.

При наличии нескольких источников суммарный уровень шума определяется по следующим формулам.

Если источники звука одинаковы, т. е. каждый в отдельности создает на рабочем месте одинаковый уровень шума:

$$L_{\Sigma} = L_1 + 10\lg n, \qquad (1.1)$$

где $L_1$ — уровень шума, создаваемый одним источником, $n$ — число одинаковых источников звука.

Если источники звука различны:

$$L_{\Sigma} = 10\lg\left(10^{0,1L_1} + 10^{0,1L_2} + \ldots + 10^{0,1L_n}\right), \qquad (1.2)$$

где $L_1$ $L_2$, ..., $L_n$ — уровни шума, создаваемые каждым источником.

Значения $10 \lg n$ в зависимости от числа источников шума принимаются в соответствии с таблицей 1.1.

Таблица 1.1

| Число источников шума $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 20 | 30 | 40 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Величина $10 \lg n$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 13 | 15 | 16 | 20 |

*Средства индивидуальной защиты*. К СИЗ от шума относят ушные вкладыши, наушники и шлемы.

*Вкладыши* — мягкие тампоны из ультратонкого материала, вставляемые в слуховой канал. Их эффективность не очень высока и в зависимости от частоты шума может составлять 5...15дБ.

*Наушники* плотно облегают ушную раковину и удерживаются на голове дугообразной пружиной. Их эффективность изменяется от 7 дБ на частоте 125 Гц до 38 дБ на частоте 8000 Гц.

*Шлемы* применяют при воздействии шумов очень высоких уровней (более 120 дБ). Они закрывают всю голову человека, т. к. при таких уровнях шума он проникает в мозг не только через ухо, но и непосредственно через черепную коробку.

1. Практическая часть.

2.1 Определить уровень шума от источников, если учесть, что они одинаковы (использовать формулу 1.1).

Исходные данные для расчета приводятся в таблице 1.2.

Таблица 1.2

| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* | *Вариант 4* | *Вариант 5* | *Вариант 6* | *Вариант 7* | *Вариант 8* | *Вариант 9* | *Вариант 10* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *$L_1$=95; n=3* | *$L_1$=80; n=4* | *$L_1$=90; n=5* | *$L_1$=70; n=6* | *$L_1$=75; n=10* | *$L_1$=80; n=3* | *$L_1$=75; n=20* | *$L_1$=70; n=30* | *$L_1$=65; n=40* | *$L_1$=60; n=100* |

1.2. Снизить уровень шума с помощью средств звукоизоляции.

Для этого необходимо определить звукоизолирующую способность оградительной стены.

Звукоизолирующая способность ограждения определяется по формуле:

$$R = 20\lg \rho_S f - 9 \qquad (1.3)$$

где $\rho_s$ – поверхностная плотность ограждения, кг/м$^2$;

$f$ – частота колебаний звука, Гц.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 | Вариант 4 | Вариант 5 | Вариант 6 | Вариант 7 | Вариант 8 | Вариант 9 | Вариант 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_s$=470 кг/м$^2$; f=500 Гц | $\rho_s$=175 кг/м$^2$; f=125 Гц | $\rho_s$=950 кг/м$^2$; f=250 Гц | $\rho_s$=500 кг/м$^2$; f=1000 Гц | $\rho_s$=750 кг/м$^2$; f=125 Гц | $\rho_s$=150 кг/м$^2$; f= 100 Гц | $\rho_s$=250 кг/м$^2$; f=500 Гц | $\rho_s$=100 кг/м$^2$; f=250 Гц | $\rho_s$=600 кг/м$^2$; f=125 Гц | $\rho_s$=650 кг/м$^2$; f=500 Гц |

2.3 Определить достаточная ли звукоизолирующая способность у оградительной стены.

Звукоизолирующая способность ограждения считается достаточной, если R≥80 дБ.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с теоретической частью практического занятия №1.
2. Выполнить расчет звукоизолирующей способности оградительной стены.

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Произвести анализ существующих методов защиты от шума.
2. Определить достаточная ли звукоизолирующая способность у оградительной стены.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под шумом?
2. Какие методы применяются для защиты от шума?
3. Что представляет собой каждый из этих методов?
4. Что называется коэффициентом звукопоглощения?
5. Как определяется суммарный уровень звукового давления?
6. Что относится к СИЗ от шума?

## ЗАДАНИЕ НА СРС

1. Определить параметры, характеризующие шум.
2. Гигиеническое нормирование акустических колебаний.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

ТЕМА: Снижение вибрации с помощью различных технических методов и средств защиты

Теоретическая часть

*Вибрация* представляет собой процесс распространения механических колебаний в твердом теле. Принято различать общую и локальную вибрацию.

Методы и средства виброзащиты подразделяются на коллективные и индивидуальные.

Наиболее эффективными являются средства коллективной защиты. Виброзащита осуществляется следующими основными методами:

- ♦ снижением виброактивности источника вибрации;
- ♦ применением вибродемпфирующих (вибропоглощающих) покрытий, приводящих к

снижению интенсивности пространственной вибрации конструкции за счет рассеяния энергии механических колебаний;

- виброизоляцией, когда между источником и защищаемым объектом размещается дополнительное устройство, так называемый виброизолятор;
- динамическим гашением вибрации, при котором к защищаемому объекту присоединяется дополнительная механическая система, изменяющая характер его колебаний;
- активным гашением вибрации, когда для виброзащиты используется дополнительный источник вибрации, который в сравнении с основным источником генерирует колебания той же амплитуды, но противоположной фазы.

К средствам индивидуальной защиты относятся виброзащитные подставки, сиденья, рукоятки, рукавицы, обувь.

*Снижение виброактивности конкретного источника вибрации* зависит от особенностей его работы. Общим подходом к решению этой задачи является уменьшение энергии возмущающих сил за счет уменьшения частоты вращения или размеров вращающихся масс и соответственно линейных скоростей или перераспределение этой энергии во времени, сделав, например, более плавным процесс сгорания топлива в энергетической установке.

К эффективным средствам снижения виброактивности источника относится также замена металлических деталей на пластмассовые (из капрона, текстолита и т. п.), обладающие большим внутренним трением.

Важную роль в снижении виброактивности имеет балансировка вращающихся частей машин, которую осуществляют на специальных станках.

При *вибродемпфировании* снижение вибрации происходит за счет рассеяния энергии механических колебаний в результате преобразования ее в тепловую при возникающих в материале конструкции деформациях. В результате амплитуда упругих волн, распространяющихся по конструкциям, уменьшается по мере удаления от источника.

Применяются следующие методы демпфирования конструкций:

- изготовление деталей из материалов, обладающих большим коэффициентом потерь: чугун, сплавы меди и марганца, некоторые виды пластмасс (например, сплавы меди имеют коэффициент потерь, равный 0,2, а текстолит — 0,4);
- нанесение на детали конструкции вибродемпфирующих покрытий;
- использование вибродемпфирующих засыпок из сухого песка, чугунной дроби, а также жидкостных прослоек.

*Виброгашение* осуществляют путем установки агрегатов на массивный фундамент. Этот способ нашел широкое применение при установке тяжелого оборудования (молотов, прессов, вентиляторов, насосов и т. п.).

Одним из способов подавления вибраций является установка динамических виброгасителей, представляющих собой дополнительную колебательную систему.

Динамический виброгаситель крепится на вибрирующем агрегате, поэтому в нем в каждый момент времени возбуждаются колебания, находящиеся в противофазе с колебаниями агрегата. Недостатком динамического виброгасителя является то, что он подавляет колебания только определенной частоты, соответствующей его собственной.

*Виброизоляция* — это уменьшение передачи колебаний от источника возбуждения защищаемому объекту при помощи устройств, помещаемых между ними. В качестве таких устройств могут быть: виброизоляторы (пружинные, резиновые, комбинированные и др.); гибкие вставки в коммуникациях воздуховодов и в местах их прохождения через строительные конструкции; «плавающие» полы (настил пола отделяется от перекрытия упругими прокладками) и др.

Средства коллективной зашиты (СКЗ) располагаются между источником вибрации и

оператором. К СКЗ оператора относятся подставки, сидения, кабины, рукоятки.

К средствам индивидуальной защиты от вибраций относятся также СИЗ для рук и ног. В качестве СИЗ для рук применяются *рукавицы и перчатки, вкладыши и прокладки.*

*Виброзащитные рукавицы* отличаются от обычных рукавиц тем, что на их ладонной части или в накладке закреплен упругодемпфирующий элемент, который выполняется из поролона или губчатой резины.

*Виброзащитная обувь* изготавливается в виде сапог, полусапог и полуботинок с упругодемпфирующим низом обуви и применяется в условиях общей вибрации.

В целях профилактики вибрационной болезни для работающих с вибрирующим оборудованием рекомендуется специальный режим труда. Так, при работе с ручными машинами, удовлетворяющими требованиям санитарных норм, суммарное время работы в контакте с вибрацией не должно превышать 2/3 рабочей смены. При этом продолжительность одноразового непрерывного воздействия вибрации, включая микропаузы, входящие в данную операцию, не должна превышать для ручных машин 15—20 мин.

1. Практическая часть

Произведем расчет эффективности виброизоляции, согласно исходным данным в таблице 2.1.

Таблица 2.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| Вариант 1 | n=83с$^{-1}$; материал прокладки – резина средней жескости; h=6 см | Вариант 6 | n=78с$^{-1}$; материал прокладки – плита из пробковой крошки; h=4 см |
| Вариант 2 | n=80с$^{-1}$; материал прокладки – губчатая резина; h=5 см | Вариант 7 | n=87с$^{-1}$; материал прокладки – войлок мягкий; h=7 см |
| Вариант 3 | n=90с$^{-1}$; материал прокладки – мягкая резина; h=7 см | Вариант 8 | n=92с$^{-1}$; материал прокладки – войлок жесткий прессованый; h=6 см |
| Вариант 4 | n=96с$^{-1}$; материал прокладки – ребристая резиновая плита с отверстиями; h=8 см | Вариант 9 | n=105с$^{-1}$; материал прокладки – резина средней жескости; h=5 см |
| Вариант 5 | n=100с$^{-1}$; материал прокладки – пробка натуральная; h=9 см | Вариант 10 | n=96с$^{-1}$; материал прокладки – губчатая резина; h=7 см |

Эффективность виброизоляции рассчитывается по формуле:

$$\Delta L = 20\lg\left[\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1\right], \quad дБ \qquad (2.1)$$

где $f$ – частота вынужденных колебаний;

$f_0$ – собственная частота виброизолированной системы.

$$f_0 = \frac{0{,}5}{\sqrt{x_{CT}}}, \quad \text{Гц} \qquad (2.2)$$

где $x_{CT}$ – статическая осадка виброизоляторов под действием силы тяжести машины.

Допустимая величина статической осадки $x_{CT}$ амортизаторов из упругих прокладок зависит от их материала. Найдем ее из таблицы 2.1.

Таблица 2.1 - Допустимая величина статической осадки

| Материалы | $x_{CT}$, см |
|---|---|
| Губчатая резина | 0,01 h |
| Мягкая резина | 0,016 h |
| Ребристая резиновая плита с отверстиями | 0,02 h |
| Резина средней жесткости | 0,015 h |

| | |
|---|---|
| Пробка натуральная | 0,05 h |
| Плита из пробковой крошки | 0,017 h |
| Войлок мягкий | 0,015 h |
| Войлок жесткий прессованный | 0,0155 h |

Частота вынужденных колебаний определяется по формуле:

$$f=n, \qquad (2.3)$$

где $n$ – частота вращения шкива машины, с$^{-1}$.

Если в результате расчета $\left(\frac{f}{f_0}\right)_{TP}$ получается более 4, расчет ведут для этой величины, но в этом случае не обеспечивается требуемое снижение уровня вибрации и необходимо применять другие мероприятия для ее снижения.

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Произвести анализ виброзащиты и выявить наиболее эффективные средства коллективной защиты от вибрации.

2. Произвести расчет эффективности виброизоляции.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с теоретической частью практического занятия №2.
2. Выполнить расчет эффективности виброизоляции.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под вибрацией?
2. Какие существуют средства коллективной защиты от вибрации?
3. Как осуществляется снижение виброактивности конкретного источника вибрации?
4. Что представляют собой вибродемпфирование?
5. Что такое виброгашение?
6. Что такое виброизоляция?
7. Как определяется эффективность виброизоляции?
8. Что представляет собой схема расчета виброизоляторов?
9. Что относится к средствам коллективной и индивидуальной виброзащиты операторов и что каждый из них представляет собой?

## ЗАДАНИЕ НА СРС

1. Определить параметры, характеризующие вибрацию
2. Классификация производственных вибраций

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

ТЕМА: Снижение электромагнитных излучений с помощью различных технических методов защиты

**Цель работы:** освоить методику расчета напряженности электрического поля от высоковольтных линий электропередач.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

1. Теоретическая часть

*Электромагнитная волна* – это колебательный процесс, связанный с изменяющимися в пространстве и во времени взаимосвязанными электрическими и магнитными полями. Область распространения электромагнитных волн называется *электромагнитным полем* (ЭМП.)

Методы и средства защиты от переменных электромагнитных полей и излучений:

*Уменьшение мощности* излучения обеспечивается правильным выбором генератора (мощность генератора целесообразно выбирать не более той, которая необходима для реализации технологического процесса и работы устройства). В тех случаях, когда необходимо уменьшить мощность излучения генератора, для излучений радиочастотного диапазона применяют поглотители мощности, которые ослабляют энергию излучения до необходимой степени на пути от генератора к излучающему устройству.

*Поглотители мощности.* Поглотителем энергии служат специальные вставки из графита или материалов углеродистого состава, а также специальные диэлектрики. При поглощении электромагнитной энергии выделяется теплота, поэтому для охлаждения поглотителей применяют охлаждающие ребра или проточную воду.

*Увеличение расстояния от источника излучения.* В дальней зоне излучения, т. е. на расстояниях примерно больших 1/6 длины волны излучения, плотность потока энергии (ППЭ) уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, а напряженности электрического и магнитного полей — обратно пропорционально расстоянию. То есть при увеличении расстояния от источника излучения в 2 раза ППЭ уменьшается в 4 раза, а напряженности (Е и Н) в 2 раза.

*Уменьшение времени пребывания в поле и под воздействием излучения.*

Допустимое время пребывания в зоне излучения установок промышленной частоты (50 Гц):

$$T_{ДОП} = \frac{50}{E} - 2, \qquad (3.1)$$

где $E$ – напряженность электромагнитного поля.

Однако, если это возможно, целесообразно сокращать время пребывания в зоне облучения до значения меньше допустимого, чтобы избежать необоснованного выполнением необходимой работы облучения.

*Подъем излучателей и диаграмм направленности излучения, блокирование излучения.* Излучающие антенны необходимо поднимать на максимально возможную высоту и не допускать направления луча на рабочие места и территорию предприятия.

Для защиты от электрических полей промышленной частоты необходимо увеличивать высоту подвеса фазных проводов линий электропередач (ЛЭП), уменьшать расстояние между ними и т. д. Путем правильного выбора геометрических параметров можно снизить напряженность электрического поля вблизи ЛЭП в 1,6...1,8 раза.

*Экранирование излучений.* Экранируют либо источники излучения, либо зоны, где может находиться человек. Экраны могут быть замкнутыми (полностью изолирующими излучающее устройство или защищаемый объект) или незамкнутыми, различной формы и размеров, выполненными из сплошных, перфорированных, сотовых или сетчатых материалов.

Экраны частично отражают и частично поглощают электромагнитную энергию. По степени отражения и поглощения их условно разделяют на отражающие и поглощающие экраны.

Для увеличения поглощающей способности экрана их делают многослойными и большой толщины, иногда со стороны падающей волны выполняют конусообразные выступы.

Наиболее часто в технике защиты от электромагнитных полей применяют металлические сетки. Они легки, прозрачны, поэтому обеспечивают возможность наблюдения за технологическим процессом и излучателем, пропускают воздух, обеспечивая охлаждение оборудования за счет естественной или искусственной вентиляции.

*Средства индивидуальной защиты.* К СИЗ, которые применяют для защиты от электромагнитных излучений, относят: радиозащитные костюмы, комбинезоны, фартуки, очки, маски и т.д. Данные СИЗ используют метод экранирования.

Радиозащитные костюмы, комбинезоны, фартуки в общем случае шьются из хлопчатобумажного материала, вытканного вместе с микропроводом, выполняющим роль сетчатого экрана. Шлем и бахилы костюма сделаны из такой же ткани, но в шлем спереди вшиты очки и специальная проволочная сетка для облегчения дыхания. Эффективность костюма может достигать 25...30 дБ. Для защиты глаз применяют очки специальных марок с металлизированными стеклами. Поверхность стекол покрыта пленкой диоксида олова. В оправе вшита металлическая сетка, и она плотно прилегает к лицу для исключения проникновения излучения сбоку. Эффективность очков оценивается в 25...35 дБ.

2. Практическая часть

Выполним расчет эффективности экранирования электромагнитного излучения.

Эффективность экранов принято оценивать в дБ по формулам:

$$\Delta L = 20\lg(E_0 / E); \qquad (3.2)$$

$$\Delta L = 20\lg(H_0 / H); \qquad (3.3)$$

$$\Delta L = 10\lg(ППЭ_0 / ППЭ), \qquad (3.4)$$

где $E_0$, $H_0$, $ППЭ_0$ — соответственно напряженность электрического, магнитного поля и плотность потока энергии перед экраном; $E$, $H$, $ППЭ$ — те же параметры после экрана.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| Вариант 1 | $E$=50 В/м, $H$=10 А/м, $ППЭ$=12 Вт/м$^2$; $E_0$=70 В/м, $H_0$=20А/м; $ППЭ_0$=34Вт/м$^2$. | Вариант 6 | $E$=60 В/м, $H$=18 А/м, $ППЭ$=17 Вт/м$^2$; $E_0$=87 В/м, $H_0$=29А/м; $ППЭ_0$=41Вт/м$^2$. |
| Вариант 2 | $E$=55 В/м, $H$=11 А/м, $ППЭ$=14 Вт/м$^2$; $E_0$=80 В/м, $H_0$=25А/м; $ППЭ_0$=40Вт/м$^2$. | Вариант 7 | $E$=65 В/м, $H$=17 А/м, $ППЭ$=21 Вт/м$^2$; $E_0$=93 В/м, $H_0$=31А/м; $ППЭ_0$=43Вт/м$^2$. |
| Вариант 3 | $E$=60 В/м, $H$=14 А/м, $ППЭ$=12 Вт/м$^2$; $E_0$=83 В/м, $H_0$=28А/м; $ППЭ_0$=34Вт/м$^2$. | Вариант 8 | $E$=67 В/м, $H$=9 А/м, $ППЭ$=24 Вт/м$^2$; $E_0$=102 В/м, $H_0$=19А/м; $ППЭ_0$=50Вт/м$^2$. |
| Вариант 4 | $E$=59 В/м, $H$=17 А/м, $ППЭ$=15 Вт/м$^2$; $E_0$=85 В/м, $H_0$=22А/м; $ППЭ_0$=45Вт/м$^2$. | Вариант 9 | $E$=65 В/м, $H$=12 А/м, $ППЭ$=21 Вт/м$^2$; $E_0$=91 В/м, $H_0$=27А/м; $ППЭ_0$=55Вт/м$^2$. |
| Вариант 5 | $E$=57 В/м, $H$=15 А/м, $ППЭ$=20 Вт/м$^2$; $E_0$=75 В/м, $H_0$=30А/м; $ППЭ_0$=37Вт/м$^2$. | Вариант 10 | $E$=63 В/м, $H$=11 А/м, $ППЭ$=19 Вт/м$^2$; $E_0$=89 В/м, $H_0$=29А/м; $ППЭ_0$=52Вт/м$^2$. |

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с теоретической частью практического занятия №3.
2. Выполнить расчет эффективности экранов.

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Выполнить расчет эффективности экранов.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под электромагнитным полем?
2. Какие существуют методы и средства защиты от переменных электромагнитных полей?
3. Как осуществляется каждый из этих методов и средств?
4. Как определяется допустимое время пребывания в зоне излучения установок промышленной частоты?
5. Из каких материалов выполняются отражающие и поглощающие экраны?
6. Что относится к СИЗ от электромагнитных излучений?

## ЗАДАНИЕ НА СРС

1. Классификация электромагнитных полей.
2. Источники электромагнитных полей на производстве.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

ТЕМА: Защита от электромагнитных полей высокочастотных установок для нагрева материалов

**Цель работы:** освоить методику расчета напряженности магнитного поля от нагревательных печей и размеров защитных экранов.

## СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Промышленными источниками электромагнитных полей являются высокочастотные установки для нагрева материалов.

Электромагнитное поле обладает энергией и распространяется в виде электромагнитных волн. Скорость распространения колебаний в воздухе $\upsilon$ равна скорости света $3 \cdot 10^8$ м/с. Длина волны зависит от частоты: $\lambda = \frac{\upsilon}{f}$ (1)

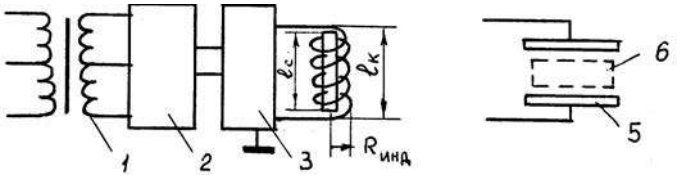
где $\lambda$ - длина волны, м; $\upsilon$ - скорость распространения колебаний, м/с; f - частота колебаний, Гц.

Область распространения электромагнитных волн от источника излучения условно разделяют на три зоны: ближнюю (имеющую радиус менее 1/6 длины волны), промежуточную и дальнюю (расположенную на расстоянии более 1/6 длины волны от источника).

В ближней и промежуточной зонах электромагнитная волна еще не сформирована, поэтому интенсивность ЭМП в этих зонах оценивается раздельно напряженностью электрической Е (В/м) и магнитной Н (А/м) составляющих поля.

С увеличением напряженности электромагнитного поля, продолжительности облучения и частоты колебаний воздействие на человека возрастает. При воздействии ЭМП частотой выше 60 кГц наступает нагрев тканей. Облучение особенно вредно для глаз, мозга, половых органов. Облучение глаз вызывает помутнение хрусталика (катаракту).

При текущем санитарном контроле (не реже одного раза в год), а также в случае приемки источников ЭМП или изменения их конструкции и режимов работы, производится измерение параметров электромагнитного поля на рабочих местах. Измеренные значения сравниваются с нормативными по ГОСТ 12.1.006-84 и если они не соответствуют, то применяются меры защиты.




а) б)

Рис 4.1 Схема генератора для нагрева металла (а) и неметаллич. материалов (б)

*Характеристика источников электромагнитного поля (индукторов и конденсаторов)*

Источниками ЭМП высокой частоты (ВЧ) и ультравысокой частоты (УВЧ) на машиностроительных предприятиях являются плавильно- закалочные и сушильные установки. Для индукционного нагрева металла применяются установки (рисунок 4.1, а), состоящие из трансформатора, выпрямителя, генератора и индуктора. Для нагрева неметаллических материалов (например, древесины) вместо индукционной катушки используется конденсатор (рисунок 1, б). Источниками излучений является индуктор или конденсатор, а также генератор и линия передачи от генератора к индуктору или конденсатору.

Рабочие места по обслуживанию нагревательных установок обычно находятся в ближней зоне воздействия ЭМП, где соотношение напряженностей электрической Е и магнитной составляющей Н зависит от вида источника излучения (конденсатор или индуктор).

Нормирование воздействия ЭМП высокой и ультравысокой частот.

Предельно допустимое значение Е и Н в диапазоне частот 60кГц...300 МГц на рабочих местах персонала следует определять исходя из допустимой энергетической нагрузки и времени воздействия по формулам:
Рис 4.2 – Графики для определения β

$$E_{ПД} = \sqrt{\frac{Э_{E_{пд}}}{T}} \qquad H_{ПД} = \sqrt{\frac{Э_{H_{пд}}}{T}} \qquad (3)$$

где $E_{ПД}$ и $H_{ПД}$ –предельно допустимые значения напряженности электрического, В/м, и магнитного, А/м, полей

$Э_{Eпд}$ и $Э_{Hпд}$ - предельно допустимые значения энергетической нагрузки в течение рабочего дня $(В/м)^2$ ч и $(А/м)^2$ ч.

*Защита от воздействия электромагнитных полей индуктора и конденсатора*

Для защиты обслуживающего персонала от электромагнитных полей индукторов и конденсаторов их экранируют. Форма экрана должна удовлетворять конструктивным и эксплуатационным требованиям. Экраны применяются сплошные с вентиляционными и смотровыми окнами, а также в форме цилиндра или прямоугольного параллелепипеда.

Практическая часть

*Методика расчета экрана индуктора высокочастотной установки для нагрева металла*

Методика расчета экрана индуктора состоит в следующем. Вначале вычисляется напряженность магнитной составляющей поля Н от индуктора по формуле (2). β определяется по графику. Сравнивается полученное значение Н с допустимым значением $Н_Д$ (формула 3) по ГОСТ 12.1.006-84. ($Эн_{пд}$=200А/м). Определяется требуемая эффективность экранирования: $Э_{тр} = \frac{H}{H_Д}$ (4)

где $Э_{тр}$ - требуемая эффективность экранирования; Н - действующее значение напряженности магнитной составляющей поля, А/м; $Н_Д$ - допустимый уровень напряженности магнитной составляющей поля, А/м.

Проектирование экрана проводится с учетом обеспечения доступа к нагревательной установке, возможности механизации процесса загрузки и т.д., а также с учетом минимальной потери энергии в экране. Радиус цилиндрического замкнутого экрана $R_{экр}$ нагревательной установки для закалки металлов при условии, что потери в нем не превышают 1 % мощности генератора, определяются по формуле:

$$R_{,экр} = 0{,}64 R_{инд} \sqrt[3]{\frac{\omega^2 \cdot I^2 \cdot \rho \cdot R_{инд}}{\delta \cdot P \cdot l_k}} \quad (5)$$

где $R_{инд}$ - радиус катушки индуктора, м; ω - число витков катушки: I - сила тока в катушке, А; □ - удельное сопротивление материала экрана (таблица 4.1), Ом · м; δ - глубина проникновения (расстояние, на котором напряженность поля уменьшается в e = 2,73 раза), м; Р- мощность генератора, Вт; $l_к$ - длина катушки, м.

Глубина проникновения электрического поля $$\delta = 0{,}52\sqrt{\frac{\rho}{\mu \cdot f_m}} \quad (6)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость материала экрана (таблица 4.1);
$f_м$ - частота колебаний электромагнитного излучения, МГц.

Таблица 4.1 – Характеристики материалов экранов

| Материал | Удельное сопротивление ρ, Ом · м | Относительная магнитная проницаемость,μ |
|---|---|---|
| Алюминий | $0{,}28 \cdot 10^{-7}$ | 1 |
| Медь | $0{,}17 \cdot 10^{-7}$ | 1 |
| Сталь | $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ | 150 |

Проверяется значение $R_{экр}$ по условию, что расстояние между витками индуктора и стенками цилиндра должна быть не менее радиуса индуктора, то есть

$$R_{экр} \geq 2R_{инд} \quad , \quad (7)$$

где $R_{инд}$ - радиус витков индуктора (рисунок 4.3), м.

Если условие не выполняется, то принимаем $R_{экр} = 2R_{инд}$ ,

Высота экрана определяется из формулы эффективности экранирования:

$Э_{экр} = \exp(3{,}6 \cdot l_{экр}/D_{экр})$, (8)

только в место $Э_{экр}$ подставляется $Э_{тр}$

$$l_{экр} = (D_{экр}/3{,}6) \cdot \ln Э_{ТР} \quad (9)$$

где $Э_{экр}$ - эффективность экранирования, т.е. величина, показывающая во сколько раз напряженность поля в данном месте уменьшилась в результате экранирования;

$l_{экр}$ - расстояние по оси индуктора от его крайних витков до краев цилиндра экрана, м;

$D_{экр}$ - диаметр цилиндра экрана, м.

Общая длина экрана l определяется по формуле: $l = l_к + 2 \cdot l_{экр}$ (10)

Если в результате расчета стального экрана его габариты получаются большими, то целесообразно применить алюминий или медь.

На эффективность экрана не влияет его толщина, т.к. для экранирования достаточно очень тонкого слоя металла. Поэтому толщина экрана принимается из условия прочности равной 0,8...2 мм.

В результате расчета размеров экрана его эффективность должна быть больше требуемого значения, т.е. $Э_{экр} \geq Э_{тр}$. (11)

**Задание.** Рассчитать экран высокочастотной плавильной печи. Параметры индуктора и расстояние до рабочего места даны в таблице. В задаче приняты следующие обозначения:
Rинд - радиус катушки индуктора печи, м; lк - длина катушки индуктора, м;
Р - мощность плавильной печи, кВт; ω - число витков катушки индуктора;
I - сила тока в катушке, А; f - частота тока, кГц; r - расстояние от оси катушки до рабочего места, м.
Таблица – Исходные данные для задачи.

| Вари-ант | Параметры индуктора плавильной печи | | | | | | Расстояние до рабочего места r, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_{инд}$, м | $l_к$, м | ω | I, A | f, кГц | P, кВт | |
| 1 | 0,1 | 0,15 | 20 | 150 | 150 | 60 | 0,6 |
| 2 | 0,2 | 0,3 | 40 | 200 | 100 | 60 | 1,3 |
| 3 | 0,3 | 0,4 | 60 | 300 | 60 | 100 | 2,0 |
| 4 | 0,2 | 0,4 | 50 | 300 | 150 | 70 | 1,5 |
| 5 | 0,1 | 0,3 | 25 | 250 | 70 | 60 | 0,8 |
| 6 | 0,1 | 0,2 | 20 | 150 | 200 | 40 | 0,8 |
| 7 | 0,2 | 0,2 | 25 | 100 | 400 | 60 | 0,6 |
| 8 | 0,2 | 0,4 | 30 | 250 | 30 | 70 | 1,5 |
| 9 | 0,3 | 0,3 | 50 | 350 | 350 | 100 | 2,0 |
| 0 | 0,2 | 0,3 | 45 | 200 | 50 | 60 | 1,3 |

**Порядок выполнения работы** 1 Ознакомиться с методикой расчета напряженности магнитного поля Н от катушки индуктора, нормированием Н по ГОСТ 12.1.006-84.

2 Рассчитать экран высокочастотной плавильной печи.

**Оформление отчета** Отчет должен содержать: название, цель работы, расчет экрана высокочастотной плавильной печи (формулы должны быть написаны с наименованием всех параметров и единиц измерения); выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое вредное воздействие оказывает на организм человека электромагнитное поле от индукционных катушек и рабочих конденсаторов, применяемых для нагрева материалов? Какие применяются меры защиты от воздействия ЭМП?
2. Как определяются ближняя и дальняя зоны распространения электромагнитного поля? Как рассчитать длину волны электромагнитного излучения при известной частоте колебаний? Как оценивается воздействие в ближней и дальней зоне ЭМП?
3. В чем заключается методика расчета экранирующих устройств? Какой порядок расчета?
4. Объясните формулу расчета требуемой эффективности экранирования ЭМП высоких частот?
5. Что является источниками ЭМП высокой частоты (ВЧ) и ультравысокой частоты (УВЧ) на машиностроительных предприятиях?
6. Какие установки применяются для индукционного нагрева металла и неметаллических материалов, из чего они состоят?

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

ТЕМА: Анализ средств защиты от опасности механического травмирования

Под механическим травмированием человека понимают повреждения кожных покровов, мышц, костей, сухожилий, позвоночника, глаз, головы и других частей тела. Причиной такого рода травм являются прежде всего шероховатость поверхности, острые кромки и грани инструмента и оборудования, движущиеся механизмы и машины, незащищенные элементы производственного оборудования, передвигающиеся изделия, материалы, заготовки, разрушающиеся конструкции. Механические травмы могут быть следствием падения с высоты. Возможны травмы глаз твердыми частицами, образующимися при обработке материалов.

Все источники механического травмирования можно разделить на *реально* и *потенциально опасные*.

К первым можно отнести: шероховатости поверхности, заусенцы, острые кромки и выступы на различных частях оборудования и подвижные заготовки при работах на металлообрабатывающих станках, движущиеся грузоподъемные машины и средства транспорта.

Ко вторым: сосуды, работающие под давлением, разрушение (взрыв) которых может произойти при нарушении Правил их эксплуатации, штабели материалов, заготовок, готовых изделий, которые при неправильной их укладке могут обрушаться, площадки обслуживания оборудования на высоте, лестницы при несоответствии их требованиям безопасности и т. д.

Защита от травмирования достигается применением технических средств, исключающих или уменьшающих воздействие на работающих травмоопасных производственных факторов. Они могут быть коллективными и индивидуальными. Первые обеспечивают защиту любого работника, обслуживающего травмоопасное оборудование с указанными средствами защиты. Вторые - только тех, кто их использует.

*Средства коллективной защиты от механического травмирования* стандартизованы ГОСТ 12.4.125-83 и включают целый ряд подвидов (рисунок 4.1).

Защитные устройства должны удовлетворять следующим общим требованиям:

- предотвращать контакт рук и других частей тела человека, его одежды и других предметов с опасными движущимися частями машины, не позволять человеку-оператору машины или другому рабочему приблизить руки и другие части тела к опасным движущимся частям;
- должны быть изготовлены из прочных материалов, выдерживающих условия нормальной эксплуатации, и надежно прикрепляться к машине;
- не создавать иных опасностей, не иметь режущую кромку, заусенец или шероховатости поверхности;
- не мешать выполнению работ.

Наибольшее применение для защиты от механического травмирования машин, механизмов, инструмента находят оградительные, предохранительные, тормозные устройства, устройства автоматического контроля и сигнализации, дистанционного управления.




Рисунок 4.1 – Средства коллективной защиты от механического травмирования

*Оградительные средства защиты* наиболее распространены в промышленности. Они препятствуют попаданию человека в опасную зону. Все открытые движущиеся и вращающиеся части оборудования, расположенные на высоте до 2500 мм от уровня пола, если они являются источниками опасности, должны быть закрыты сплошным или сетчатым ограждением. Ограждения могут быть полными, закрывающими травмоопасный агрегат в целом, и частичными, исключающими доступ к наиболее опасным частям оборудования. Полные ограждения изготавливаются обычно из металла и выполняют одновременно функции звукоизолирующего ограждения.

Чаще всего конструкция ограждения представляет собой кожух. В корпусах машин и механизмов, а также станков они могут выполняться в виде дверцы, перекрывающей доступ к редукторам, коробкам скоростей и другим элементам привода.

Ограждения в виде щитов (в том числе сетчатых) широко используются в роботизированном производстве.

Переносные щиты устанавливают при проведении ремонтных и наладочных работ для исключения попадания в зону их проведения посторонних лиц, например, при сварочных работах, работах в колодцах подземных коммуникаций, при ремонте электроустановок в цехах.

На металлорежущих станках ограждения, как правило, выполняются в виде защитных экранов, которые для удобства обслуживания могут выполняться откидными.

В качестве материала для изготовления экранов используются металлы и пластики. Экраны удобно выполнять также из прозрачных материалов (безосколочное стекло, пластмасса, триплекс). Защитные экраны не должны ограничивать технологические возможности станка и вызывать неудобства при работе, уборке, наладке, а также приводить к загрязнению пола смазочно-охлаждающей жидкостью. При необходимости защитные экраны следует снабжать рукоятками, скобами для удобства перемещения и установки.

*Предохранительные устройства* могут быть двух типов: ограничительные и блокировочные. Ограничительные срабатывают при превышении какого-либо параметра, характеризующего работу системы механизма или машин. Например, срезные штифты и шпонки срабатывают при превышении допустимого крутящего момента, предохранительные клапана — рабочего давления, упоры - при выходе элементов за допустимые пределы в пространстве. Таким образом, исключаются аварийные режимы работы оборудования, а следовательно, его возможные поломки и аварии; а в конечном итоге — травмы. Различают предохранительные оградительные устройства с автоматическим восстановлением кинематической цепи после того, как контролируемый параметр пришел в норму, и устройства, которые после срабатывания требуют остановки оборудования для их замены. Примером первых являются предохранительные клапаны, фрикционные муфты, регуляторы давления, вторых — предохранители электроустановок, разрывные мембраны систем, работающих под давлением.

*Блокировочные устройства* исключают возможность проникновения человека в опасную зону либо устраняют опасный фактор на время пребывания человека в этой зоне. Блокировка бывает механическая, электрическая и комбинированная.

*Тормозные устройства* подразделяют:

- по конструктивному исполнению — на колодочные, дисковые, конические и клиновые;
- по способу срабатывания — на ручные, автоматические и полуавтоматические;
- по принципу действия — на механические, электромагнитные, пневматические, гидравлические и комбинированные;
- по назначению - на рабочие, резервные, стояночные и экстренного торможения.

Тормоза играют важную роль в обеспечении безопасной эксплуатации, ремонта и обслуживания технологического оборудования, позволяя быстро останавливать валы и прочие элементы, являющиеся потенциальными источниками опасности. Кроме того, они служат для остановки либо торможения груза в подъемно-транспортных машинах.

*Устройства автоматического контроля и сигнализации.* Наличие контрольно-измерительных приборов — одно из условий безопасной и надежной работы оборудования. Это приборы для измерения давлений, температур, статических и динамических нагрузок, и других параметров, превышение допустимых значений которых может привести к аварии, а следовательно, и к травматизму. Эффективность использования этих приборов повышается при объединении их с системами сигнализации.

Устройства автоматического контроля и сигнализации подразделяют:

- по назначению — на информационные, предупреждающие, аварийные и ответные;
- по способу срабатывания — на автоматические и полуавтоматические;
- по характеру сигнала — на звуковые, световые, цветовые, знаковые и комбинированные;
- по характеру подачи сигналами — на постоянные и пульсирующие.

Информационная сигнализация применяется при проведении разнообразных технологических процессов, на испытательных стендах, а также для согласования действий работающих, в частности, крановщиков и стропальщиков. При монтажных операциях зеленые сигнальные лампы должны включаться на временно не работающем оборудовании. Подобная сигнализация применяется в шумных производствах,

где нарушена речевая связь. В поточных и автоматизированных линиях красные сигнальные лампы устанавливают на машинах и установках, которые не контролируются обслуживающим персоналом.

Устройства предупреждающей сигнализации предназначены для предупреждения о возникновении опасности. Чаше всего в них используют световые и звуковые сигналы, поступающие от различных приборов, регистрирующих ход технологического процесса, в том числе уровень опасных и вредных факторов. Для звуковой сигнализации применяют сирены или звонки.

К предупреждающей сигнализации относятся указатели и плакаты «Не включать — работают люди», «Не входить», «Не открывать — высокое напряжение» и др. Для дверей и световых табло, эвакуационных и запасных выходов следует применять зеленый сигнальный цвет (надпись белого цвета). Очень широко в промышленности используются сигнальные цвета (таблица 4.1).

Таблица 4.1 - Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и соответствующие им контрастные цвета

| **Сигнальный** | **Смысловое значение** | **Область применения** | **Контрастный цвет** |
|---|---|---|---|
| Красный | Непосредственная опасность. Аварийная или опасная ситуация. Пожарная техника, | Запрещение опасного поведения или действия. Обозначение непосредственной опасности. Сообщение об аварийном отключении или аварийном состоянии оборудования (технологического процесса). | Белый |
| Желтый | Возможная опасность | Обозначение возможной опасности, опасной ситуации. Предупреждение, предостережение о возможной | Черный |
| Зеленый | Безопасность, безопасные условия. Помощь, спасение | Сообщение о нормальной работе оборудования, нормальном состоянии технологического процесса. Обозначение пути эвакуации, аптечек, кабинетов, | Белый |
| Синий | Предписание во избежание опасности | Требование обязательных действий в целях обеспечения безопасности. Разрешение определенных действий | |

*Знаки безопасности* стандартизированы ГОСТ Р 12.4.026—01. Они различаются между собой формой и цветом. Геометрическая форма, сигнальный цвет и смысловое значение основных знаков безопасности приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 - Смысловое значение основных знаков безопасности

| **Группа** | **Геометрическая форма** | **Сигнальный цвет** | **Смысловое значение** |
|---|---|---|---|
| Запрещающие знаки | Круг с поперечной полосой | Красный | Запрещение опасного поведения или действия |
| Предупреждающие знаки | Треугольник | Желтый | Предупреждение о возможной опасности. |
| Предписывающие знаки | Круг | Синий | Предписание обязательных действий во избежание опасности |
| Знаки пожарной безопасности* | Квадрат или прямоугольник | Красный | Обозначение и указание мест нахождения средств противопожарной защиты, их элементов |
| Эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения | Квадрат или прямоугольник | Зеленый | Обозначение направления движения при эвакуации. Спасение, первая помощь при авариях или пожарах. Надпись, информация |
| Указательные знаки | Квадрат или прямоугольник | Синий | Разрешение. Указание. Надпись или информация |

* Знаки пожарной безопасности связаны с проблемой механического травмирования опосредовано (паника в условиях пожара, как правило, приводит к падениям и травмам).

*Средства индивидуальной защиты от механического травмирования* делятся на несколько групп. Специальная одежда, специальная обувь и средства защиты рук в свою очередь включают в себя большое число подвидов (подгрупп). Деление производится по назначению (от ударов, порезов, проколов и т. д.).

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Изучить средства защиты, принцип их действия.
2. Составить перечень средств защиты для различных работников исходя из варианта.
3. Данные занести в таблицу.

| Группа защитных устройств | Принцип действия | Область применения |
|---|---|---|

Таблица Исходные данные

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | слесарь | машинист | электрик | Кранов щик | пожарный | сварщик | кузнец | шахтер | металлург | железнодорожник |

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под механическим травмированием?
2. Какие источники механического травмирования относятся к реально опасным, а какие к потенциально опасным?
3. Как классифицируются средства коллективной защиты от механического травмирования?
4. Что представляют собой: оградительные средства защиты, предохранительные устройства, блокировочные, тормозные устройства, устройства автоматического контроля и сигнализации?
5. Какие существуют основные знаки безопасности?
6. На какие группы делятся средства индивидуальной защиты от механического травмирования?

## 2 Методические указания для выполнения самостоятельной работы студентов

Ознакомиться с теоретической частью и ответить на контрольные вопросы.

Вопросы и задания составлены в соответствии разделами и темами рабочей программы учебной дисциплины «Основы производственной санитарии» для удобства при самостоятельной подготовке студентов к учебным занятиям.

Теоретическая часть

1 Производственная санитария как наука.

Производственная санитария (от лат. sanitos – здоровье) – это система организационных, санитарно–гигиенических мероприятий, технических средств и методов, предотвращающих или уменьшающих воздействие на работающих вредных производственных факторов до значений, не превышающих допустимые (ГОСТ 12.0.002–14* «ССБТ. Термины и определения»).

Санитария - применение на практике (внедрение) мероприятий, разработанных гигиеной, которые направлены на улучшение здоровья населения, оздоровление окружающей среды и продление жизни человека.

Научной основой производственной санитарии является гигиена труда (от греч. hygyieinos – здоровый). Таким образом, санитария и гигиена происходят от одного и того же слова – здоровье. Здоровье – это состояние полного физического, духовного и социального благополучия, а не только отсутствие болезней или физических недостатков (определение ВОЗ).

роизводственная санитария тесно связана со специальными технологическими дисциплинами и организацией производства, а также с медицинскими основами охраны труда (охраной труда, физиологией, психологией труда, эргономикой, безопасностью жизнедеятельности и др.).

Охрана труда – это система обеспечения безопасности жизни и здоровья работников в процессе трудовой деятельности, включающая в себя правовые, социально-экономические, организационно-технические, санитарно-гигиенические, лечебно-профилактические, реабилитационные и иные мероприятия и средства.

Безопасность жизнедеятельности – это наука о комфортном и безопасном взаимодействии человека и окружающей среды.

Эргономика — научная дисциплина, комплексно изучающая закономерности взаимодействия человека с техническими средствами. Т.е. наука, изучающая функциональные возможности человека в трудовых процессах с точки зрения анатомии, антропологии, физиологии, психологии и гигиены в целях создания орудий и условий труда, а также технологических процессов и производственного оборудования, наиболее соответствующих требованиям человеческого организма.

Физиология труда – раздел медицины, изучающий функционирование человеческого организма во время трудовой деятельности (утомляемость, работоспособность, установление оптимальных режимов труда).

Гигиена труда, как самостоятельная научная дисциплина, сформировалась в начале XX столетия, хотя истоки её формирования относятся к периодам истории Древней Греции и Рима. Так, Гиппократ (460–377 гг. до н. э.) писал о болезнях рудокопов, Гален (ок. 200–130 гг. до н. э.) – о поражённых пылью свинца, Плиний Старший ( I в. до н. э.) – об отравлениях ртутью и серой.

В XVI в. швейцарский врач и химик Парацельс (1493– 1541) и немецкий врач, геолог и металлург Георгий Агрикола (1494–1555) описали заболевания горняков под названием «Чахотка горняков, каменотёсов, литейщиков». В труде Парацельса «О чахотке и других заболеваниях горнорабочих» показана клиника заболевания, которое сопровождалось лихорадкой, одышкой, кашлем. Ему принадлежит изречение, которое можно рассматривать как идею принципа нормирования, а именно: «Всё есть яд, и всё есть

лекарство. Только одна доза делает вещество ядом или лекарством».
Период Средних веков (конец V—XIV вв.) характеризуется полным упадком личной и общественной гигиены. Постоянные войны и низкий культурный и материальный уровень населения служили благоприятной почвой для развития эпидемий.
Вспышки оспы, холеры, тифов, массовое распространение проказы, кожных, венерических и глазных болезней были характерным явлением для того времени. Пандемия чумы в XIV в., известная под названием «черной смерти», унесла около 25 млн. человек. Однако многие средневековые врачи высказывали ценные мысли в отношении гигиены.
Признанным основоположником профессиональной патологии является итальянский врач, профессор медицины, ректор Падуанского университета Бернардино Рамаццини (1633–1714). В 1700 г. им была издана книга «О болезнях ремесленников (рассуждения)», в которой были описаны болезни шахтёров, позолотчиков, химиков, кузнецов и других ремесленников (более 50 профессий) и представлены в систематизированном виде вопросы гигиены труда в разнообразных профессиях.
Тема охраны труда рабочих в России нашла своё отражение в трудах М.В. Ломоносова, А.Н. Никитина, Д.П. Никольского и др. В трактате «Первые основания металлургии, или рудных дел» (1763) М.В. Ломоносов указывал на необходимость создания безопасных условий труда «горных людей» путём укрепления горных выработок, вентиляции шахт, удаления подземных вод. В трактате были освещены также вопросы организации труда и отдыха «горных людей» и сформулированы принципы профилактики заболеваний.
Автор первой книги по гигиене труда «Болезни рабочих с указанием предохранительных мер» А.Н. Никитин (1793–1858), описавший условия труда 120 рабочих профессий, признается основоположником гигиены труда в России.
Важное место в развитии гигиены труда занимает один из основоположников отечественной гигиены А.П. Доброславин (1842–1889). Его рассуждения о необходимости изучения всех факторов трудового процесса, которые могут оказать влияние на здоровье и работоспособность человека, в полной мере соответствуют научным представлениям сегодняшнего дня. Он описал условия труда на табачных фабриках, в шахтах, кессонах, клинику пневмокониозов различной этиологии, отравлений свинцом и сероводородом.
Под руководством первого профессора гигиены Московского Императорского университета Ф.Ф. Эрисмана (1842–1915) в конце XIX столетия группа земских санитарных врачей (Дементьев Е.М., Погожев А.В. и др.) осуществляет санитарное обследование предприятий Московской губернии, в результате которого публикуется многотомный труд под его редакцией. Книга Ф.Ф. Эрисмана «Профессиональная гигиена, или гигиена умственного и физического труда» (1877) по праву считается первым в России оригинальным изданием по гигиене труда.
В развитие гигиены труда внес существенный вклад Г.В. Хлопин (1863–1929). Под его руководством выполнены крупные экспериментальные работы по действию промышленных ядов на организм, физиологии труда (энерготраты), гигиене труда и профессиональной патологии в химической и горнорудной промышленностях.
В послевоенной России вопросы гигиены труда получают своё дальнейшее развитие. Уже на 4–й день после взятия большевиками власти был принят декрет о восьмичасовом рабочем дне и ежегодных отпусках. В 1918 г. утверждается первый «Кодекс законов о труде». В 1919 г. формируется Государственная промышленно–санитарная инспекция. По инициативе крупнейших ученых и организаторов здравоохранения создаются научно–исследовательские учреждения по охране и гигиене труда: в 1923 г. в Москве – Институт по изучению профессиональных заболеваний (Обух В.А.), ныне НИИ медицины труда РАМН, в этом же году в Харькове – Украинский институт рабочей медицины, в 1924 г. в Петрограде – Институт по изучению профессиональных болезней, в 1925 г. – Государственный научный институт охраны труда (Левицкий В.А., Каплун С.И.).
В 1933 г. правительством и ЦИК было принято постановление «Об организации

государственной санитарной инспекции» с после – дующим развертыванием сети комплексных санитарно–эпидемиологических учреждений – санитарно–эпидемиологических станций (СЭС).
В развитии промышленной токсикологии важное место занимают работы Н.С. Правдина и Н.В. Лазарева.

2 Классификация трудовых процессов и факторов производственной среды.

*Рабочая зона* – пространство, ограниченное по высоте 2 м над уровнем пола или площадки, на которых находятся места постоянного или непостоянного (временного) пребывания работающих.

*Рабочее место* – место постоянного или временного пребывания работающих в процессе трудовой деятельности.

*Постоянное рабочее место* – место, на котором работающий находится большую часть своего рабочего времени (более 50 % или более 2ч непрерывно). Если при этом работа осуществляется в различных пунктах рабочей зоны, постоянным рабочим местом считается вся рабочая зона.

Условия труда - совокупность психофизиологических, санитарно-гигиенических и социально-психологических факторов трудовой деятельности, влияющих:- на здоровье и работоспособность человека, на его отношение к труду;- на эффективность производства, уровень жизни и развитие личности.
*Под условиями труда* понимают совокупность факторов трудового процесса и производственной среды, в которой осуществляется трудовая деятельность работника, оказывающих влияние на работоспособность и здоровье работника.
К условиям труда относятся
- условия трудового процесса, включая технологию и формы организации труда;
- уровень экономичности используемых технических средств и оборудования;
- условия производственной сферы, микроэкология труда, складывающаяся под воздействием технологических режимов и общего состояния окружающей атмосферы;- внешнее оформление и комфортность места работы;
- ориентация работников на самоохрану труда при повышении уровня культуры труда.
*Под факторами трудового процесса (безотносительно окружающей среды) понимают основные его характеристики: тяжесть труда и напряженность труда.*
*Тяжесть труда* – один из основных факторов трудового процесса, отражающий нагрузку преимущественно на опорно- двигательный аппарат и функциональные системы организма (сердечно-сосудистая, дыхательная и др.), которые обеспечивают его трудовую деятельность.
Тяжесть труда характеризуется физической 1динамической нагрузкой, 2массой поднимаемого и перемещаемого груза, 3общим числом стереотипных рабочих движений, 4величиной статической нагрузки, 5характером рабочей позы, 6глубиной и частотой наклона корпуса,7 перемещениями в пространстве.
*Физическая динамическая нагрузка* определяется в единицах внешней механической работы за смену (кг×м). Подсчитывается путем умножения массы груза (кг) на расстояние его перемещения (м). Данный показатель рассчитывают за смену. Для правильной оценки труда по показателю физической динамической нагрузки необходимо также учитывать пол работающего, характер мышечной нагрузки. Последний может быть общим, когда в трудовую деятельность вовлечено более 2/3 всей мышечной массы, региональным – вовлечено от 1/3 до 2/3 мышечной массы и локальным – вовлечено менее 1/3 мышечной массы.
*Масса поднимаемого и перемещаемого вручную груза* (кг) на протяжении смены определяется его взвешиванием на весах. При этом регистрируется максимальная величина. Названный показатель можно определить по документам (технологический

регламент).
*Стереотипные рабочие движения* подразделяются в зависимости от характера мышечной нагрузки на локальные и региональные. Понятие "рабочее движение" подразумевает однократное перемещение тела или его части из одного положения в другое. Локальные движения, как правило, выполняются в быстром темпе (60-250 движений в минуту), их количество за смену может достигать нескольких десятков тысяч. При локальных работах темп, т. е. количество движений в единицу времени, практически не меняется; подсчитав число движений за 10-15 мин рассчитывают число движений за 1 мин. Полученную величину умножают на количество минут, в течение которых выполняется эта работа. Региональные рабочие движения выполняются, как правило, в более медленном темпе, и их легко подсчитать за 10-15 мин или за 1-2 операции несколько раз за смену. Общее количество движений за смену определяется, как и при локальной работе.
Общая оценка труда по степени тяжести проводится на основе всех приведенных выше показателей. Окончательная оценка устанавливается по показателю, отнесенному к наибольшему классу. При наличии двух и более показателей классов 3.1 и 3.2 общая оценка повышается на одну ступень (соответственно 3.2 и 3.3 классов). Наивысшая оценка труда по степени тяжести – 3-й класс 3-я степень. Напряженность
*Напряженность труда* – один из основных факторов трудового процесса, отражающий нагрузку преимущественно на центральную нервную систему, органы чувств, эмоциональную сферу работника.

## 3 Правовые, нормативно-технические и организационные основы в области производственной санитарии.

Правовую основу производственной санитарии составляют законы, подзаконные и нормативно–правовые акты.
Наибольшей юридической силой обладают законы: Конституция РФ; Трудовой кодекс РФ; ФЗ «О санитарно–эпидемиологическом благополучии населения»; ФЗ «О обязательном социальном страховании от НС на производстве и профессиональных заболеваний»; «об охране здоровья граждан»

Права и обязанности работников и работодателей в области охраны и гигиены труда.

Права и обязанности работников. Как права, так и обязанности работников в отношении безопасности и гигиены труда исчерпывающе определены в ТК РФ (ст. 21, 214, 219, 220)

Важнейшими из этих прав являются: 1) получать достоверную информацию о состоянии условий на рабочем месте, о существующем риске повреждения здоровья и о принятых мерах по защите работника от производственных вредностей и опасностей. В случае отказа работодателя предоставить работнику информацию о состоянии охраны труда на рабочем месте работник вправе обратиться в органы государственного надзора с просьбой об инспектировании его рабочего места и принять личное участие в такой проверке; 2) отказаться от выполнения работ в случае возникновения непосредственных опасностей для жизни и здоровья, предупредив о прекращении работы непосредственного руководителя; 3) отказаться от выполнения вредных или опасных работ, если они не предусмотрены трудовым договором.

К обязанностям работников в области охраны труда относятся:

1) соблюдать требования охраны труда; 2) правильно применять средства индивидуальной и коллективной защиты, т.е. одежду и обувь, маски, очки, респираторы; 3) проходить обучение безопасным методам и приемам выполнения работы, проверку

знаний требований охраны труда; 4) немедленно сообщать своим непосредственным или вышестоящим руководителям о любом несчастном случае на производстве и признаках профессионального заболевания, а также о ситуации, которая создает угрозу жизни и здоровью людей. Эта обязанность зафиксирована в ст. 21 ТК РФ как одна из основных обязанностей работника; 5) проходить обязательные медицинские осмотры.

Обязанности и права работодателей. Во-первых, установлено общее требование ко всем работодателям. Они обязаны внедрять современные средства безопасности, предупреждающие производственный травматизм, и обеспечивать санитарно-гигиенические условия, предотвращающие возникновение профессиональных заболеваний. Во-вторых, в различных статьях ТК РФ (ст. 212 и др.) и в других нормативных актах содержится требование обеспечить работникам здоровые и безопасные условия труда. Это требование детализируется в виде конкретных обязанностей работодателей в различных сферах деятельности, в отношении различных аспектов трудовых отношений. Таких обязанностей зафиксировано около 20.

Тема охраны и гигиены труда изложена в конвенций МОТ, посвященных вопросам охраны труда, в 2010-2013 г.г.: Конвенции МОТ № 187 «Об основах, содействующих безопасности и гигиене труда», Конвенции МОТ № 174 «О предотвращении крупных производственных аварий», Конвенции МОТ № 176 «О безопасности и гигиене труда на шахтах».

Федеральным законодательством установлены права, обязанности и ответственность гражданина в отношении санитарно-эпидемиологического благополучия страны.

Федеральный закон «О санитарно-эпидемиологическом благополучии населения» от 30 марта 1999 г. № 52-ФЗ (редакция от 3 августа 2018 года N 342-ФЗ) направлен на обеспечение санитарно-эпидемиологического благополучия населения как одного из основных условия реализации конституционных прав граждан на охрану здоровья и благоприятную окружающую среду, в том числе и производственную среду. В статье 25 закона указывается, что «условия труда, рабочее место и трудовой процесс не должны оказывать вредное воздействие на человека».

Санитарно-эпидемиологическое благополучие населения – состояние здоровья населения, среды обитания человека, при котором отсутствует вредное воздействие факторов среды обитания на человека, и обеспечиваются благоприятные условия его жизнедеятельности (статья 1).

В соответствии с Федеральным законом о «Санитарно-эпидемиологическом благополучии населения» каждый гражданин, имея право на благоприятную среду обитания и возмещения вреда своему здоровью, правомочен получать от властных структур информацию о состоянии среды обитания, осуществлять общественный контроль за ее санитарным состоянием, вносить предложения по улучшению среды обитания. Такими же правами обладают индивидуальные предприниматели и юридические лица.

Каждый гражданин обязан заботиться о здоровье, гигиеническом воспитании и обучении своих детей, соблюдать требования санитарно-эпидемиологического законодательства и не осуществлять действия, его нарушающие. За данные нарушения установлена дисциплинарная, административная и уголовная ответственность.

Среда обитания человека - совокупность объектов, явлений и факторов окружающей (природной и искусственной) среды, определяющая условия жизнедеятельности человека;

- ФЗ «Об обязательном социальном страховании от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний» от 24 июля1998 г. № 125-ФЗ (с изменениями на 17.03.2018г) устанавливает в Российской Федерации правовые, экономические и организационные основы обязательного социального страхования от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний. Закон регулирует взаимоотношения пострадавших на производстве (застрахованных), работодателей (страхователей) и посредника между ними – страховщика (Фонда социального

страхования РФ) по вопросам возмещения вреда, причиненного жизни и здоровью работника при исполнении им трудовых обязанностей.

Федеральный закон «О промышленной безопасности опасных производственных объектах» от 21 июля 1997 г. №т116-ФЗ (новая редакция от 29.07.2018 г.) определяет правовые, экономические и социальные основы обеспечения безопасной эксплуатации опасных производственных объектов и направлен на предупреждение аварий и обеспечение готовности организаций, эксплуатирующих опасные производственные объекты, к локализации и ликвидации последствий указанных аварий.

Федеральный закон «О радиационной безопасности населения» от 9 января 1996 г. № 3-ФЗ определяет правовые основы обеспечения радиационной безопасности населения и работающих с источниками ионизирующих излучений в целях охраны здоровья

Важным звеном санитарного законодательства являются закон РФ «об охране здоровья граждан» от 22 июля 1993 г № 5487-1. Под нею подразумевается совокупность мер политического, экономического, правового, социального, культурного, научного, медицинского санитарно-гигиенического и противоэпидемиологического характера, направленных на сохранение и укрепление физического и психического здоровья каждого человека, поддержание его долголетней активной жизни, предоставление ему медицинской помощи в случае утраты здоровья.В целях охраны здоровья граждан, предупреждения инфекционных и профессиональных заболеваний работники отдельных профессий, перечень которых утверждается Правительством Российской Федерации, проходят обязательные при поступлении и периодические медицинские осмотры. Согласно статье 21 этого закона, работодатели несут ответственность за выделение средств на проведение обязательных и периодических медицинских осмотров.

Рассматривая санитарное законодательство, нельзя оставить без внимания Федеральный закон «О предупреждении распространения в Российской Федерации заболевания, вызываемого вирусом иммунодефицита человека (ВИЧ- инфекции)» от 30 марта 1995 г. № 38-ФЗ.

## 4 Производственный микроклимат, освещение.

Наибольшее количество информации (около 90%) об окружающем нас мире человек получает посредством зрения. Качество этой информации во многом зависит от освещения. В связи с этим обеспечение гигиенически рационального естественного и искусственного освещения имеет важное значение для нормальной жизнедеятельности и работоспособности человека. Уровень освещенности оказывает влияние на психические функции и физиологические процессы в организме человека.

Комплекс световых реакций человека, возникающий при воздействии лучистой энергии солнца в его оптическом спектре, т.е. в диапазоне ультрафиолетовых, видимых и инфракрасных излучений, представляет собой природную световую среду, или световой климат.

Из всего спектра электромагнитных колебаний только видимый спектр излучения воздействует на светочувствительные элементы глаза, создавая ощущение света. Наибольшая чувствительность глаза наблюдается к колебаниям с длиной волны 555 нм, которые воспринимаются как желто-зеленый цвет. Чувствительность глаза к желто-зеленому цвету принимается равной 1.

При недостаточной освещенности и плохом качестве освещения состояние зрительных функций человека находится на низком исходном функциональном уровне, повышается утомление зрения в процессе выполнения работы, возрастает опасность травматизма.

Освещенность на рабочих местах должна соответствовать характеру зрительной работы. Увеличение освещенности рабочих поверхностей от 100 до 1000 лк улучшает условия видения объектов, повышает производительность труда на 10–20 %, уменьшает брак на 20 %, снижает количество несчастных случаев на 30 %.

При 1000 лк утомление имеет минимальное значение. Однако существует предел, когда

дальнейшее увеличение освещенности почти не дает эффекта (Е более 1000 лк) и является экономически нецелесообразным.
2 Достаточно равномерное распределение яркости на рабочей поверхности. При неравномерной яркости в процессе работы глаз вынужден переадаптироваться, что ведет к утомлению зрения. Степень неравномерности освещенности определяется коэффициентом неравномерности, - отношением максимальной освещенности к минимальной. Чем выше точность работ, тем меньше должен быть коэффициент неравномерности. Равномерность освещенности достигается рациональной схемой размещения светильников, системой освещения.
3 Отсутствие резких теней на рабочих поверхностях. В поле зрения человека резкие тени искажают размеры и формы объектов различения, что повышает утомление зрения, а движущиеся тени могут привести к травмам.
4 Отсутствие блескости. Блескость вызывает нарушение зрительных функций – ослепленность, возникающую при наличии в поле зрения чрезмерно большой яркости и приводящей к быстрому утомлению и снижению работоспособности. Блеклость - это повышенная яркость светящихся поверхностей, вызывающая нарушение зрительных функций (ослепленность), т.е. ухудшение видимости объектов.

Различают блеклость прямую (создается источниками света и осветительными приборами - светильники, окна) и отраженную (от зеркальных поверхностей). Способом защиты от прямой блеклости является понижение яркости источника света с помощью отражателей и рассеивателей, правильный выбор защитного угла светильника и высоты его подвеса. Ослабление отраженной блеклости может быть достигнуто правильным выбором направления светового потока на рабочую поверхность, изменением угла наклона рабочей поверхности, устройством отраженного освещения, заменой блестящих поверхностей матовыми.
5 Постоянство освещенности во времени. Колебания освещенности вызывают переадаптацию глаза, приводят к значительному утомлению.
6 Правильная цветопередача. Спектральный состав света должен отвечать характеру работы.
7 Обеспечение электро-, взрыво- и пожаробезопасности. Неправильная эксплуатация, ошибки, допущенные при проектировании и устройстве осветительных установок в пожаро- и взрывоопасных цехах (неправильный выбор светильников, проводов), могут привести к взрыву, пожару и несчастным случаям.
8 Экономичность. Определяется, во-первых, экономическими и эксплуатационными характеристиками источника света (светоотдача и срок службы лампы) и, во-вторых, является основой выбора варианта проектного решения осветительной установки. Основные санитарно- гигиенические требования к производственному освещению сформулированы в СНиП 23-05–95, отраслевых нормах и др.

Виды производственного освещения. В зависимости от источника света освещение может быть естественным, искусственным и совмещенным. Искусственное освещение применяется в темное время суток и в помещениях, где нет естественного освещения. Источниками искусственного освещения являются лампы накаливания (ЛН) и газоразрядные лампы (ГРЛ).

Естественное освещение может быть верхним и боковым. Искусственное местным, общим и комбинированным. По функциональному назначению освещение подразделяется на: рабочее, аварийное, и специальное.

Рабочее освещение предназначено для обеспечения нормального выполнения производственного процесса, прохода людей, движения транспорта и является обязательным для всех производственных помещений

Аварийное освещение (в помещениях и на местах производства наружных работ) нужно предусматривать, если отключение рабочего освещения и связанное с этим нарушение

обслуживания оборудования может привести к взрыву, пожару, длительному нарушению технологического процесса, нарушению работы электростанций. Наименьшая освещенность, создаваемая аварийным освещением, должна составлять 5 % освещенности, нормируемой для рабочего освещения, но не менее 2 лк внутри зданий и не менее 1 лк для территории предприятий.

Специальное освещение может быть эвакуационным, охранным, ремонтным, сигнальным, бактерицидным и эритемным.

Гигиеническое нормирование

Нормирование освещения осуществляется на основании санитарных правил и норм СанПиН 2.2.1/2.1.1.1278 –03 «Гигиенические требования к естественному, искусственному и совмещенному освещению жилых и общественных зданий», строительных норм и правил СНиП 23-05–95 «Естественное и искусственное освещение», согласно которым принято раздельное нормирование естественного, искусственного и совмещенного освещения.

Нормы предусматривают наименьшую требуемую освещенность рабочих поверхностей производственных помещений, исходя из условий зрительной работы. Характеристика зрительной работы определяется наименьшим размером объекта различения. Объект различения - рассматриваемый предмет, отдельная его часть или дефект, который требуется воспринимать глазом в процессе работы.

В зависимости от размера объекта различения (от менее 0,15мм до более 5мм) все виды работ, связанные со зрительным напряжением, делятся на 8 разрядов (I-VIII), которые в свою очередь в зависимости от фона и контраста объекта с фоном делятся на 4 подразряда (а, б, в, г).

Уровни освещенности установлены для каждого подразряда работ. При этом освещенность тем выше, чем темнее фон, меньше размер детали и контраст ее с фоном.

Для работ высших разрядов (от I до V) значения освещенности устанавливаются в зависимости от системы общего или комбинированного освещения. Для остальных низших разрядов (Vв - VIIIв) работ малой точности или грубых нормируется освещенность только системы общего освещения. Местное освещение при таких работах нецелесообразно или невозможно. Для работ 1 разряда зрительных работ (например, обработка драгоценных камней - 1500 лк, в лекционных залах 500 лк, для грубых работ 100-200 лк)

Искусственное освещение нормируется количественными (минимальной освещенностью) и качественными показателями (показателями ослепленности и дискомфорта, коэффициентом пульсации освещенности).

Следует отметить, что в ряде случаев СниП предусматривают как повышение, так и понижение уровней освещенности в зависимости от характера работы.

Увеличение освещенности предусматривается при повышенной опасности травматизма или при выполнении напряженной зрительной работы в течение всего рабочего дня. Понижается освещенность при кратковременном пребывании людей в помещении и наличии оборудования, не требующего постоянного наблюдения.

Нормирование естественного освещения

Вследствие крайней изменчивости природного освещения не только в течение суток, но даже в течение коротких промежутков времени для нормирования и расчета естественного освещения помещений принята относительная величина, называемая коэффициентом естественной освещенности (КЕО), который равен отношению естественной освещенности, создаваемой в некоторой точке помещения светом неба (непосредственно или после отражений) $E_{вн}$, к одновременному значению наружной горизонтальной освещенности $E_н$, создаваемой светом полностью открытого небосвода, выраженному в процентах:

КЕО=Евн/Ен 100. Значение коэффициента естественной освещенности в соответствии со СНиП 23-05–95 находится в пределах 0,1–10 %.

5: Вредные вещества, излучения

В воздухе рабочей зоны могут находиться вредные вещества различного происхождения в виде газов, паров, аэрозолей, в том числе радиоактивные.

Состав чистого воздуха – это азот 78,08 %; кислород 20,94 %; аргон, неон, другие инертные газы и водяной пар 0,94 %; углекислый газ 0,03 %; прочие газы 0,01%.

Вредное вещество – это вещество, которое при контакте с организмом человека в случае нарушения требований пр санитарии могут вызывать профессиональные заболевания или отклонения в состоянии здоровья, обнаруживаемые современными методами исследований, как в процессе работы, так и в отдаленные сроки жизни настоящего и последующего поколений. Вредные вещества – это химический опасный и вредный производственный фактор.

Действие на организм

По характеру воздействия на организм человека вредные вещества подразделяются на следующие группы:

а) общетоксические – вызывают отравление всего организма или поражающие отдельные системы (ароматические углеводороды, ртуть, свинец, фосфор);

б) раздражающие – вызывают раздражение слизитых оболочек дыхательных путей, глаз, лёгких, кожи. Изменяют реактивную способность организма. Вызывают профзаболевания – дерматиты, бронхиальная астма (аммиак, хлор, сероводород, сильные щелочи, кислоты,);

в) сенсибилизирующие – вызывают аллергические реакции (формальдегид, растворители, лаки, некоторые антибиотики - эритромицин);

г) канцерогенные – вызывают злокачественные или доброкачественные новообразования (асбест, смола ароматичные углеводороды)

д) мутагенные – нарушают генетический код клеток, наследственной информации. (свинец, ртуть, формальдегид, радиоактивные и наркотические вещества);

е) влияющие на репродуктивную (детородную) функцию (бензол, сероуглерод, ртуть, свинец).

Проф заболевания от воздействия вв.

Под действием вредных веществ в организме человека происходят различные нарушения. Эти нарушения проявляются в виде острых, хронических отравлений.

В развитии острого профессионального отравления, как правило, имеются две фазы: первая – неспецифических проявлений (головная боль, слабость, тошнота и т.д.) вторая – специфических (например, отек легких при отравлении оксидами азота или паралич дыхания при отравлении сероводородом).

Хронические отравления возникают постепенно, при длительном поступлении вредных веществ в организм в относительно небольших количествах. Они развиваются в результате накопления массы вредного вещества в организме (материальная кумуляция) или вызываемых им нарушений (функциональная кумуляция). Поражаемые органы и системы в организме при хроническом и остром отравлениях одним и тем же веществом могут отличаться. Например, при остром отравлении бензолом в основном страдает нервная система и наблюдается наркотическое действие, при хроническом – система кроветворения.

Действие химических веществ на кожу

Профессиональные заболевания кожи в большинстве случаев развиваются вследствие контакта кожи с одни, двумя или комплексом вредных производственных факторов.

Все химические вещества по их действию на кожу делятся на три основные группы: 1) оказывающие преимущественно раздражающее действие; 2) обладающие фотостимулирующими и фотосенсибилизирующими свойствами; 3) вещества-сенсибилизаторы.

В первую группу входят облигатные раздражители, вызывающие ожоги и изъявления кожи (концентрированные неорганические кислоты и щелочи, некоторые соли тяжелых

металлов, вещества кожно-нарывного действия); факультативные первичные раздражители, вызывающие: а) контактные дерматиты (слабо концентрированные растворы кислот, щелочей, органические кислоты, большинство органических растворителей и др.); б) поражение фолликулярного аппарата (смазочные масла, деготь, пек, хлорированные нафталины и др.); в) токсическую меланодермию (нафтеновые углеводороды); г) ограниченные гиперкератозы и эпителиому (бензапрен, бенз-а-пирен, фенантрен и др.).

Во вторую группу включены химические вещества, вызывающие фотодерматиты (пек, гудрон, асфальт, толь).

Третью группу составляют вещества, вызывающие развитие аллергического дерматита, токсикодермии и экземы при контактном и неконтактном (пероральном, ингаляционном) введении аллергена.

Действие химических веществ на органы дыхания

В условиях промышленных производств ингаляционное поступление в организм работающих вредных веществ является наиболее частым. Однако путь вредных веществ всегда определяет место приложения их токсического действия: большая всасывающая поверхность легких способствует быстрому попаданию токсичных веществ в кровеносное русло, органы и ткани, что обуславливает общетоксическое резорбтивное действие ядов. Среди многообразия промышленных ядов значительное место занимают химические вещества раздражающего действия, токсический эффект которых проявляется путем прямого попадания в дыхательные пути, вызывая различные формы их поражения. Раздражающий эффект этих веществ может проявляться не только при воздействии на органы дыхания, но и при контакте с кожей, а также при попадании в глаза. Известны сочетанные формы интоксикаций, при которых одновременно наблюдается поражение органов дыхания, глаз и кожных покровов.

Комбинированное действие вредных веществ.

В связи со сложностью и многостадийностью химических производств в этих условиях на рабочих могут воздействовать одновременно несколько вредных химических веществ. Проявляется комбинированное действие ядов, то есть одновременное или последовательное действия на организм нескольких ядов при одном и том же пути поступления. Эти вещества могут использоваться в виде сырья, промежуточного и готового продуктов. Некоторые из них являются побочными продуктами технологического процесса. В других отраслях промышленности, таких как металлургической, машиностроительной, в сельском хозяйстве и химико-фармацевтической промышленности также возможно комбинированное действие веществ.

а. Гигиеническое нормирование

ПДК вредных веществ в воздухе рабочей зоны, мг/м$^3$ – концентрация, которая при ежедневной (кроме выходных дней) работе в течение 8 ч или при другой продолжительности, но не более 41 ч в неделю, в течение всего рабочего стажа не может вызвать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследований в процессе работы или в отдаленные сроки жизни настоящего и последующих поколений.

При установлении ПДК вредных веществ руководствуются следующими основными принципами:

– Принцип порогового действия всех типов вредных веществ (в том числе мутагенного и канцерогенного действия). Есть концентрации, при которых нет вредного воздействия на человека, при превышении порога происходит переход количества в качество и начинается вредное действие.

– Принцип приоритета медицинских и биологических показаний к установлению санитарных регламентов по сравнению с технической достижимостью и

экономическими требованиями сегодняшнего дня.
- Принцип опережения токсикологических исследований и установления гигиенических нормативов по сравнению с внедрением вещества в производство.
Методы защиты от воздействия вредных веществ делят на 3 группы:
1.Технические (основное направление – не допускать проникновения вредных веществ в воздух рабочей зоны):
- замена ядовитых веществ неядовитыми или менее ядовитыми. Например, ограничение или исключение применение таких растворителей, как бензол, дихлорэтан.
- гигиеническая стандартизация химического сырья и продукции. Примерами могут служить ограничение содержания ароматических углеводородов в бензинах, метилового спирта - в гидролизном спирте.
комплексная механизация и автоматизация технологических процессов;
герметизация технологического оборудования и коммуникаций;
своевременный ремонт оборудования;
промышленная вентиляция.
2.Медико–санитарные:
систематический контроль содержания вредных веществ в воздухе рабочей зоны;
организация рационального и лечебного питания,
использование антидотов для профилактики профессиональных заболеваний.
регистрация и расследование всех случаев отравления, периодические медосмотры;
3.Организационные:
проведение инструктажей; организация рабочего места;
применение СИЗОД – фильтрующие респираторы и противогазы, изолирующие защитные приспособления. К изолирующим СИЗОД относятся шланговые и кислородные дыхательные аппараты.

## 6 Производственный шум, вибрация

Сочетание звуков различной частоты и интенсивности называется шумом. Шумом являются всякого рода звуки, мешающие восприятию полезных звуков или нарушающие тишину, и также звуки, оказывающие вредное или раздражающее действие на организм человека.
Звук как физическое явление представляет собой волновое колебание упругой среды. Звуковые волны возникают в том случае, когда в упругой среде имеется колеблющееся тело или когда частицы упругой среды приходят в колебательное движение в продольном или поперечном направлении в результате воздействия на них какой-либо возмущающей силы.
Источниками звуков и шумов являются колеблющиеся твердые, жидкие или газообразные среды. Колебательные возмущения, распространяющиеся от источника звука в окружающей среде, называются звуковыми волнами, а пространство, в котором они наблюдаются, – звуковым полем.
В газообразной среде (воздухе) могут распространяться только продольные волны, в которых частицы среды колеблются вдоль направления распространения волн.
Направление распространения звуковой волны называется звуковым лучом. Фронт волны перпендикулярен звуковому лучу. В общем случае фронт волны имеет сложную форму, но в практических случаях ограничиваются рассмотрением трех видов волн: плоской, сферической и цилиндрической. В виде плоской волны звук распространяется, когда размеры источника звука больше, чем длина излучаемой звуковой волны. Плоская волна образуется на значительных расстояниях от источника любых размеров.
С физиологических позиций звук – это ощущение, возникающее в ухе человека в результате изменения давления.
Звуковое давление измеряется в Паскалях (1 Па=1 Н/м$^2$). Ухо человека ощущает звуковое давление от 2–10$^{-5}$ до 2–10$^2$ Н/м$^2$.

Звуковые волны являются носителями энергии. Звуковая энергия, которая приходится на 1 $м^2$ площади поверхности, расположенной перпендикулярно к распространяющимся звуковым волнам, называется силой звука и выражается в $Вт/м^2$. Так как звуковая волна представляет собой колебательный процесс, то он характеризуется такими понятиями, как период колебания (Т) – время, в течение которого совершается одно полное колебание, и частота колебаний (Гц) – число полных колебаний за 1 с. Совокупность частот дает спектр шума.

Шумы содержат звуки разных частот и различаются между собой распределением уровней по отдельным частотам и характером изменения общего уровня во времени. Для гигиенической оценки шума используют звуковой диапазон частот от 45 до 11 000 Гц, включающий 9 октавных полос со среднегеометрическими частотами в 31,5; 63; 125; 250; 500; 1000; 2000; 4000 и 8000 Гц.

Орган слуха различает не разность, а кратность изменения звуковых давлений, поэтому интенсивность звука принято оценивать не абсолютной величиной звукового давления, а его уровнем, т.е. отношением создаваемого давления к давлению, принятому за единицу сравнения.

В диапазоне от порога слышимости до болевого порога отношение звуковых давлений изменяется в миллион раз, поэтому для уменьшения шкалы измерения звуковое давление выражают через его уровень в логарифмических единицах – децибелах (дБ).

Ноль децибел соответствует звуковому давлению $2–10^{-5}$ Па, что приблизительно соответствует порогу слышимости тона с частотой 1000 Гц.

В качестве интегральной (одним числом) характеристики шума на рабочих местах применяется оценка уровня звука в дБА (измеренных по так называемой шкале А шумомера), представляющих собой средневзвешенную величину частотных характеристик звукового давления с учётом биологического действия звуков разных частот на слуховой анализатор.

Источники шума

Шум является одним из наиболее распространённых неблагоприятных факторов производственной среды, воздействие которого на работающих, сопровождается развитием у них преждевременного утомления, снижением производительности труда, ростом общей и профессиональной заболеваемости, а также травматизма.

В настоящее время трудно назвать производство, на котором не встречаются повышенные уровни шума на рабочих местах. К наиболее шумным относятся горнорудная и угольная, машинно–строительная, металлургическая, нефтехимическая, лесная и целлюлозно–бумажная, радиотехническая, легкая и пищевая, мясомолочная промышленности и др.

На заводах железобетонных конструкций шум достигает 105–120 дБА. Шум является одной из ведущих профессиональных вредностей в деревообрабатывающей и лесозаготовительной промышленностях. Так, на рабочем месте рамщика и обрезчика уровень шума колеблется от 93 до 100 дБА с максимумом звуковой энергии в области средних и высоких частот. В этих же пределах колеблется шум в столярных цехах, а лесозаготови- тельные работы (валка, трелевка леса) сопровождаются уровнем шума от 85 до 108 дБА за счет работы трелевочных лебедок, тракторов и других механизмов.

Подавляющее большинство производственных процессов в прядильных и ткацких цехах также сопровождается образованием шума, источником которого является бойковый механизм ткацкого станка, удары погонялки челнока. Наиболее высокий уровень шума наблюдается в ткацких цехах – 94–110 дБА.

Наиболее шумными операциями в машиностроении, в том числе, авиастроении, автомобилестроении, вагоностроении и др. следует считать обрубные и клепальные работы с использованием пневматических инструментов, режимные испытания двигателей и их агрегатов различных систем, стендовые испытания на вибропрочность изделий, барабанную готовку, шлифовку и полировку деталей, штампопрессовую заготовку.

Для нефтехимической отрасли характерными являются высокочастотные шумы различных

уровней за счет сброса сжатого воздуха из замкнутого технологического цикла химических производств или от оборудования, работающего на сжатом воздухе, например, сборочных станков и вулканизационных линий шинных заводов.

Металлургическую промышленность в целом можно отнести к отрасли с выраженным шумовым фактором. Так, интенсивный шум характерен для плавильных, прокатных и трубопрокатных производств. Из производств, относящихся к этой отрасли, шумными условиями характеризуются метизные заводы, оснащенные холодновысадочными автоматами.

В лесной и целлюлозно–бумажной отраслях наиболее шумными являются деревообрабатывающие цеха.

В горнорудной и угольной промышленностях наиболее шумными являются операции механизированной добычи полезных ископаемых как с использованием ручных машин (пневмо- перфораторы, отбойные молотки), так и с помощью современных стационарных и самоходных машин (комбайны, буровые станки и пр.).

Пищевая промышленность – наименее шумная из всех. Характерные для нее шумы генерируют поточные агрегаты кондитерских и табачных фабрик. Однако отдельные машины этих производств создают значительный шум, например, мельницы зерен какао, некоторые сортировочные машины.

В каждой отрасли промышленности имеются цеха или от- дельные компрессорные станции, снабжающие производство сжатым воздухом или перекачивающие жидкости или газооб- разные продукты. Последние имеют большое распространение в газовой промышленности как большие самостоятельные хозяйства. Компрессорные установки создают интенсивный шум.

Шум является также наиболее характерным неблагоприятным фактором производственной среды на рабочих местах пассажирских, транспортных самолетов и вертолетов; подвижного состава железнодорожного транспорта; морских, речных, рыбопромысловых и других судов; автобусов, грузовых, легковых и специальных автомобилей; сельскохозяйственных машин и оборудования; строительнодорожных, мелиоративных и дру гих машин.

Уровни шума в кабинах современных самолетов колеблются в широком диапазоне – 69–85 дБА (магистральные самолеты для авиалиний со средней и большой дальностью полета). В кабинах автомобилей средней грузоподъемности при различных режимах и условиях эксплуатации уровни звука составляют 80–102 дБА, в кабинах большегрузных автомобилей – до 101 дБА, в легковых автомобилях – 75–85 дБА.

Таким образом, для гигиенической оценки шума важно знать не только его физические параметры, но и характер трудовой деятельности человека–оператора, и, прежде всего, степень его физической или нервной нагрузки.

## Вибрация

### Общие сведения

Под вибрацией понимают механические колебания упругих тел, характеризующиеся периодичностью изменения параметров. Вибрация возникает при неправильной балансировке валов, шкивов в машинах и станках, воздействии динамических нагрузок, при работе машин и механизмов ударного действия.

Основными параметрами характеризующими вибрацию являются: виброперемещение, виброскорость и виброускорение.

Виброперемещение (x) – величина отклонения колеблющейся точки от положения равновесия.

Виброскорость м/с (υ) и виброускорение м/с$^2$ (а) являются соответственно первой и второй производной по времени от виброперемещения.

### Действие на организм

Вибрация может оказывать на человека как положительное, так и отрицательное действие.

Вибрация относится к факторам, обладающим значительной биологической активностью. Степень распространения колебаний по телу зависит от их частоты, амплитуды, площади участков тела, соприкасающихся с вибрирующим объектом, места приложения и направления оси вибрационного воздействия, демпфирующих свойств тканей, явления резонанса и других условий.

При изучении биологического действия вибрации принимается во внимание характер её распространения по телу человека, которое рассматривается как сочетание масс с упругими элементами. В одном случае это всё туловище с нижней частью позвоночника и тазом (стоящий человек), в другом случае – верхняя часть туловища в сочетании с верхней частью позвоночника, нагибающийся вперёд (сидящий человек). Независимо от места возбуждения колебания затухают при распространении по телу тем больше, чем выше их частота, причём величина затухания не зависит от уровня интенсивности колебаний в зоне возбуждения.

Благоприятное воздействие оказывает местная вибрация малой интенсивности: восстановление трофических изменений, быстрое заживление ран, притупление боли, улучшение функционального состояния центральной нервной системы и др.

Длительное воздействие общей вибрации может привести к развитию вибрационной болезни.

Гигиеническое нормирование

Основным законодательным документом гигиенического нормирования вибрации является СН 2.2.4/2.1.8.566–96 «Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий».

Гигиеническая оценка постоянной и непостоянной вибрации, воздействующей на человека, должна производиться следующими методами:

- частотным (спектральным) анализом нормируемого параметра;
- интегральной оценкой по частоте нормируемого параметра;
- интегральной оценкой с учётом времени вибрационного воздействия по эквивалентному (по энергии) уровню нормируемого параметра.

Нормируемыми параметрами являются среднеквадратические значения виброскорости (v) и виброускорения (a), и их логарифмические уровни ($L_V$, $L_a$).

Нормируемый диапазон частот устанавливается:

- для локальной вибрации в виде октавных полос со среднегеометрическими частотами: 8; 16; 31,5; 63; 125; 250; 500;1000 Гц;
- для общей вибрации в виде октавных или 1/3 октавных полосах со среднегеометрическими частотами: 0,8; 1; 1,25; 1,6; 2,0; 2,5; 3,15; 4,0; 5,0; 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0; 25,0; 31,5;40,0; 50,0; 63,0; 80,0 Гц.

Предельно допустимый уровень (ПДУ) вибрации – это уровень фактора, который при ежедневной (кроме выходных дней) работе, но не более 40 часов в неделю в течение всего рабочего стажа, не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья. Соблюдение ПДУ вибрации не исключает нарушение здоровья у сверхчувствительных лиц.

ПДУ нормируемых параметров производственной локальной вибрации и общей вибрации всех категорий при длительности вибрационного воздействия 480 мин (8 ч) приведены в таблицах СН 2.2.4/2.1.8.566–96. Санитарные нормы одночисловых показателей вибрационной нагрузки на человека для длительно-сти смены 8 часов в октавных полосах частот приведены в таблице 5.

Допустимое значение вибрации $U_T$ при длительности её воздействия T менее 480 мин (8 ч) определяется по формуле $U_T=U_{480}\cdot(480/T)^{1/2}$, где $U_{480}$–норма вибрации при длительности воздействия 480 мин. Максимальный уровень вибрации не должен превышать значений, вычисленных для T=30 мин.

## 7 Основы физиологии труда.

Физиология труда - раздел таких медицинских дисциплин нормальная физиология и гигиена труда, изучающий измене функционального состояния организма человека под производственной деятельности и разрабатывающий чески обоснованные средства организации трудового процесса, способствующие предупреждению утомления и поддержанию высокого уровня работоспособности.
Исследования по физиологии труда проводятся в двух направлениях:
изучение общих физиологических закономерностей трудовых процессов;
изучение физиологических реакций организма при конкретных видах производственной деятельности.
Задачи физиологии труда охватывают широкий круг вопросов:
изучение физиологических закономерностей при физических, нервно-психических нагрузках и при воздействии других вредных производственных факторов (шума, вибрации, микроклимата и др.);
исследование физиологических механизмов, определяющих динамику работоспособности человека в современных производственных условиях;
разработку физиологических основ мероприятий в целях повышения работоспособности и снижения утомления.
Классификация основных видов (форм) организации трудовой деятельности. Автоматизированный труд подразделяется на комплексно-автоматизированный и собственно автоматизированный. Комплексная автоматизация труда - это такая высокая степень организации производства, при которой управление осуществляется с дистанционных щитов и пультов управления, располагающихся в изолированных помещениях или кабинах. Ее разновидностью является автономная комплексная автоматизация труда, представленная разнообразными транспортными средствами. Основной вред в данном случае наносят нервно-психические перегрузки.
Автоматизированное производство - более низкая ступень, так как в ее организации хотя и имеет место управление с пультов и щитов, но они располагаются в цехе рядом с оборудованием. Поэтому к такому вредному производственному фактору как нервно-психические перегрузки прибавляются факторы, присущие конкретному производству: химические вещества, пыль, шум и пр.
В целом же автоматизированный труд имеет несомненное гигиеническое преимущества прежде всего в том, что в несколько раз сокращается численность работников во вредных условиях труда.
Механизация труда - это более низкая, но самая частая ступень организации производства, при которой полностью или частично рабочие операции выполняют машины и механизмы. Механизация труда подразделяется на комплексно-механизированный, собственно механизированный и механизированно-ручной труд.
Комплексно-механизированный труд представляет такую организацию производственного процесса, когда основные и вспомогательные технологические процессы выполняются машинами, механизмами и другими видами оборудования. На первый план из вредных производственных факторов выходят те, которые генерирует данное производство- шум, пыль и пр.
Механизированный труд отличается от предыдущего тем, что в нем имеет место неполная механизация. Поэтому при этой распространенной форме организации производства наблюдаются физические перегрузки в сочетании с воздействием других вредных производственных факторов.
Механизированно-ручной труд (весьма распространенный) тоже относится к труду с неполной механизацией, так как при выполнении работ широко используются механизированно-ручные пневмо- и электроинструменты. Эти вредные производственные факторы аналогичны физическим перегрузкам, но выражены в боль- шей степени.
Ручной труд - это труд, который выполняется вручную с использованием исключительно мускульной силы человека и примитивных орудий труда (лопаты, лома и др.) без

применения инструментов с приводом. Главным вредным производственным фактором при ручном труде являются физические перегрузки. Другие вредные производственные факторы воздействуют на работника достаточно интенсивно, так как он находится в эпицентре их выделения (генерации) - на расстоянии вытянутой руки. Исключением надо считать ручной труд при работе на конвейерах, при котором у трудящихся возможны нервно-психические перегрузки. На производстве указанные виды труда далеко не всегда встречаются в чистом виде, а чаще в различных соотношениях.
Некоторые понятия в физиологии труда. Эффективность трудовой деятельности человека в значительной степени зависит от следующих факторов: предмет и орудия труда, организация рабочего места, условия труда, технико-организационные мероприятия. Эффективность согласования указанных факторов с возможностями человека во многом зависит от наличия определенной работоспособности.

8 Роль средств индивидуальной защиты в профилактике травматизма и заболеваний.

Под средствами индивидуальной защиты (СИЗ) понимается средства, используемые работниками для предотвращения или уменьшения воздействия вредных и опасных производственных факторов, а также для защиты от загрязнения.

Средства индивидуальной защиты применяют в тех случаях, когда безопасность труда не может быть обеспечена конструкцией оборудования, организацией производственного процесса, архитектурно-планировочными решениями и средствами коллективной защиты.

Требования к средствам индивидуальной защиты

Работодатель обязан обеспечить приобретение и выдачу прошедших в установленном порядке сертификацию или декларирование соответствия средств индивидуальной защиты. Сертификация СИЗ – это процедура подтверждения соответствия средств индивидуальной защиты установленным нормам.

Средства индивидуальной защиты должны обеспечивать предотвращение или уменьшение действия опасных и вредных производственных факторов. Выбор конкретного типа СИЗ работающих должен осуществляться с учетом требований безопасности для данного процесса или вида работ.

Средства индивидуальной защиты не должны изменять своих свойств при их стирке, химчистке и обеззараживании, должны подвергаться оценке по защитным, физиолого-гигиеническим и эксплуатационным показателям, иметь инструкцию с указанием назначения и срока службы изделия, правил его эксплуатации и хранения.

Обязанности работодателя по обеспечению работников средствами индивидуальной защиты

Работодатель обязан:

обеспечивать работников средствами индивидуальной защиты в соответствии с установленными сроками.

заменить пришедшие средства индивидуальной защиты в негодность до окончания срока пользования по причинам, не зависящим от работника (пропажа, порча).

соблюдать сроки периодических испытаний и проверки исправности технических средств индивидуальной защиты (респираторов, противогазов, предохранительных поясов).

осуществлять контроль за правильным использованием и обязательным применением выданных средств индивидуальной защиты.

Работники не должны допускаться к работе без положенных средств индивидуальной защиты, в неисправной, загрязненной специальной одежде или обуви, с неисправными

или не прошедшими очередное испытание или проверку техническими средствами индивидуальной защиты.

Ответственность за своевременную и в полном объеме выдачу работникам средств индивидуальной защиты, прошедших в установленном порядке сертификацию или декларирование соответствия в соответствии с типовыми нормами, организацию контроля за правильностью их применения работниками, а также за хранение и уход за средствами индивидуальной защиты возлагается на работодателя.

Если работник не обеспечен сертифицированными и исправными средствами индивидуальной защиты, которые положены ему в соответствии с нормами, работодатель не вправе требовать от него выполнения трудовых обязанностей и обязан оплатить возникший по этой причине простой (ст. 220 ТК РФ).

Обязанности работников по применению средств индивидуальной защиты

Работник обязан:

правильно применять средства индивидуальной защиты, выданные ему в установленном порядке. В случае необеспечения работника, занятого на работах с вредными и (или) опасными условиями труда, а также с особыми температурными условиями или связанных с загрязнением, СИЗ в соответствии с законодательством Российской Федерации он вправе отказаться от выполнения трудовых обязанностей, а работодатель не имеет права требовать от работника их исполнения и обязан оплатить возникший по этой причине простой.

ознакомиться при заключении трудового договора с «Межотраслевыми правилами обеспечения работников специальной одеждой, специальной обувью и другими средствами индивидуальной защиты», а также с соответствующими его профессии и должности типовыми нормами выдачи СИЗ.

своевременно с окончанием соответствующего периода года сдавать для хранения до следующего периода года средства индивидуальной защиты, предназначенные для использования в особых температурных условиях, обусловленных ежегодными сезонными изменениями температуры.

своевременно проходить инструктажи при применении средств индивидуальной защиты, применение которых требует от работников практических навыков (респираторы, противогазы, самоспасатели, предохранительные пояса, накомарники и др.), о правилах применения указанных СИЗ, простейших способах проверки их работоспособности и исправности, а также тренировку по их применению.

своевременно ставить в известность работодателя (или его представителя) о выходе из строя (неисправности) средств индивидуальной защиты.

своевременно сдавать средства индивидуальной защиты для стирки, обеспыливания и др.

не выносить средства индивидуальной защиты по окончании рабочего дня за пределы территории работодателя или территории выполнения работ работодателем – индивидуальным предпринимателем.

Контрольные вопросы

Тема 1 Производственная санитария как наука.

1. Предмет, цель и содержание дисциплины.
2. Основные задачи курса.
3. Истоки формирования науки.
4. Комплексный характер дисциплины, место в системе наук.
5. Основные термины и определения.

6. Основные понятия, термины и определения.
7. Перспективы развития производственной санитарии.
8. Основные составляющие производственной среды
9. Трудоспособность человека и её факторы
10. Личность как элемент системы «человек - среда»

Тема 2 Классификация трудовых процессов и факторов производственной среды.

1. Современные направления деятельности и задачи.
2. Идентификация источников физических, химических, биологических и психо-физиологических производственных факторов.
3. Характеристика вредных производственных факторов в отрасли.
4. Характер взаимодействия организма человека с факторами производственной среды.
5. Характеристика факторов трудовых процессов.

Тема 3. Правовые, нормативно-технические и организационные основы в области производственной санитарии.

1. Понятие санитарного законодательства как совокупности законов, регулирующих отношения в области охраны здоровья людей от неблагоприятного или опасного влияния многообразных факторов среды обитания человека.
2. Нормативно-правовые акты в области производственной санитарии.
3. Надзор и контроль за соблюдением санитарного законодательства.
4. Гигиена труда женщин и молодежи
5. Закон «О санитарно-эпидемиологическом благополучии населения»
6. Виды санитарного надзора.
7. Государственный надзор за соблюдением санитарного законодательства
8. Федеральная служба по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека (Роспотребнадзор).

Тема 4: Производственный микроклимат, освещение.

1. Понятие о микроклимате производственного помещения.
2. Параметры микроклимата.
3. Влияние параметров микроклимата на здоровье и работоспособность человека.
4. Приборы, измеряющие микроклимат.
5. Гигиеническое нормирование характеристик микроклимата в производственных помещениях.
6. Влияние классов труда на нормирование микроклимата.
7. Виды освещения.
8. Типы осветительных приборов.
9. Требования к производственному освещению.
10. Производственное освещение, системы и виды.
11. Естественное и искусственное освещение: рабочее, аварийное, охранное, дежурное.
12. Системы освещения: общее, местное, комбинированное.
13. Гигиеническое нормирование естественного и искусственного освещения.
14. Совмещенное освещение помещений.

Тема 5: Вредные вещества, излучения

1. Группы химически опасных и вредных факторов.
2. Виды химических опасностей.
3. Классификация по характеру воздействия на человека.
4. Пути проникновения химических опасностей.
5. Специфические отдельные группы веществ.

6. Химические вещества искусственного происхождения.
7. Токсикология вредных веществ в воздухе рабочей зоны.
8. Отравление вредными веществами.
9. Острые отравления, хронические.
10. Сенсибилизация.
11. Толерантность организма.
12. Биологическое действие вредных веществ.
13. Первичное специфическое действие вредных веществ.
14. Мутагенное и канцерогенное действие вредных веществ.
15. Правила измерения содержания вредных веществ в жилых помещениях.
16. Комбинированное действие вредных веществ.
17. Аддитивное действие.
18. Потенцированное действие.
19. Антагонистическое действие.
20. Независимое действие.
21. Пути обезвреживания ядов.
22. Причины образования пыли и ее основные свойства.
23. Пыль как производственная вредность.
24. Химический состав пыли.
25. Воспламеняемость и взрывоопасность пыли.
26. Оценка вредности пыли.
27. Методы измерения концентрации пыли, и средства защиты от пыли.
28. Методы очистки воздуха от пыли.
29. Источники излучений.
30. Физико–гигиеническая характеристика излучений.
31. Гигиеническое нормирование излучений.
32. Методы и средства регистрации излучений.
33. Профилактические мероприятия и меры защиты при работе с источниками излучений.

Тема 6: Производственный шум, вибрация

1. Основные источники, физические параметры шума и вибрации.
2. Классификация производственных шумов и вибраций.
3. Общее действие на организм.
4. Принципы гигиенического нормирования.
5. Система мероприятий по профилактике на производстве.

Тема 7: Основы физиологии труда.

1. Физиологические особенности и классификация физического труда.
2. Особенности физиологических реакций организма при умственном труде и его классификация.
3. Физиологические сдвиги в организме при работе.
4. Утомление и переутомление.
5. Пути сохранения работоспособности и повышения производительности труда.
6. Хронометражные исследования на производстве

Тема 8: Роль средств индивидуальной защиты в профилактике травматизма и заболеваний.

1. Роль средств индивидуальной зашиты в профилактике травматизма и заболеваний.
2. Классификация средств индивидуальной защиты.
3. Защита глаз.
4. Защита головы
5. Защита органов слуха.

6. Защита органов дыхания.
7. Спецодежда.
8. Спецобувь.
9. Защитные перчатки, защитные дерматологические средства.

Список литературы

1 Глебова Е.В. Производственная санитария и гигиена труда: учебное пособие / Е. В. Глебова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 2007. - 382 с. : ил. –

2 Безопасность жизнедеятельности : учебное пособие / В. А. Подюков, В. В. Токмаков, В. М. Куликов ; под ред. В. В. Токмакова ; Уральский государственный горный университет. - 3-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург : УГГУ, 2007. - 314 с.

3 Гигиена труда [Текст]: учебник/Под ред. Н.Ф. Измерова, В.Ф. Кириллова. – М.: ГЭОТАР–Медиа, 2010. – 592 с.

4 Трудовой кодекс РФ от 30.12.2001 г. № 197–ФЗ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А. Упоров
14.10.2020

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

# ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки
***21.05.04 Горное дело***

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрены на заседании кафедры
Информатики
*(название кафедры)*

Зав. кафедрой _____
*(подпись)*
Дружинин А. В.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 16.09.2021
*(Дата)*

Рассмотрены методической комиссией
Горно-механического факультета
*(название факультета)*

Председатель _____
*(подпись)*
Осипов П.А.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 12.10.2021
*(Дата)*

Екатеринбург

## ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов специалиста по направлению подготовки 21.05.04 – «Горное дело» при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

## ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

### Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учится лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: «**реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;
- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

### Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

**Формулирование цели и составление плана реферата**

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

**Цель** – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).
   1.1. (полное название параграфа, пункта);
   1.2. (полное название параграфа, пункта).
2. (полное наименование главы).
   2.1. (полное название параграфа, пункта);
   2.2. (полное название параграфа, пункта).

Заключение (выводы).

} Основная часть

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

**Титульный лист** оформляется в соответствии с Приложением.

**Оглавление** (план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

**Введение.** В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

**Основная часть** реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

**Заключение** (выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

**Библиография** (список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

**Приложения** могут включать графики, таблицы, расчеты.

## ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

### Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и помарки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта Times New Roman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

### Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что…», «таблица позволяет заключить, что…» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещённого в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для

различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «…в табл. 2.2».

## Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (х) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «…в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

## Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

**Схема** – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

**Диаграмма** – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

**График** – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «…на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисуночный текст).

## Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «…в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

## Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

**Статья одного, двух или трех авторов из журнала**

*Зотова Л. А., Еременко О. В.* Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

**Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами**

*Валютный курс и экономический рост* / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

**Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами**

*Олейник А. Н.* Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

**Книга, написанная более чем тремя авторами**

*Экономическая теория:* учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

**Сборники**

*Актуальные проблемы экономики и управления*: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

**Статья из сборника**

*Данилов А. Г.* Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

**Статья из газеты**

*Крашаков А. С.* Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

**Библиографические ссылки**

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

**Пример оформления затекстовой ссылки**

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалистиата и магистратуры /О.С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

## ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1.Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.

2.Ответы студента на вопросы преподавателя.

3.Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

**Советы студенту:**

- Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.
- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.
- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.
- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!
- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.
- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.
- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

## ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. 1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яndex, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

## МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

### Проверяемые компетенции: ОПК-5

*Знать:*

- офисные приложения;
- основы создания баз данных;
- принципы работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

*Уметь:*

- использовать офисные приложения;
- создавать базы данных средствами офисных приложений;
- использовать электронную почту и другие средства коммуникаций с помощью Интернета.

*Владеть:*

- инструментарием офисных приложений;
- технологией разработки баз данных;
- навыками работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

**Критерии оценивания:**

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

**Правила оценивания:**

Каждый показатель оценивается в 1 балл

**Критерии оценки:**

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;
7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;
5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;
0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Приложение

**Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)**

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

# УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

**Руководитель:**
Дружинин А.В.
**Студент** гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А. Упоров
14.10.2020

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

# ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

| | |
|---|---|
| Одобрены на заседании кафедры | Рассмотрены методической комиссией |
| Информатики | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой | Председатель |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Дружинин А. В. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ... 3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 ... 11
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров» ... 11
Создание файла базы данных Access ... 11
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 ... 20
Работа с простыми запросами ... 20
Конструирование запросов на выборку с условием отбора ... 20
Вычисляемые поля в запросах ... 23
Параметры в запросах ... 25
Групповые операции в запросах ... 27
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 ... 31
Работа с многотабличными запросами ... 31
Запросы на изменение ... 35
Задание для самостоятельной работы ... 38
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 ... 39
Работа с формами ... 39
Условное форматирование элементов управления ... 40
Создание разделенной формы ... 42
Многотабличные формы ... 43
Создание многотабличной формы с помощью мастера ... 44
Одиночная многотабличная форма ... 47
Задание для самостоятельной работы ... 51
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5 ... 51
Работа с отчетами ... 51
Задание для самостоятельной работы ... 53
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 ... 54
Создание главной кнопочной формы ... 54
с использованием макросов ... 54
Создание управляющих кнопок на экране ... 57
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ... 62
Указания к выполнению работы ... 62

Варианты заданий ..... 62
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ..... 74

# ВВЕДЕНИЕ

**Система управления базами данных**

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами.*

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление* и *удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с *заданным* критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования* СУБД включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA).*
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
- таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
- запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
- запросов на изменение данных базы;
- экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
- отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

**Реляционная база данных**

*База данных* является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

*Реляционная* база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержаться сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц, соответствующих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации)* каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ.* По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:M). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:M предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:M, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

**Схема данных**

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdbфайле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных,* непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы* и *модули*, называемые *объектами приложения.*

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке *VBA* и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или

процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы*. Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобрать нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложении. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с

каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах.  *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

**Интерфейс пользователя Access**

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации.* Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**.

Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи;  *панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
# Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

*Этапы проектирования базы данных:*

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

## *Создание файла базы данных Access*

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, ***Реализация товаров***.

Щелчком по кнопке **Создать,** завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).




Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «**Закрыть**».




Рис. 1.2. **Таблица1** в режиме таблицы

**Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»**

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).




Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных.**




Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «**Конструктор**»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара»**, щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля  .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появиться в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).

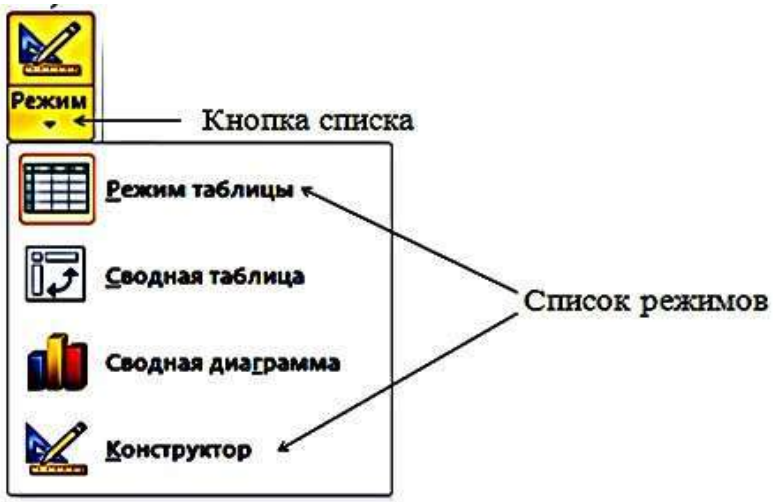


Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter.** По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары

| Код товара | Наименование | Марка | Номер склада | Количество | Цена |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Тахеометр | SP FOKUS 6 | 1 | 5 | 319 463,00 ₽ |
| 2 | Тахеометр | SP FOKUS 6W | 1 | 7 | 357 487,00 ₽ |
| 3 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 225 000,00 ₽ |
| 4 | Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 2 | 5 | 240 000,00 ₽ |
| 5 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 84 193,00 ₽ |
| 6 | Теодолит | 4Т15П | 3 | 5 | 58 764,00 ₽ |
| 7 | Теодолит | 4Т30П | 3 | 8 | 50 625,00 ₽ |
| 8 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 30 000,00 ₽ |
| 9 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 16 680,00 ₽ |
| 10 | Нивелир | 4Н-3КЛ | 4 | 18 | 12 500,00 ₽ |
| (№) | | | | | |

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

**Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»**

Для поля Телефон следует задать маску ввода: **(# # #) # # # - # # - # #**




Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «**Конструктор**»




Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

**Задание 3. Создание таблицы «Склады»**




Рис. 1.9. Таблица «**Склады**» в режиме «**Конструктор**»

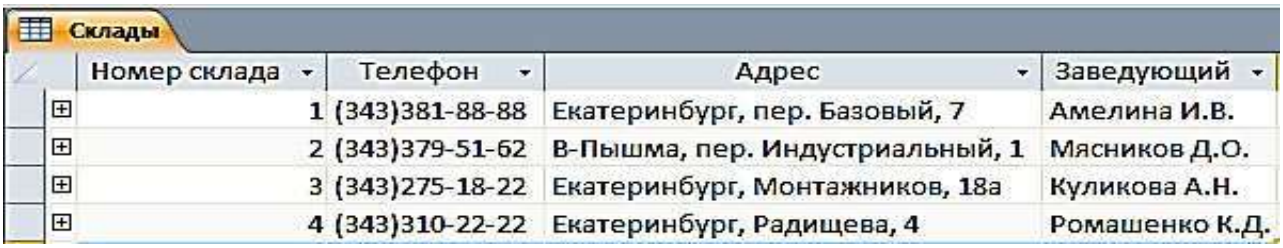



Рис. 1.10. Таблица «**Склады**» в режиме «**Таблицы**»

**Задание 4. Создание таблицы «Продажи»**

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка.**
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

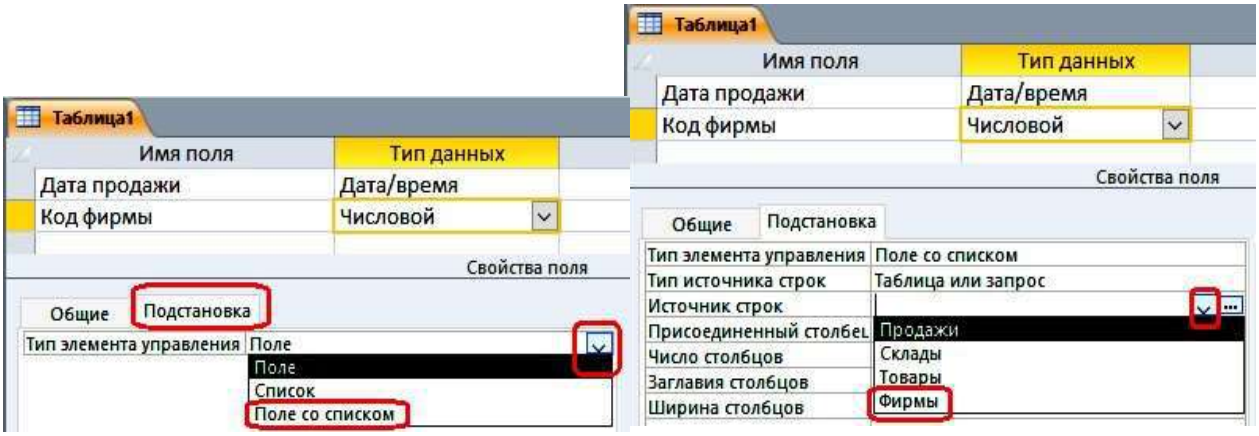



Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «**Конструктора**»




Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк




Рис. 1.13. Окно таблицы «**Продажи**» в режиме «**Конструктора»**




Рис. 1.14. Таблица «**Продажи**» в режиме «**Таблицы**»

**Задание 5. Создание схемы данных**

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).




Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многозначные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи.*

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или ∞. Это свидетельствует о том, что одно-многозначные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

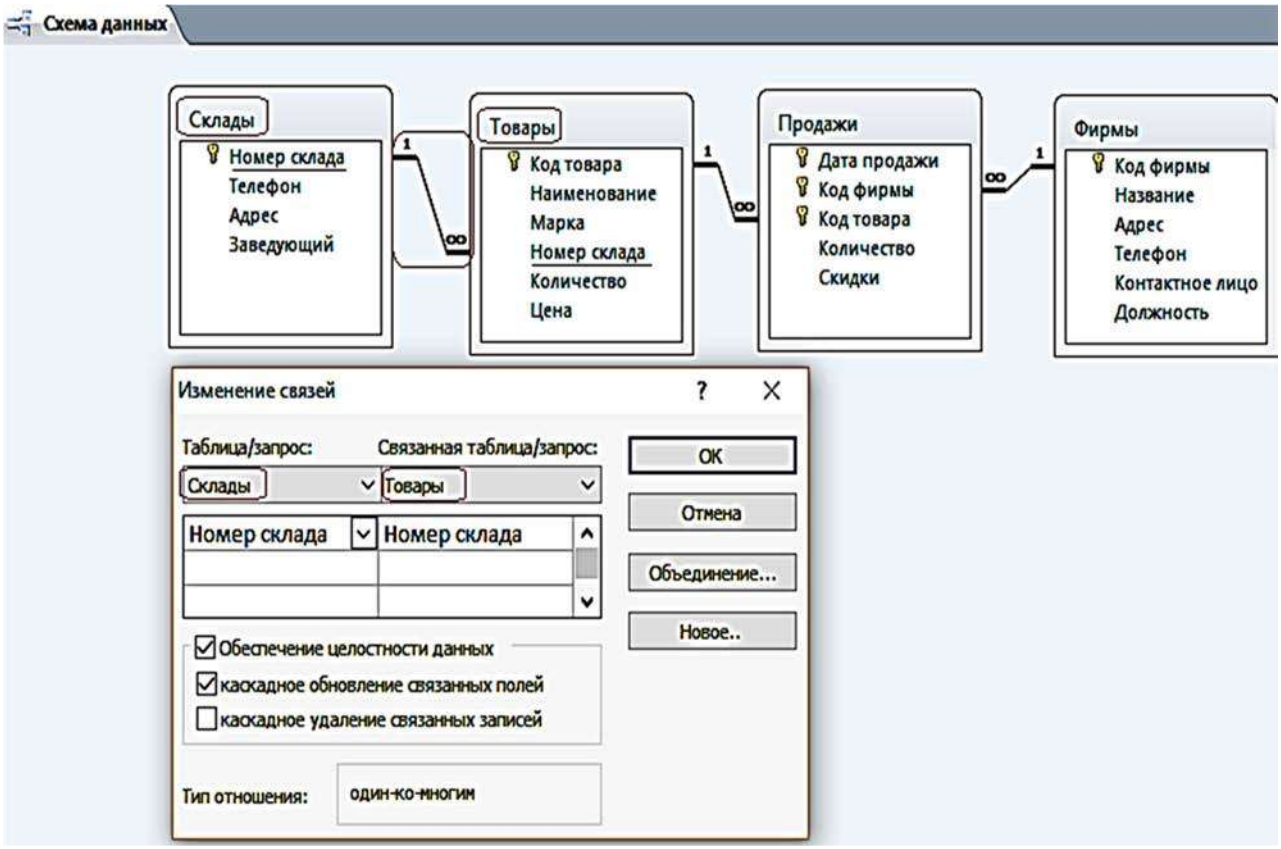


Рис. 1.16. Схема данных БД «**Реализация товаров**»

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

## Работа с простыми запросами

### *Конструирование запросов на выборку с условием отбора*

**Задание 1.** Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку добавить. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Закрыть.** На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами / Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка.**

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование, Марка и Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

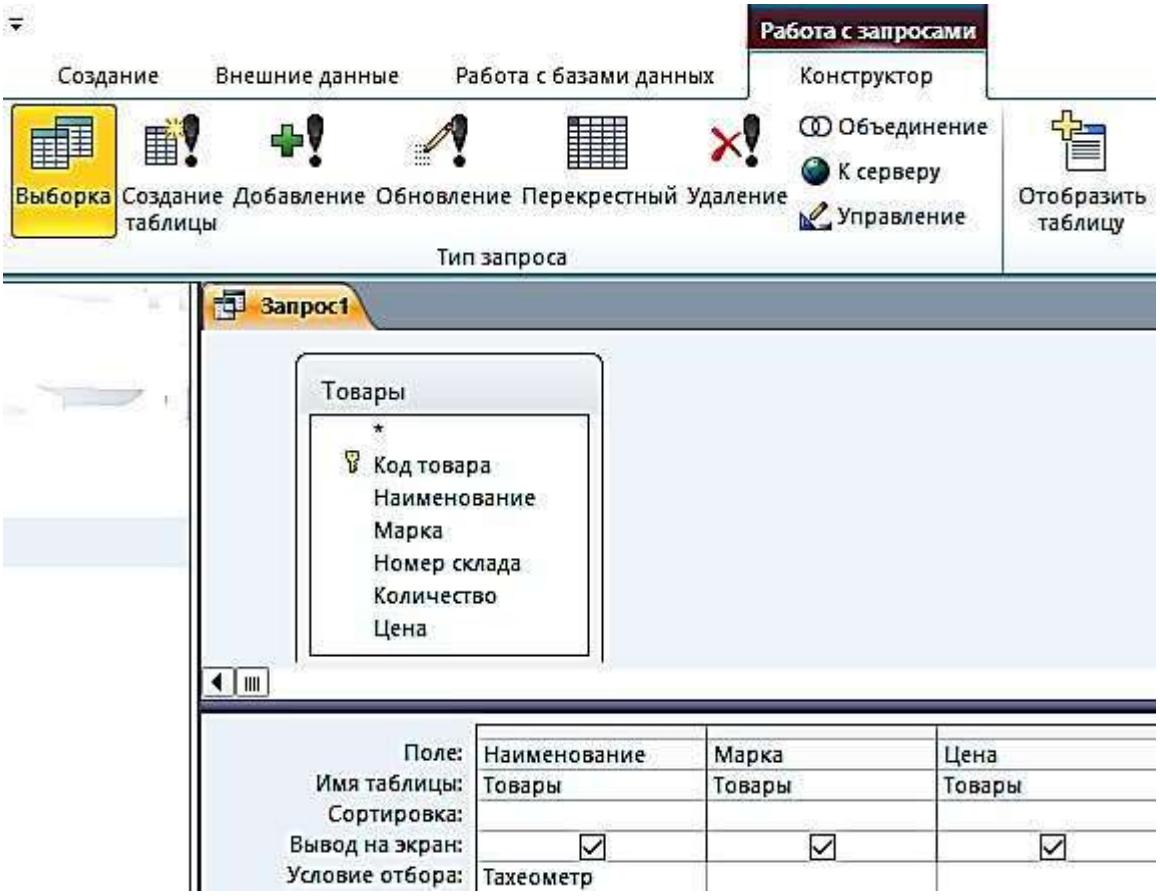


Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.

1_По наименованию Тахеометр

| Наименование | Марка | Цена |
|---|---|---|
| Тахеометр | SP FOKUS 6 | 319 463,00 ₽ |
| Тахеометр | SP FOKUS 6W | 357 487,00 ₽ |
| Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 225 000,00 ₽ |
| Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 240 000,00 ₽ |

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы»**

**Задание 2.** Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).

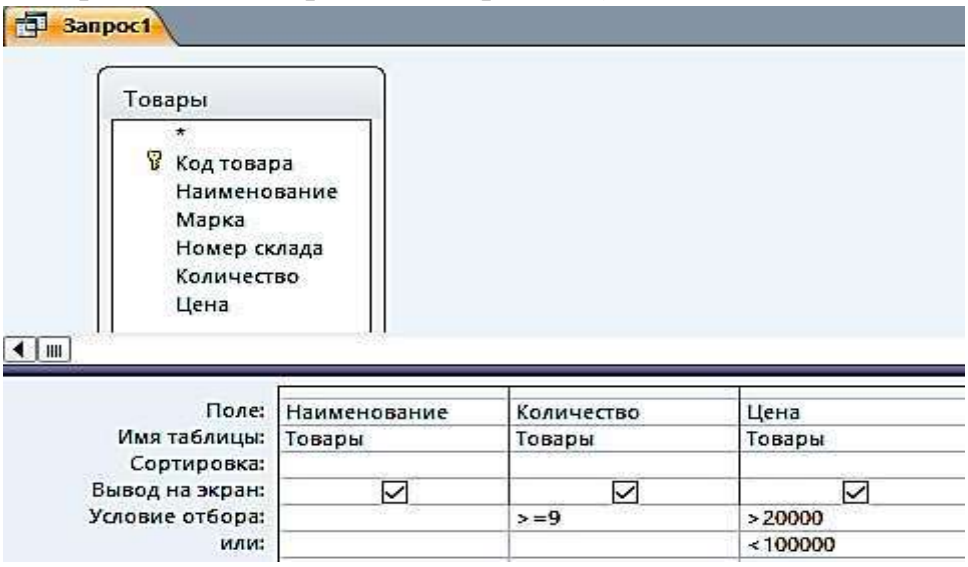



Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).

2_Цена_количество

| Наименование | Количество | Цена |
|---|---|---|
| Теодолит | 9 | 84 193,00 ₽ |
| Теодолит | 5 | 58 764,00 ₽ |
| Теодолит | 8 | 50 625,00 ₽ |
| Теодолит | 10 | 30 000,00 ₽ |
| Нивелир | 15 | 16 680,00 ₽ |
| Нивелир | 18 | 12 500,00 ₽ |

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

**Задание 3.** Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)

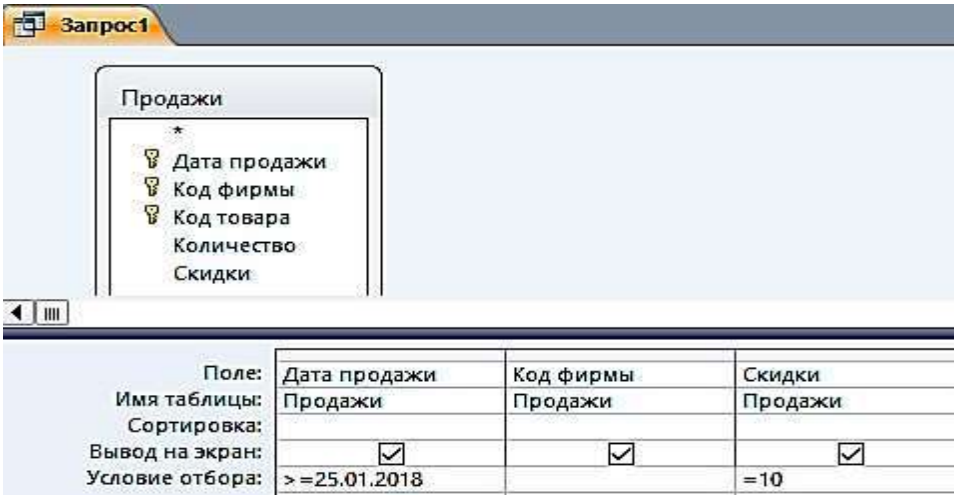



Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку
с логическими операциями в условии отбора

3_Дата_скидка

| Дата прода | Код фирмы | Скидки |
|---|---|---|
| 25.01.2018 | 2 | 10 |
| 30.01.2018 | 3 | 10 |
| 05.02.2018 | 4 | 10 |
| 10.02.2018 | 3 | 10 |
| 15.02.2018 | 3 | 10 |

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

## *Вычисляемые поля в запросах*

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

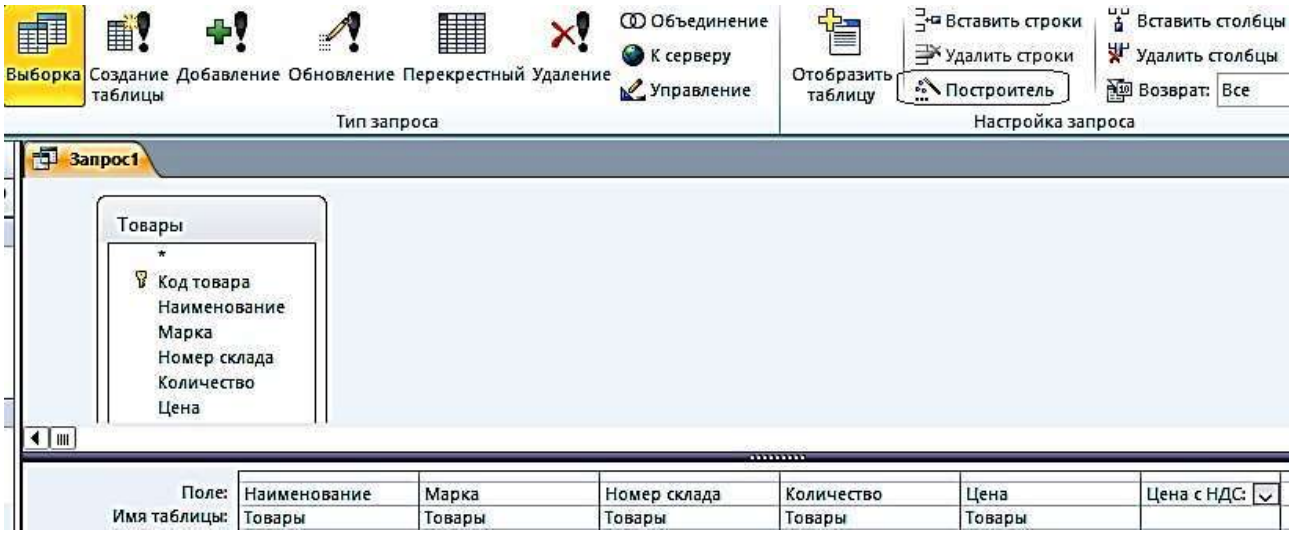



Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

**Задание 4.** В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

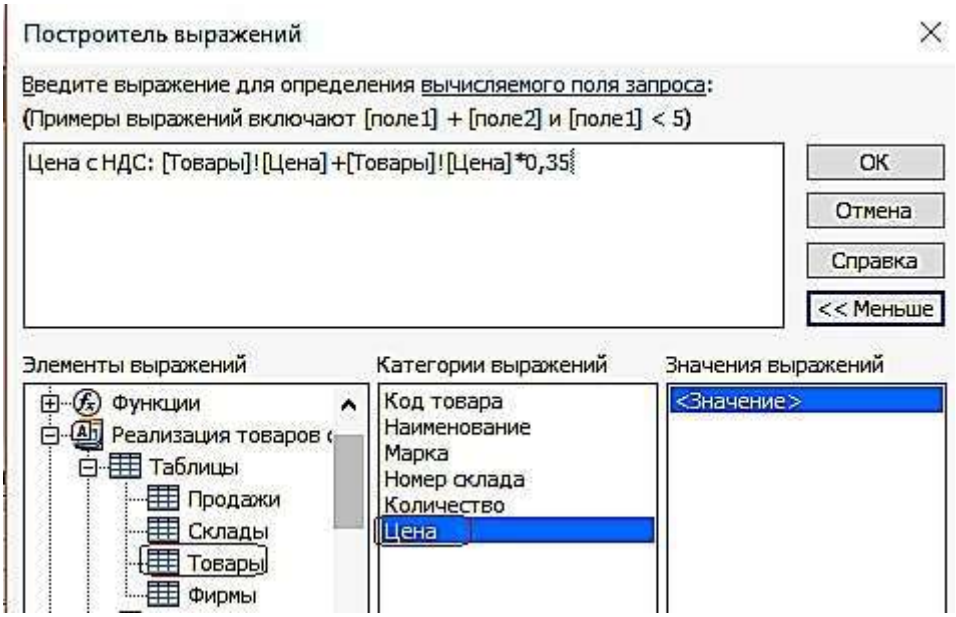



Рис. 2.8. Построитель выражений

2. Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

4. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

5. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»** изображен на рис. 2.9.

4_Цена с НДС

| Наименование | Марка | Номер склада | Количество | Цена | Цена с НДС |
|---|---|---|---|---|---|
| Тахеометр | SP FOKUS 6 | 1 | 5 | 319 463,00 ₽ | 431 275,05 ₽ |
| Тахеометр | SP FOKUS 6W | 1 | 7 | 357 487,00 ₽ | 482 607,45 ₽ |
| Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 225 000,00 ₽ | 303 750,00 ₽ |
| Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 2 | 5 | 240 000,00 ₽ | 324 000,00 ₽ |
| Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 84 193,00 ₽ | 113 660,55 ₽ |
| Теодолит | 4Т15П | 3 | 5 | 58 764,00 ₽ | 79 331,40 ₽ |
| Теодолит | 4Т30П | 3 | 8 | 50 625,00 ₽ | 68 343,75 ₽ |
| Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 30 000,00 ₽ | 40 500,00 ₽ |
| Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 16 680,00 ₽ | 22 518,00 ₽ |
| Нивелир | 4Н-3КЛ | 4 | 18 | 12 500,00 ₽ | 16 875,00 ₽ |

Рис. 2.9. Просмотр запроса «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»**

**Задание 5.** В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: a Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm") – эта функция возвратит полное название месяца;

b или Format([Продажи]![Дата продажи];"mm") – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции Format (рис. 2.10, 2.11).

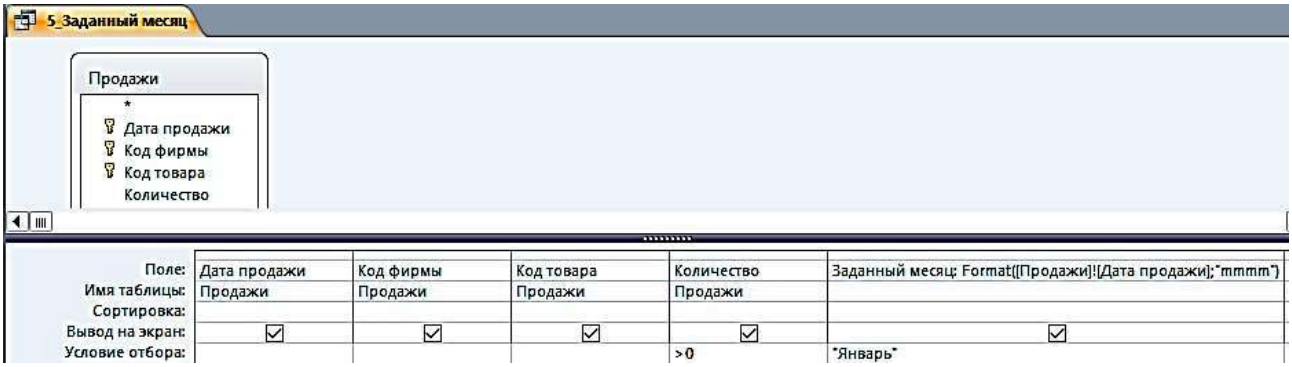



Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

5_Заданный месяц

| Дата продажи | Код фирмы | Код товара | Количество | Заданный месяц |
|---|---|---|---|---|
| 15.01.2018 | 4 | 10 | 10 | Январь |
| 19.01.2018 | 1 | 2 | 6 | Январь |
| 20.01.2018 | 3 | 5 | 8 | Январь |
| 25.01.2018 | 2 | 4 | 4 | Январь |
| 27.01.2018 | 1 | 1 | 4 | Январь |
| 30.01.2018 | 3 | 7 | 4 | Январь |

Рис. 2.11. Просмотр запроса «**5_Заданный месяц**» в режиме «**Таблицы**»

## *Параметры в запросах*

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса.* Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра.**

**Задание 6.** Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].

2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.

3. Введите Январь и получите результат.

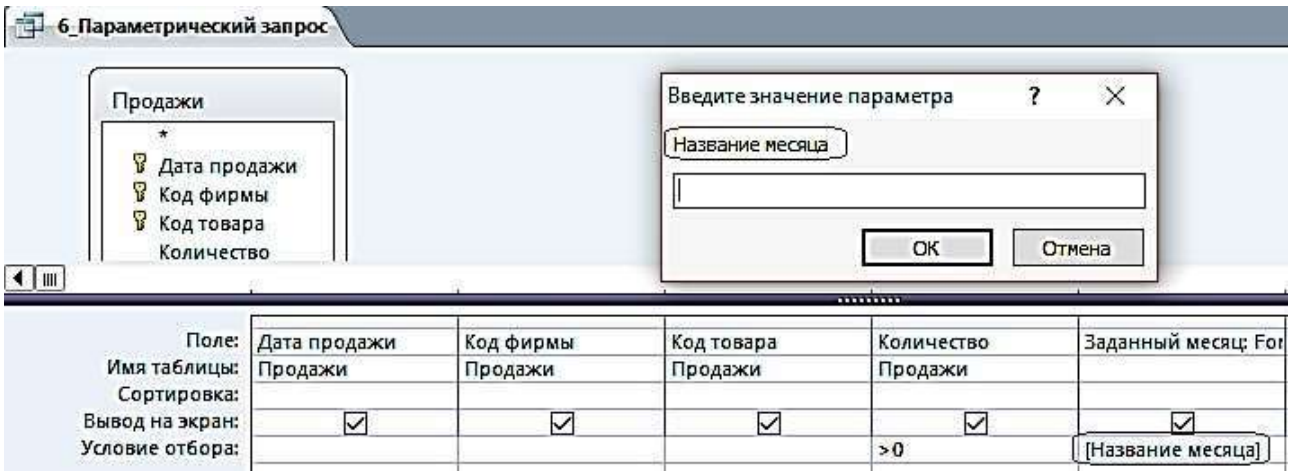



Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

**Задание 7.** Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

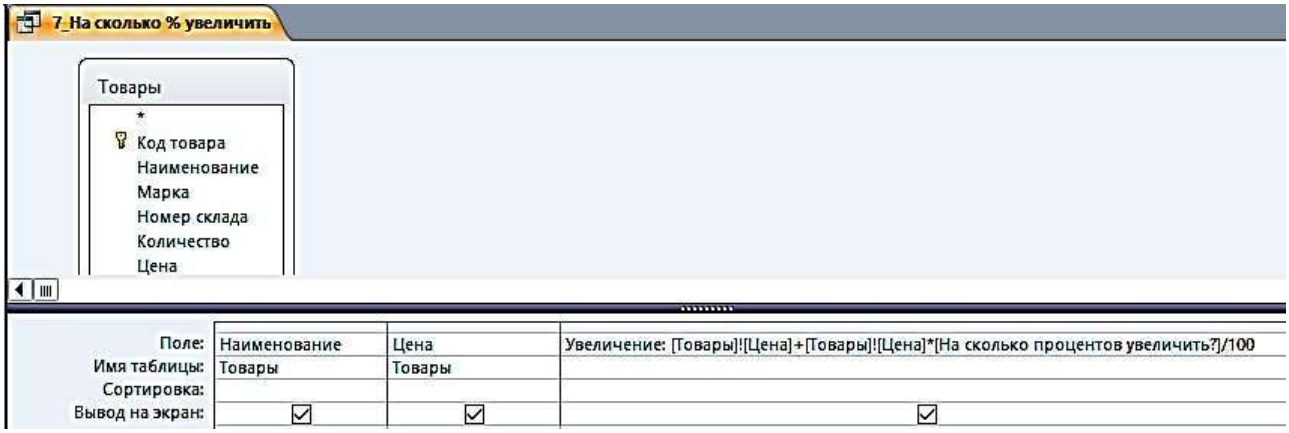



Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

**Задание 8.** Скопируйте запрос «**7_На сколько % увеличить**» и переименуйте его в «**8_Проценты**» (рис. 2.14)

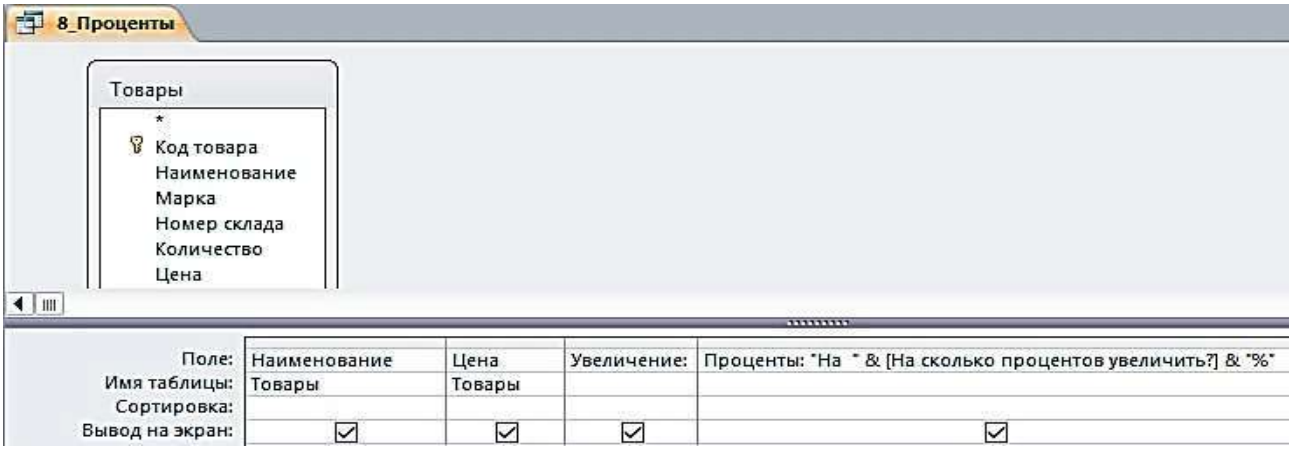



Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «**Проценты**»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «**Проценты»**, в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).

8_Проценты

| Наименование | Цена | Увеличение | Проценты |
|---|---|---|---|
| Тахеометр | 319 463,00 ₽ | 431 275,05 ₽ | На 35% |
| Тахеометр | 357 487,00 ₽ | 482 607,45 ₽ | На 35% |
| Тахеометр | 225 000,00 ₽ | 303 750,00 ₽ | На 35% |
| Тахеометр | 240 000,00 ₽ | 324 000,00 ₽ | На 35% |
| Теодолит | 84 193,00 ₽ | 113 660,55 ₽ | На 35% |
| Теодолит | 58 764,00 ₽ | 79 331,40 ₽ | На 35% |
| Теодолит | 50 625,00 ₽ | 68 343,75 ₽ | На 35% |
| Теодолит | 30 000,00 ₽ | 40 500,00 ₽ | На 35% |
| Нивелир | 16 680,00 ₽ | 22 518,00 ₽ | На 35% |
| Нивелир | 12 500,00 ₽ | 16 875,00 ₽ | На 35% |

Рис. 2.15. Просмотр запроса «**8_Проценты**» в режиме «**Таблицы**»

## *Групповые операции в запросах*

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций. Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой, Денежный, Дата и время**.

**Задание 9.** Запрос с функцией **Sum**

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «**Товары**».

2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Наименование**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.

3. Перетащите в бланк запроса поля «**Количество**» и «**Цена**», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.

4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.

5. В столбцах «**Количество**» и «**Цена**» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

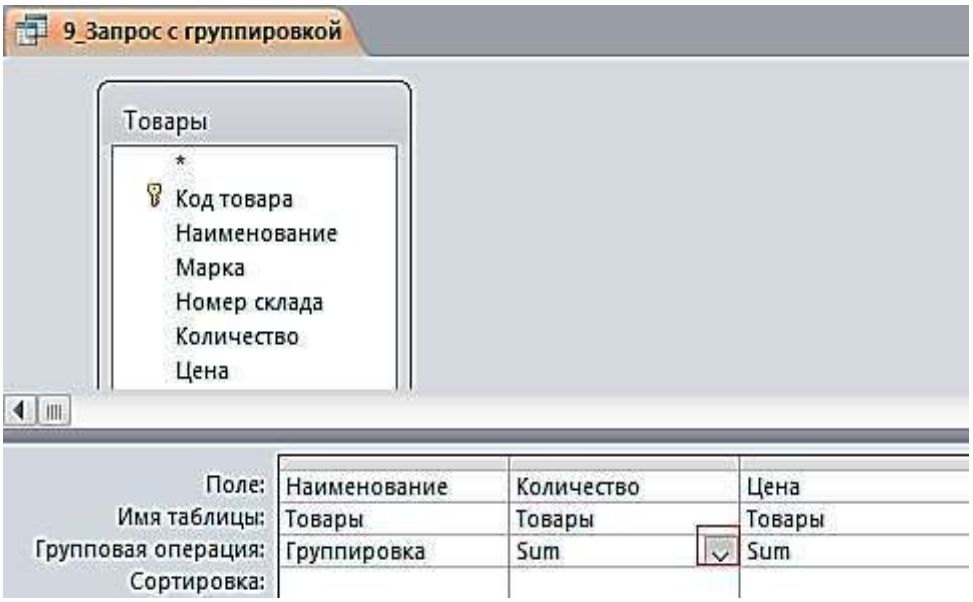



Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

6. Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.

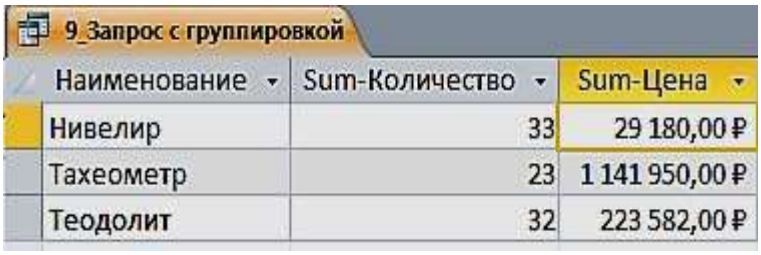



Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

**Задание 10.** Запрос с функцией **Count**

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».

2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.

3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.

4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.

5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию Count. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию
(рис. 2.18).

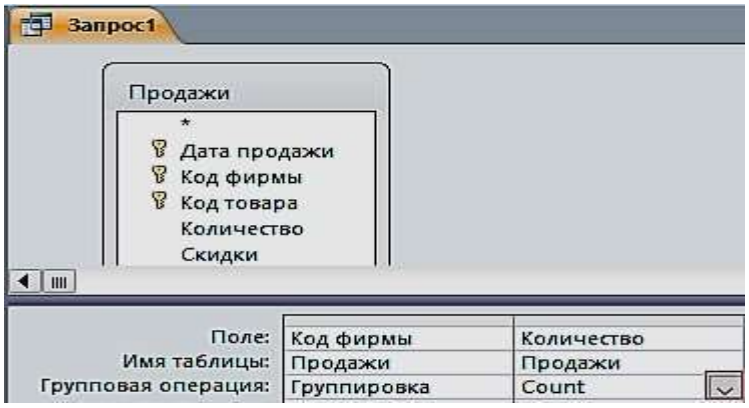



Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «**10_Число продаж по коду фирмы**». Результат запроса показан на рис. 2.19.




Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

**Задание 11.** Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «**1_По наименованию тахеометр»** в режиме таблицы. На вкладке ленты **Главная** в группе **Записи** выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «**Цена**», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).

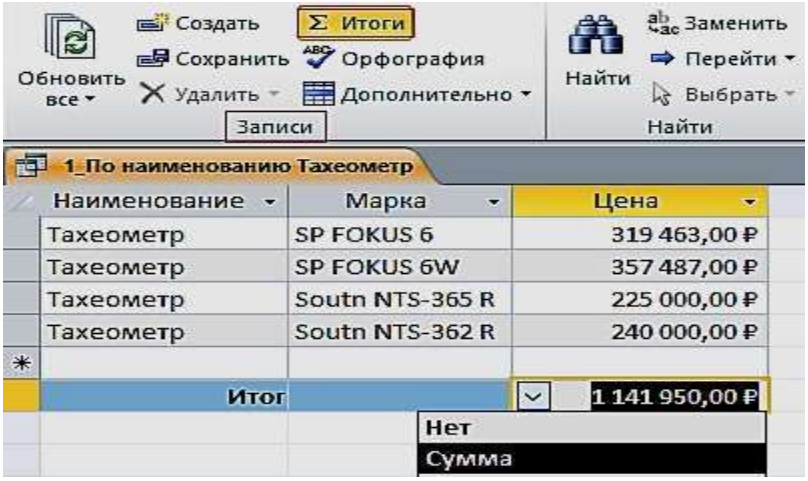



Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3
# Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

**Задание 1.** Запрос с вычисляемым полем «**Остаток**»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Количество»**, и из таблицы «**Продажи**» поле «**Количество**».

2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «**Количество**», вычисляемое поле «**Остаток**» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

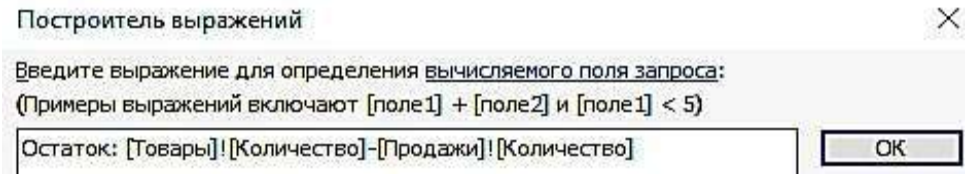



Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

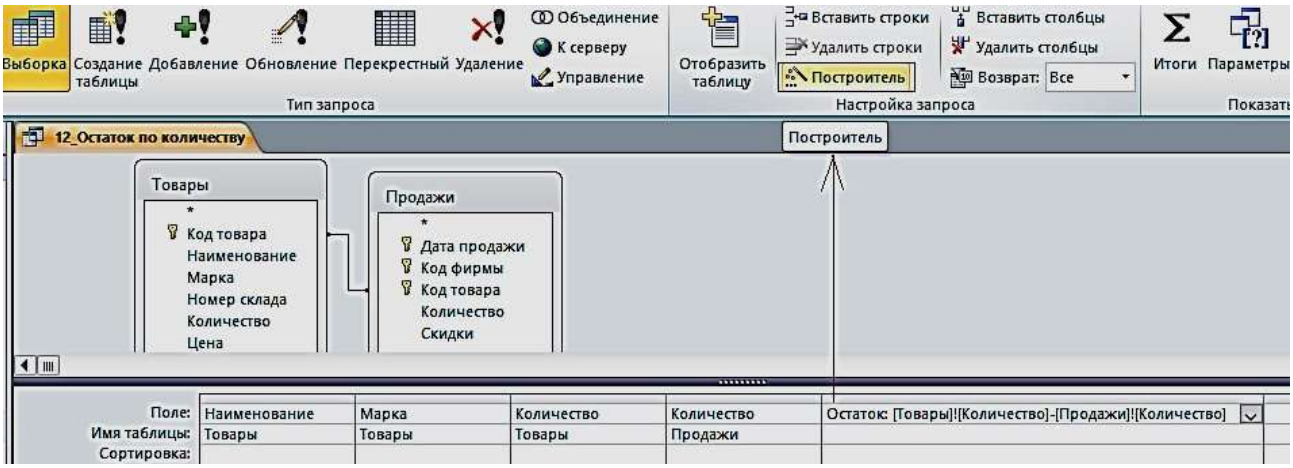



Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных «**Реализация товаров со складов**», далее выберите таблицу «**Товары**». Справа отобразится список её полей. Выберите поле «**Количество**» и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу «**Продажи**» и поле «**Количество**» (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству

| Наименование | Марка | Товары.Количество | Продажи.Количество | Остаток |
|---|---|---|---|---|
| Тахеометр | SP FOKUS 6 | 5 | 4 | 1 |
| Тахеометр | SP FOKUS 6W | 7 | 6 | 1 |
| Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 6 | 5 | 1 |
| Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 5 | 4 | 1 |
| Теодолит | 3Т2КП | 9 | 8 | 1 |
| Теодолит | 3Т2КП | 9 | 8 | 1 |
| Теодолит | 4Т30П | 8 | 4 | 4 |
| Теодолит | VEGA TEO 5 | 10 | 9 | 1 |
| Нивелир | 4Н -2КЛ | 15 | 10 | 5 |
| Нивелир | 4Н-3КЛ | 18 | 10 | 8 |

Рис. 3.3 Результат запроса «**Остаток по количеству**»

5. Слово «Выражение» удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

**Задание 2.** Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Продажи**» поле «**Дата продажи**», а из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Номер склада**», «**Количество**», «**Цена**».

2. Создайте новое поле «**Новая цена**». Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле «**Новая Цена**» (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне «**Построитель выражений**» выбрать «**Элементы выражений**», в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы «**Товары**» и в поле «**Категории выражений**» выбрать «**Цена**», а с клавиатуры набрать «*1,05».

4. В поле «**Дата продажи**» введите условие отбора >=01.02.2018 (рис. 3.4).

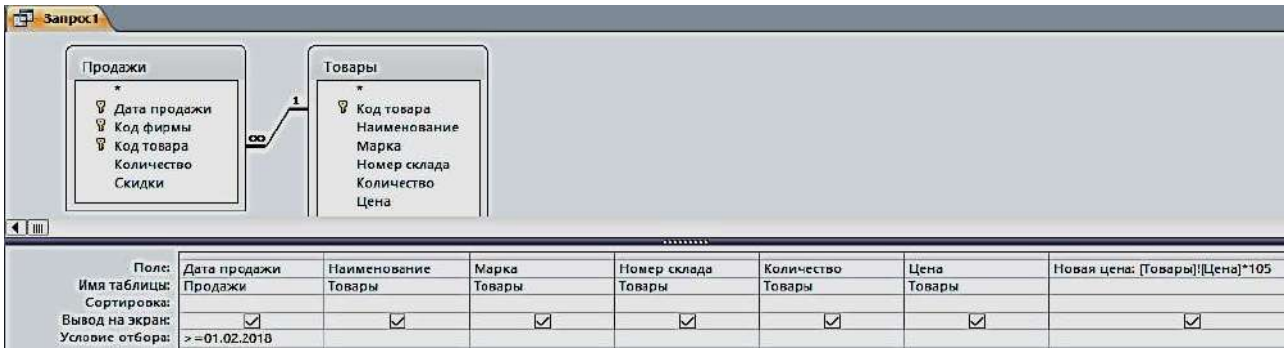



Рис. 3.4. Запрос «**Новая цена**» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «**Новая цена**» (рис. 3.5).

13_Цена в феврале

| Дата прода | Наименование | Марка | Номер склада | Количество | Цена | Новая цена |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 02.02.2018 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 225 000,00 ₽ | 23 625 000,00 ₽ |
| 15.02.2018 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 84 193,00 ₽ | 8 840 265,00 ₽ |
| 10.02.2018 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 30 000,00 ₽ | 3 150 000,00 ₽ |
| 05.02.2018 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 16 680,00 ₽ | 1 751 400,00 ₽ |

Рис. 3.5. Результат запроса «**Новая цена**»

**Задание 3.** Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

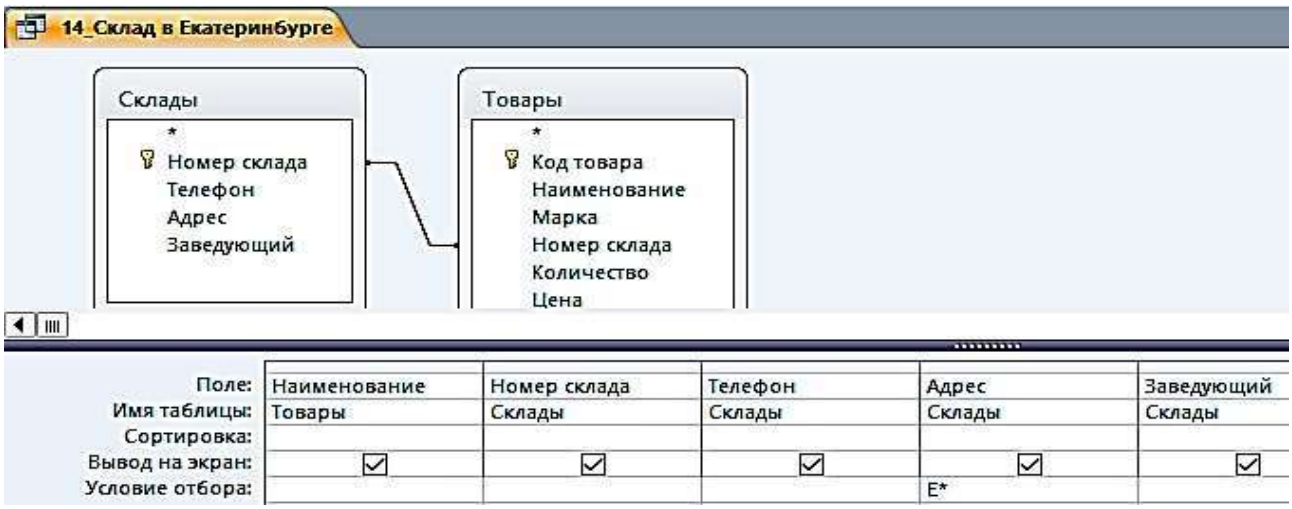



Рис. 3.6. Запрос «**Склад в Екатеринбурге**» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге

| Наименование | Номер склада | Телефон | Адрес | Заведующий |
|---|---|---|---|---|
| Тахеометр | 1 | (343)381-88-88 | Екатеринбург, пер. Базовый, 7 | Амелина И.В. |
| Тахеометр | 1 | (343)381-88-88 | Екатеринбург, пер. Базовый, 7 | Амелина И.В. |
| Теодолит | 3 | (343)275-18-22 | Екатеринбург, Монтажников, 18а | Куликова А.Н. |
| Теодолит | 3 | (343)275-18-22 | Екатеринбург, Монтажников, 18а | Куликова А.Н. |
| Теодолит | 3 | (343)275-18-22 | Екатеринбург, Монтажников, 18а | Куликова А.Н. |
| Теодолит | 3 | (343)275-18-22 | Екатеринбург, Монтажников, 18а | Куликова А.Н. |
| Нивелир | 4 | (343)310-22-22 | Екатеринбург, Радищева, 4 | Ромашенко К.Д. |
| Нивелир | 4 | (343)310-22-22 | Екатеринбург, Радищева, 4 | Ромашенко К.Д. |

Рис. 3.7. Результат запроса «**Склад в Екатеринбурге**»

**Задание 4.** Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «**Сумма**» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

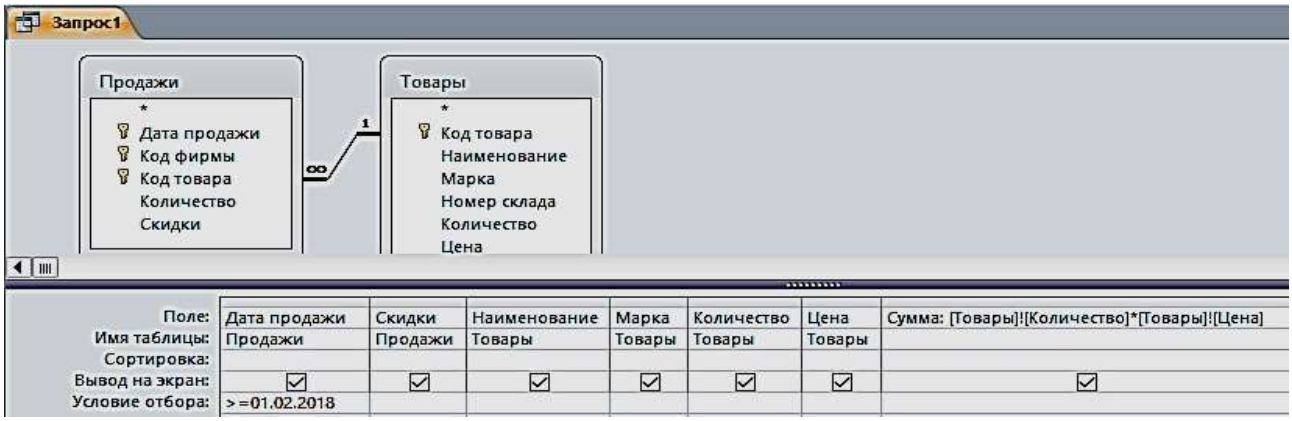



Рис. 3.8. Запрос «**Стоимость**» в режиме Конструктора

15_Стоимость

| Дата прода | Скидки | Наименование | Марка | Количество | Цена | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 02.02.2018 | 5 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 6 | 225 000,00 ₽ | 1 350 000,00 ₽ |
| 15.02.2018 | 10 | Теодолит | 3Т2КП | 9 | 84 193,00 ₽ | 757 737,00 ₽ |
| 10.02.2018 | 10 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 10 | 30 000,00 ₽ | 300 000,00 ₽ |
| 05.02.2018 | 10 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 15 | 16 680,00 ₽ | 250 200,00 ₽ |
| | | | | | | |
| Итог | | | | | | 2 657 937,00 ₽ |

Нет
Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «**Стоимость**» и итог с расчетом суммы по столбцу

**Задание 5.** Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

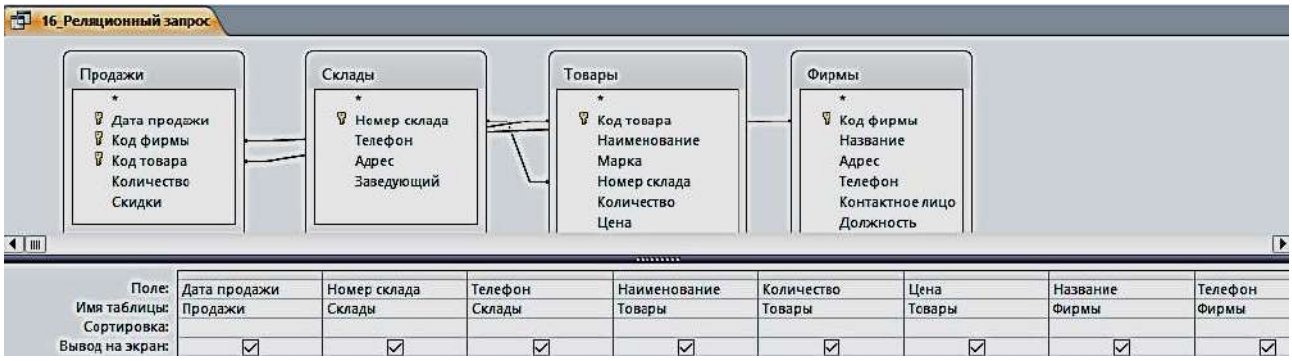



Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

16_Реляционный запрос

| Дата продажи | Номер склада | Склады.Телефон | Наименование | Количество | Цена | Название | Фирмы.Телефон |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.01.2018 | 4 | (343)310-22-22 | Нивелир | 18 | 12 500,00 ₽ | ГеоСтройПрибор | (473)271-21-44 |
| 19.01.2018 | 1 | (343)381-88-88 | Тахеометр | 7 | 357 487,00 ₽ | ООО "Геомар Недра" | (495)618-05-10 |
| 20.01.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 9 | 84 193,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 25.01.2018 | 2 | (343)379-51-62 | Тахеометр | 5 | 240 000,00 ₽ | ООО "Навгеоком" | (343)253-53-55 |
| 27.01.2018 | 1 | (343)381-88-88 | Тахеометр | 5 | 319 463,00 ₽ | ООО "Геомар Недра" | (495)618-05-10 |
| 30.01.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 8 | 50 625,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 02.02.2018 | 2 | (343)379-51-62 | Тахеометр | 6 | 225 000,00 ₽ | ООО "Навгеоком" | (343)253-53-55 |
| 05.02.2018 | 4 | (343)310-22-22 | Нивелир | 15 | 16 680,00 ₽ | ГеоСтройПрибор | (473)271-21-44 |
| 10.02.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 10 | 30 000,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 15.02.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 9 | 84 193,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

## *Запросы на изменение*

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

**Задание 6**. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «**17_Обновление**».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «**Обновление**» выражение для новых значений [Цена]*1,2 (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

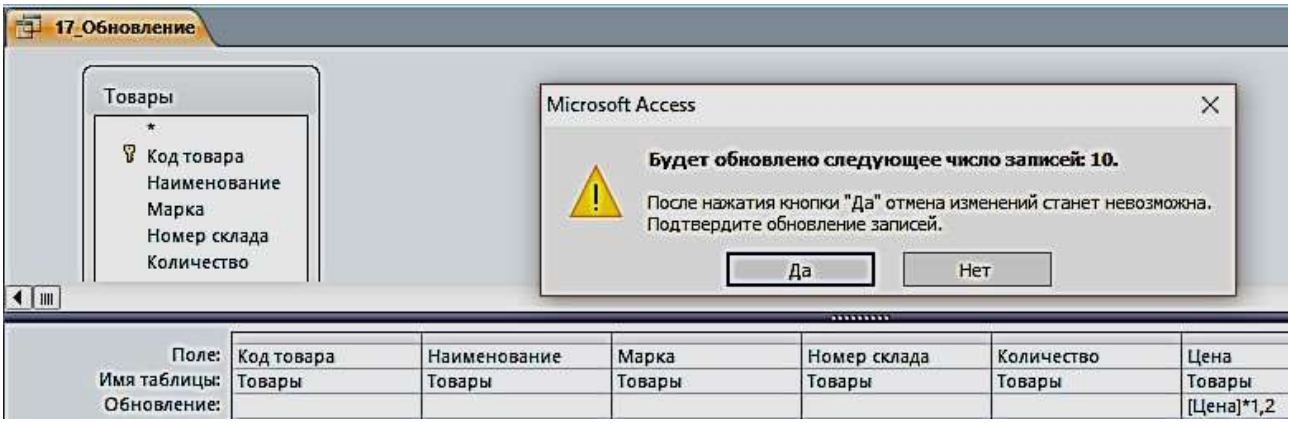



Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

Рис. 3.13. С правой стороны результат обновления таблицы

| Цена |
|---|
| 319 463,00 ₽ |
| 357 487,00 ₽ |
| 225 000,00 ₽ |
| 240 000,00 ₽ |
| 84 193,00 ₽ |
| 58 764,00 ₽ |
| 50 625,00 ₽ |
| 30 000,00 ₽ |
| 16 680,00 ₽ |
| 12 500,00 ₽ |

17_Обновление

| Цена |
|---|
| 383 355,60 ₽ |
| 428 984,40 ₽ |
| 270 000,00 ₽ |
| 288 000,00 ₽ |
| 101 031,60 ₽ |
| 70 516,80 ₽ |
| 60 750,00 ₽ |
| 36 000,00 ₽ |
| 20 016,00 ₽ |
| 15 000,00 ₽ |

**Задание 6**. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.

2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.

3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на

вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы.**

4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).

5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

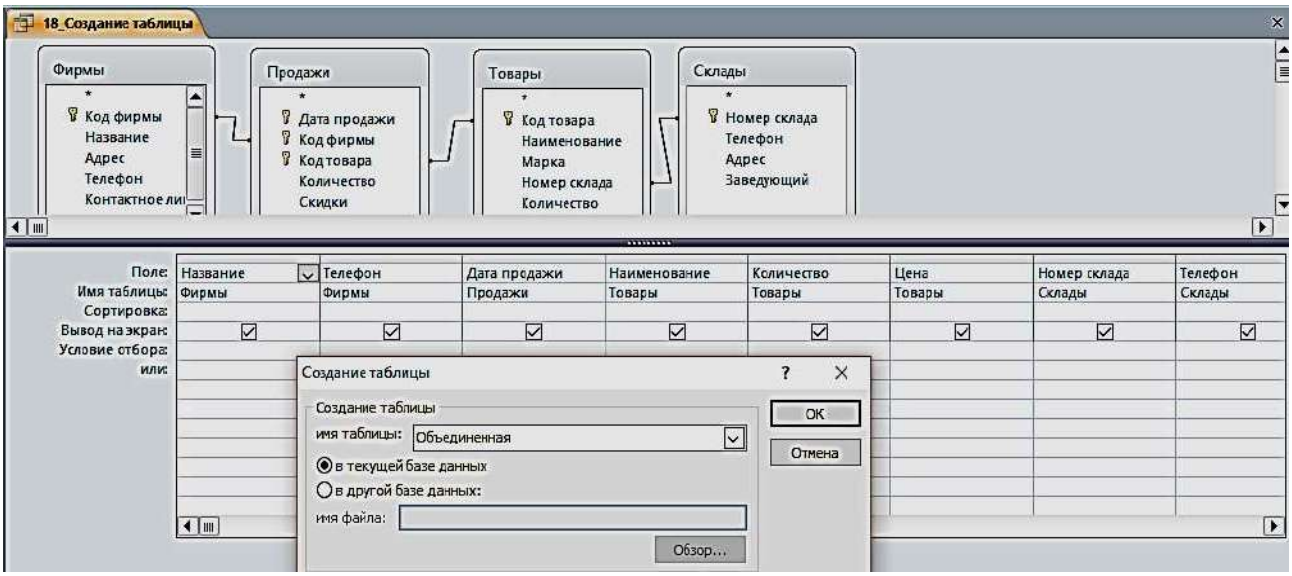



Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

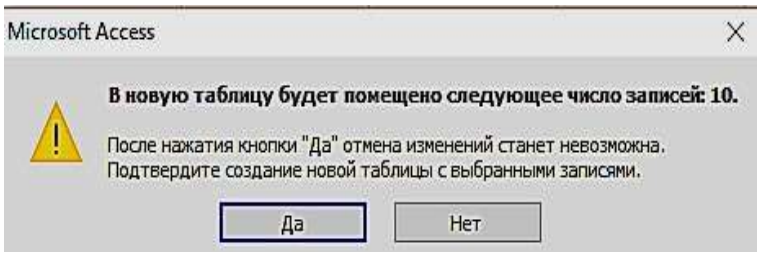



Рис. 3.15. Окно сообщений

Объединенная

| Название | Фирмы_Телефон | Дата продажи | Наименование | Количество | Цена | Номер склада | Склады_Телефон |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ООО "Геомар Недра" | 4956180510 | 19.01.2018 | Тахеометр | 7 | 428 984,40 ₽ | 1 | 3433818888 |
| ООО "Геомар Недра" | 4956180510 | 27.01.2018 | Тахеометр | 5 | 383 355,60 ₽ | 1 | 3433818888 |
| ООО "Навгеоком" | 3432535355 | 25.01.2018 | Тахеометр | 5 | 288 000,00 ₽ | 2 | 3433795162 |
| ООО "Навгеоком" | 3432535355 | 02.02.2018 | Тахеометр | 6 | 270 000,00 ₽ | 2 | 3433795162 |
| ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | 20.01.2018 | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | 3 | 3432751822 |
| ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | 30.01.2018 | Теодолит | 8 | 60 750,00 ₽ | 3 | 3432751822 |
| ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | 10.02.2018 | Теодолит | 10 | 36 000,00 ₽ | 3 | 3432751822 |
| ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | 15.02.2018 | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | 3 | 3432751822 |
| ГеоСтройПрибор | 4732712144 | 15.01.2018 | Нивелир | 18 | 15 000,00 ₽ | 4 | 3433102222 |
| ГеоСтройПрибор | 4732712144 | 05.02.2018 | Нивелир | 15 | 20 016,00 ₽ | 4 | 3433102222 |

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

## *Задание для самостоятельной работы*

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.
2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
# Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма, Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

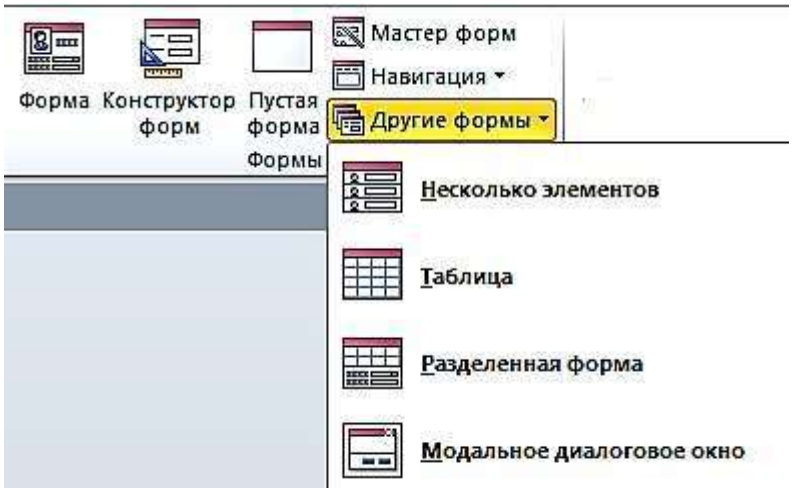



Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

**Задание 1**. Создать однотабличную форму «**Товары для ввода, просмотра и корректировки данных»** таблицы «**Товары**». Чтобы источником записей формы стала таблица «**Товары»**, выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

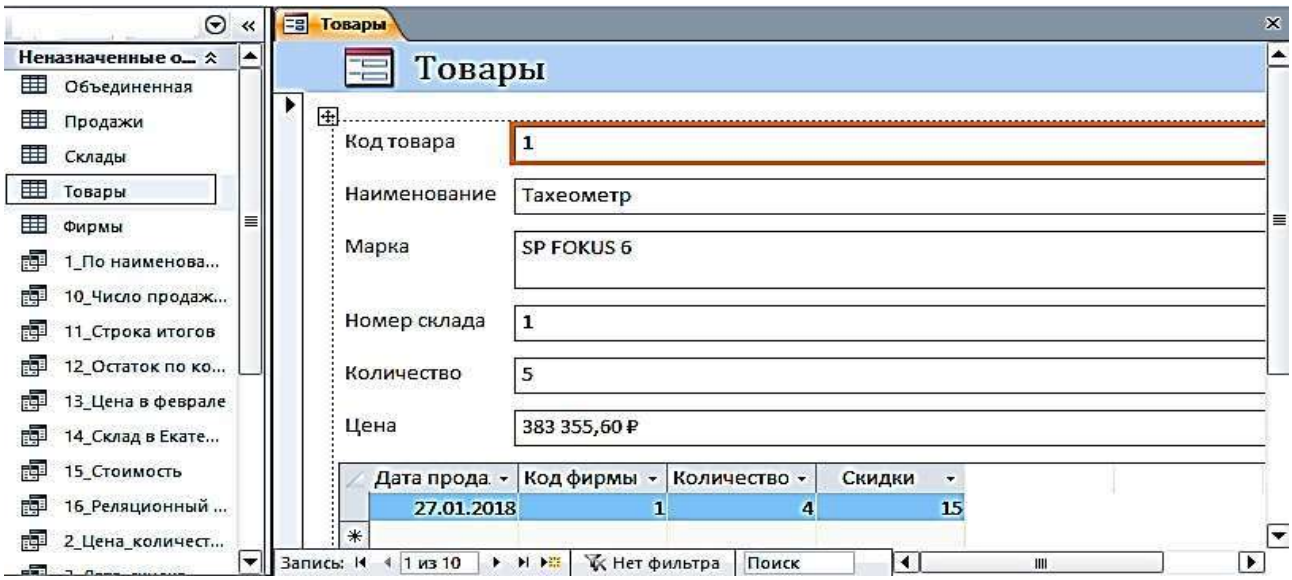



Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «**Товары**»

### *Условное форматирование элементов управления*

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме**,** в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

**Задание 2**. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

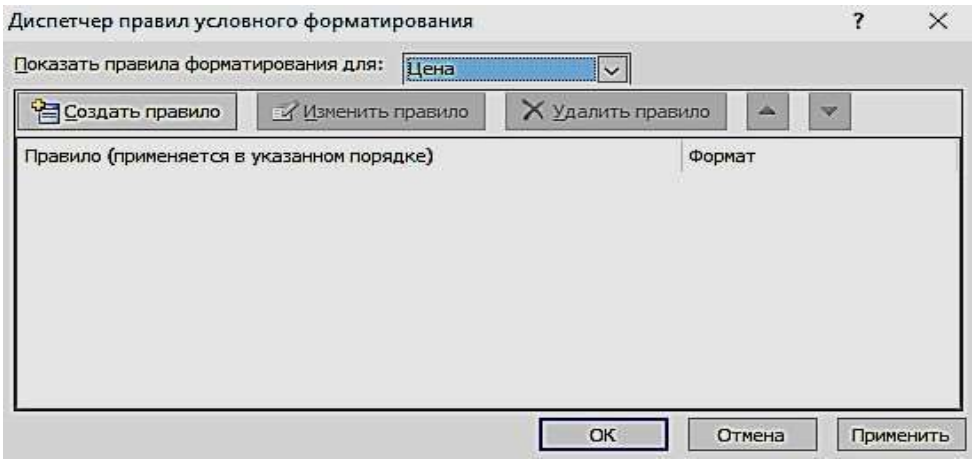


Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

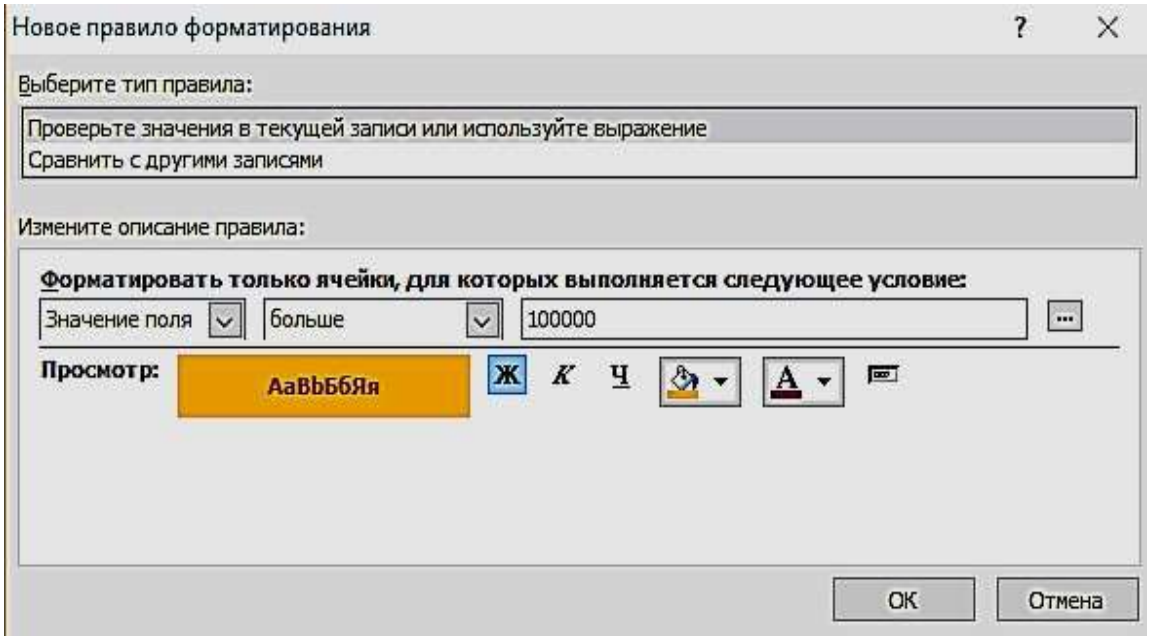



Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

**Задание 3**. Создать однотабличную форму «**Склады**». Для создания выбрать таблицу «**Склады**», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «**Товары**». Источником записей главной формы будет таблица «**Склады**». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «**Склады**» имеет подчиненную таблицу «**Товары**», с которой она находиться в отношении 1**:**∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

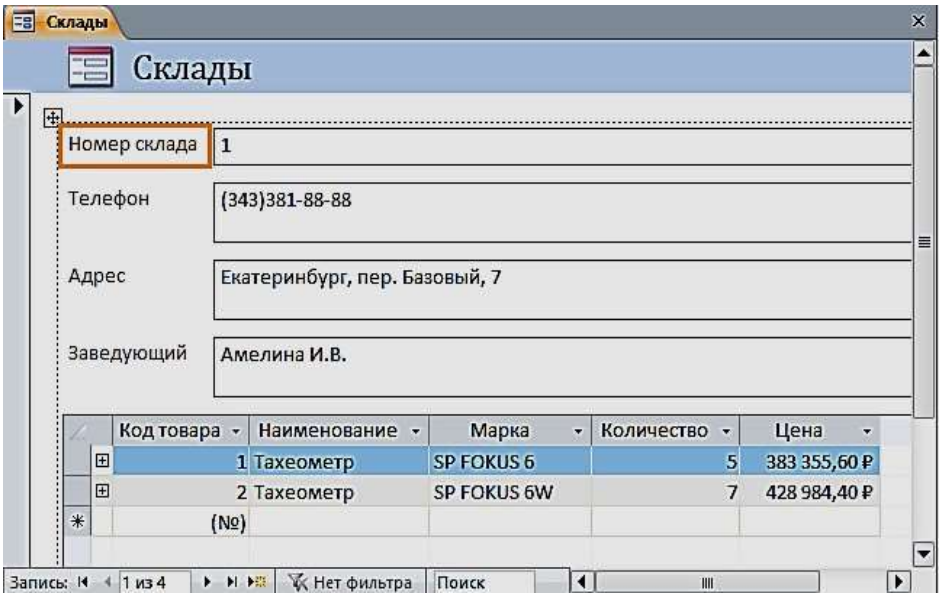



Рис. 4.5. Форма по таблице «**Склады**» с встроенной подчиненной «**Товары**»

### *Создание разделенной формы*

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

**Задание 4**. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «**Продажи**». Выберите таблицу «**Продажи**» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

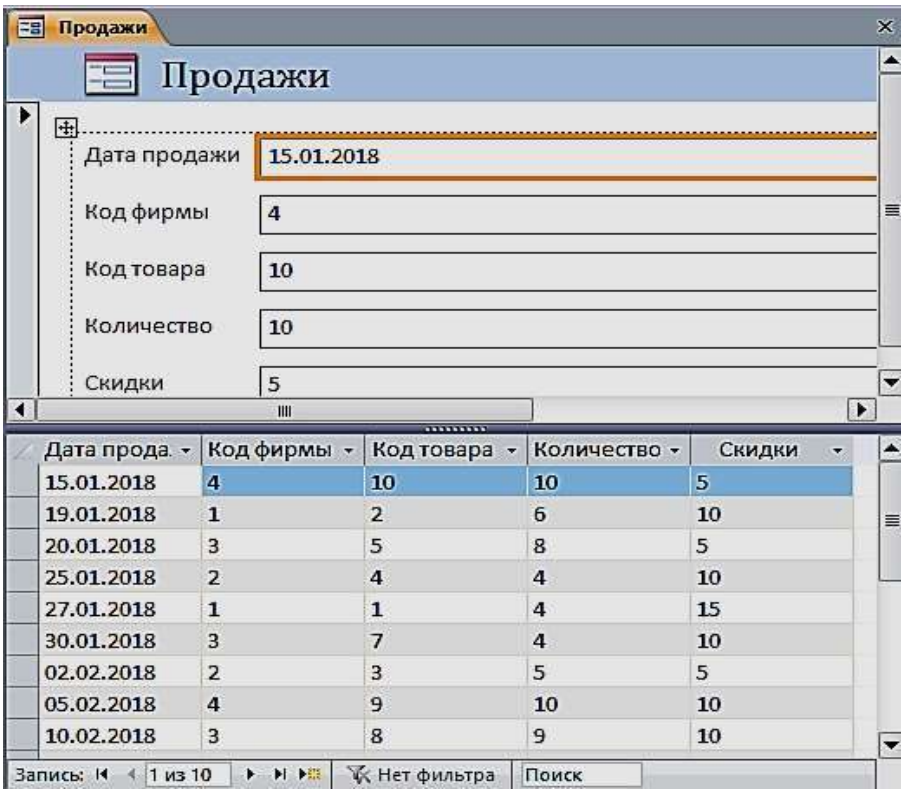


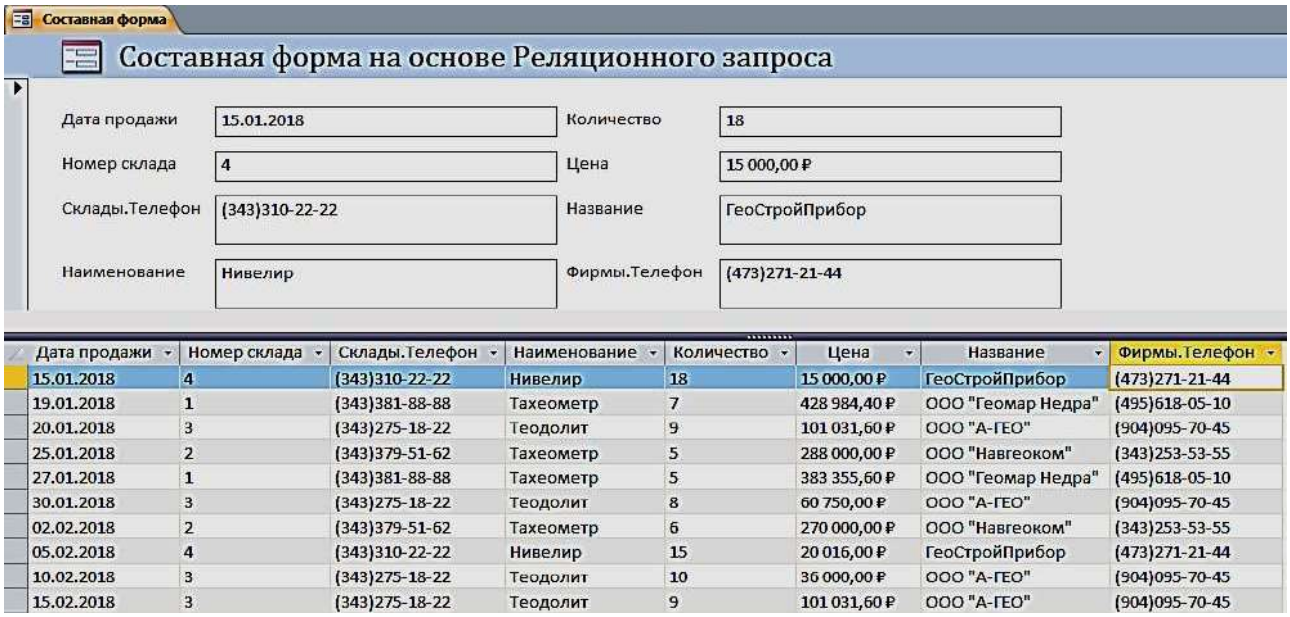
Рис. 4.6. Разделенная форма «**Продажи**»

### *Многотабличные формы*

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

**Задание 5**. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «**16_реляционный запрос**» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовок.




| Дата продажи | Номер склада | Склады.Телефон | Наименование | Количество | Цена | Название | Фирмы.Телефон |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.01.2018 | 4 | (343)310-22-22 | Нивелир | 18 | 15 000,00 ₽ | ГеоСтройПрибор | (473)271-21-44 |
| 19.01.2018 | 1 | (343)381-88-88 | Тахеометр | 7 | 428 984,40 ₽ | ООО "Геомар Недра" | (495)618-05-10 |
| 20.01.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 25.01.2018 | 2 | (343)379-51-62 | Тахеометр | 5 | 288 000,00 ₽ | ООО "Навгеоком" | (343)253-53-55 |
| 27.01.2018 | 1 | (343)381-88-88 | Тахеометр | 5 | 383 355,60 ₽ | ООО "Геомар Недра" | (495)618-05-10 |
| 30.01.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 8 | 60 750,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 02.02.2018 | 2 | (343)379-51-62 | Тахеометр | 6 | 270 000,00 ₽ | ООО "Навгеоком" | (343)253-53-55 |
| 05.02.2018 | 4 | (343)310-22-22 | Нивелир | 15 | 20 016,00 ₽ | ГеоСтройПрибор | (473)271-21-44 |
| 10.02.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 10 | 36 000,00 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |
| 15.02.2018 | 3 | (343)275-18-22 | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | ООО "А-ГЕО" | (904)095-70-45 |

Рис. 4.7. Составная форма

## *Создание многотабличной формы с помощью мастера*

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

**Задание 6**. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

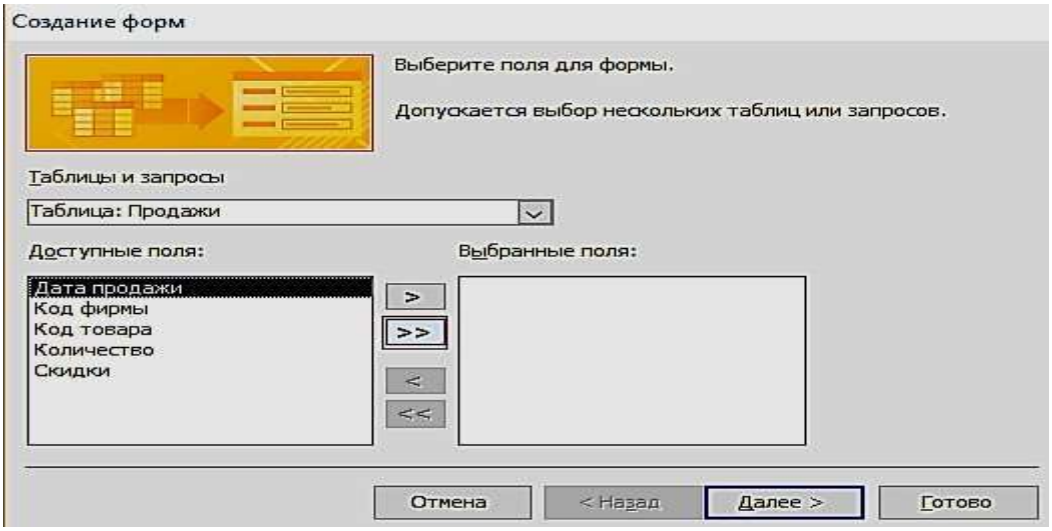


Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица «**Продажи**», выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля,** в нашем случае все, кроме поля «**Скидки**» (рис. 4.9).

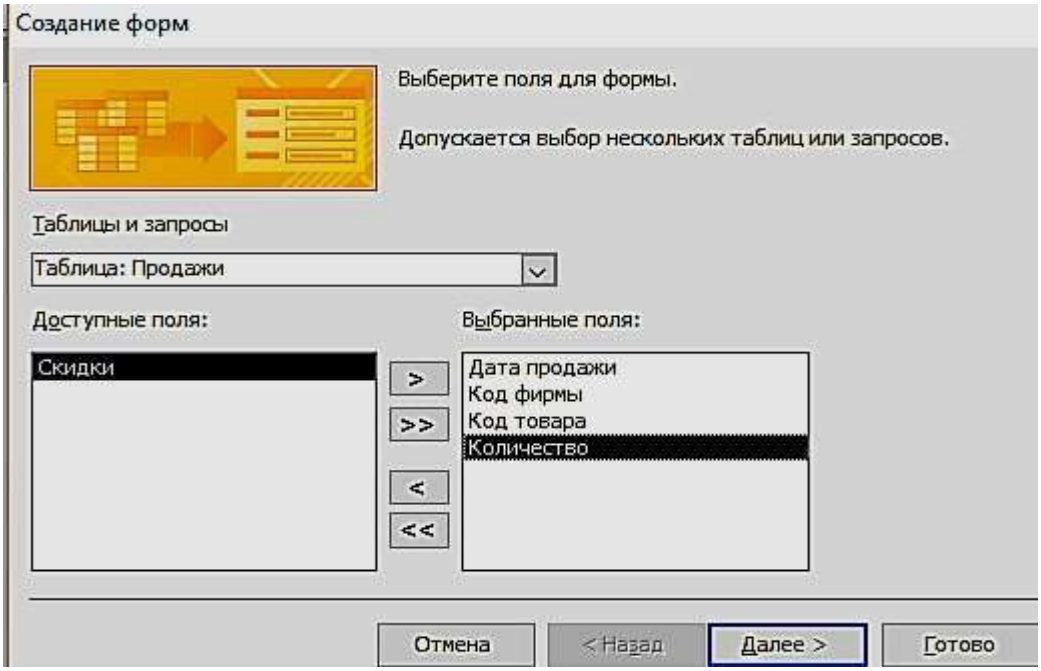



Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы «**Продажи**» для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы «**Товары**». Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки Далее в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы Продажи и щелкнуть по кнопке «**Далее**» (рис.
4.10).

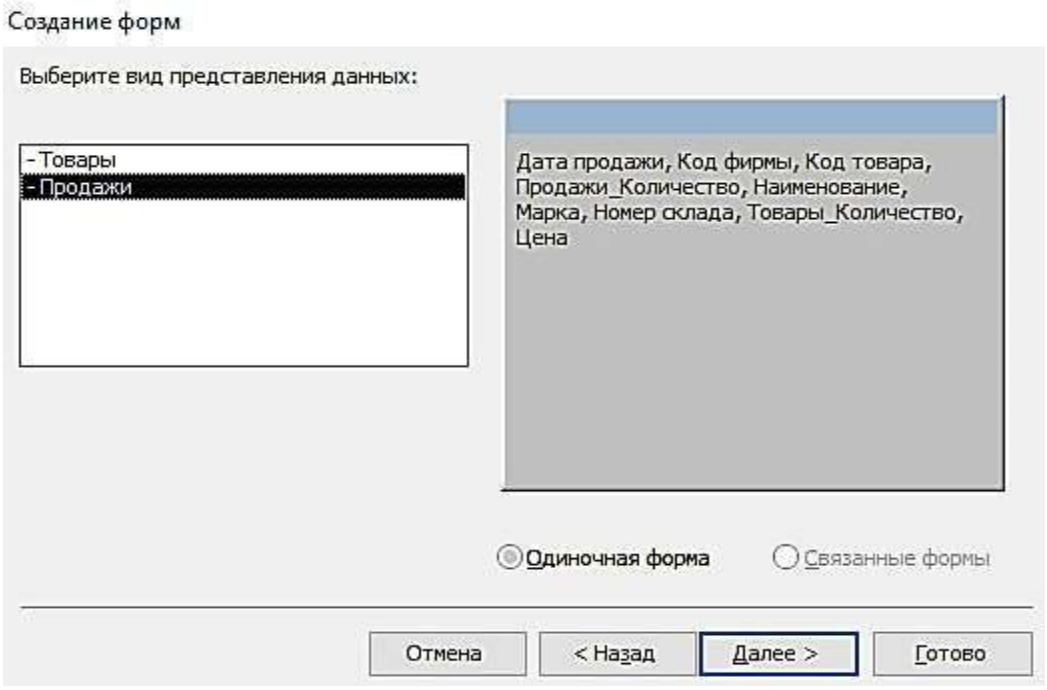



Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «**Готово**» (рис. 4.11).

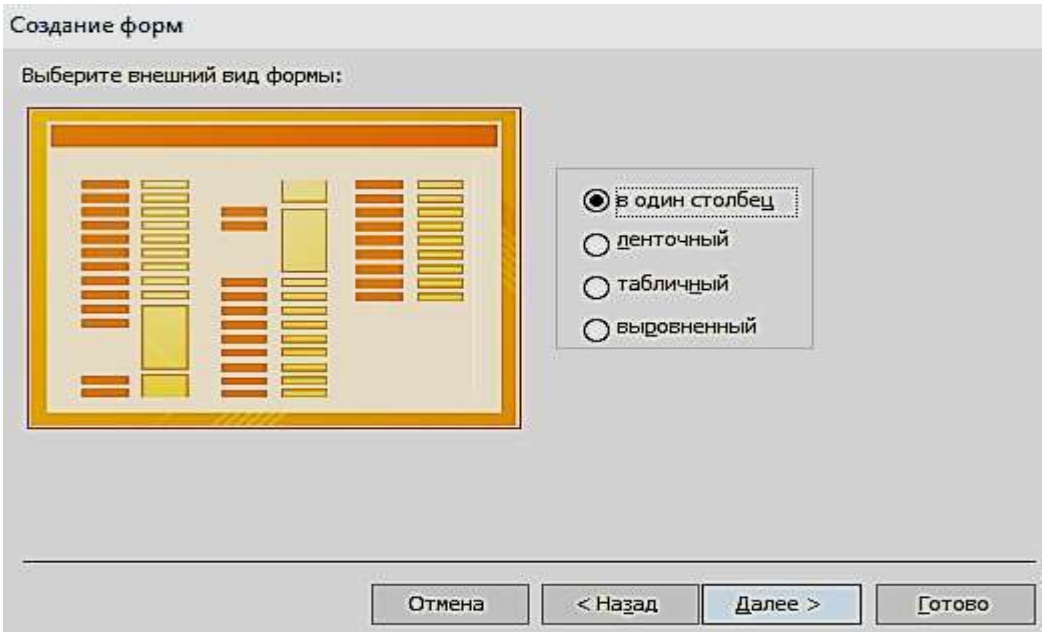



Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

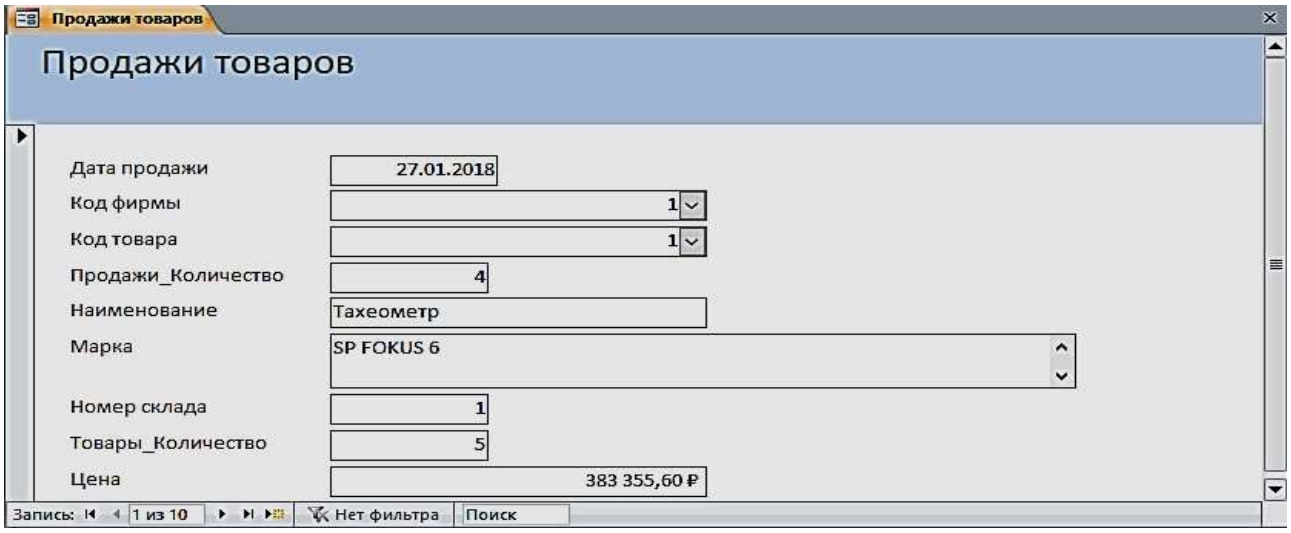



Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

### *Одиночная многотабличная форма*

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма.** Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

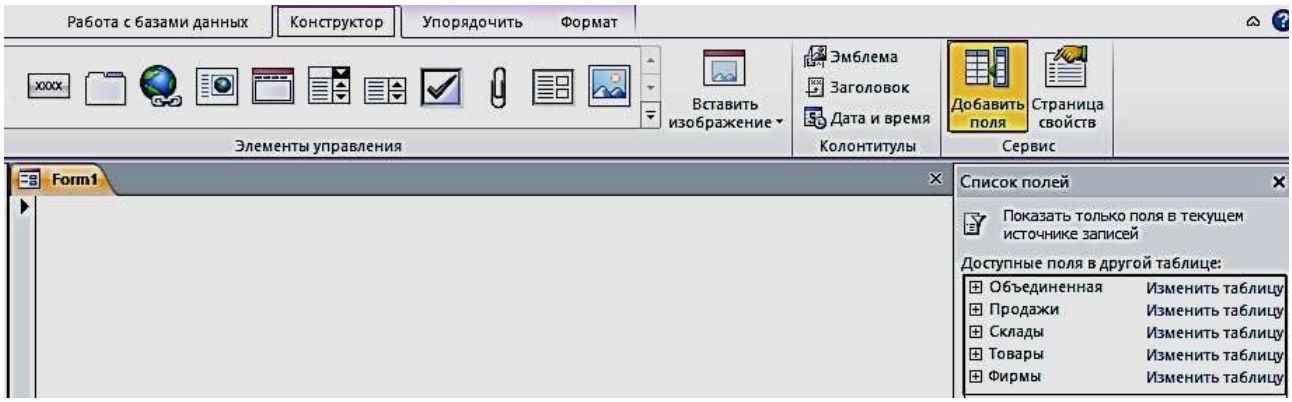



Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

**Задание 7**. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма.** В области **Список полей** откройте список полей таблицы «**Продажи**», щелкнув знак «Плюс»

рядом с её именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

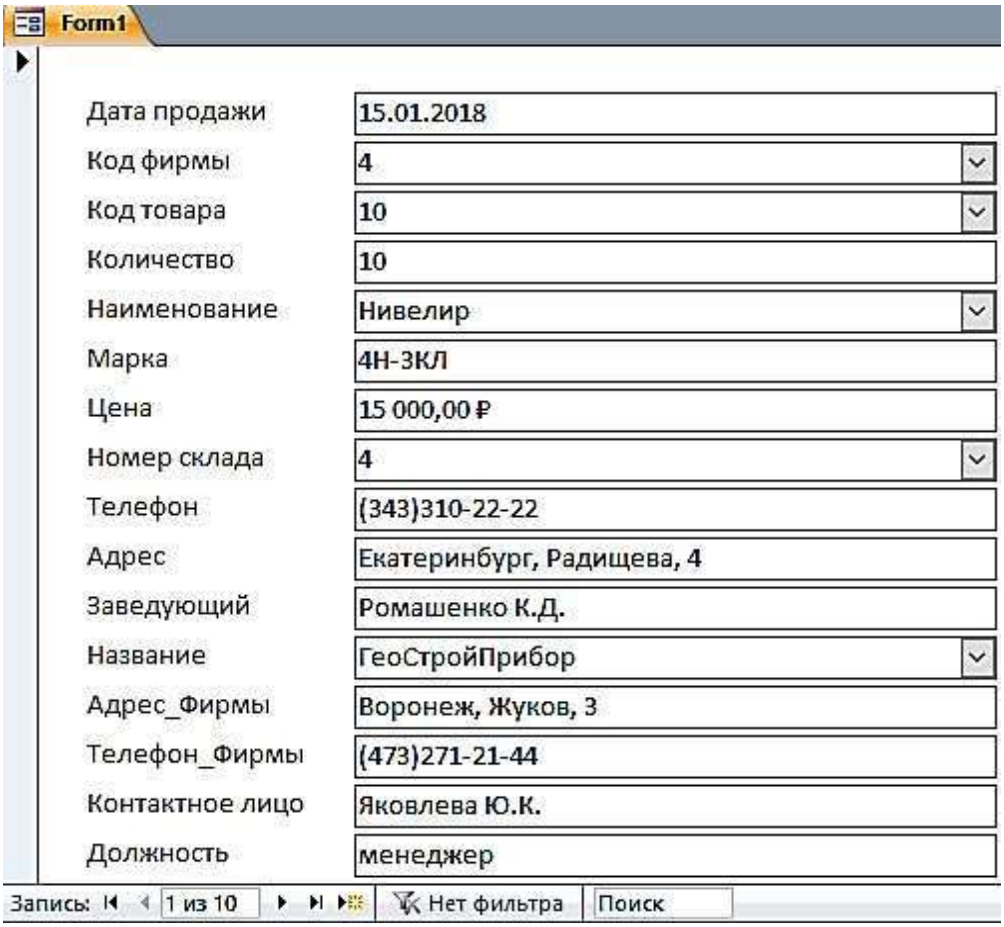



Рис. 4.14. Форма «**Общие данные**», созданная с помощью инструмента **Пустая форма**

**Задание 8**. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «**Товары**». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).




Товары

| Код товара | Наименование | Марка | Номер склада | Количество | Цена |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Тахеометр | SP FOKUS 6 | 1 | 5 | 383 355,60р. |
| 2 | Тахеометр | SP FOKUS 6W | 1 | 7 | 428 984,40р. |
| 3 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 270 000,00р. |
| 4 | Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 2 | 5 | 288 000,00р. |
| 5 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 101 031,60р. |
| 6 | Теодолит | 4Т15П | 3 | 5 | 70 516,80р. |
| 7 | Теодолит | 4Т30П | 3 | 8 | 60 750,00р. |
| 8 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 36 000,00р. |
| 9 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 20 016,00р. |
| 10 | Нивелир | 4Н-3КЛ | 4 | 18 | 15 000,00р. |

Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «**Товары**» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «**Товары**», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

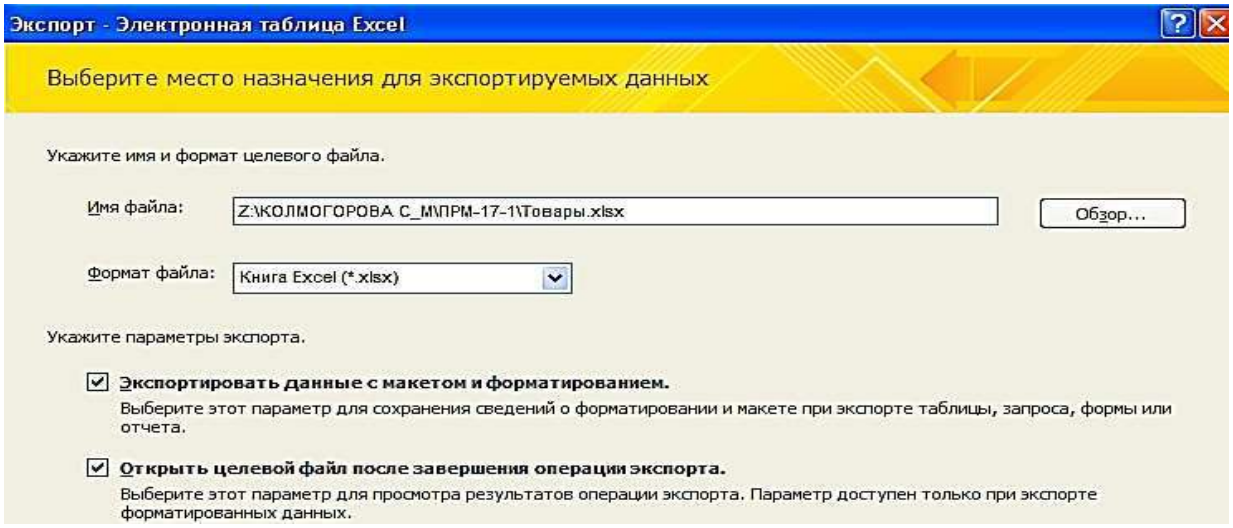



Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «**Товары**»

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Код товара | Наименование | Марка | Номер склада | Количество | Цена |
| 2 | 1 | Тахеометр | SP FOKUS 6 | 1 | 5 | 383 355,60р. |
| 3 | 2 | Тахеометр | SP FOKUS 6W | 1 | 7 | 428 984,40р. |
| 4 | 3 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 270 000,00р. |
| 5 | 4 | Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 2 | 5 | 288 000,00р. |
| 6 | 5 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 101 031,60р. |
| 7 | 6 | Теодолит | 4Т15П | 3 | 5 | 70 516,80р. |
| 8 | 7 | Теодолит | 4Т30П | 3 | 8 | 60 750,00р. |
| 9 | 8 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 36 000,00р. |
| 10 | 9 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 20 016,00р. |
| 11 | 10 | Нивелир | 4Н-3КЛ | 4 | 18 | 15 000,00р. |

Рис. 4.17. Таблица «**Товары**» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

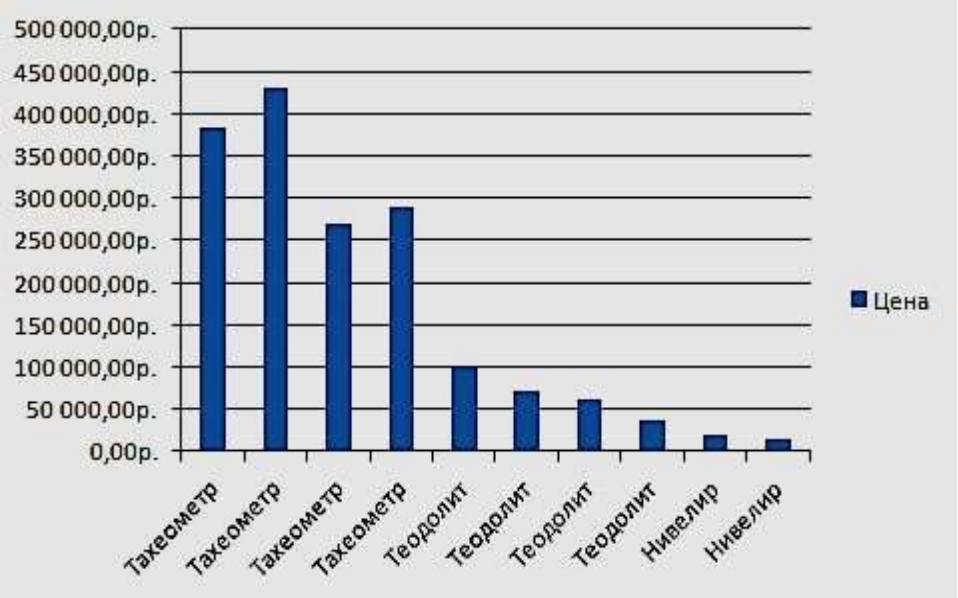



Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

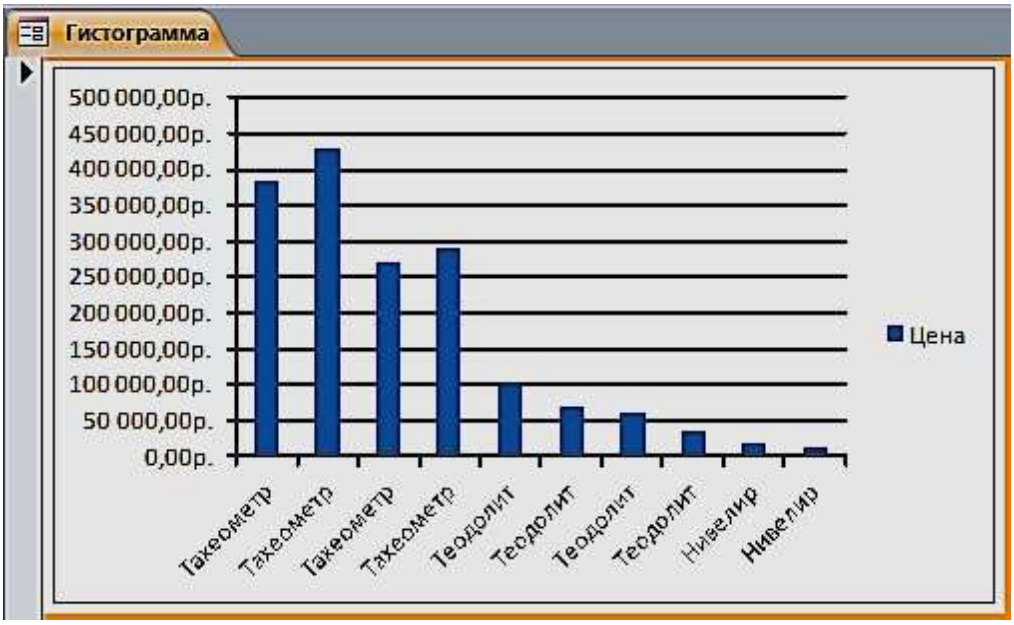



Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

### *Задание для самостоятельной работы*

1. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «**Фирмы**» с подчиненной «**Продажи**».

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
## Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

**Задание 1**. Выберем в области навигации таблицу «**Фирмы**», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «**Фирмы**». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.

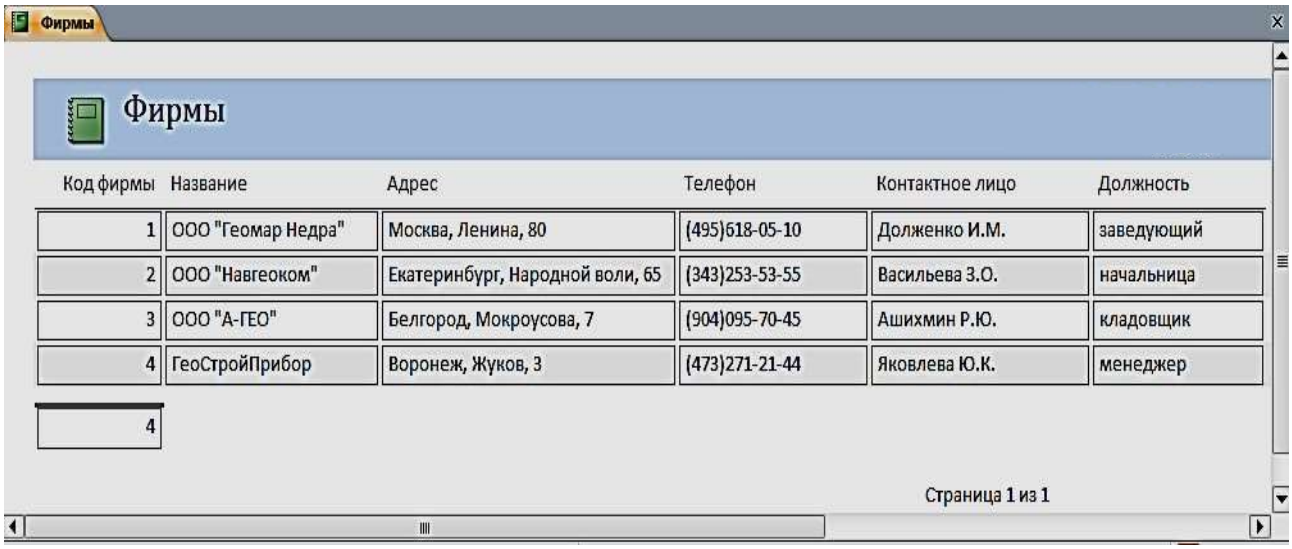



Рис. 5.1. Отчет в режиме «**Макета**»

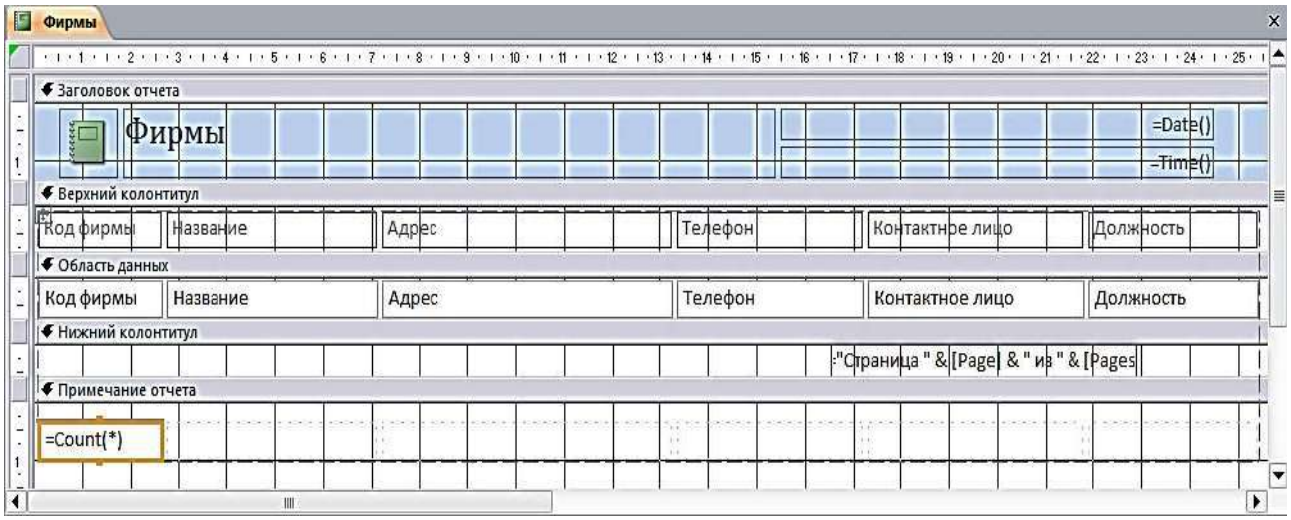



Рис. 5.2. Разделы однотабличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт.** Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы.** Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля.** На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

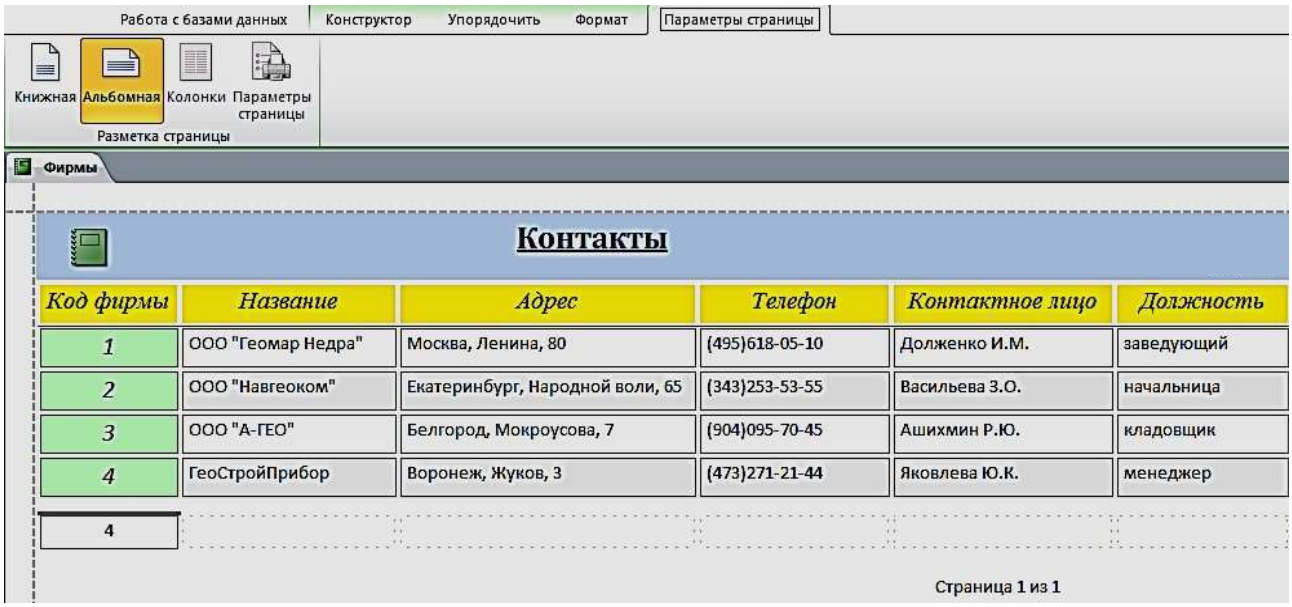



Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

**Задание 2**. Выберем в области навигации форму **Продажи товаров**, данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**. Для группировки данных по дате продажи выполним команду **Группировка, сортировка и итоги.** Выберем для предлагаемого уровня группировки поле «**Дата продажи**». Откроем список, щелкнув на параметре **по кварталам**, и выберем **по месяцам.** Для закрытия списка щелкните на любом месте за его пределами (рис. 5.4, 5.5).

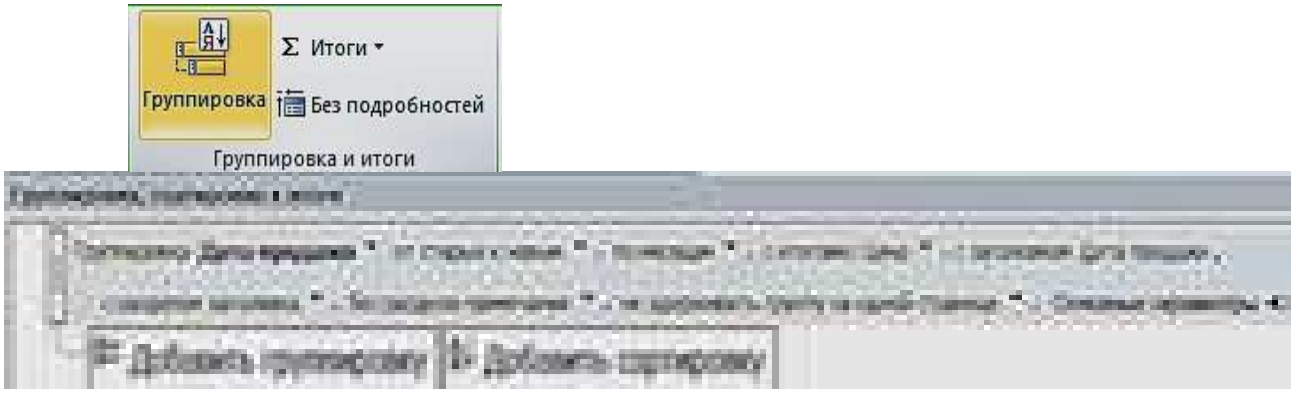



Рис. 5.4. Выбор для поля с датой группировки по месяцам

Продажи товаров

**Продажи товаров**

| Дата продажи | Код фирмы | Код товара | Продажи_Количество | Наименование | Марка | Номер склада | Товары_Количество | Цена |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Январь 2018 | | | | | | | | |
| 30.01.2018 | 3 | 7 | 4 | Теодолит | 4Т30П | 3 | 8 | 60 750,00 ₽ |
| 27.01.2018 | 1 | 1 | 4 | Тахеометр | SP FOKUS 6 | 1 | 5 | 383 355,60 ₽ |
| 25.01.2018 | 2 | 4 | 4 | Тахеометр | Soutn NTS-362 R | 2 | 5 | 288 000,00 ₽ |
| 20.01.2018 | 3 | 5 | 8 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 101 031,60 ₽ |
| 19.01.2018 | 1 | 2 | 6 | Тахеометр | SP FOKUS 6W | 1 | 7 | 428 984,40 ₽ |
| 15.01.2018 | 4 | 10 | 10 | Нивелир | 4Н-3КЛ | 4 | 18 | 15 000,00 ₽ |
| Февраль 2018 | | | | | | | | |
| 15.02.2018 | 3 | 5 | 8 | Теодолит | 3Т2КП | 3 | 9 | 101 031,60 ₽ |
| 10.02.2018 | 3 | 8 | 9 | Теодолит | VEGA TEO 5 | 3 | 10 | 35 000,00 ₽ |
| 05.02.2018 | 4 | 9 | 10 | Нивелир | 4Н -2КЛ | 4 | 15 | 20 016,00 ₽ |
| 02.02.2018 | 2 | 3 | 5 | Тахеометр | Soutn NTS-365 R | 2 | 6 | 270 000,00 ₽ |
| | | | | | | | | 1 704 169,20 ₽ |

Страница 1 из 1

Рис 5.5. Форма с датой группировки по месяцам

## *Задание для самостоятельной работы*

Создать отчет по таблице «**Объединенная**», изображенного на рис. 5.6.



**ОТЧЕТ ПРОДАЖИ**

| Дата продажи - по месяцам | Название | Фирмы_Телефон | Дата продажи | Наименование | Количество | Цена | Номер склада | Склады_Телефон |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Январь 2018* | | | | | | | | |
| | ГеоСтройПрибор | 4732712144 | *15.01.2018* | Нивелир | 18 | 15 000,00 ₽ | 4 | 3433102222 |
| | ООО "Геомар Недра" | 4956180510 | *19.01.2018* | Тахеометр | 7 | 428 984,40 ₽ | 1 | 3433818888 |
| | ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | *20.01.2018* | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | 3 | 3432751822 |
| | ООО "Навгеоком" | 3432535355 | *25.01.2018* | Тахеометр | 5 | 288 000,00 ₽ | 2 | 3433795162 |
| | ООО "Геомар Недра" | 4956180510 | *27.01.2018* | Тахеометр | 5 | 383 355,60 ₽ | 1 | 3433818888 |
| | ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | *30.01.2018* | Теодолит | 8 | 60 750,00 ₽ | 3 | 3432751822 |
| Итоги для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей) | | | | | | | | |
| *Сумма* | | | | | 52 | 1 277 121,60 ₽ | | |
| *Февраль 2018* | | | | | | | | |
| | ООО "Навгеоком" | 3432535355 | *02.02.2018* | Тахеометр | 6 | 270 000,00 ₽ | 2 | 3433795162 |
| | ГеоСтройПрибор | 4732712144 | *05.02.2018* | Нивелир | 15 | 20 016,00 ₽ | 4 | 3433102222 |
| | ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | *10.02.2018* | Теодолит | 10 | 36 000,00 ₽ | 3 | 3432751822 |
| | ООО "А-ГЕО" | 9040957045 | *15.02.2018* | Теодолит | 9 | 101 031,60 ₽ | 3 | 3432751822 |
| Итоги для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей) | | | | | | | | |
| *Сумма* | | | | | 40 | 427 047,60 ₽ | | |
| *ИТОГО* | | | | | 92 | 1 704 169,20 ₽ | | |

Рис. 5.6. Результат отчета

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

## Создание главной кнопочной формы с использованием макросов

Использования макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода *VBA*.

*Макрос* (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. *Макрокоманда* – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

**Задание 1.** Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим «**Конструктор**» (рис. 6.1).

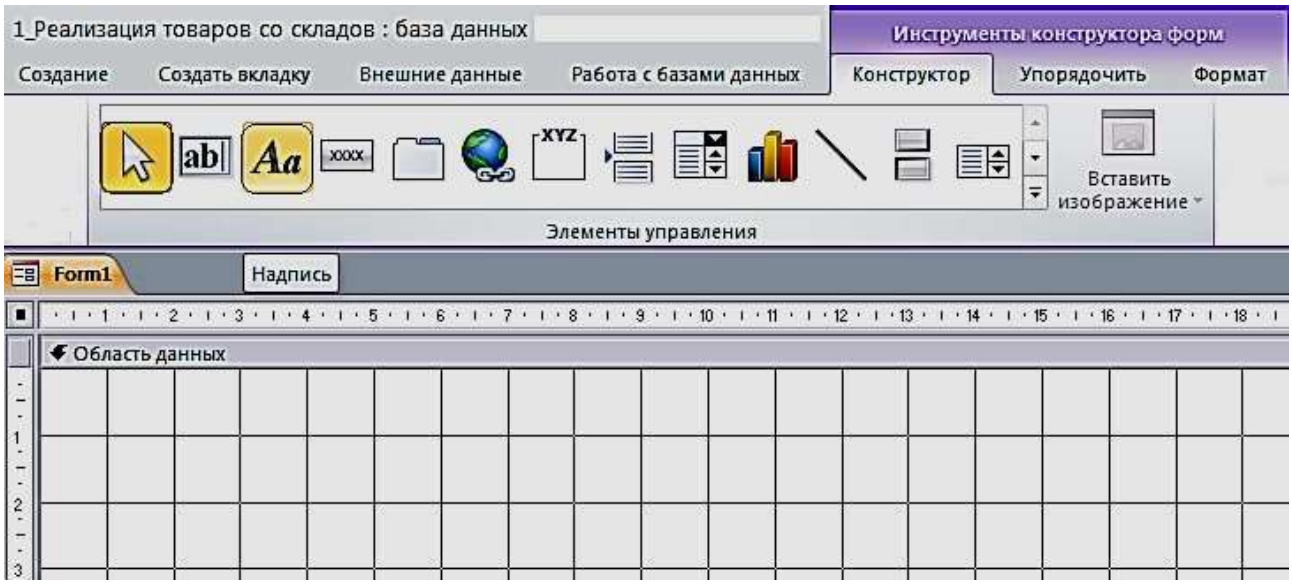



Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «**Конструктор**» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

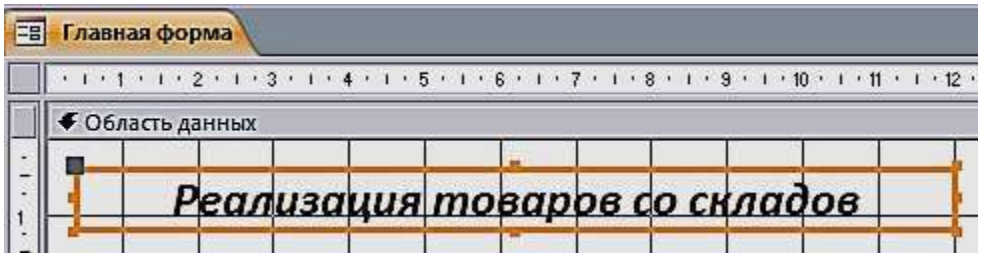



Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

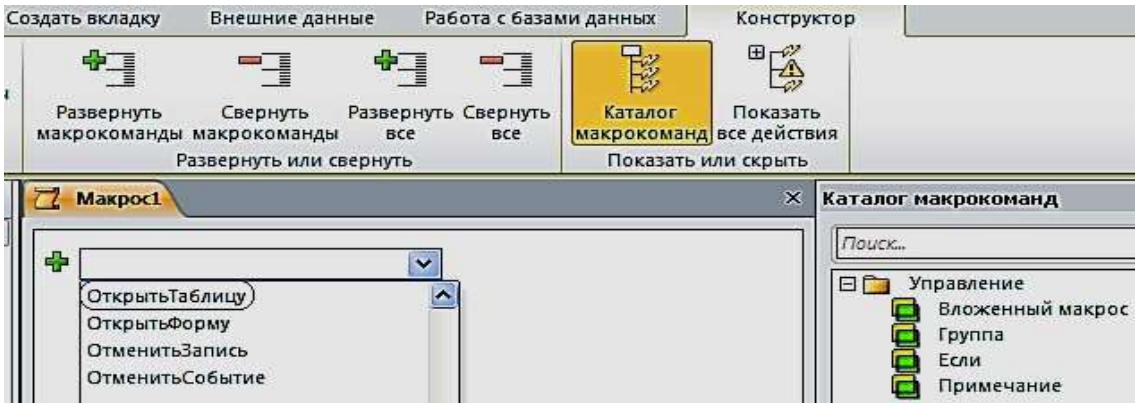



Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макрокоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

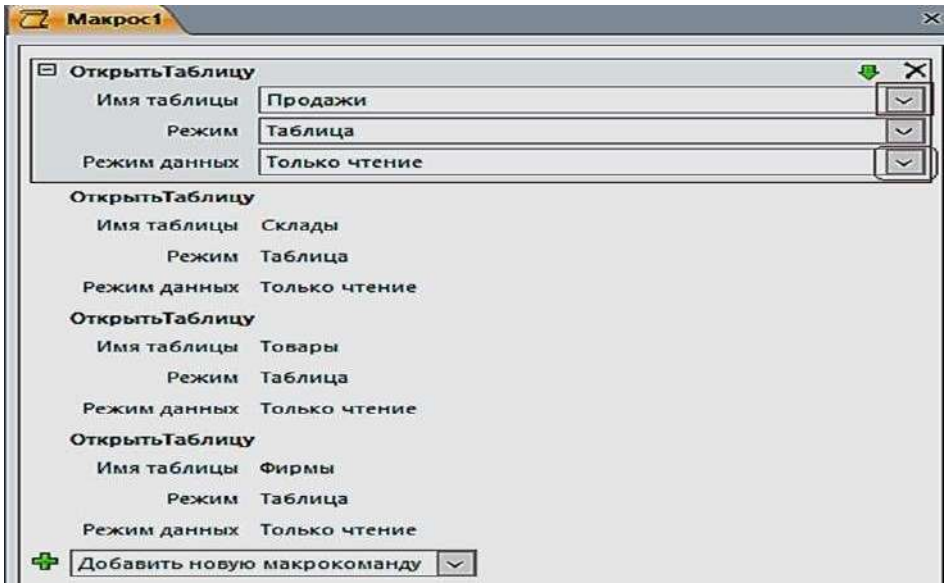



Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «**Таблицы**»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

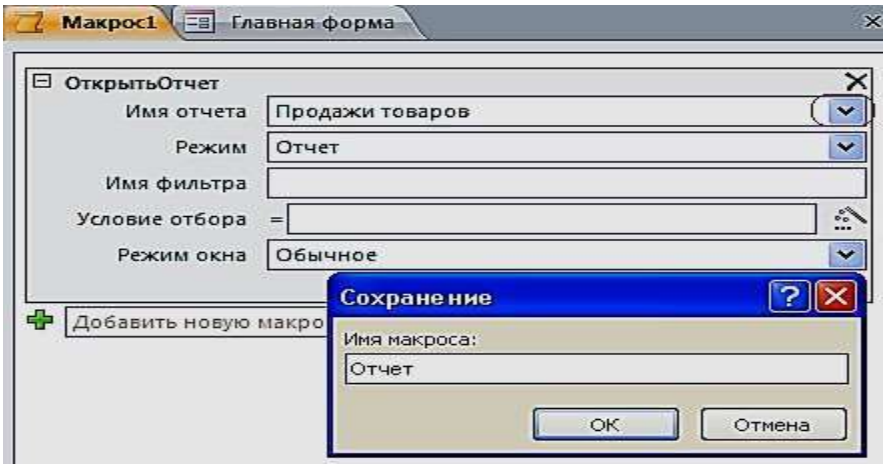



Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.




Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакрытьБазуДанных**

### *Создание управляющих кнопок на экране*

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД.** Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке **«Использовать мастера»**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

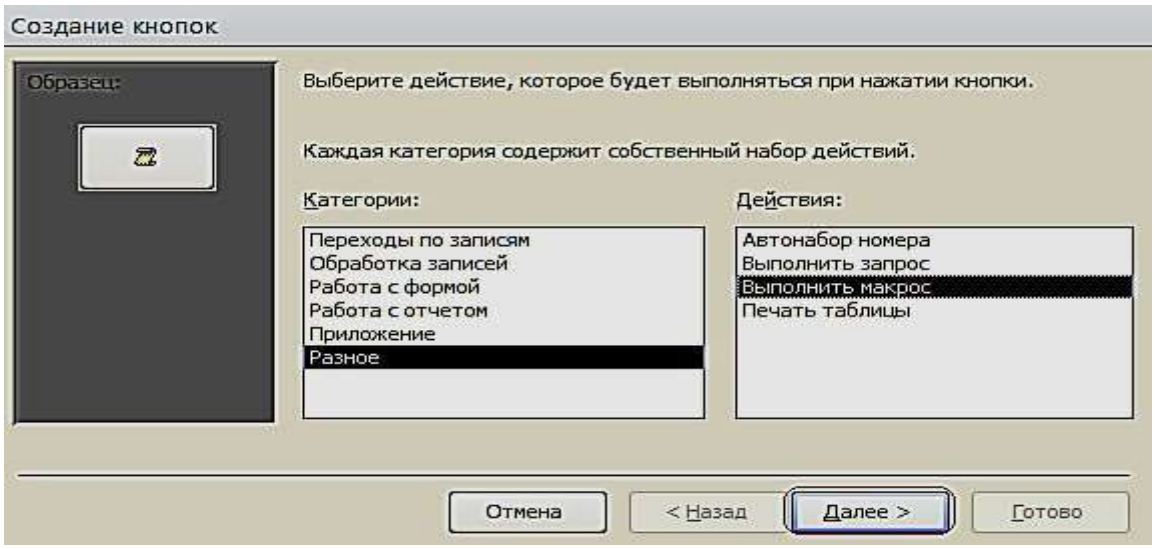



Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

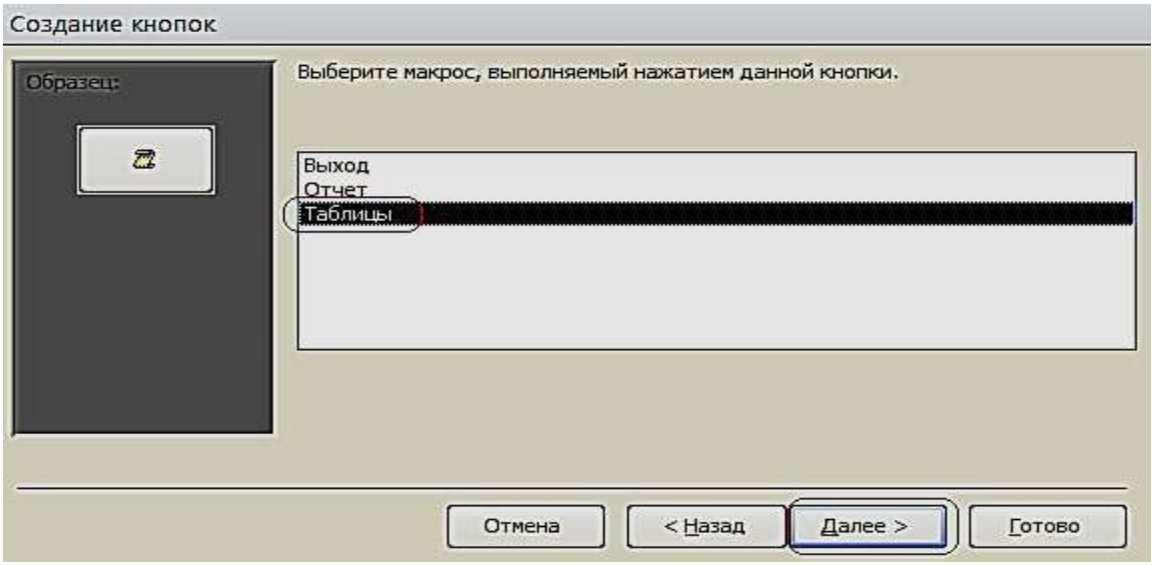



Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напишем название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

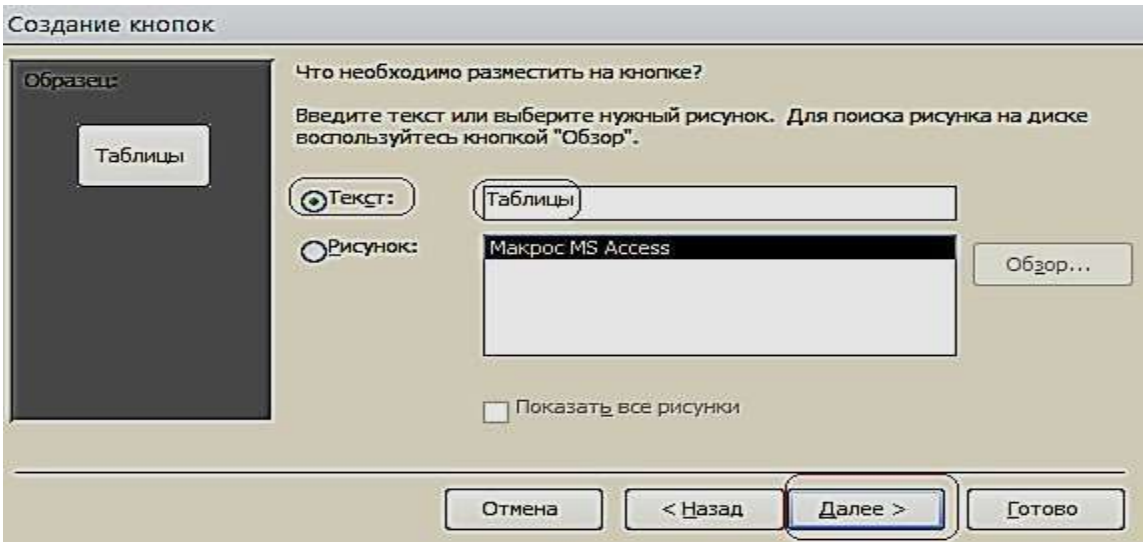



Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

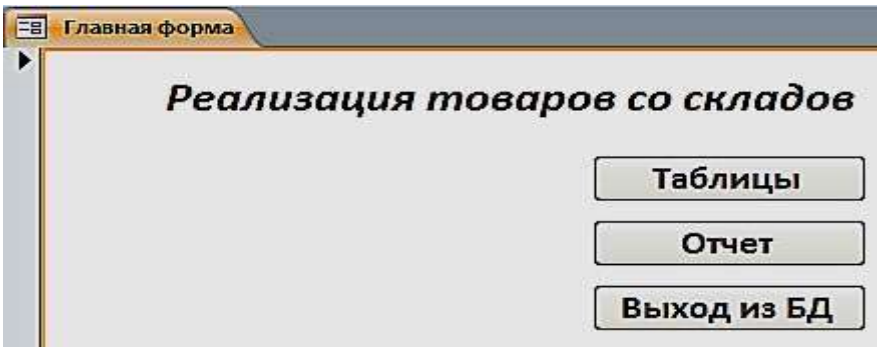



Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

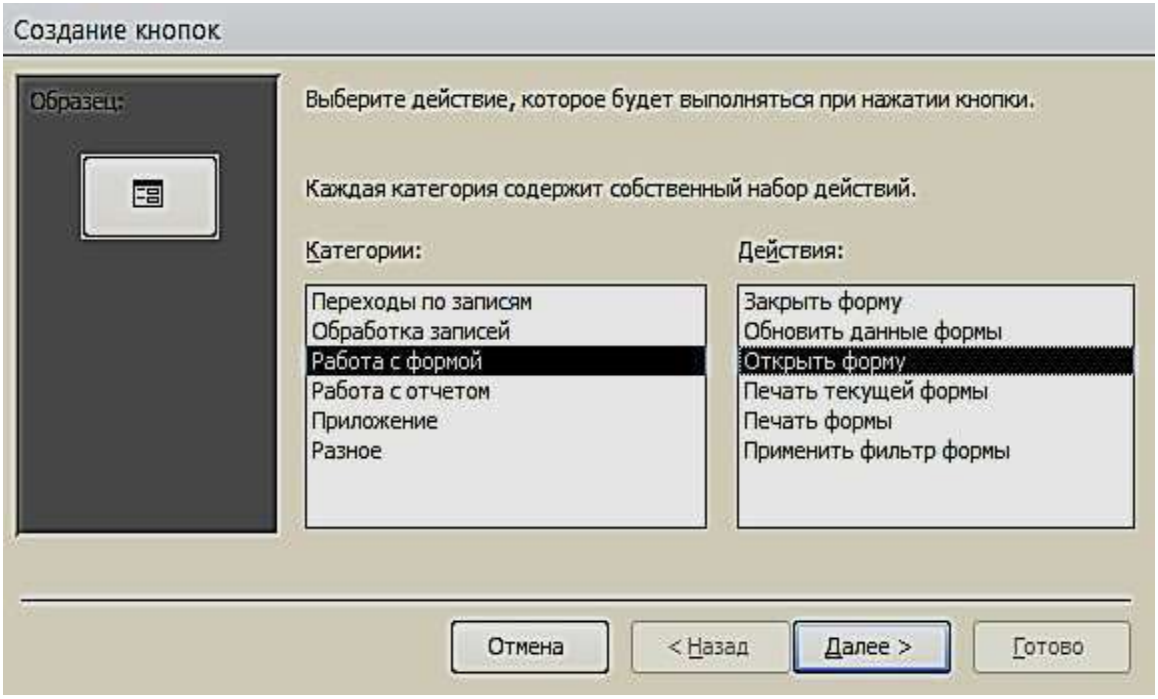



Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

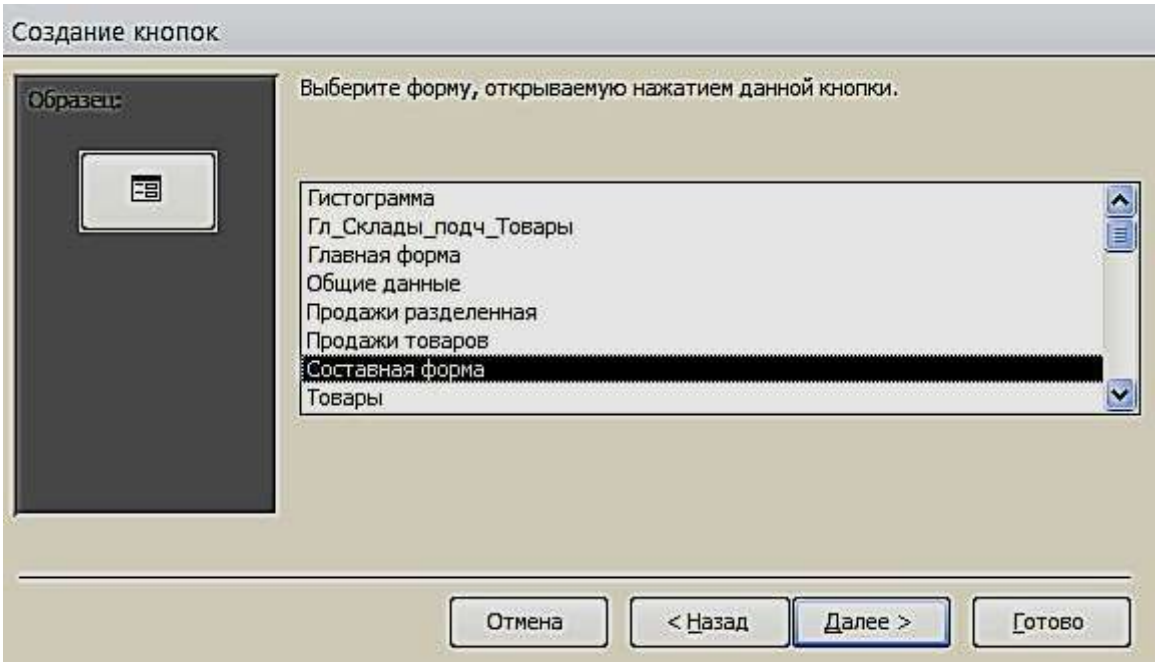



Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопке (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

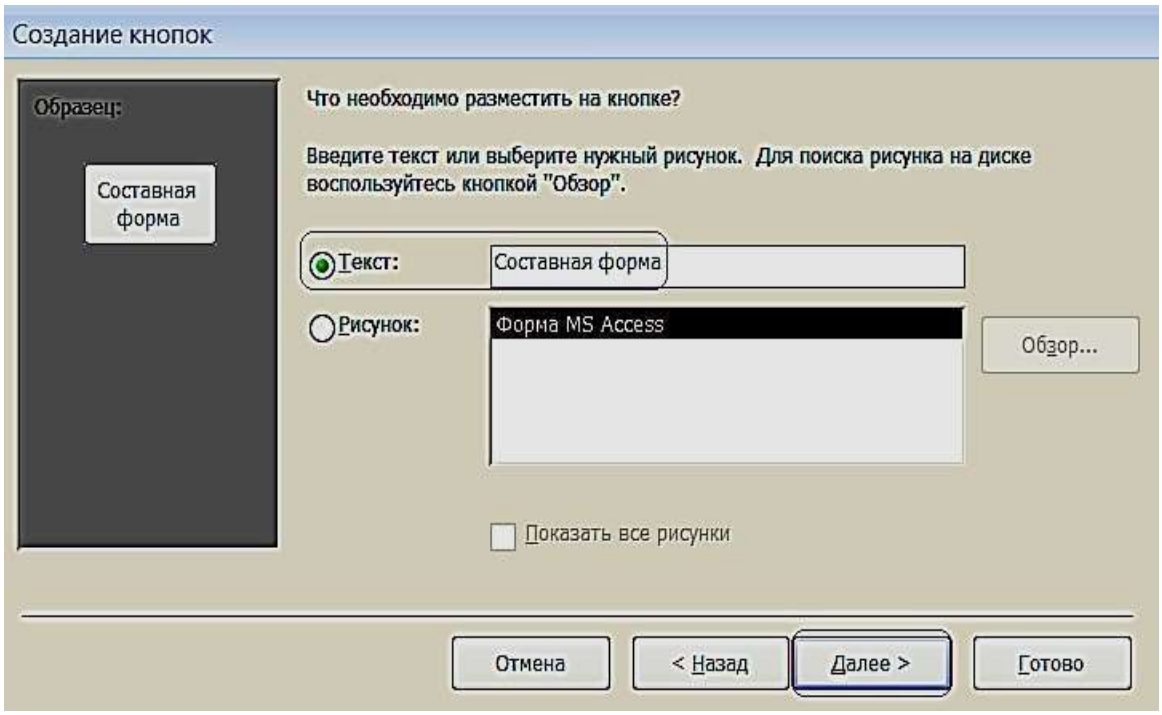



Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления «**Рисунок**».

8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).




Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «**Формы**»

# ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

## *Указания к выполнению работы*

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

## *Варианты заданий*

**Вариант № 1**

*Исходные данные:*

- ***Рабочие***: табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Цеха:*** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик). ○ *Вычислить* общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а

также среднемесячный заработок этого цеха.

- ○ *Создать* ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

**Вариант № 2**

*Исходные данные:*

- ***Сотрудники:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- ***Оплата труда:*** должность, оклад
- ***Отделы:*** номер отдела, фамилия сотрудника *Определить:* ○ возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении

на работу и на текущее время; ○ количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет; ○ минимальный размер оклада.

- ***Создать таблицу,*** которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы**.**

**Вариант № 3**

*Исходные данные:*

***Работники:*** фамилия, имя, отчество, цех.

- ***Изделия:*** наименование изделия, категория изделия (A, B, C), стоимость изготовления.
- ***Итоги:*** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

*Рассчитать:* ○ общее количество изделий каждой категории;

○ общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;

- *Создать ведомость* для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

**Вариант № 4**

*Исходные данные:*

- ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- ***Расценки:*** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, …), цена 1 мин. разговора.
- ***Заказ:*** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.

○ *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

**Вариант № 5**

*Исходные данные:*

- ***Поставка:*** поставщик, дата поставки, объем поставки.
- ***Игрушки:*** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.
- ***Чеки: номер чека, дата продажи, сумма.***

- *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению *A, B* и *X*, выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают *X* и подходят ребенку от *A* до *B* лет. ○ *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию: наименование игрушек, которые подходят детям от *1* до *3* лет и их цены.

**Вариант № 6**

*Исходные данные:*

- ***Студенты:*** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- ***Предметы:*** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

***Журнал:*** оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. ○ *Определить* общее число активистов в списке.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «*5*» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «*4*» и «*5*», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «*3*», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

**Вариант № 7**

*Исходные данные:*

- ***Авторы:*** фамилия, имя отчество, название книги.
- ***Книги:*** год издания, количество экземпляров.
- ***Местоположение:*** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. ○ *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. ○ *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах за-

данного автора, которые находятся в коллекции.

**Вариант № 8**

*Исходные данные:*

- ***Группа:*** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- *Студент*. Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- ***Результаты сессии:*** оценки по *5*-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет). ○ *Вычислить* средний балл, полученный каждым студентом за-

данной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

**Вариант № 9**

*Исходные данные:*

- ***Рейсы:*** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.

***Самолеты:*** шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.

- ***Билеты:*** дата вылета, количество свободных мест в самолете.

*Определить:* ○ номера рейсов и время отправления самолетов в заданный го-

род; ○ по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс; ○ общее количество рейсов через сутки в заданный город. □ *Создать таблицу,* которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

**Вариант № 10**

*Исходные данные:*

- ***Поставка:*** артикул обуви (артикул начинается с буквы *Ж* – для женской обуви, *М* – для мужской, *Д* – для детской обуви, например: *Д0321*), наименование, объем поставки.
- ***Обувь:*** цвет, стоимость.
- *Наличие*: размер, количество**.**

*Определить:*

- стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в

наличии; ○ общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и

ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

**Вариант № 11**

*Исходные данные:*

- ***Игроки:*** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.
- ***Футбольный клуб:*** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.
- ***Результаты:*** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. ○ *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой ко-

манды, и суммарное штрафное время. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших

игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

**Вариант № 12**

*Исходные данные:*

- ***Студенты:*** фамилия, имя, дата рождения дата поступления.

***Выбор дисциплины:*** код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «*1*», иначе – *пробел*).

- ***Успеваемость:*** средний балл, наличие задолженности.

○ *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и сред-

ний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

**Вариант № 13**

Исходные данные:

- ***Рейсы:*** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.

- ***Поезда:*** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.
- ***Билеты:*** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

*Определить:*

- количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером;
- количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- *Создать таблицу,* содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, *13:00* и *18:30*).

**Вариант № 14**

*Исходные данные:*

- ***Сотрудники:*** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.
- ***Отделы:*** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
  - *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного.
  - *Создать таблицу*, которая содержит список сотрудников пенсионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы.
  - *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужнин пенсионного возраста.

**Вариант № 15**

*Исходные данные:*

- ***Пациенты:*** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, местожительство (город).
- ***Палата:*** количество мест в палате.
- ***Учет:*** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).

*Определить:* ○ количество иногородних граждан, прибывших в клинику; ○ количество пациентов с заданным диагнозом; ○ количество пациентов пенсионного возраста.

- *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

**Вариант № 16**

*Исходные данные:*

- ***Пассажир:*** фамилия, шифр багажа.
- ***Багаж:*** количество вещей, вес.
- ***Учет:*** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.

*Определить:* ○ общий средний вес одной вещи;

○ багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи; ○ количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу,* содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

**Вариант № 17**

*Исходные данные:*

- ***Компания:*** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.
- ***Курс:*** дата, продажа, покупка.
- ***Учет:*** количество проданных акций, количество купленных акций.

*Определить:* ○ среднее количество проданных и купленных акций; ○ максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; ○ суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

**Вариант № 18**

*Исходные данные:*

- ***Заказчик:*** фамилия, адрес, телефон.
- ***Ремонт:*** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
- ***Учет:*** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.

*Определить:* ○ суммарную стоимость всех заказов; ○ количество заказов на ремонт заданного вида; ○ минимальная стоимость ремонта.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

**Вариант № 19**

*Исходные данные:*

- ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- ***Расценки:*** код города, стоимость *1* минуты разговора.
- ***Заказ:*** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах. *Определить:* ○ максимальную стоимость разговора; ○ суммарную стоимость всех разговоров; ○ общее количество разговоров в город с заданным кодом. □ *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

**Вариант № 20**

*Исходные данные:*

- ***Товары:*** шифр товара, наименование товара, категория (*A, B, C*), страна-производитель.
- ***Поставка:*** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
- ***Учет:*** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.

○ По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.

*Определить*: ○ суммарную прибыль от продажи всех товаров;

- наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.

• *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

**Вариант № 21**

*Исходные данные:*

• ***Продукция***: номер цеха изготовителя, наименование изделия

• ***Стоимость:*** код изделия, себестоимость

• ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных изделий, цена.

*Определить:* - суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изго-

товленных изделий; - общее количество изделий, изготовленных до заданной даты; - цену изделия по заданному наименованию.

• *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

**Вариант № 22**

*Исходные данные:*

• ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.

• ***Расценки:*** разряд, стоимость одного часа.

• ***Учет:*** дата, количество отработанных часов.

*Определить*: - среднее количество часов, отработанных за день; - максимальную стоимость одного часа; - по заданной дате количество отработанных часов.

• *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о работниках заданного цеха: - фамилия работника; - суммарная стоимость отработанного им времени.

**Вариант № 23**

*Исходные данные:*

• ***Клиенты:*** фамилия, адрес, телефон.

• ***Заказ:*** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.

• ***Учет:*** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

*Определить:* ○ количество заказов, выполненных мастером с заданной фа-

милией; ○ стоимость самого дорого

заказа; ○ среднюю стоимость

заказов.

- *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

**Вариант № 24**

*Исходные данные*:

- ***Импортеры:*** фирма-импортер, страна, наименование товара.
- ***Поставка:*** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость *1* штуки в условных единицах.
- ***Учет:*** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:* ○ суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;

○ суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; ○ минимальную стоимость товара.

- *Создать таблицу,* которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

**Вариант № 25**

*Исходные данные:*

- ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- ***Оплата:*** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.
- ***Учет:*** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. Определить: ○ общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми

мастерами заданного цеха; ○ сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая состав-

ляет 20 % от оплаты за качественную работу; ○ фамилию мастера, который изготовил максимальное количе-

ство качественных деталей.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к

выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

**Вариант № 26**

*Исходные данные:*

- ***Отделение:*** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.
- ***Лечение:*** шифр болезни, продолжительность.
- ***Оплата:*** диагностика, стоимость *1* дня лечения, затраты на лекарство.
- ***Суммарная стоимость:*** отработанного им времени.

*Определить:*
- по названию болезни затраты на лекарство;
- среднюю стоимость *1* дня лечения;
- рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

**Вариант № 27**

*Исходные данные:*

- ***Книги:*** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.
- ***Магазины:*** шифр книги, номер магазина, цена.
- ***Учет продаж:*** код продажи, продано, остаток.

*Определить:*
- количество проданных книг в заданном магазине;
- суммарную стоимость всех непроданных книг;
- среднюю цену одной книги.

- *Создать таблицу,* которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

**Вариант № 28**

*Исходные данные:*

- ***Детали:*** наименование детали, цех-изготовитель
- ***Изготовление:*** шифр материала, шифр детали, затрата материала на *1* деталь.

- ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.

*Определить:* ○ для всех деталей суммарные затраты материала на брак; ○ количество качественных деталей; ○ деталь, на которую тратится более всего материала. □

*Создать таблицу*, которая содержит шифр детали и процент брака.

**Вариант № 29**

*Исходные данные:*

- ***Лекарство:*** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.
- ***Стоимость:*** шифр лекарства, код аптеки, цена за *1* упаковку.
- ***Продажа:*** количество проданных упаковок, остаток.

*Определить:* ○ суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми аптеками и принадлежащее заданной категории.

○ стоимость всех непроданных упаковок;

○ среднюю стоимость лекарства.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

**Вариант № 30**

*Исходные данные:*

- ***Продавцы:*** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Товары:*** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);
- ***Журнал регистрации:*** количество проданных товаров по дням недели (понедельник, вторник, ..., суббота); *Определить:* ○ общее количество товаров, проданных каждым продавцом; ○ фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.
- *Создать таблицу,* которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

***Основная литература:***

1. *Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В*. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).

2. *Гурвиц Г.* Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере:
М., 2012. 258 с.

3. *Одиночкина С. В.* Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

***Дополнительная литература:***

1. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ

2. *Домострой А.* MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q

3. *Домострой А.* MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34

4. *Домострой А.* MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s

5. *Домострой А.* MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY

6. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE

7. *Домострой А.* MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzypOU

8. *Макарова Н. В.* Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.

МІНІСТЕРСТВО НАУКІ І ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССІЙСКОЙ ФЕДЕРАЦІІІ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор – по учебно-методическому комплексу
_____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Автор: Дружинин А. В., доцент, канд. техн. наук

Одобрены на заседании кафедры
Информатики
*(название кафедры)*

Зав. кафедрой _____
*(подпись)*

Дружинин А. В.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 1 от 16.09.2021
*(Дата)*

Рассмотрены методической комиссией
Горно-механического факультета
*(название факультета)*

Председатель _____
*(подпись)*

Осипов П. А.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 12.10.2021
*(Дата)*

Екатеринбург

# Оглавление

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП.....3
Тема 1.1 Введение в предмет. Понятие ППП.....4
Тема 1.2 Структура и основные компоненты ППП.....10
Тема 1.3 Эволюция ППП. Примеры современных ППП.....13
ЧАСТЬ II. ППП MS OFFICE.....22
Тема 2.1 Структура и состав MS Office. Основные приложения .....23
Тема 2.2 Введение в офисное программирование.....29
Тема 2.3 Макросы. Использование макрорекордера.....34
Тема 2.4 Среда разработки VBA.....38

# ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП
# ТЕМА 1.1 ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ ППП

## Цели и задачи дисциплины

- Изучение основных принципов, используемых в разработке интегрированных программных продуктов.
- Изучение структуры, состава и назначения компонентов интегрированного ПО, а также средств организации взаимодействия между компонентами и инструментальных средств расширения функциональности.
- Формирование навыков работы со средствами автоматизации решения прикладных задач.
- Формирование навыков использования встроенных средств разработки.
- Требования к уровню освоения дисциплины
- В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать принципы построения прикладных информационных систем
- уметь использовать современные программные средства для обработки разнородной информации;
- уметь автоматизировать процесс решения прикладных задач с помощью встроенных языков программирования;
- иметь представление о современном состоянии и тенденциях развития рынка прикладного ПО.

## Основные понятия и определения

Информационная система (ИС) - организационно упорядоченная совокупность документов (массивов документов) и информационных технологий, в том числе с использованием средств вычислительной техники и связи, реализующих информационные процессы. Информационные системы предназначены для хранения, обработки, поиска, распространения, передачи и представления информации.

Автоматизированная (информационная) система (АС) - совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для хранения и/или управления данными и ин-

формацией и производства вычислений и управляемая человеком-оператором (в этом главное отличие автоматизированной системы от автоматической).

Многоуровневое представление ИС - модель представления информационной системы в виде совокупности взаимосвязанных уровней, разделенных по функциональному назначению (рис. 1).




*Рис. 1. Многоуровневое представление информационных систем.*

Аппаратное обеспечение ИС - комплекс электронных, электрических и механических устройств, входящих в состав информационной системы или сети.

Программное обеспечение (ПО) — совокупность программ и данных, предназначенных для решения определенного круга задач и хранящиеся на машинных носителях.

Программа — последовательность формализованных инструкций, представляющих алгоритм решения некоторой задачи и предназначенная для исполнения устройством управления вычислительной машины. Инструкции программы записываются при помощи машинного кода или специальных языков программирования. В зависимости от контекста термин «программа» может относится к исходным текстам, при помощи которых записывается алгоритм, или к исполняемому машинному коду.

Программист - специалист, занимающийся разработкой и проверкой программ. Различают системных и прикладных программистов.

Пользователь - человек, принимающий участие в управлении объектами и система ми некоторой предметной области и являющийся составным элементом автоматизированной системы.

Прикладное программное обеспечение - программное обеспечение, ориентированное на конечного пользователя и предназначенное для решения пользовательских задач.

Прикладное ПО состоит из:

- отдельных прикладных программ и пакетов прикладных программ, предназначенных для решения различных задач пользователей;
- автоматизированных систем, созданных на основе этих пакетов.

Пакет прикладных программ - комплект программ, предназначенных для решения задач из определенной проблемной области. Обычно применение пакета прикладных программ предполагает наличие специальной документации: лицензионного свидетельства, паспорта, инструкции пользователя и т.п.

## Классификация программного обеспечения

Любая классификация подразумевает выбор некоторого группировочного признака (или нескольких), на основании которого и производится отнесение объектов к тому или иному классу. Так, при классификации программного обеспечения по способу распространения можно выделить следующие категории список не полный):

- Commercial Software - коммерческое (с ограниченными лицензией возможностями на использование), разрабатываемое для получения прибыли.
- Freeware - свободное ПО, распространяемое без ограничений на использование, модификацию и распространение.
- Shareware - условно-бесплатное ПО, с частичными ограничениями при работе в ознакомительном режиме (например, определенное количество запусков программы).
- Abandonware - «заброшенное» ПО, поддержка которого непосредственным разработчиком прекращена, но продолжается третьими лицами (например, партнерами или энтузиастами).
- Adware - ПО, в код которого включены рекламные материалы. Такое ПО распространяется бесплатно, но для отключения рекламных блоков необходима оплата.
- Careware - «благотворительное» ПО, оплату за которое разработчик (или распро странитель) просит переводить на благотворительные нужды.

При классификации программного обеспечения по назначению в качестве критерия используют уровень представления ИС, на который ориентирована та или иная программа.

Соответственно выделяют следующие классы ПО:

1. Системное ПО - решает задачи общего управления и поддержания работоспособности системы в целом. К этому классу относят операционные системы, менеджеры загрузки, драйверы устройств, программные кодеки, утилиты и программные средства защиты информации.
2. Инструментальное ПО включает средства разработки (трансляторы, отладчики, интегрированные среды, различные SDK и т.п.) и системы управления базами данных (СУБД).
3. Прикладное ПО - предназначено для решения прикладных задач конечными пользователями.

Прикладное ПО - самый обширный класс программ, в рамках которого возможна дальнейшая классификация, например, по предметным областям. В этом случае группировочным признаком является класс задач, решаемых программой. Приведем несколько примеров:

- Офисные приложения - предназначены для автоматизации офисной деятельности (текстовые редакторы и процессоры, электронные таблицы, редакторы презентаций и т.п.)
- Корпоративные информационные системы - бухгалтерские программы, системы корпоративного управления, системы управления проектами (Project Management), инструменты автоматизации документооборота (EDM-системы) и управления архивами документов (DWM-системы)
- Системы проектирования и производства - системы автоматизированного проектирования (САПР, CAD/CAM-системы), системы управления технологическими (SCADA) и производственными (MES) процессами
- Научное ПО - системы математического и статистического расчета, анализа и моделирования
- Геоинформационные системы (ГИС)
- Системы поддержки принятия решений (СППР)
- Клиенты доступа к сетевым сервисам (электронная почта, веб-браузеры, передача сообщений, чат-каналы, клиенты файлообменных сетей и т.п.)
- Мультимедийное ПО - компьютерные игры, средства просмотра и редактирования аудио- и видеоинформации, графические редакторы и вьюеры, анимационные редакторы и т.п.

С точки зрения конечного пользователя такая классификация оправданна и наглядна, для разработчика же более значимым фактором является структура прикладной программы, в общем случае состоящей из нескольких компонентов. Назначение этих компонентов, связи между ними и способность к взаимодействию определяют интеграцию прикладного ПО. Чем теснее связаны программные компоненты, тем выше степень интеграции.

В зависимости от степени интеграции многочисленные прикладные программные средства можно классифицировать следующим образом[1]:

1. отдельные прикладные программы;
2. библиотеки прикладных программ;
3. пакеты прикладных программ;
4. интегрированные программные системы.

Отдельная прикладная программа пишется, как правило, на некотором высокоуровневом языке программирования (Pascal, Basic и т.п.) и предназначается для решения конкретной прикладной задачи. Такая программа может быть реализована в виде набора модулей, каждый из которых выполняет некоторую самостоятельную функцию (например, модуль пользовательского интерфейса, модуль обработки ошибок, модуль печати и т.п.).
При этом доступ к функциям модулей из внешних программ невозможен.

Библиотека представляет собой набор отдельных программ, каждая из которых решает некоторую прикладную задачу или выполняет определенные вспомогательные функции (управление памятью, обмен с внешними устройствами и т.п.). Библиотеки программ зарекомендовали себя эффективным средством решения вычислительных задач. Они интенсивно используются при решении научных и инженерных задач с помощью ЭВМ.
Условно их можно разделить на библиотеки общего назначения и специализированные библиотеки.

Пакет прикладных программ (ППП) - это комплекс взаимосвязанных программ, ориентированный на решение определенного класса задач. Формально такое определение не исключает из числа пакетов и библиотеки программ, однако у ППП, как отдельной категории, есть ряд особенностей, среди которых: ориентация на решение классов задач, унифицированный интерфейс, наличие языковых средств.

[1] Следует отметить отсутствие безусловных границ между перечисленными формами прикладного программного обеспечения

Интегрированная программная система - это комплекс программ, элементами которого являются различные пакеты и библиотеки программ. Примером служат системы автоматизированного проектирования, имеющие в своем составе несколько ППП различного назначения. Часто в подобной системе решаются задачи, относящиеся к различным классам или даже к различным предметным областям.

## Понятие пакета прикладных программ

Итак, пакет прикладных программ (ППП) – это комплекс взаимосвязанных программ для решения определенного класса задач из конкретной предметной области. На текущем этапе развития информационных технологий именно ППП являются наиболее востребованным видом прикладного ПО. Это связано с упомянутыми ранее особенностями ППП. Рассмотрим их подробней:

- Ориентация на решение класса задач. Одной из главных особенностей является ориентация ППП не на отдельную задачу, а на некоторый класс задач, в том числе и специфичных, из определенной предметной области. Так, например, офисные пакеты ориентированы на офисную деятельность, одна из задач которой - подготовка документов (в общем случае включающих не только текстовую информацию, но и таблицы, диаграммы, изображения). Следовательно, офисный пакет должен реализовывать функции обработки текста, представлять средства обработки табличной информации, средства построения диаграмм разного вида и первичные средства редактирования растровой и векторной графики.
- Наличие языковых средств. Другой особенностью ППП является наличие в его составе специализированных языковых средств, позволяющих расширить число задач, решаемых пакетом или адаптировать пакет под конкретные нужды. Пакет может представлять поддержку нескольких входных языков, поддерживающих различные парадигмы. Поддерживаемые языки могут быть использованы для формализации исходной задачи, описания алгоритма решения и начальных данных, организации доступа к внешним источникам данных, разработки программных модулей, описания модели предметной области, управления процессом решения в диалоговом режиме и других целей. Примерами входных языков ППП являются VBA в пакете MS Office, AutoLISP/VisualLISP в Autodesk AutoCAD, StarBasic в OpenOffice.org

- Единообразие работы с компонентами пакета. Еще одна особенность ППП состоит в наличии специальных системных средств, обеспечивавших унифицированную работу с компонентами. К их числу относятся специализированные банки данных, средства информационного обеспечения, средства взаимодействия пакета с операционной системой, типовой пользовательский интерфейс и т.п.
-

# ТЕМА 1.2 СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ППП

Несмотря на разнообразие конкретных пакетных разработок, их обобщенную внутреннюю структуру можно представить в виде трех взаимосвязанных элементов1 (рис. 2):

1. входной язык (макроязык, язык управления) - представляет средство общения пользователя с пакетом;
2. предметное обеспечение (функциональное наполнение) - реализует особенности конкретной предметной области;
3. системное обеспечение (системное наполнение) - представляет низкоуровневые средства, например, доступ к функциям операционной системы.

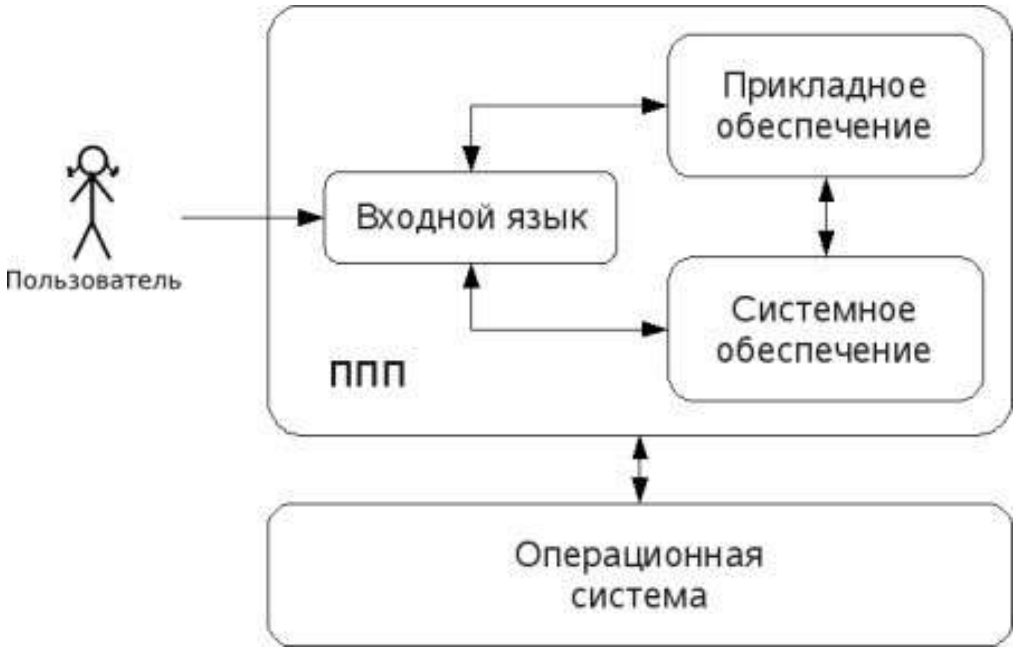



*Рис. 2. Структура ППП.*

Входной язык - основной инструмент при работе пользователя с пакетом прикладных программ. В качестве входного языка могут использоваться как универсальные (Pascal, Basic и

т.п.), так и специализированные, проблемно-ориентированные языки программирования (Cobol - для бизнес-приложений, Lisp - списочные структуры данных, Fortran и MathLAB - математические задачи и т.п.).

Развитый пакет может обладать несколькими входными языками, предназначенными для выполнения различных функций в рамках решаемого класса задач. Так, например, в пакете OpenOffice.org поддерживаются языки StarBasic, Python, JavaScript и Java. StarBasic является основным входным языком, предназначенным для автоматизации работы с пакетом, для этого языка имеется интегрированная среда разработки и встроенный отладчик. Скрипты на языках Python и JavaScript загружаются и исполняются из внешних файлов. На Java (через SDK и функции API OpenOffice) можно создавать модули расширения и полнофункциональные приложения-компоненты.

Входные языки отражают объем и качество предоставляемых пакетом возможностей, а также удобство их использования. Таким образом, именно входной язык является основным показателем возможностей ППП. Однако стоит отметить, что в современных пакетах обращение пользователя к языковым средствам обычно происходит косвенно, через графический интерфейс.

Предметное обеспечение отражает особенности решаемого класса задач из конкретной предметной области и включает:

- программные модули, реализующие алгоритмы (или их отдельные фрагменты) прикладных задач;
- средства сборки программ из отдельных модулей.

Наиболее распространено в настоящее время оформление программных модулей в виде библиотек, подключаемых статически или динамически. В зависимости от использованного разработчиками подхода к проектированию и реализации ППП такие библиотеки содержат встроенные классы и описания их интерфейсов (при использовании объектно-ориентированного программирования). При использовании парадигмы структурного программирования в библиотечных модулях содержатся процедуры и функции, предназначенные для решения некоторых самостоятельных задач. В обоих случаях библиотеки связаны с другими модулями пакета лишь входной и выходной информацией.

Системное обеспечение представляет собой совокупность низкоуровневых средств (программы, файлы, таблицы и т.д.), обеспечивающих определенную дисциплину работы

пользователя при решении прикладных задач и формирующих окружение пакета. К системному обеспечению ППП относят следующие компоненты:

- монитор - программа, управляющая взаимодействием всех компонентов ППП;
- транслятор(ы) с входных языков - для ППП характерно использование интерпретируемых языков;
- средства доступа к данным - драйверы баз данных и/или компоненты, представляющие доступ через унифицированные интерфейсы (ODBC, JDBC, ADO, BDE и т.п.);
- информационно-справочный модуль - предоставляет функции поддержки, среди которых информационные сообщения, встроенная справочная системы и т.п.

различные служебные программы, выполняющие низкоуровневые операции (автосохранение, синхронизация совместно используемых файлов и т.д.)

Приведенная логическая структура ППП достаточна условна и в конкретном ППП может отсутствовать четкое разделение программ на предметное и системное обеспечение. Например, программа планирования вычислений, относящаяся к прикладному обеспечению, может одновременно выполнять и ряд служебных функций (информационное обеспечение, связь с операционной системой и т.п.).

Кроме того, одни и те же программы в одном пакете могут относиться к предметному обеспечению, а в другом - к системному. Так, программы построения диаграмм в рамках специализированного пакета машинной графики естественно отнести к предметному обеспечению. Однако те же программы следует считать вспомогательными и относящимися к системному обеспечению, например, в пакете решения вычислительных задач.

# ТЕМА 1.3 ЭВОЛЮЦИЯ ППП. ПРИМЕРЫ СОВРЕМЕННЫХ ППП

## Этапы развития ППП

Первые ППП представляли собой простые тематические подборки программ для решения отдельных задач в той или иной прикладной области, обращение к ним выполнялось с помощью средств оболочки ОС или из других программ. Современный пакет является сложной программной системой, включающей специализированные системные и языковые средства. В относительно короткой истории развития вычислительных ППП можно выделить *4 основных поколения* (класса) пакетов. Каждый из этих: классов характеризуется определенными

особенностями входящих состав ППП компонентов - входных языков, предметного и системного обеспечения.

**Первое поколение**

В качестве входных языков ППП первого поколения использовались универсальные языки программирования (Фортран, Алгол-60 и т.п.) или языки управления заданиями соответствующих операционных систем. Проблемная ориентация входных языков достигалась за счет соответствующей мнемоники в идентификаторах. Составление заданий на таком языке практически не отличалось от написания программ на алгоритмическом языке.

Предметное обеспечение первых ППП, как правило, было организовано в форме библиотек программ, т.е. в виде наборов (пакетов) независимых программ на некотором базовом языке программирования (отсюда впервые возник и сам термин «пакет»). Такие ППП иногда называют *пакетами библиотечного типа*, или *пакетами простой структуры*.

В качестве системного обеспечения пакетов первого поколения обычно использовались штатные компоненты программного обеспечения ЭВМ: компиляторы с алгоритмических языков, редакторы текстов, средства организации библиотек программ, архивные системы и т.д. Эти пакеты не требовали сколько-нибудь развитой системной поддержки, и для их функционирования вполне хватало указанных системных средств общего назначения. В большинстве случаев разработчиками таких пакетов были прикладные программисты, которые пытались приспособить универсальные языки программирования к своим нуждам.

**Второе поколение**

Разработка ППП второго поколения осуществлялась уже с участием системных программистов. Это привело к появлению специализированных входных языков на базе универсальных языков программирования. Проблемная ориентация таких языков достигалась не только за счет использования определенной мнемоники, но также применением соответствующих языковых конструкций, которые упрощали формулировку задачи и делали ее более наглядной. Транслятор с такого языка представлял собой препроцессор (чаще всего макропроцессор) к транслятору соответствующего алгоритмического языка.

В качестве модулей в пакетах этого класса стали использоваться не только программные единицы (т.е. законченные программы на том или ином языке программирования), но и такие объекты, как последовательность операторов языка программирования, совокупность данных, схема счета и др.

Существенные изменения претерпели также принципы организации системного обеспечения ППП. В достаточно развитых пакетах второго поколения уже можно выделить элементы системного обеспечения, характерные для современных пакетов: монитор, трансляторы с входных языков, специализированные банки данных, средства описания модели предметной области и планирования вычислений и др.

**Третье поколение**

Третий этап развития ППП характеризуется появлением самостоятельных входных языков, ориентированных на пользователей-непрограммистов. Особое внимание в таких ППП уделяется системным компонентам, обеспечивающим простоту и удобство. Это достигается главным образом за счет специализации входных языков и включения в состав пакета средств автоматизированного планирования вычислений.

**Четвертое поколение**

Четвертый этап характеризуется созданием ППП, эксплуатируемых в интерактивном режиме работы. Основным преимуществом диалогового взаимодействия с ЭВМ является возможность активной обратной связи с пользователем в процессе постановки задачи, ее решения и анализа полученных результатов. Появление и интенсивное развитие различных форм диалогового общения обусловлено прежде всего прогрессом в области технических средств (графическая подсистема ЭВМ и средства мультимедиа, сетевые средства). Развитие аппаратного обеспечения повлекло за собой создание разнообразных программных средств поддержки диалогового режима работы (диалоговые операционные системы, диалоговые пакеты программ различного назначения и т. д.).

Прикладная система состоит из *диалогового монитора* - набора универсальных программ, обеспечивающих ведение диалога и обмен данными, и базы знаний об области. Информация о структуре, целях и форма диалога задает сценарий, в соответствии с который монитор управляет ходом диалога. Носителями процедурных знаний о предметной области являются прикладные модули, реализующие функции собственной системы. Таким образом, создание прикладной системы сводится к настройке диалогового монитора на конкретный диалог, путем заполнения базы знаний. При этом программировать в традиционном смысле этого слова приходится лишь прикладные модули, знания о диалоге вводятся в систему с помощью набора соответствующих средств - редактора сценариев. Логично требовать, чтобы редактор сценариев также представлял собой диалоговую программу, отвечавшую

рассмотренным выше требованиям. Благодаря готовому универсальному монитору программист может сосредоточиться на решении чисто прикладных задач, выделение же знаний о диалоге в сценарий обеспечивает в значительной степени необходимая гибкость программного продукта.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблеме создания *«интеллектуальных ППП»*. Такой пакет позволяет конечному пользователю лишь сформулировать свою задачу в содержательных терминах, не указывая алгоритма ее решения. Синтез решения и сборка целевой программы производятся автоматически. При этом детали вычислений скрыты от пользователя, и компьютер становится интеллектуальным партнером человека, способным понимать его задачи. Предметное обеспечение подобного ППП представляет собой некоторую базу знаний, содержащую как процедурные, так и описательные знания. Такой способ решения иногда называют концептуальным программированием, характерными особенностями которого является программирование в терминах предметной области использование ЭВМ уже на этапе постановки задач, автоматический синтез программ решения задачи, накопление знаний о решаемых задачах в базе знаний.

## Краткий обзор некоторых ППП

Для иллюстрации ранее рассмотренных материалов приведем несколько примеров современных пакетов прикладных программ из различных предметных областей. Учитывая, что постоянно появляются новые версии программных продуктов, здесь будут рассматриваться не возможности конкретных версий, а лишь основные структурные компоненты, входящие в состав того или иного пакета.

**Autodesk AutoCAD**

Основное назначение ППП AutoCAD - создание чертежей и проектной документации. Современные версии этого пакета представляют существенно большие возможности, среди которых построение трехмерных твердотельных моделей, инженерно-технические расчеты и многое другое.

Первые версии системы AutoCAD, разрабатываемой американской фирмой Autodesk, появились еще в начале 80-х годов двадцатого века, и сразу же привлекли к себе внимание своим оригинальным оформлением и удобством для пользователя. Постоянное развитие системы, учет замечаний, интеграция с новыми продуктами других ведущих фирм сделали

AutoCAD мировым лидером на рынке программного обеспечения для автоматизированного проектирования.

***Языковые средства***

В основе языковых средств ППП AutoCAD - технология Visual LISP, базирующаяся на языке AutoLISP (подмножество языка LISP) и используемая для создания приложений и управления в AutoCAD. Visual LISP представляет полное окружение, включающее:

- Интегрированную среду разработки, облегчающую написание, отладку и сопровождение приложений на AutoLISP
- Доступ к объектам ActiveX и обработчикам событий
- Защиту исходного кода
- Доступ к файловым функциям операционной системы
- Расширенные функции языка LISP для обработки списочных структур данных.

Для разработчиков совместимых приложений в AutoCAD включена поддержка ObjectARX. Это программное окружение представляет объектно-ориентированный интерфейс для приложений на языках C++, C# и VB.NET и обеспечивает прямой доступ к структурам БД, графической подсистеме и встроенным командам пакета.

Кроме того, в AutoCAD имеется поддержка языка Visual Basic for Applications (VBA), что позволяет использовать этот пакет совместно с другими приложениями, в частности, из семейства Microsoft Office.

***Предметное обеспечение***

К предметному обеспечению пакета в первую очередь относятся функции построения примитивов - различных элементов чертежа. Простые примитивы - это такие объекты как точка, отрезок, круг (окружность) и т.д. К сложным примитивам относятся: полилиния, мультилиния, мультитекст (многострочный текст), размер, выноска, допуск, штриховка, вхождение блока или внешней ссылки, атрибут, растровое изображение. Кроме того, есть пространственные примитивы, видовые экраны и пр. Операции построения *большей части* примитивов могут быть выполнены через пользовательский интерфейс, *все* - через команды языка.

Высокоуровневые средства представлены расширениями и приложениями AutoCAD для конкретных предметных областей. Например в машиностроении используется Autodesk

Mechanical Desktop - предназначенный для сложного трехмерного моделирования, в том числе валов и пружин. Для проектирования деталей из листовых материалов предназначена система Copra Sheet Metal Bender Desktop (разработчик - Data-M Software GmbH). Моделирование динамики работы механизмов может выполняться в системе Dynamic Designer (Mechanical Dynamics). В числе известных архитектурных и строительных приложений можно отметить системы АРКО (АПИО-Центр), СПДС GraphiCS (Consistent Software), ArchiCAD. Для проектирования промышленных объектов может использоваться система PLANT-4D (CEA Technology). Это лишь некоторые из областей использования AutoCAD.

***Системное обеспечение***

Среди системного обеспечения следует отметить основной формат файлов AutoCAD .dwg, который стал стандартом «де факто» для прочих САПР.

К системному же обеспечению относятся типовые и специализированные библиотеки деталей и шаблонов, использование которых позволяет существенно ускорить процесс проектирования. Здесь же упомянем требования отраслевых и государственных стандартов, которым должны соответствовать чертежи и спецификации.

Конфигурация и настройки различных режимов AutoCAD устанавливаются через т.н. системные переменные. Изменяя их значения можно задавать пути к файлам, точность вычислений, формат вывода и многое другое.

**Adobe Flash**

Adobe (ранее Macromedia) Flash - это технология и инструментарий разработки интерактивного содержания с большими функциональными возможностями для цифровых, веб- и мобильных платформ. Она позволяет создавать компактные, масштабируемые анимированные приложения (ролики), которые можно использовать как отдельно, так и встраивая в различное окружение (в частности, в веб-страницы). Эти возможности обеспечиваются следующими компонентами технологии: языком Action Script, векторным форматом .swf и видеоформатом .flv, всевозможными flash-плейерами для просмотра и редакторами для создания.

Рассмотрим интегрированную среду Adobe Flash как основное средство создания flash-приложений. При этом отметим, что языковые и системные средства относятся не только к этому пакету, а к технологии в целом.

***Язык ActionScript***

ActionScript — объектно-ориентированный язык программирования, который добавляет интерактивность, обработку данных и многое другое в содержимое Flash-приложений. Синтаксис ActionScript основан на спецификации ECMAScript (сюда же относятся языки JavaScript и JScript). Библиотека классов ActionScript, написанная на C++, представляет доступ к графическим примитивам, фильтрам, принтерам, геометрическим функциям и пр.

ActionScript как язык появился с выходом 5 версии Adobe (тогда еще Macromedia) Flash, которая стала первой программируемой на ActionScript средой. Первый релиз языка назывался ActionScript 1.0. Flash 6 (MX). В 2004 году Macromedia представила новую версию ActionScript 2.0 вместе с выходом Flash 7 (MX 2004), в которой было введено строгое определение типов, основанное на классах программирование: наследование, интерфейсы и т. д. Также Macromedia была выпущена модификация языка Flash Lite для программирования под мобильные телефоны. ActionScript 2.0 является не более чем надстройкой над ActionScript 1.0, то есть на этапе компиляции ActionScript 2.0 осуществляет некую проверку и превращает классы, методы ActionScript 2.0 в прежние прототипы и функции ActionScript 1.0.

В 2005 году вышел ActionScript 3.0 в среде программирования Adobe Flex, а позже в Adobe Flash 9.

ActionScript 3.0 (текущая версия на момент подготовки этого материала) представляет, по сравнению с ActionScript 2.0 качественное изменение, он использует новую виртуальную машину AVM 2.0 и дает взамен прежнего формального синтаксиса классов настоящее классовое (class-based) Объектно-ориентированное программирование. ActionScript 3.0 существенно производительней предыдущих версий и по скорости приблизился к таким языкам программирования, как Java и C++.

С помощью ActionScript можно создавать интерактивные мультимедиа-приложения, игры, веб-сайты и многое другое.

***Системное обеспечение***

ActionScript исполняется виртуальной машиной (ActionScript Virtual Machine), которая является составной частью Flash Player. ActionScript компилируется в байткод, который включается в SWF-файл.

SWF-файлы исполняются Flash Player-ом. Flash Player существует в виде плагина к веб-браузеру, а также как самостоятельное исполняемое приложение. Во втором случае возможно создание исполняемых exe-файлов, когда swf-файл включается во Flash Player.

Для создания и просмотра видеофайлов в формате flv используются программные кодеки, поддерживающие этот формат.

***Прикладное обеспечение***

К прикладному обеспечению в рамках технологии Flash относятся средства создания роликов в форматах .swf, .flv и .exe. Основным инструментом является среда среда Adode Flash, включающая различные средства для создания и редактирования мультимедийного содержания, в т.ч. видео- и аудиофайлов, интегрированную среду разработки на ActionScript и множество дополнительных функций упрощения процесса создания роликов.

**Пакет MatLab**

MatLab (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, и язык программирования, используемый в этом пакете. По данным фирмы-разработчика, более 1000000 инженерных и научных работников используют этот пакет, который работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

***Язык MatLab***

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулером (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов. Целью разработки служила задача использования программных математических библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения языка Фортран. Акцент был сделан на матричные алгоритмы.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов — функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы — функции и скрипты, приведенные в вид, удобный для машинного исполнения и, как следствие, более быстрые по сравнению с обычными.

***Системное обеспечение***

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Имеются интерфейсы для получения доступа к внешним данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model (COM) или Dynamic Data Exchange (DDE), а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Для MATLAB имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MATLAB для решения определенного класса задач.

***Прикладное обеспечение***

MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности:

- Матрицы и линейная алгебра — алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и вектора, сингулярности, факторизация матриц и другие.
- Многочлены и интерполяция — корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие.
- Математическая статистика и анализ данных — статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие.

- Обработка данных — набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие.
- Дифференциальные уравнения — решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие.
- Разреженные матрицы — специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях.

В составе пакета имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов, функции для создания алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений.

# ЧАСТЬ II. ППП MS OFFICE

## ТЕМА 2.1 СТРУКТУРА И СОСТАВ MS OFFICE. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### Структура MS Office и назначение компонентов

ППП Microsoft Office - это совокупность программных средств автоматизации офисной деятельности. В состав пакета входит множество приложений, каждое из которых предназначено для выполнения определенных функций и может быть использовано автономно и независимо от остальных. Весь набор офисных приложений можно разделить на *основные* и *дополнительные*.

**Основные компоненты Microsoft Office**

Список и назначение основных компонентов, входящих в состав Microsoft Office приведен в таб. 1.

*Таблица 1. Основные компоненты Microsoft Office*

| Название приложения | Функциональное назначение приложения |
|---|---|
| Microsoft Word | Текстовый процессор |
| Microsoft Excel | Табличный процессор |
| Microsoft PowerPoint | Система подготовки презентаций |
| Outlook | Система управления персональной информацией |

| | |
|---|---|
| Microsoft Access | Система управления базами данных |
| Microsoft Binder | Система управления подшивками |
| Microsoft FrontPage | Система управления Web-узлами |
| Microsoft PhotoDraw | Графический редактор |
| Microsoft Publisher | Настольная издательская система |
| Microsoft Project | Система управления проектами |
| Microsoft Team Manager | Система управления персоналом |

**Дополнительные компоненты MS Office**

Кроме основных компонентов, в семейство Microsoft Office входит большое количество вспомогательных приложений, которые устанавливаются (или не устанавливаются) вместе с основными. Ими можно воспользоваться из основных приложений или вызвать независимо. В таб. 2 перечислены некоторые из вспомогательных приложений.

*Таблица 2. Некоторые вспомогательные приложения Microsoft Office*

| **Название приложения** | **Функциональное назначение приложения** |
|---|---|
| Microsoft Query | Интерпретатор запросов к внешним базам данных |
| Microsoft Organization Chart | Программа рисования блок-схем |
| Microsoft WordArt | Программа создания фигурных текстов |
| Microsoft Equation | Редактор математических формул |
| Microsoft Map | Программа отображения данных на географических картах |
| Microsoft Graph | Программа построения диаграмм |
| Microsoft Photo Editor | Графический редактор |
| Microsoft Draw | Средство рисования |
| Microsoft Find Fast | Служба индексации документов |
| Microsoft Extended Finder | Средство поиска документов в папках файловой системы и электронной почты |
| Microsoft Script Editor | Редактор сценариев |
| Microsoft ClipArt | Коллекция картинок и клипов |

| | |
|---|---|
| Панель Microsoft Office | Средство быстрого доступа к приложениям Office |

Кроме основных и вспомогательных приложений, могут быть установлены и использованы различные расширения (надстройки). Их можно условно разделить на три группы:

1. *Самостоятельные приложения*, разработанные фирмой Microsoft, которые являются компонентами семейства Microsoft Office, но формально не входят в состав пакета. Примерами являются приложения Microsoft Project и Microsoft Team Manager.
2. *Надстройки* над компонентами Microsoft Office, разработанные фирмой Microsoft и представляющие собой дополнительные функции. Как правило, надстройки оформляются не в виде готовых к выполнению программ, а в виде документов специального типа: шаблонов, рабочих книг, библиотек динамической компоновки (DLL) и т.п.
3. *Приложения третьих фирм*, разработанные для пользователей Microsoft Office. В этот класс попадают как продукты сторонних фирм, так и собственные разработки пользователей. Сюда можно отнести средства распознавания текстов (OCR), автоматического перевода текста, средства управления большими массивами документов (перечисленные задачи не реализованы или слабо развиты в самом пакете MS
   Office).

Приведенный перечень основных компонентов носит условный характер, поскольку состав пакета зависит от следующих факторов:

1. *Устанавливаемый комплект (или редакция) пакета*. Пакет выпускается в нескольких редакциях, и состав приложений в разных редакциях различен.
2. *Источник установки. Установка* может быть выполнена с компакт-диска или с сетевого сервера. Наборы файлов, которые устанавливаются на компьютер, существенно различаются.
3. *Операционная система*. Microsoft Office может работать под управлением различных ОС: MS Windows и Mac OS. Эти операционные системы могут иметь разные версии и модификации, что также влияет на состав устанавливаемых компонентов.

4. *Наличие на компьютере в момент установки предшествующих версий*. Некоторые компоненты старых версий автоматически включаются в состав обновляемой версии Microsoft Office (если они уже установлены на компьютере).
5. *Параметры, заданные при установке*. В случае так называемой выборочной (т.е. по выбору пользователя) установки, можно указать несколько десятков независимых параметров, влияющих на состав пакета.

Несмотря на большое число различных приложений в составе пакета, все они в совокупности образуют единое целое. Для каждого из приложений MS Office характерно наличие следующих отличительных признаков:

1. совместимость по данным;
2. унифицированный интерфейс;
3. единые средства программирования.

## Документы Microsoft Office

Единица данных самого верхнего уровня структуризации в Microsoft Office называется **документом**.

Документы классифицируются по типам в зависимости от того, какого сорта информация в них хранится. Как правило, документы разных типов обрабатываются разными приложениями Microsoft Office. Основные типы документов, с которыми работают программы Microsoft Office, перечислены в таб. 3.

*Таблица 3. Основные типы документов Microsoft Office*

| Название | Расширение | Приложение | Краткое описание |
|---|---|---|---|
| Документ | .doc | Word | Основной тип документов Word. Содержит форматированный текст, т.е. текст с дополнительной информацией о шрифтах, отступах, интервалах и т.п., а также рисунки, таблицы и другие элементы |
| Рабочая книга | .xls | Excel | Основной тип документов Excel. Содержит данные различных типов: формулы, диаграммы и макросы |
| База данных | .mdb | Access | Основной тип документов Access. Содержит как собственно базу данных, то есть совокупность таблиц, так и соответствующие запросы, макросы, модули, формы и отчеты |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Презентация | .ppt | PowerPoint | Основной тип документов PowerPoint. Содержит презентацию, состоящую из набора слайдов, заметок выступающего, раздаточных материалов и другой информации |
| Публикация | .pub | Publisher | Основной тип документов Publisher. Как и Word, содержит форматированный текст, рисунки, таблицы и т.п. |
| План проекта | .mpp | Project | Основной тип документов Project. Содержит календарный план проекта, описание задач, ресурсов и их взаимосвязи |

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод: входящие в состав пакета MS Office приложения способны тесно взаимодействовать при решении прикладных задач; они создают единую информационную среду и позволяют обмениваться объектами. Документы Microsoft Office являются частными примерами объектов. Поэтому Microsoft Office является *документо-ориентированным пакетом* (средой).

## Программная среда

Основным средством разработки приложений в MS Office является комплексное решение на основе языка Visual Basic, а именно - Visual Basic for Application (VBA). Эта технология включает макрорекордер, интерпретатор Visual Basic, интегрированную среду разработки с встроенным отладчиком, библиотеки времени выполнения (runtime library) и библиотеки типов, представляющие объекты пакета. Эти средства позволяют расширять функциональность пакета и адаптировать его к решению специализированных задач.

## Интерфейс MS Office

Приложения Microsoft Office имеют унифицированный интерфейс, суть которого заключается в следующем: сходные функции имеют одинаковое обозначение (название команды или значок на кнопке), а несходные функции имеют различные обозначения.

В большей степени унификация коснулась интерфейсов таких приложений, как Microsoft Word, Microsoft Excel и Microsoft PowerPoint.

Одним из достоинств пакета Microsoft Office является последовательное использование графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface, GUI), представляемого операционной системой и различных элементов управления. Как

правило, отдельные элементы группируются в более крупные конструкции, такие как окна, панели инструментов, меню. Рассмотрим характеристику каждой из этих групп.

**Оконный интерфейс**

Оконный интерфейс - такой способ организации пользовательского интерфейса программы, когда каждая интегральная часть располагается в *окне* — собственном субэкранном пространстве, находящемся в произвольном месте «над» основным экраном. Несколько окон одновременно располагающихся на экране могут перекрываться, находясь
«выше» или «ниже» друг относительно друг

В MS Office использует окна четырех типов:

- окно приложения;
- окно документа; • диалоговое окно;
- форма.

**Панели инструментов**

Панели инструментов - это элементы пользовательского интерфейса, на которых могут располагаются такие элементы управления, как кнопки быстрого вызова и раскрывающиеся списки. Панели инструментов разных приложений могут содержать кнопки, сходные по функциям и внешнему виду, что упрощает освоение интерфейса Microsoft Office.

Панели инструментов могут быть:

- пристыкованными вдоль границы окна приложения;
- плавающими, т.е. находится в любой части окна приложения;
- представленными в отдельных окнах; в этом случае форму и размеры панели инструментов можно менять произвольно.

**Меню**

Меню представляет доступ к иерархическим спискам доступных команд. Результатом выбора команды из меню может быть:

- непосредственное выполнение некоторого действия;
- раскрытие еще одного меню;

- раскрытие диалогового окна или формы.

Меню интерфейса Microsoft Office, кроме строки меню любого приложения, можно разделить (по способу перехода к ним) на раскрывающиеся и контекстные (или всплывающие).

**Элементы управления**

*Элементы управления* - это объекты оконного интерфейса, реализующие типовые операции с интерфейсом: щелчок мышью, выбор из списка, выбор вариантов, прокрутка и т.п. К элементам управления относятся следующие: кнопки, текстовые поля (или поля ввода), флажки, переключатели, списки и раскрывающиеся списки, полосы прокрутки, палитры, счетчики и прочие, специфичные для некоторых приложений или условий.

# ТЕМА 2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОФИСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Офисное программирование — это процесс разработки приложений, предназначенных для автоматизации офисной деятельности с использованием специализированных пакетов (MS Office, OpenOffice.org или подобных).

Офисное программирование имеет ряд особенностей, отличающих его от программирования в общем смысле:

- цели разработки;
- область применения;
- макроязык;
- среда разработки;
- поддержка объектно-ориентированного программирования.

Рассмотрим эти особенности на примере MS Office.

## Цели разработки

В офисной среде *программный проект неразрывно связан с документом*, хранится как часть документа и не может существовать независимо от него. *Документ, а не программа, является целью разработки.*

Стандартные возможности среды по работе с документами велики. Однако возможность изменить типовой документ, снабдив его дополнительными функциями – это одна из важнейших задач офисного программирования. Для ее решения офисная среда представляет совокупность библиотек классов, которые составляют каркас (Framework)

текстовых документов, электронных таблиц, презентаций, баз данных и приложений на основе этих документов. Всякий раз, когда создается новый документ, его каркас составляют объекты библиотек, заданные по умолчанию. Этот каркас можно существенно изменить, добавив в документ новые свойства. Расширение каркаса не требует от программиста значительных усилий – достаточно включить в него необходимые библиотеки классов.

## Область применения

Область применения офисного программирования широка – от настройки отдельных документов до решения задач автоматизации офисной деятельности масштаба предприятия, в т.ч. ориентированных на совместную работу в глобальной сети.

## Visual Basic for Application

*Visual Basic для приложений (Visual Basic for Application, VBA)* – это инструмент разработки приложений, который позволяет создавать программные продукты, решающие практически все задачи, встречающиеся в среде Windows. Эти продукты можно использовать, например, для оформления документов (подготовки текстов) или анализа данных таблиц (электронных таблиц). VBA – уникальное приложение, поскольку оно встраивается в другое приложение и расширяет его функциональные возможности.

Visual Basic for Application (VBA) - стандартный макроязык пакета Microsoft Office, предназначенный для расширения функциональных возможностей приложения в котором используется.

С помощью VBA можно:

- создать собственное диалоговое окно и придать ему требуемый внешний вид;
- создать макросы, расширяющие функциональные возможности приложения, в которое встроен VBA;
- изменить меню приложения Microsoft Office;
- управлять другим приложением Microsoft Office или принадлежащими ему данными;
- объединить данные из нескольких приложений Microsoft Office в одном документе;
- автоматически создавать или изменять страницы Web, совместно используя приложения Microsoft Office и VBA.

Для разработчика доступны следующие инструменты и средства, которые используются при создании проекта VBA:

- отладка приложений без предварительной компиляции;
- средства Win32 API;
- SQL и объекты доступа к данным для управления данными и извлечения их из внешних источников данных, таких как Microsoft SQL Server;
- построение и проверка элементов интерфейса непосредственно в среде разработки VBA (Integrated Development Environment, IDE);
- связывание программ и процедур с событиями, которые возникают в приложениях VBA.

## Среда разработки

Среда приложений Office ориентирована в первую очередь на пользователей, а не на программистов и в ней можно создавать документы без всякого программирования. Поэтому программист обычно начинает работать с документами не на пустом месте, а с их заготовками, созданными пользователями, т.е. и сам программист может выступать в роли пользователя. Средства совместной работы над документами Office обеспечивают одновременную работу программистов и пользователей.

Среда MS Office предлагает два способа создания программ, отличающихся подходом к процессу: использование макрорекордера и ручное кодирование (на языке VBA). Эти подходы ориентированы на разные категории: непосредственно пользователей и программистов соответственно.

*Макрорекордер (MacroRecorder)* – это программный инструмент, записывающий действия пользователя при работе с документами и приложениями, с сохранением записи в виде макроса -исходного кода на языке VBA. При вызове сохраненного макроса воспроизводится вся сохраненная последовательность действий.

Макрорекордер представляет возможность создания программного проекта или, по крайней мере, его отдельных компонентов автоматически, без программирования. Для записи и воспроизведения макроса не требуется специальных знаний, поэтому пользователь может самостоятельно создавать программы (макросы), в общем случае даже не представляя себе, как они работают.

Для программиста макрорекордер полезен тем, что позволяет создавать фрагменты программы автоматически, тем самым увеличивая скорость разработки и уменьшая время отладки.

*Интегрированная среда разработки* на VBA (Visual Basic Environment, VBA) - встроенное в MS Office средство для написания, тестирования и отладки приложений на VBA. Среда VBA представляет все возможности для создания законченных офисных приложений, включая средства визуального проектирования пользовательского интерфейса. VBA ориентирована на использование программистами для разработки офисных приложений (это отнюдь не означает, что пользователи не могут применять VBA).

## Поддержка ООП

Разработка приложений для MS Office тесно связана с парадигмой объектно-ориентированного программирования. Все документы (более того, сами компоненты пакета) в MS Office - суть объекты, наделенные собственными наборами свойств (характеристик объекта), методов (подпрограмм управления свойствами) и событий (подпрограмм, обрабатывающих изменения состояния объекта в результате некоторых действий). Соответственно, для обеспечения более полной интеграции с пакетом, входной язык (VBA) также поддерживает ООП.

Все объекты приложения MS Office образуют иерархическую структуру, которая определяет связь между ними и способ доступа. Такая структура называется объектной моделью (object model). За рамки объектной модели выходят, но также могут использоваться в офисных приложениях, внешние объекты, поддерживающие технологии DDE, OLE/ActiveX и ряд других.

В объектно-ориентированную концепцию удачно вписывается технология *визуального программирования*. Все отображаемые элементы графического интерфейса, такие как формы, элементы управления, меню и панели инструментов являются объектами, наделенными набором свойств и методов и способными реагировать на события (например, щелчки мыши, нажатия клавиш и т.п.). При визуальном подходе не требуется программного задания (хотя это и возможно) их основных свойств (например, ширина или высота, цвет фона и т.п.). Эти свойства можно задать при помощи мыши (например, ширину и высоту формы путем операции "перетаскивания" маркеров) или

установить их в окне свойств (название формы, цвет фона формы и т. д.). Таким образом, визуальное программирование делает проектирование интерфейса программы более наглядным и быстрым. При этом сохраняется возможность управлять всеми объектами и программно.

## Преимущества офисного программирования

Преимущества, которые получает конечный пользователь, использующий программируемые офисные документы:

- Пользователь получает документы, обладающие новыми функциями и способные решать задачи, характерные для проблемной области пользователя.
- Пользователь находится в единой офисной среде независимо от того, с каким документом он работает в данный момент и какой программист разрабатывал этот документ.
- Большинство доступных при работе с документами функций являются общими для всех документов, поскольку их предоставляет сама офисная среда. Единый стиль интерфейса разных документов облегчает работу с ними.
- Пользователь сам, не будучи программистом, способен создавать простые виды программируемых офисных документов, постепенно совершенствуясь в этой деятельности.

Преимущества, которые получает программист, работающий в Office:

- В распоряжении программиста находится мощная интегрированная среда. Для него эта среда представлена в виде совокупности хорошо организованных объектов, доступных в языке программирования и по принципу работы ничем не отличающихся от встроенных объектов языка или объектов, создаваемых самим программистом.
- Большинство повседневных задач становятся для него простыми, – чтобы их решить, зачастую достаточно стандартных средств.
- Там, где стандартных средств не хватает, где у документа должны появиться новые функциональные возможности, где необходимо создать документ по заказу, вступает в силу язык программирования – VBA, существенная особенность которого – возможность работы с объектами любого из приложений Office.

- Офисное программирование позволяет применять на практике идеи компонентного программирования. Компонентный подход предполагает взаимодействие компонентов, создаваемых в разных программных средах, на разных языках, на разных платформах и находящихся на разных машинах. Работа с компонентами (DLL, ActiveX, AddIns, ComAddIns) является неотъемлемой частью офисного программирования.

# ТЕМА 2.3 МАКРОСЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАКРОРЕКОРДЕРА

## Макросы

Независимо от используемых операционной системы и программных приложений MS Office пользователь часто выполняет одни и те же последовательности команд для многих рутинных задач. Вместо повторения последовательности команд каждый раз, когда необходимо выполнить какую-либо задачу, можно создать макрос (macro), который вместо пользователя будет выполнять эту последовательность. Термин macro произошел от греческого слова, означающего расширенный или растянутый.

**Макрос** – это программа (в контексте офисного программирования - созданная автоматически), состоящая из списка команд, которые должны быть выполнены приложением.

Основными преимуществами использования макросов являются:

- повышение точности и скорости работы, поскольку компьютеры лучше приспособлены для выполнения повторяющихся задач, чем человек;
- при выполнении макросов обычно нет необходимости в присутствии человека-оператора; в случае, если макрос очень длинный и выполняет операции, требующие значительного времени (например, поиск в базе данных и сортировка), пользователь может переключиться на другое приложение.

Макрос служит для объединения нескольких различных действий в одну процедуру, которую можно легко вызвать. Этот список команд состоит в основном из макрокоманд, которые тесно связаны с приложением, в котором создается макрос – т.е. с командами Word, Excel или других приложений Microsoft Office.

Можно выделить *три основные разновидности макросов*:

1. *Командные макросы* – это наиболее распространенные макросы, обычно состоящие из операторов, эквивалентным тем или иным командам меню или параметрам диалоговых окон. Основным предназначением такого макроса является выполнение действий, аналогичных командам меню – т.е. изменение окружения и основных объектов приложения.
2. *Пользовательские функции* – работают аналогично встроенным функциям приложения. Отличие этих функций от командных макросов состоит в том, что они используют значения передаваемых им аргументов, производят некоторые вычисления и возвращают результат в точку вызова, но не изменяют среды приложения.
3. *Макрофункции* – представляют сочетание командных макросов и пользовательских функций. Они могут использовать аргументы и возвращать результат, подобно пользовательским функциям, а также могут изменять среду приложения, как и командные макросы. Чаще всего эти макросы вызываются из других макросов, и активно используются для модульного программирования.

Поддержка макросов позволяет порой обойтись вообще безо всякого программирования: достаточно включить автоматическую запись выполняемых пользователем действий и в результате получить готовый макрос, а затем назначить ему кнопку на панели инструментов или новую команду меню, которые будут использоваться для вызова. Простые макросы удается создавать, не написав вручную ни одной строки программного кода.

Для разработки же серьезных приложений приходится программировать.

Таким образом, различают 2 способа разработки макроса:

- автоматическое создание, с использованием макрорекордера;
- написание макроса "с нуля", используя язык программирования VBA.

Отметим, что возможен и комбинированный подход: фрагменты будущей программы записываются автоматически, а затем они корректируются и дополняются "рукописным" кодом.

Для записи макросов из приложений Microsoft Office используется **макрорекордер**. Это встроенный инструмент, который фиксирует все действия пользователя, включая ошибки и неправильные запуски. При выполнении макроса интерпретируется каждая

записанная макрорекордером команда точно в такой последовательности, в которой пользователь выполнял их во время записи.

Для **записи макроса** в приложении Microsoft Office можно использовать меню "Сервис/Макрос/Начать запись" или выбрать кнопку "Записать макрос" на панели инструментов Visual Basic. До начала записи нужно указать имя макроса и определить, где он будет храниться и как будет доступен. Затем выполнить действия, которые требуется сохранить в макросе. Для завершения записи нужно на панели инструментов "Остановка записи" щелкнуть кнопку "Остановить запись".

Для **выполнения макроса** необходимо:

1. Установить курсор в место вставки выполнения макроса.
2. Выбрать пункт меню "Сервис/Макрос/Макросы".
3. В появившемся диалоговом окне "Макрос" выбрать имя нужного макроса и выбрать "Выполнить".

Чтобы **просмотреть код** записанного макроса, надо выбрать меню "Сервис/Макрос/Макросы". В появившемся диалоговом окне выбрать имя нужного макроса и щелкнуть кнопку "Изменить". Исходный код указанного макроса будет загружен в окно редактора Visual Basic.

## Структура записанного макроса

Макросы, создаваемые макрорекордером MS Office, сохраняются в специальной части файла данных, называемой *модулем*. Модуль VBA содержит исходный код программы на языке VBA. Фактически макрос является подпрограммой (а точнее, процедурой) VBA. Записанный макрос имеет строго определенную структуру. Ниже представлен исходный код простого макроса, созданного в Microsoft Word.

**Листинг 1. Пример макроса**

```
Sub Hello()
' Макрос изменяет размер, начертание шрифта, выравнивание абзаца и
' выводит надпись в активный документ MS Word
'
    Selection.Font.Size = 24
    Selection.Font.Bold = wdToggle
    Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter
```

```
    Selection.TypeText Text:="Hello, World!"
End Sub
```

В общем виде структуру кода макроса можно представить следующим образом[2]:

```
Sub имяМакроса ()
' текст комментария
    Оператор1
    Оператор2 ...
    ОператорN
End Sub
```

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub, за которым следует имя макроса. Строку, содержащую ключевое слово Sub и имя макроса, называют *строкой объявления (declaration)* макроса. За именем макроса всегда следуют пустые круглые скобки (т.к. макрос является процедурой VBA без параметров).

За строкой объявления макроса следуют строки комментариев. *Комментарий (comment)* – это строка в макросе VBA, которая не содержит инструкций, являющихся частью этого макроса. Каждая строка комментария начинается с символа апострофа ( ' ). Комментарии содержат имя макроса и текст, который был введен пользователем в текстовое поле "Описание" ("Description") диалогового окна "Запись макроса" ("Record Macro") в момент записи этого макроса.

Сразу за объявлением макроса следует *тело макроса (body)*. Каждая строка в теле макроса состоит из одного или более операторов VBA. *Оператор VBA (statement)* – это последовательность ключевых слов и других символов, которые вместе составляют одну полную инструкцию для VBA. Макрос VBA состоит из одного или нескольких операторов.

Конец макроса выделяется ключевой строкой End Sub, завершающей тело макроса.

# ТЕМА 2.4 СРЕДА РАЗРАБОТКИ VBA

Visual Basic for Application (VBA) – это система программирования, которая используется как единое средство программирования во всех приложениях Microsoft

[2] Локализованные версии пакета MS Office позволяют использовать в макросах символы национальных алфавитов (например, в идентификаторах). Однако не следует пользоваться этой сомнительной возможностью во избежании сложностей с отладкой и портированием приложений на VBA.

Office. Всякая система программирования включает в себя, по меньшей мере, три составные части:

1. Язык (или языки) программирования.
2. Среду разработки, т.е. набор инструментов для написания программ, редактирования, отладки и т.п.
3. Библиотеку (или библиотеки) стандартных программ, т.е. набор готовых программ (процедур, функций, объектов и т.д.), которые можно использовать как готовые элементы при построении новых программ.

Для создания офисных приложений в MS Office имеется *интегрированная среда разработки* (Integrated Development Environment, *IDE*) с унифицированным интерфейсом. VBA IDE – это набор инструментов разработки программного обеспечения, таких как редактор Visual Basic (Visual Basic Editor, VBA), средства отладки, средства управления проектом и т.д.

Вызов VBA IDE из любого приложения выполняется через комбинацию клавиш Alt+F11 или меню "Сервис/Макрос/Редактор Visual Basic".

## Структура VBA

VBA – это стандартное интерфейсное окно, содержащее меню, панели инструментов, другие окна и элементы, которые применяются при создании проектов VBA. Общий вид окна редактора Visual Basic представлен на рис. 3.

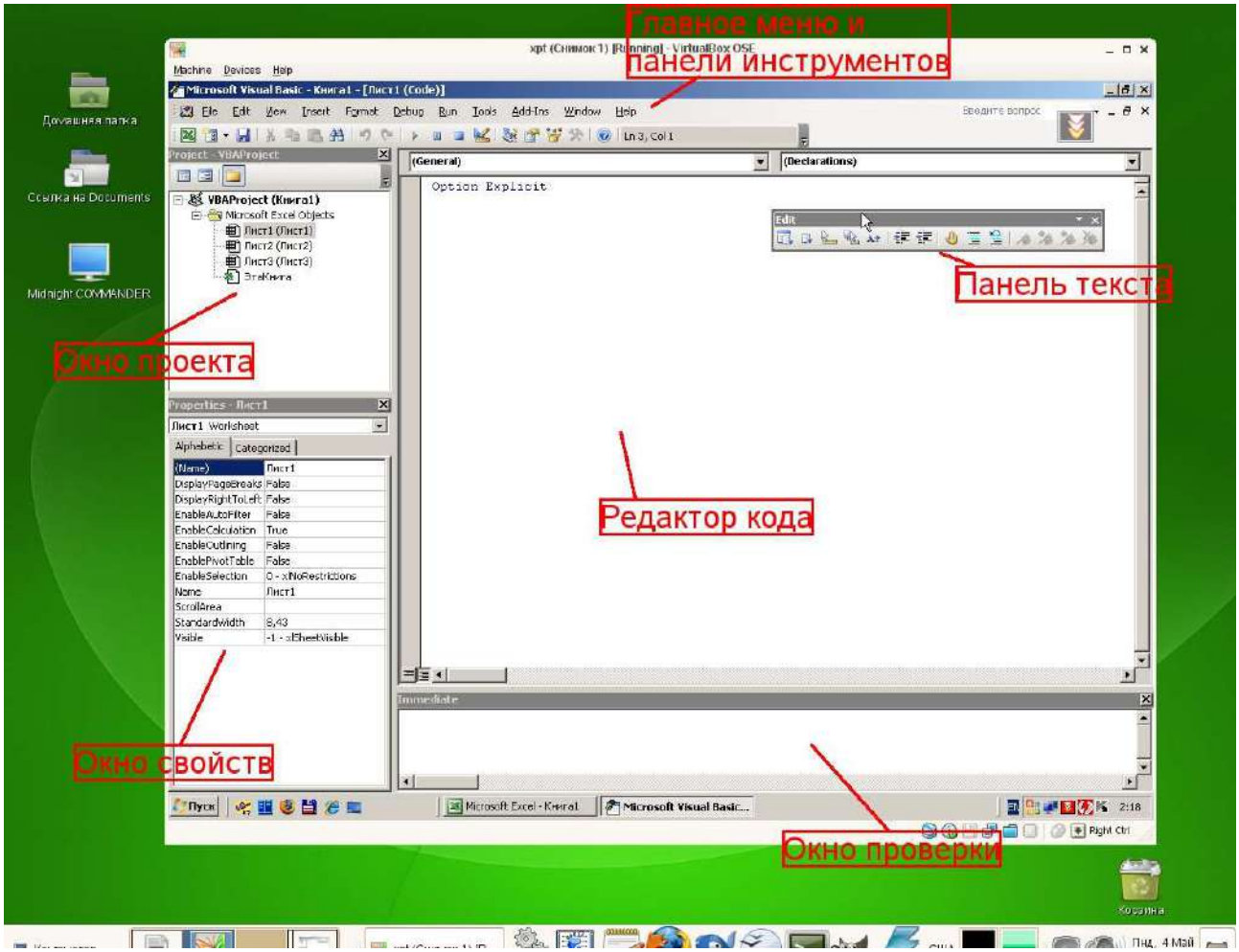



*Рисунок 3. Окно редактора Visual Basic*

Основными (открывающимися по умолчанию) являются три окна: окно проекта, окно свойств и окно редактирования кода. Краткое описание этих и некоторых других компонентов VBA приведено в таб. 4. Все они доступны через команды, представленные в меню "Вид".

*Таблица 4. Назначение компонентов VBA*

| **Наименование окна** | **Описание** |
|---|---|
| Project (Проект) | Предназначено для отображения всех открытых проектов, а также их составляющих: модулей, форм и ссылок на другие проекты |
| Toolbox (Панель элементов) | Содержит элементы управления для конструирования форм |
| UserForm | Используется для создания форм путем размещения на них элементов |

| Наименование окна | Описание |
|---|---|
| | управления |
| Code (Программа) | Предназначено для просмотра, написания и редактирования программы на языке VBA. Поскольку среда разработки является многооконной, то для каждого модуля проекта можно открыть отдельное окно |
| Properties (Свойства) | Отображает свойства выделенных объектов. В этом окне можно задавать новые значения свойств формы и элементов управления |
| Object Browser (Просмотр объектов) | Отображает классы, свойства, методы, события и константы различных библиотек объектов. Используется для быстрого получения информации об объектах |
| Immediate (Проверка) | Предназначено для быстрого выполнения вводимых в него инструкций. В данном окне также выводятся результаты выполнения вводимых инструкций |
| Locals (Локальные переменные) | Автоматически показывает все переменные данной процедуры |
| Watches (Контрольные значения) | Применяется при отладке программ для просмотра значений выражений |

## Характеристики компонентов VBA

**Окно проекта (Project)**

**Проект** – это совокупность всех программных модулей, связанных с документом Microsoft Office. Окно *Project (Проект)* предназначено для быстрого получения информации о различных составляющих проекта.

Проект может содержать модули следующих видов:

- *Объекты основного приложения*. Проекты VBA выполняются совместно с другими приложениями. Приложение, в котором разрабатывается и выполняется проект VBA, называется основным.
- *Модули форм*. В VBA имеется возможность создавать пользовательские формы, предназначенные для ввода или вывода данных, а также процедуры обработки событий, возникающие в этих формах.

- *Модули кода*. Модульность - один из основных принципов парадигмы структурного программирования. Каждый модуль, как правило, содержит подпрограммы, сход-

  ные по назначению. Небольшие модули проще отлаживать и использовать повторно. В частности, в VBA имеются средства импорта/экспорта готового кода.
- *Модули классов*. VBA позволяет создавать и использовать собственные объекты. Описание объектов включается в модули класса. Каждый модуль класса содержит полную информацию об одном типе объекта.

С помощью окна проекта можно добавить или удалить какой-либо объект из проекта. Модули кода добавляются в проект командой "Вставить/Модуль". Формы создаются командой "Вставить/UserForm", а модули класса командой "Вставить/Модуль класса".

Окно проекта можно использовать также для быстрой навигации по формам проекта и программному коду. Для этого необходимо выбрать в контекстном меню соответственно команды "Объект" или "Программа".

**Окно свойств (Properties)**

Список свойств выделенного объекта выводится в окне Properties (Свойства). Для того чтобы выделить объект, необходимо с помощью окна проекта выбрать форму и перейти в режим конструктора, используя команду "View Object". Свойства объекта можно упорядочить в алфавитном порядке (Alphabetic (По алфавиту)) или по категориям (Categorized (По категориям)), выбрав соответствующую вкладку. Предусмотрена также возможность получения быстрой справки по какому-либо свойству объекта. Для этого достаточно установить курсор на нужное свойство и нажать клавишу F1.

**Окно просмотра объектов(Object Browser)**

Окно Object Browser (Просмотр объектов) предназначено для просмотра объектов, доступных при создании программы. Точнее, в этом окне отображаются не сами объекты, а структура соответствующего класса объектов. Окно просмотра объектов может использоваться для поиска метода или свойства объекта.

**Окно Code (Окно редактирования кода)**

Окно Code (Программа) представляет собой текстовый редактор, предназначенный для написания и редактирования кода процедур приложения. Это окно появляется на экране, например, при создании нового модуля. Код внутри модуля организован в виде отдельных разделов для каждого объекта, программируемого в модуле. Переключение между разделами выполняется путем выбора значений из списка "Object" ("Объект"), который находится в левом верхнем углу окна. Каждый раздел может содержать несколько процедур, которые можно выбрать из списка "Procedure" ("Процедура") в правом верхнем углу.

*Интеллектуальные возможности редактора кода:*

1. При написании кода пользователю предлагается список компонентов, логически завершающих вводимую пользователем инструкцию.
2. На экране автоматически отображаются сведения о процедурах, функциях, свойствах и методах после набора их имени.
3. Автоматически проверяется синтаксис набранной строки кода сразу после нажатия клавиши Enter. В результате проверки выполняется выделение определенных фрагментов текста:
   - красным цветом – синтаксические ошибки; • синим цветом – зарезервированные ключевые слова;
   - зеленым цветом – комментарии.
4. Если курсор расположить на ключевом слове VBA, имени процедуры, функции, свойства или метода и нажать клавишу F1, то на экране появится окно со справочной информацией об этой функции.

**Окно редактирования форм (UserForm)**

Для создания диалоговых окон, разрабатываемых приложений VBA, используются формы. Редактор форм является одним из основных средств визуального программирования. При добавлении формы в проект (команда "Insert" – "UserForm" ("Вставить" – "UserForm")) на экран выводится незаполненная форма с панелью инструментов Toolbox (Панель элементов).

Используя панель инструментов Toolbox (Панель элементов) из незаполненной формы конструируется требуемое для приложения диалоговое окно. Размеры формы и

размещаемых на ней элементов управления можно изменять. Также окно редактирования форм поддерживает операции буфера обмена. Кроме того, команды меню "Format" ("Формат") автоматизируют и облегчают процесс выравнивания элементов управления как по их взаимному местоположению, так и по размерам.

**Окна отладочной информации**

*Окно Immediate (Проверка)* позволяет ввести инструкцию и выполнить ее. При этом инструкция должна быть записана в одну строку, директивы которой будут выполнены после нажатия клавиши Enter. Данное окно можно использовать для быстрой проверки действий, выполняемой той или иной инструкцией. Это позволяет не запускать всю процедуру, что удобно при отладке программ.

*Окно Locals (Локальные переменные)* автоматически отображает все объявленные переменные текущей процедуры и их значения.

*Окно Watches (Контрольные значения)* применяется при отладке программ для просмотра значений выражений.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА

Специальность
***21. 05.04 Горное дело***

Направленность (профиль)
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Автор: Потапов В.В., доцент, к.т.н. Гусманов Ф.Ф., доцент, к.т.н.

| | |
|---|---|
| Одобрены на заседании кафедры | Рассмотрены методической комиссией факультета |
| Горного дела | горно-механического |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Валиев Н.Г. | Осипов П.С. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 09.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Горно-механического факультета

**Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Основы горного дела»**

Методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 21.05.04 Горное дело как руководство для организации самостоятельной работы при выполнении практических работ, подготовки и написании рефератов, по изучению теоретических основ дисциплин, аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы.

Составлено в соответствие с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по специальности 21.05.04 Горное дело.

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ……4

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ……..…….6

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ……..…8

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ…… 12

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ
…….....13

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ……...……..14

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ……..16

# ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении - это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знании должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;
- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны - это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе лекций, практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа - лекционные, практические занятия;

2. внеаудиторная самостоятельная работа – дополнение лекционных материалов, подготовка к практическим занятиям, подготовка к участию в деловых играх и дискуссиях, выполнение письменных домашних заданий, Контрольных работ (рефератов и т.п.) и курсовых работ (проектов), докладов и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «*Основы горного дела*» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к сдаче *зачета (экзамена)*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Основы горного дела*» являются:

- повторение материала лекций;

- самостоятельное изучение тем курса (в т.ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);

- ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля);

- подготовка к практическим (семинарским) занятиям;

-подготовка к выполнению практико-ориентированного задания;

- подготовка к тестированию;

- подготовка к зачету (экзамену).

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

**Основные элементы горнопромышленного комплекса**

1.Как классифицируются горные породы по происхождению?

2.Поясните термины: полезное ископаемое, пустая порода, месторождение полезного ископаемого.

3.Дайте определение и нарисуйте следующие формы залегания полезных ископаемых: пласт, жила, линза, шток, гнезда.

4.Дайте определение и нарисуйте следующие виды геологических нарушений: складчатость, сброс, взброс.

5.Поясните элементы залегания пластов.

6.Поясните классификацию угольных пластов по мощности и углу падения.

7.Дайте определение запасам: геологическим, балансовым, промышленным.

8.Как определяются коэффициенты потерь и извлечения?

9.Назовите стадии разработки месторождений полезных ископаемых.

10.Назовите виды горнодобывающих предприятий и дайте им характеристику.

11.Назовите наиболее важные процессы по обеспечению добычи полезных ископаемых подземным способом.

12.Назовите достоинства и недостатки открытых горных работ.

**Технология проведение горных выработок**

1.Поясните расчет нагрузки на крепь горной выработки на основе гипотезы М.М. Протодьяконова.

2.Как проявляется горное давление в горных выработках?

3.Из каких материалов изготавливают крепи для горных выработок?

4.Какие требования предъявляются к крепям горных выработок?

5.Нарисуйте конструкцию деревянной крепи горной выработки.

6.Нарисуйте конструкцию металлической трехзвенной арочной крепи из спецпрофиля.

7.Поясните принцип работы анкерной крепи.

8.Как определяются размеры поперечного сечения подготовительной выработки?

9. Назовите величины регламентированных "Правилами безопасности" минимальных площадей поперечного сечения горных выработок.

10.Поясните основные виды врубов при взрывном способе проходки выработок.

11.Какие основные правила безопасности необходимо соблюдать при ведении буровзрывных работ в проходческом забое?

12.Какие средства механизации применяются для погрузки отбитой породы?

13.Поясните комбайновый способ проведения горных выработок.

14.Поясните особенности проведения наклонных горных выработок.

15.Что такое технологический паспорт проведения горной выработки?

**Подземная разработки рудных месторождений**

1.Дайте определение руде, рудной массе, понятии «разубоживание»

2.Поясните основные особенности разработки рудных месторождений.

3.Поясните основные способы и схемы вскрытия рудников.

4.Назовите и охарактеризуйте основные способы отбойки руды.

5.Поясните основные способы управления кровлей при разработке руд.

6.Назовите основные системы разработки рудных тел и поясните их сущность.

7. Назовите классы систем разработки рудных месторождений.

8. Назовите основные производственные процессы очистной выемки.

9. Порядок вскрытия этажей. Достоинства и недостатки вскрытия концентрационными квершлагами.

10. Приведите классификацию рудных месторождений по мощности рудного тела.

11. Выбор системы разработки. Факторы, влияющие на выбор системы разработки.

12. Состав производственных процессов и их взаимосвязь.

13. Порядок и способы очистной выемки в этаже

**Подземная разработка пластовых месторождений**

1.Назовите основные стадии разработки месторождений полезных ископаемых.

2.Поясните деление шахтного поля на этажи, панели, блоки.

3.Поясните основные способы вскрытия шахтных полей.

4.Назовите основные схемы вскрытия шахтных полей и поясните условия их применения.

5.Поясните индивидуальную и групповую подготовку пластов.

6.Поясните назначение и основные камеры околоствольных дворов.

7.Что включает в себя технологический комплекс поверхности шахты?

8.Назовите процессы и технологические схемы механизированной выемки угля.

9.Дайте общую характеристику современным угольным комбайнам.

10.Поясните общее устройство механизированной крепи.

11.Что входит в состав очистного механизированного комплекса?

12.Как классифицируются породы кровли угольных пластов?

13.Что такое горное давление и как оно проявляется в очистном забое?

14.Поясните сущность и способы управления горным давлением.

15.Какие рабочие процессы входят в состав выемочного цикла в очистном забое и в какой последовательности они выполняются?

16.Что такое система разработки.

17.Нарисуйте и объясните систему разработки длинными столбами по простиранию при панельной подготовке пласта.

**Открытая разработка месторождений полезных ископаемых**

1. Какой тип полезного ископаемого добывают на разрезах?
2. Какая технология открытых горных работ характеризуется ритмичностью чередования рабочих и холостых ходов производственных процессов?
3. Какие способы механического бурения горных пород применяются на карьерах?
4. От чего зависит угол откоса рабочего борта карьера?
5. В чем заключаются основные принципы комплексной механизации открытых горных работ?
6. Дайте определение термина «Коэффициент вскрыши»?
7. Какой вид транспорта наиболее эффективен при строительстве карьеров, при разработке залежей сложных форм и малых размерах карьерных полей?
8. Какие виды уступов в карьере вы знаете?
9. Дайте определение уступа, борта карьера , рабочей площадки?
10. Для какого вида бурения необходим пневмоударник?
11. Как вы считаете от чего зависит высота уступа в карьере?
12. Что, называется рабочим бортом карьера, что не рабочим?
13. При какой технологии открытых горных работ все производственные процессы выполняются непрерывно?
14. Какие виды «мехлопат» вы знаете?
15. От чего зависит угол откоса нерабочего борта карьера?
16. Какие экскаваторы обозначаются аббревиатурой ЭКГ?

## САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

• составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;

• перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамками официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);

• обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);

• определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;

• при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;

• все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);

• если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;

• следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьёзный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе –

поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности

написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

## ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

## ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными задания понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;

- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;

- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;

- обучение приемам решения практических задач;

- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;

- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;

- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;

2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;

3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариан-

тов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

## ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответна имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

## ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *экзамену (тестированию)* по дисциплине «*Основы горного дела*» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «*Основы горного дела*».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *экзамене* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *экзамене* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *экзамену* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.




**Министерство образования и науки**
**Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное**
**образовательное учреждение**
**высшего образования**
**«Уральский государственный горный университет»**

**Е. Ф. Цыпин**
**Е. А. Бекчурина**
**И. Х. Хамидулин**

# ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***Учебно-методическое пособие***
**по выполнению практических работ**
**для студентов специальности 21.05.04 Горное дело**
**всех форм обучения**

**Екатеринбург – 2019**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета
«____» _____ 2019 г.
Председатель комиссии

_____ проф. В. П. Барановский

Е. Ф. Цыпин
Е. А. Бекчурина
И. Х. Хамидулин

# ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических работ
для студентов
направления 21.05.04 – «Горное дело»
всех форм обучения

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**ВВЕДЕНИЕ** ..... 4
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1**. ДРОБЛЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 5
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2**. ГРОХОЧЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 7
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3**. СИТОВЫЙ АНАЛИЗ МЕЛКИХ ПРОДУКТОВ ..... 8
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4**. ОБОГАЩЕНИЕ В ПОРШНЕВОЙ ОТСАДОЧНОЙ МАШИНЕ ..... 12
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5**. ОБОГАЩЕНИЕ НА СОТРЯСАТЕЛЬНОМ КОНЦЕНТРАЦИОННОМ СТОЛЕ ..... 16
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6**. ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УГЛЯ ..... 19
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7**. КОЛЛЕКТИВНАЯ ФЛОТАЦИЯ СУЛЬФИДНОЙ РУДЫ ..... 21
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8**. МАГНИТНАЯ СЕПАРАЦИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 26
**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК** ..... 29
**ПРИЛОЖЕНИЕ А** ..... 30
**ПРИЛОЖЕНИЕ Б** ..... 31

## ВВЕДЕНИЕ

Цель практических занятий – развитие навыков проведения лабораторных опытов и помощь в закреплении теоретических знаний по дисциплине.

Практические работы выполняются побригадно, а отчёт по работе каждый студент составляет самостоятельно. Отчёт по работе должен содержать изложение последовательности выполнения работы с необходимыми расчётами (таблица 1.1), схемой подготовки проб, схемой устройства для проведения опытов, эскизами основных узлов, таблицами результатов опытов, графиками, математическими зависимостями и выводами по проделанной работе.

Таблица 1.1 – Расчётные выражения для определения показателей обогащения

| № п/п | Показатель | Расчётные выражения | |
|---|---|---|---|
| | | **два продукта разделения** | ***n* продуктов разделения** |
| 1 | Баланс по материалу | $Q = C + T$<br>$100 = \gamma_{к} + \gamma_{х}$ | $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$<br>$100 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ |
| 2 | Баланс по ценному компоненту | $Q \cdot \alpha = C \cdot \beta + T \cdot \vartheta$<br>$100 \cdot \alpha = \gamma_{к} \cdot \beta + \gamma_{х} \cdot \vartheta$<br>$100 = \varepsilon_{к} + \varepsilon_{х}$ | $100 \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \beta_i$ |
| 3 | Массовая доля ценного компонента | $\alpha = (P_{\alpha} / Q) \cdot 100,\ \%$<br>$\beta = (P_{\beta} / \tilde{N}) \cdot 100,\ \%$<br>$\vartheta = (P_{\vartheta} / T) \cdot 100,\ \%$ | $\beta_i = \frac{P_i}{Q_i} \cdot 100,\ \%$ |
| 4 | Выход продукта | $\gamma_{к} = (C/Q) \cdot 100 = \frac{(\alpha - \vartheta)}{(\beta - \vartheta)} \cdot 100,\ \%$<br>$\gamma_{х} = (T/Q) \cdot 100 = \frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \vartheta)} \cdot 100,\ \%$ | $\gamma_i = \frac{Q_i}{Q} \cdot 100,\ \%$ |
| 5 | Извлечение ценного компонента в продукт | $\varepsilon_{к} = \frac{C \cdot \beta}{Q \cdot \alpha} \cdot 100 = \frac{(\alpha - \vartheta) \cdot \beta}{(\beta - \vartheta) \cdot \alpha} \cdot 100,\ \%$<br>$\varepsilon_{х} = \frac{T \cdot \vartheta}{Q \cdot \alpha} \cdot 100 = \frac{(\beta - \alpha) \cdot \vartheta}{(\beta - \vartheta) \cdot \alpha} \cdot 100,\ \%$ | $\varepsilon_i = \gamma_i \cdot \frac{\beta_i}{\alpha}$ |

где $Q$, $C$, $T$ – массы исходного материала, концентрата и хвостов, соответственно; $\gamma_к$; $\gamma_х$ – выход концентрата и хвостов, соответственно; $\alpha$, $\beta$, $\vartheta$ – массовые доли компонента соответственно в исходном материале, в кон-

центрате, хвостах; $Q_i$, $\gamma_i$, – масса и выход $i$-ого продукта; $P_\alpha$, $P_\beta$, $P_\vartheta$, $P_i$ – масса ценного компонента в исходном материале, концентрате, хвостах, в $i$-ом продукте разделения; $\varepsilon_к$, $\varepsilon_х$ – извлечение ценного компонента в концентрат и в хвосты, соответственно.

На титульном листе отчёта должны быть указаны название работы, шифр группы, фамилия исполнителя. Отчёт должен быть подписан студентом.

Защиту отчёта проводят после его проверки преподавателем. При защите необходимо знать цель работы, устройство и назначение применяемых аппаратов, способы управления и органы управления, методику проведения работы, формулы (таблица 1.1), использованные для расчётов, а также уметь объяснять полученные результаты и закономерности.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1
## ДРОБЛЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***1. Цель:***

- изучить конструкции щековой и валковой дробилок;
- изучить способ дробления исходного продукта;
- определить степень дробления;
- определить фактическую производительность щековой и валковой дробилок.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала (крупность 150-0 мм);
- дробилка щековая;
- дробилка валковая;
- секундомер;
- набор стандартных лабораторных сит;
- линейка с делениями (штангенциркуль);
- весы;
- совки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу материала.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию дробилки и определить конструктивные и механические параметры.
4. Определить средний максимальный кусок до дробления.
5. Соблюдая меры предосторожности, пропустить пробу через ще-

ковую дробилку. При этом зафиксировать продолжительность цикла дробления.

6. Определить средний максимальный кусок после дробления.
7. Соблюдая меры предосторожности, пропустить пробу через валковую дробилку. При этом зафиксировать продолжительность цикла дробления.
8. Определить средний максимальный кусок после дробления.
9. Убрать рабочее место в лаборатории.
10. Обработать результаты работы.
11. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 1***

Для определения среднего максимального куска руды, как до, так и после дробления, отбирают 3 максимальных куска (визуально) и производят замер каждого из них в трёх направлениях. Для удобства рекомендуется использовать ёмкость с прямым углом, в уголок которой следует поместить кусок и обмерить.

Величину (мм) максимального куска $D$ определяют по формуле среднеарифметического:

$$D = \frac{L + B + H}{3},$$

где $L$ – длина куска, мм;

$B$ – ширина куска, мм;

$H$ – высота куска, мм.

Средний максимальный размер куска определяют по формуле:

$$D_{\max}^{\text{ср}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3}.$$

Аналогично рассчитывают средний максимальный кусок для дроблёного материала $d_{\max}^{\text{ñð}}$.

Степень дробления находят по формуле:

$$i_{cp} = \frac{D_{\max}^{\text{ср}}}{d_{\max}^{\text{ср}}},$$

где $D_{\max}^{\text{ср}}$ – средний максимальный кусок руды до дробления, мм;

$d_{\max}^{\text{ср}}$ – средний максимальный кусок руды после дробления, мм.

Фактическую производительность $Q$ определяют по формуле:

$$Q = 3{,}6\frac{q}{t},\ \text{т/ч},$$

где $q$ – количество дробленой руды, кг;

$t$ – время дробления, с.

В выводах по работе следует отразить результаты определения степеней дробления и производительности дробилок.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2
## ГРОХОЧЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу самоцентрирующегося инерционного грохота;
- изучить способ изменения режима работы грохота;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба после дробления в валковой дробилке;
- грохот самоцентрирующийся;
- секундомер;
- набор стандартных лабораторных сит;
- линейка с делениями (штангенциркуль);
- весы;
- совки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию грохота и определить конструктивные и механические параметры.
4. Засыпать пробу в приёмный бункер при закрытом затворе.
5. Включить грохот. Открыть затвор бункера для подачи материала на просеивающую поверхность. Продолжительность грохочения оценивать с точностью до десятых долей секунды: начало – в момент попадания первых зёрен на просеивающую поверхность; окончание – в момент выхода из бункера основной массы материала. В течение опыта необходимо следить за тем, чтобы материал не зависал в бункере. Очистить бункер.
6. Выключить грохот и зачистить поддон, перезапустить грохот несколько раз («пуск-остановка» – два-три раза) до полной очистки.

7. Взвесить надрешётный и подрешётный продукты.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы, определить эффективность грохочения.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 2***

Определение эффективности грохочения.

Существуют несколько методов определения эффективности грохочения, характеризующих полноту перехода частиц менее размера отверстия просеивающей поверхности в подрешётный продукт.

Наиболее общим является метод, рассматривающий эффективность грохочения как отношение массы подрешетного материала ко всей массе материала такой же крупности, содержащейся в руде, поступающей на грохот

$$E_1 = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot 100, \%,$$

где $Q_1$ – масса подрешётного материала (крупность материала $-a+0$ мм), кг;

$Q_2$ – масса материала той же крупности в исходном материале, поступающем на грохочение (крупность материала $-a+0$ мм), кг;

$a$ – размер отверстий просеивающей поверхности грохота, мм.

Однако, на производстве практически трудно взвешивать подрешётный продукт. Для определения эффективности грохочения отбирают пробы исходной руды и надрешётного продукта, определяют в них содержание класса крупности $-d_c+0$ мм. Эффективность грохочения рассчитывают по формуле:

$$E_2 = \frac{\alpha - \vartheta}{\alpha \cdot (100 - \vartheta)} \cdot 10^4, \%$$

где $\alpha$ – массовая доля зерен минус $a$ в исходном продукте, %;

$\vartheta$ – массовая доля зерен минус $a$ в верхнем продукте, %.

В выводах по работе следует привести результаты расчёта эффективности грохочения по двум формулам и сравнить их.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3
## СИТОВЫЙ АНАЛИЗ МЕЛКИХ ПРОДУКТОВ

***1. Цель:***

- изучить методику проведения ситового анализа;

- определить гранулометрический состав продукта;
- изучить конструкцию и работу вибровстряхивателя;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала крупностью –1+0 мм;
- набор стандартных лабораторных сит;
- вибровстряхиватель;
- весы электронные.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию стандартных сит и вибровстряхивателя.
4. Собрать комплект сит и поместить пробу на верхнее сито.
5. Провести ситовый анализ в течение времени, заданного преподавателем.
6. Определить массы полученных классов крупности: содержимое каждого сита перенести на листы бумаги и подписать классы; взвесить полученные классы крупности.
7. Убрать рабочее место в лаборатории.
8. Обработать результаты работы: рассчитать частный и суммарный выходы классов крупности в процентах от исходной навески, построить частную и суммарную гранулометрические характеристики.
9. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 3***

При проведении исследования на обогатимость полезных ископаемых весьма важной операцией является ситовый анализ.

Для производства ситовых анализов используют набор лабораторных стандартных сит. Конструкция стандартных сит представляет собой круглые ободы диаметром 150-300 мм, высотой от 25 до 50 мм, со вставленными в эти ободы ситами. Набор сит собирают в комплект с крышкой и поддоном.

Размеры отверстий смежных сит должны изменяться плавно, с определенной закономерностью. Почти во всех стандартных ситах это осуществляется применением постоянного множителя – модуля ситовой шкалы. Последовательный ряд размеров отверстий сит составляет геометрическую прогрессию – шкалу классификации.

Практическую работу выполняют на наборе сит с модулем 2.

За основание в наборе сит принято сито 200 меш, где 200 – число отверстий на одном линейном дюйме сетки. Размер отверстия этого сита равен 0,071 мм. На основание последовательно устанавливают сита с размерами отверстий 0,16 мм, 0,315 мм, 0,63 мм, 1,25 мм, 2,5 мм. Нижнее сито устанавливают в поддон такого же диаметра.

На верхнее сито загружают пробу материала в количестве 100-150 г, плотно закрывают крышкой, комплект сит устанавливают на вибровстряхиватель и закрепляют.

Продолжительность ситового анализа для данной пробы определяют экспериментально.

Первоначально продолжительность встряхивания принимается равной 10 минутам, после чего содержимое каждого сита переносят на листы бумаги и классы подписывают.

Качество рассева проверяют по классу минус 0,071 мм. Для этой цели класс крупности –0,16+0,071 мм взвешивают, переносят снова на сито 0,071 мм и подвергают ручному рассеву в течение 1 мин.

Если в результате контрольного рассева выход класса крупности минус 0,071 мм меньше 1 % от первоначальной массы класса крупности –0,16+0,071 мм, то рассев можно считать оконченным, каждый класс крупности взвешивают, и рассчитывают выходы классов крупности.

Если выход класса крупности минус 0,071 мм при контрольном рассеве более 1 %, то все классы крупности подвергают повторному рассеву в течение 5 мин.

После дополнительного просеивания снова повторяют контрольный ручной рассев, как это было описано выше, и так до тех пор, пока при контрольном рассеве выход класса крупности минус 0,071 мм не окажется менее 1 %. После этого все полученные классы крупности взвешивают, и результаты ситового анализа заносят в таблицу 3.1.

Расчёты частных выходов осуществляют по формуле выхода из таблицы 1.1.

По данным таблицы 3.1 строят кривые ситового анализа (гранулометрические характеристики) по частным и суммарным выходам. При этом по оси абсцисс откладывают размеры отверстий сит в миллиметрах, а по оси ординат – суммарные и частные выходы классов крупности в процентах.

Пример представления результатов ситового анализа приведён в таблице 3.2 и на рисунке 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты ситового анализа

| Классы крупности, мм | Выход | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Частный | | Суммарный | |
| | г | % | «по плюсу» | «по минусу» |
| +2,5 | | | | 100,0 |
| –2,5+1,25 | | | | |
| –1,25+0,63 | | | | |
| –0,63+0,315 | | | | |
| –0,315+0,16 | | | | |
| –0,16+0,071 | | | | |
| –0,071+0 | | | 100,0 | |
| Итого | | 100,0 | | |

Таблица 3.2 – Результаты ситового анализа дроблёной руды

| Класс крупности, мм | Выход, % | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Частный | | Суммарный | |
| | г | % | «по плюсу» | «по минусу» |
| +2,5 | 15,0 | 8,33 | 8,33 | 100,00 |
| –2,5+1,25 | 12,0 | 6,67 | 15,00 | 91,67 |
| –1,25+0,63 | 20,0 | 11,11 | 26,11 | 85,00 |
| –0,63+0,315 | 25,0 | 13,89 | 40,00 | 73,89 |
| –0,315+0,16 | 35,0 | 19,44 | 59,44 | 60,00 |
| –0,16+0,071 | 55,0 | 30,56 | 90,00 | 40,56 |
| –0,071+0 | 18,0 | 10,00 | 100,00 | 10,00 |
| Итого: | 180,0 | 100,00 | - | - |

Суммарный выход «по плюсу» показывает, какой процент из всей исходной пробы остался бы на данном сите, если бы в данном наборе сит оно было верхним. Расчёт суммарного выхода «по плюсу» осуществляют сверху вниз.

Суммарный выход по «минусу» показывает, какой процент из всей исходной пробы прошел бы через данное сито, если бы в данном наборе сит оно было нижним. Расчёт суммарного выхода по «минусу» осуществляют снизу вверх.

По форме кривой делают вывод о преобладании в пробе крупных или мелких классов.

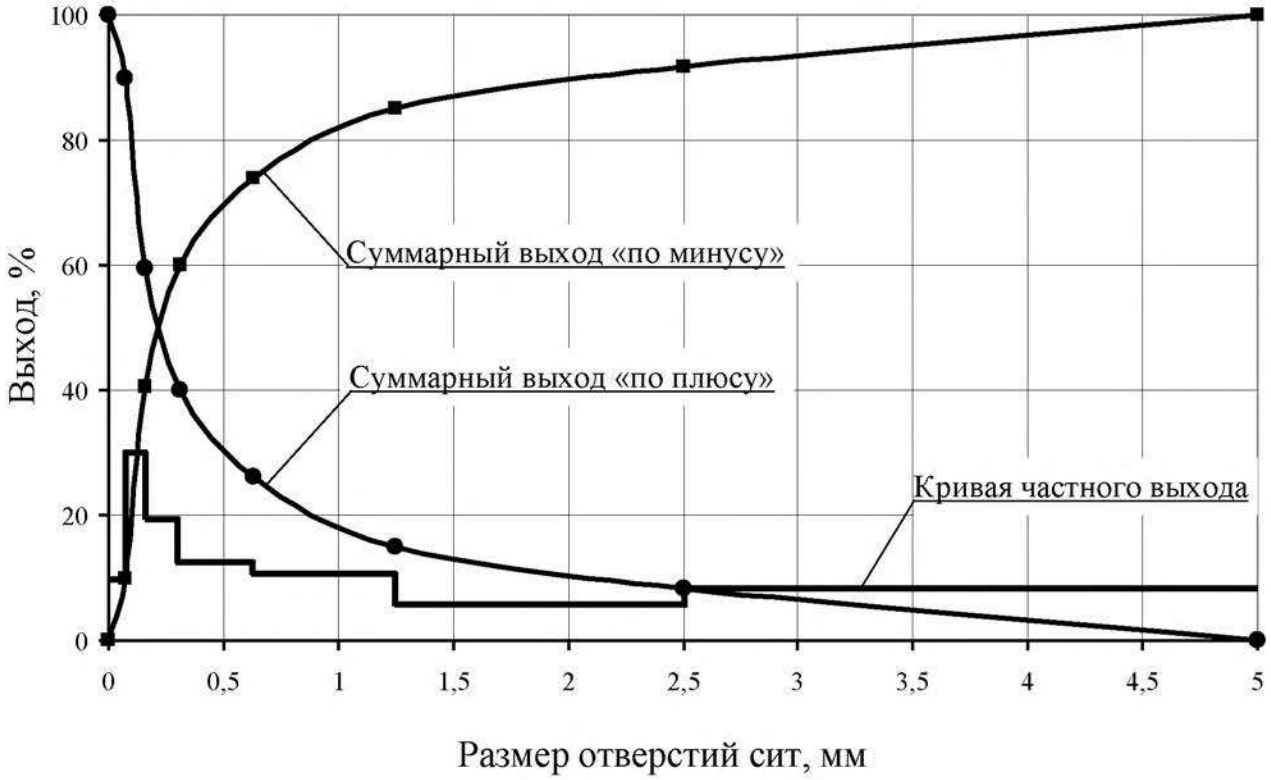



Рисунок 3.1 – Частная и суммарные гранулометрические характеристики

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4
## ОБОГАЩЕНИЕ В ПОРШНЕВОЙ ОТСАДОЧНОЙ МАШИНЕ

Гравитационные процессы обогащения основаны на различии в закономерностях движения различных минералов в той или иной среде под действием сил тяжести или инерционных сил. В большинстве случаев различие в закономерностях движения минералов в среде обусловлено разностью в плотности минералов, но нужно понимать, что это различие может быть обусловлено при разной плотности минералов различными размерами минеральных частиц или различной их формой.

К гравитационным процессам относят: обогащение отсадкой, обогащение на концентрационных столах, в винтовых и центробежных сепараторах, на шлюзах, обогащение в тяжёлых средах, классификация и другие. Гравитационные процессы, в зависимости от среды, в которой происходит обогащение, подразделяют на гидравлические (среда – вода) и пневматические (среда – воздух).

### *1. Цель:*

- изучить конструкцию и работу поршневой отсадочной машины;
- освоить регулировку процесса отсадки;

- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (каменный уголь);
- машина отсадочная поршневая;
- совки;
- весы технические.

Процесс разделения минералов по плотности в вертикальном потоке воды, переменном по направлению и амплитуде, называется ***отсадкой***.

Практическую работу выполняют на гидравлической поршневой двухкамерной отсадочной машине с неподвижным решетом и с боковой разгрузкой тяжёлых фракций (рисунок 4.1).

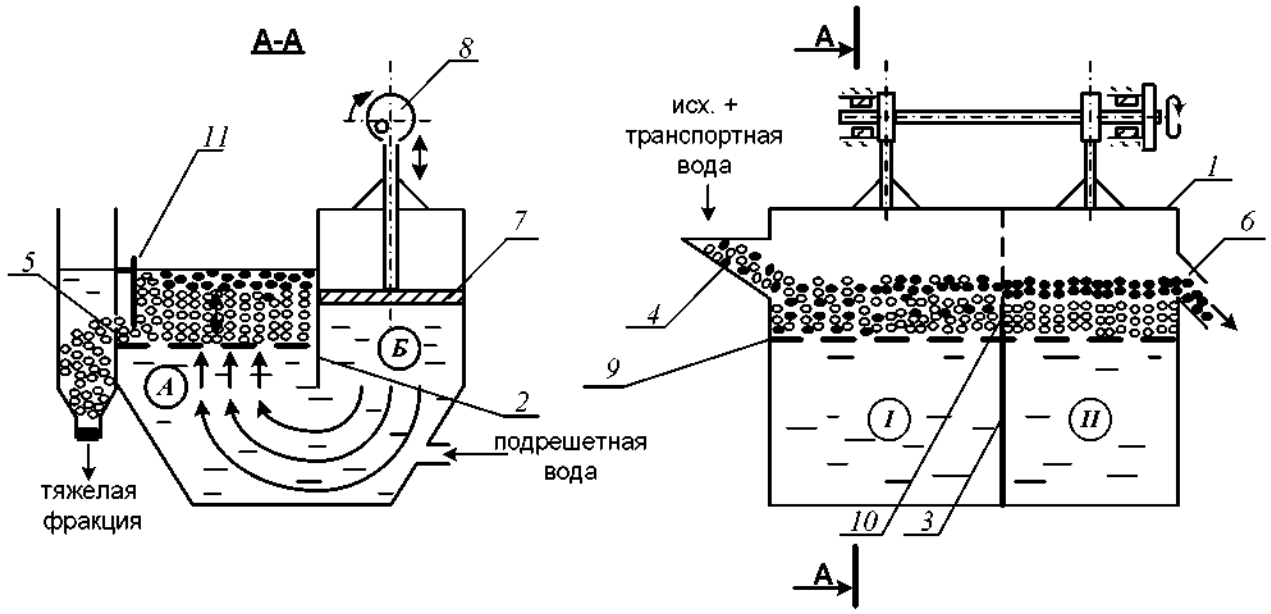



Рисунок 4.1 – Поршневая отсадочная машина

Машина состоит из корпуса 1, который продольной перегородкой 2, не доходящей до дна, разделён на два отделения: отсадочное А и поршневое Б, в котором расположены поршни 7, приводимые в движение эксцентриковым приводом 8.

Корпус машины разделён в поперечном направлении перегородкой 3 на два самостоятельных отделения. В отделении *I* со стороны загрузочной коробки 4 во время работы происходит накопление тяжёлой фракции (породы); в отделении *II* – сростков тяжёлого и лёгкого минералов (промежуточного продукта), а лёгкая фракция через сливной порог 6 выносится водой.

Расслоение обогащаемого материала отсадочной постели по плотности происходит в машине под действием вертикальных пульсаций подрешётной воды. При движении воды вверх зёрна меньшей плотности поднимаются выше, чем зёрна большей плотности (более тяжёлые). При движении потока воды вниз, наоборот, зёрна большей плотности оседают быстрее лёгких зерен. Так происходит постепенное расслоение материала, находящегося в машине, по плотностям.

Движение каждого минерального зерна и всей отсадочной постели вдоль машины по отсадочному решету 9 происходит за счёт транспортной воды и избытка подрешётной воды.

В начале работы, спустя некоторое время после начала загрузки исходного продукта в отделении *I* накапливается слой материала – отсадочная постель. Когда общая высота слоя материала будет больше высоты порога 10, разделяющего отсадочное решето в поперечном направлении, лёгкая фракция и часть тяжёлой фракции будут переходить во второе отделение машины *II*. Во втором отделении слой материала, накапливаясь и продвигаясь вдоль машины, достигает сливного порога 6, по которому лёгкие минералы вместе с водой скатываются, разгружаясь из машины.

Чтобы зёрна, имеющие большую плотность, не разгружались через сливной порог 6 при накоплении их в отделении *II* примерно до половины высоты сливного порога, открывают заслонки 11 в обоих отделениях, приподнимая их на такую высоту, чтобы в щели под заслонкой проходили зёрна тяжёлого минерала, но не уходили зёрна лёгкого минерала.

Разгрузку тяжёлой фракции в отделении *I* регулируют заслонкой 11 таким образом, чтобы получать в разгрузке только тяжёлые зерна (породу), а в отделении *II* – разгружать породу и сростки так, чтобы в слив уходил чистый уголь без частиц породы.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры поршневой отсадочной машины.
3. Провести обогащение каменного угля с получением трёх продуктов: лёгкой фракции (уголь), тяжёлой фракции (породы) и промежуточной фракции (промпродукта).
4. Открыть краны на трубопроводах, подающих транспортную и подрешётную воду и заполнить машину водой. Под разгрузочный порог подставить приёмник лёгкой фракции (коробка с

перфорированным дном).

5. Когда вода начнёт переливаться через порог 6, включить привод поршней машины. После этого начать загружать обогащаемый материал в приёмную коробку 4 вручную совками и продолжать загрузку до конца опыта.
6. При работе отсадочной машины необходимо следить за накоплением материала в отделениях *I*, *II*. Когда слой тяжёлых (породных) частиц достигнет примерно половины высоты сливного порога 6 во втором отделении, открыть заслонки 11, регулируя высоту их подъема, как указывалось выше. С этого момента начинается разгрузка породной и промпродуктовой фракции в боковые карманы.
7. В ходе работы необходимо следить за тем, чтобы отсадочная постель хорошо разрыхлялась в восходящем потоке воды и была подвижной – перемещалась импульсами вдоль машины. Последнее достигается одним или сочетанием следующих факторов оперативной регулировки:
   - изменением количества подаваемой подрешётной воды;
   - изменением количества загружаемого в машину обогащаемого продукта;
   - изменением величины разгрузочных щелей.

   Следует знать, что кроме этих факторов регулирования работы машины можно осуществлять изменением числа ходов поршней в минуту и величиной хода поршней (размахом колебаний). Значение этих факторов подбирают и устанавливают при настройке машины для обогащения того или иного исходного материала заранее, а при работе машины менять эти факторы не представляется возможным.
8. При работе машины необходимо следить за наполнением приёмников тяжёлой и промпродуктовой фракций, расположенных сбоку машины. Когда слой материала в приёмниках достигнет уровня разгрузочных щелей, опыт прекращают в такой последовательности:
   - прекратить загрузку материала в машину;
   - отключить привод машины;
   - прекратить подачу воды в машину.
9. Полученные продукты обогащения разгрузить, произвести обезвоживание дренированием и взвесить. Рассчитать выходы продуктов разделения.

10. Убрать рабочее место в лаборатории.
11. Обработать результаты работы.
12. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 4***

Массовые доли золы в продуктах задаёт преподаватель, остальные показатели рассчитывают по уравнению баланса и по известным формулам. Результаты расчета представляют в виде таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты обогащения угля на поршневой отсадочной машине

| **Продукты обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля золы, $A^d$, %** | **Извлечение золы, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **кг** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Промпродукт | | | | |
| Хвосты (порода) | | | | |
| Итого: | | 100,0 | $A^d_{исх}$ | 100,0 |

В выводах по работе следует описать личные наблюдения за возможностью регулирования процесса отсадки в машине, сравнить качество полученных продуктов разделения на основании их визуальной оценки.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5
## ОБОГАЩЕНИЕ НА СОТРЯСАТЕЛЬНОМ КОНЦЕНТРАЦИОННОМ СТОЛЕ

Обогащение мелких классов крупности (менее 3-4 мм) оловянных, вольфрамовых, марганцевых и им подобных руд и углей осуществляют на сотрясательных концентрационных столах.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию сотрясательного концентрационного стола;
- освоить регулировку процесса разделения на деке концентрационного стола при визуальном наблюдении за процессом разделения;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба измельчённой руды массой 5-7 кг;
- стол сотрясательный концентрационный СК-1;

- совки;
- весы технические.

Стол (рисунок 5.1) состоит из деки 1 с рифлями 2, привода деки 3, механизма изменения угла наклона деки 4, питающего жёлоба 5, жёлоба для подачи смывной воды 6.

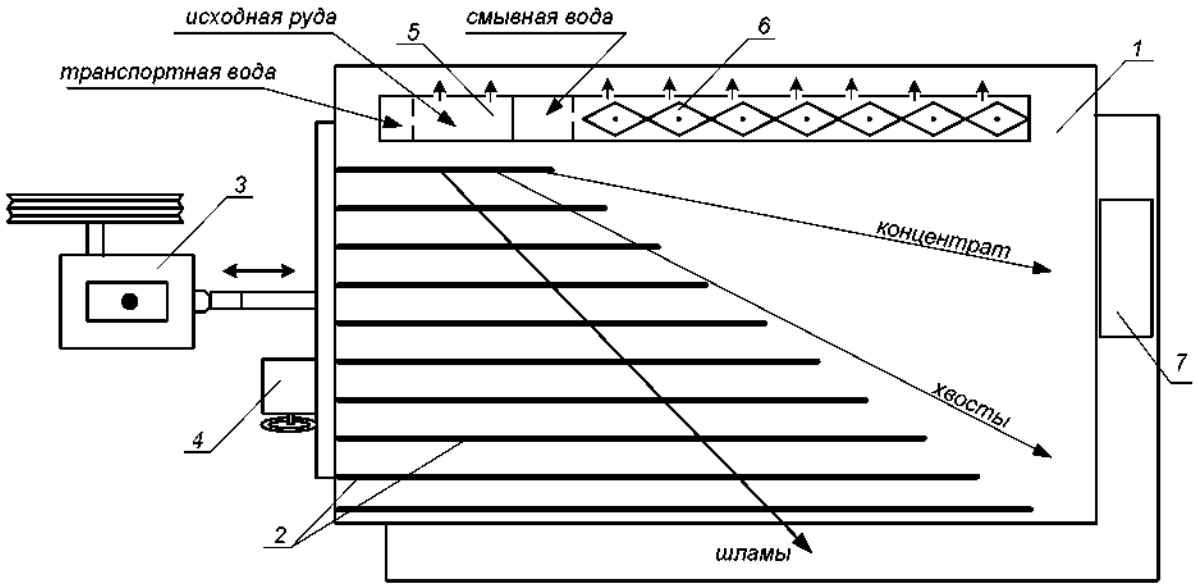



Рисунок 5.1 – Схема концентрационного стола

Разделение минералов по плотности на деке стола происходит за счёт различия в направлении движения лёгких и тяжёлых частиц по деке стола при одновременном действии на частицы минералов сил инерции, силы тяжести и гидродинамического напора смывной воды.

Вследствие сегрегации частиц в пространстве между рифлями тяжёлые частицы имеют больший контакт с декой и за счёт возвратно-поступательных движений деки продвигаются преимущественно вдоль неё. Лёгкие частицы, занимая верхний слой, испытывают большее воздействие потока смывной воды и движутся преимущественно поперек деки стола. На деке стола образуется «веер» частиц, располагающихся сверху-вниз по схеме: мелкие тяжёлые частицы → крупные тяжёлые, мелкие лёгкие → крупные лёгкие → шламы.

Частицы различных по плотности минералов, как правило, отличаются по цвету или блеску, что существенно упрощает наблюдение за образованием и распределением веера продуктов на деке стола.

Изменяя скорость смывного потока воды, можно «расширить» или «сузить» веер на гладкой поверхности деки (за рифлями).

Скорость смывного потока воды регулируют двумя факторами: расходом смывной воды и углом поперечного наклона деки стола.

Качество концентрата зависит от того, какую часть веера (верхнюю) направить в приёмник концентрата. Регулирование количества отсекаемого концентрата из веера частиц осуществляют передвижным жёлобом или перемещением приёмника концентрата вдоль среза деки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры сотрясательного концентрационного стола;
3. Включить привод стола. Открыть краны на трубопроводе, подающем воду в питающий жёлоб и в жёлоб смывной воды. Отрегулировать равномерность потока смывной воды по деке стола поворотом резиновых флажков в жёлобе.
4. Настроить процесс разделения. Для этого в приёмный жёлоб загрузить несколько совков исходной руды, которая смывается водой на деку стола. Наблюдая за образованием веера частиц на деке стола, продолжать периодически загружать руду в приемный жёлоб. Отрегулировать ширину и чёткость веера частиц изменением расхода смывной воды и изменением угла наклона деки с помощью штурвала механизма 4 (рисунок 5.1). При получении чёткого веера частиц на деке стола регулирование стола прекратить.
5. Пробу постепенно совком загрузить в приёмный жёлоб. При этом необходимо наблюдать за веером частиц и при необходимости отрегулировать его. Кроме того, нужно следить за шириной части веера частиц, отсекаемой в приёмник концентрата с тем, чтобы забирать в приёмник концентрата постоянную ширину полосы концентрата. При необходимости приёмник можно передвигать.
6. После окончания загрузки руды выждать, пока вся руда не пройдёт по деке и не разгрузится в соответствующие приёмники.
7. Из полученного концентрата слить воду и взвесить его. Определить массу концентрата с учётом его влажности.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 5***

Массы продуктов разделения и рассчитанные технологические показатели обогащения на концентрационном столе занести в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Результаты обогащения на концентрационном столе

| **Продукты обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля извлекаемого компонента, %** | **Извлечение компонента, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **кг** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Хвосты (порода) | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

Все расчёты осуществляют по известным формулам.

По результатам опыта делают выводы, в которых следует отразить личные наблюдения за процессом разделения минералов на деке стола и за возможностью регулирования процесса разделения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6
## ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УГЛЯ

Фракционный анализ угля – это разделение угля по плотности на фракции, осуществляемое в тяжёлых средах с заданными плотностями тяжёлых сред. В качестве тяжёлых сред в лабораторных условиях применяют чаще всего водные растворы хлористого цинка ($ZnCl_2$).

***1. Цель:***

- изучить методику определения фракционного состава угля;
- изучить методику построения кривых обогатимости угля;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (каменный уголь) массой 5-10 кг;
- набор бачков с раствором хлористого цинка различной плотности;
- дешламационный бачок с сетчатым дном;
- бачки для ссыпания фракций различной плотности;
- сетчатый черпак для снятия всплывших фракций;
- совки;
- ареометр для проверки плотности растворов хлористого цинка;

- кружка для проверки плотности раствора хлористого цинка;
- резиновые перчатки для каждого члена бригады;
- весы технические.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Взвесить пробу.
3. Пробу засыпать в дешламатор (бачок с сетчатым дном) и подвергнуть дешламации орошением сильной струей воды или многократным опусканием и встряхиванием дешламатора с навеской угля в бачок с водой.
4. Дать воде стечь из дешламатора, после чего опустить дешламатор с исследуемой навеской в бачок с раствором хлористого цинка с наименьшей плотностью.
5. Всплывшую часть исследуемой навески снять сетчатым черпаком, давая стечь в бачок раствору хлористого цинка, и ссыпать в бачок с сетчатым дном, прополоскать чистой водой, высушить до воздушно-сухого состояния, взвесить и записать массу каждой фракции в рабочую тетрадь. После этого определить процентный выход её от исходной пробы. Плотность данной фракции будет меньше плотности раствора, в котором она всплыла.
6. Потонувшую часть навески, оставшуюся на дне первого дешламатора, вместе с дешламатором вынуть из первого бачка, дать стечь раствору (в тот же бачок) и перенести в бачок с раствором последующей плотности. Со всплывшей и потонувшей частью поступают так же, как и в предыдущем случае. Плотность зёрен всплывшей части будет лежать в пределах плотности смежных растворов.
7. Повторить пункты 5 и 6 необходимое количество раз.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 6***

На основании результатов фракционного анализа и результатов анализа каждой фракции на определение массовой доли золы (негорючей массы) строятся кривые обогатимости угля.

Кривые обогатимости угля позволяют решать различные задачи, связанные с выбором и расчётом технологических схем обогащения,

а также рассчитать теоретические (наилучшие) результаты процесса обогащения.

В данной работе фракционный состав угля определяют студенты, а зольность каждой фракции задает преподаватель.

Результаты расслойки пробы угля заносят в таблицу 6.1.

Таблица 6.1 – Фракционный состав угля

| Плотность фракций, кг/м$^3$ | Исходный уголь | | | Всплывшая фракция | | Потонувшая фракция | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Выход | | Зольность $A^d$, % | Выход $\gamma_i$, % | Зольность $A_i^d$, % | Выход $\gamma_i$, % | Зольность $A_i^d$, % |
| | кг | % | | | | | |
| < 1300 | | | | | | 100,0 | |
| 1300-1400 | | | | | | | |
| 1400-1500 | | | | | | | |
| 1500-1600 | | | | | | | |
| 1600-1700 | | | | | | | |
| > 1700 | | | | 100,0 | | | |
| Итого: | | 100,0 | | - | - | - | - |

Извлечение золы в каждую фракцию рассчитывают по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma_i \cdot A_i^d}{A^d},$$

где $\gamma_i$ – выход фракции, %;

$A^d$ – массовая доля золы (зольность) в исходном угле, %;

$A_i^d$ – массовая доля золы (зольность) во фракции, %;

$\varepsilon_i$ – извлечение золы во фракцию, %.

По данным фракционного состава угля строят кривые обогатимости угля, а также определяют категорию обогатимости угля.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7
## КОЛЛЕКТИВНАЯ ФЛОТАЦИЯ СУЛЬФИДНОЙ РУДЫ

Флотационный метод обогащения основан на различии в смачиваемости водой поверхности ценных минералов и минералов пустой породы.

Для создания гидрофобности (несмачиваемости) поверхности ценных минералов тонкоизмельченной руды, находящейся в водной среде, добавляют реагенты-собиратели. Благодаря гидрофобности, ценные минералы прикрепляются к пузырькам воздуха и поднимаются вместе с ними на поверхность пульпы, образуя минерализованный

пенный слой, который удаляют из камеры флотомашины. Минералы пустой породы смачиваются водой и остаются в объёме пульпы.

Флотационный метод широко применяют для обогащения сульфидных руд цветных металлов. В этом случае наиболее распространенными реагентами-собирателями являются ксантогенаты. Расход ксантогенатов при флотации сульфидных руд обычно не превышает 100 г/т. В процесс эти реагенты подают в виде водных растворов.

Для создания на поверхностях сульфидных минералов необходимой для закрепления ксантогенатов окисленной пленки в операцию измельчения руды подают реагент-регулятор среды, в качестве которого обычно используют известь или соду. Расходы их, в зависимости от вещественного состава полезного ископаемого, могут изменяться от 200 до 1500 г/т.

Для повышения механической прочности пузырьков воздуха, в результате которого улучшаются условия прилипания к ним ценных минералов, и увеличивается устойчивость флотационной пены, используют реагенты-пенообразователи. Одним из наиболее распространенных в настоящее время пенообразователей является реагент Т-92. Его расходы обычно колеблются от 20 до 100 г/т руды.

Кроме вышеперечисленных типов флотационных реагентов при селективной флотации руд используют реагенты-активаторы и подавители, которые усиливают или ослабляют действие собирателей.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу лабораторной флотационной машины;
- изучить способы изменения режима работы флотомашины;
- освоить методику определения объёма раствора реагента при заданном расходе реагента;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (250 г сульфидной руды класса крупности –3+0 мм);
- мельница стрежневая;
- рольганги;
- машина флотационная лабораторная механического типа конструкции Механобр;
- реагенты флотационные (сода или известь, бутиловый ксантогенат, Т-92);
- чашки фарфоровые;
- чашки металлические для сбора продуктов;

- промывалки;
- посуда химическая;
- бумага фильтровальная;
- весы электронные.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры лабораторной флотационной машины (рисунок 7.1).
3. Изучить схему флотационного опыта (рисунок 7.2).
4. Очистить стержневую мельницу, в которой будет проводиться измельчение руды, от образовавшейся ржавчины. Для этого поместить в неё 300 г гранита и 300 $см^3$ воды. Масса стержней должна составлять 3000 г. Заполненную мельницу плотно закрыть крышкой с резиновой прокладкой и поместить на рольганги, включив их на 5-10 минут.
5. Подготовить пробу, 250 $см^3$ воды и навеску реагента: соды или извести (вид реагента и его расход задаёт преподаватель).
6. Остановить рольганги, вылить содержимое мельницы, промыть водой её внутреннюю поверхность и стержни.
7. В промытую мельницу с загруженными в неё стержнями сначала поместить отмеренное количество воды, затем пробу сульфидной руды и навеску реагента – регулятора среды. Измельчать в течение времени, указанного преподавателем, обычно 10-15 минут.
8. За период измельчения необходимо подготовить реагенты: собиратель и пенообразователь. Их расходы задаёт преподаватель в г/т руды. Необходимо самостоятельно определить объёмы растворов реагентов, подаваемых в процесс флотации.
9. По истечении заданной продолжительности измельчения снять мельницу с рольгангов, перенести её содержимое с помощью промывалки в камеру флотомашины. При этом нужно следить за тем, чтобы количество добавляемой воды было минимальным. В свободную от пульпы мельницу загрузить стержни, залить воду до бортика и поставить на место хранения.
10. Закрепить камеру 2 на корпусе флотомашины 1, залить в случае необходимости воду и включить двигатель. Через 2 минуты перемешивания в камеру 2 добавить необходимый объём раствора ксантогената и после минутного перемешивания в пульпу ввести пенообразователь.

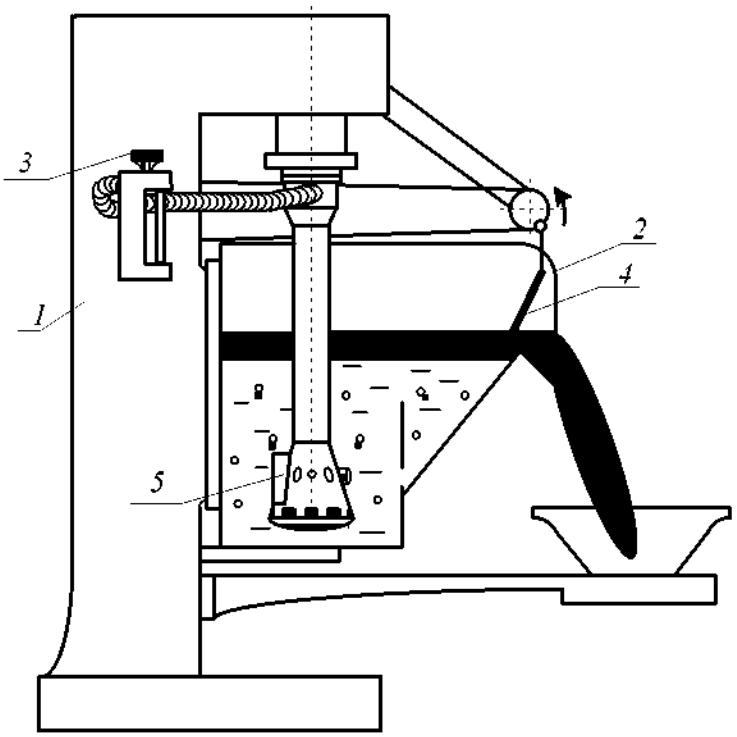



Рисунок 7.1 – Лабораторная флотационная машина

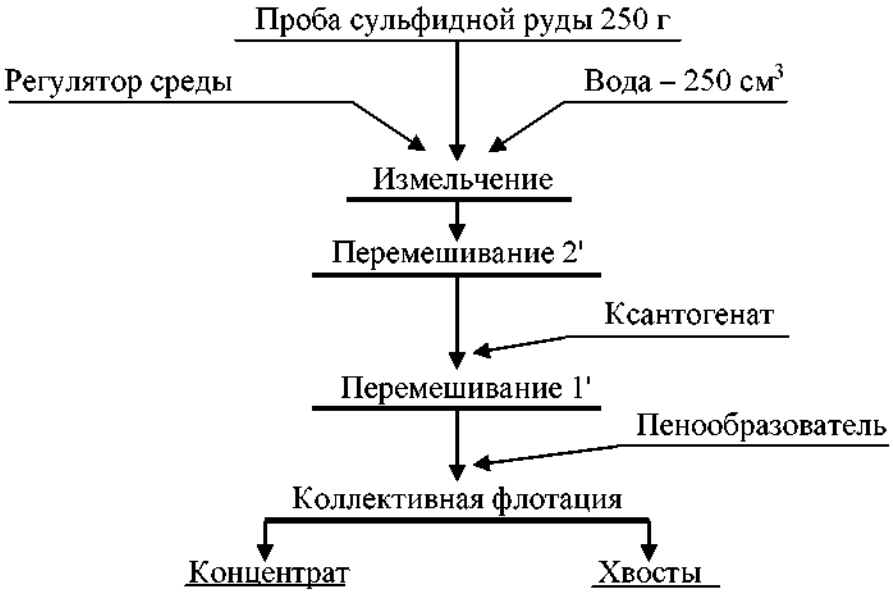



Рисунок 7.2 – Схема флотационного опыта

11. Осторожно повернуть вентиль воздушного крана 3, обеспечив этим засасывание воздуха в камеру для создания на её поверхности слоя минерализованной пены.
12. Включить пеносъёмник 4. В момент снятия первой порции пены зафиксировать время начала флотации. По мере снижения уровня пульпы в камере флотомашины добавлять воду из про-

мывалки, обмывая при этом её стенки и пеносъёмник от налипших минеральных частиц. Периодически следует отбирать пробу от пенного продукта в фарфоровую чашку. Постепенно нагруженность пены снижается, меняется и её цвет. Конец флотации фиксируется по отсутствию сульфидных минеральных частиц в фарфоровой чашке.

13. Закрыть воздушный кран 3, остановить пеносъёмник 4, выключить двигатель флотомашины. Пенный продукт отфильтровать на вакуум-фильтре и взвесить. Камерный продукт (хвосты) вылить в канаву.
14. Пустую камеру заполнить водой, закрепить на корпусе флотомашины и включить двигатель. Промыть машину в течение 2-3 минут. Затем ополоснуть из промывалки блок аэратора 5. Чистую камеру и блок аэратора протереть чистой тряпкой.
15. Убрать рабочее место в лаборатории.
16. Обработать результаты работы.
17. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 7***

Методика определения объёма раствора реагента при заданном расходе реагента.

Например, заданный расход бутилового ксантогената составляет 100 г/т руды. Составим и решим пропорцию:

$10^6$ г (1 т) руды – 100 г ксантогената

250 г руды – X г ксантогената

$$X = \frac{100\,\text{г} \cdot 250\,\text{г}}{10^6\,\text{г}} = \frac{2{,}5\,\text{г}}{10^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{г}$$

Следует учесть, что ксантогенат используют во флотации в виде 1 % растворов, то есть в 100 $см^3$ раствора содержится 1 г ксантогената.

Составив пропорцию и решив её, определим объём раствора, который следует подать в камеру флотомашины:

100 $см^3$ раствора – 1 г ксантогената

$V$ $см^3$ раствора – $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ г ксантогената

$$V = \frac{100\,\text{см}^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{г}}{1\,\text{г}} = 2{,}5\,\text{см}^3$$

Результаты расчёта показателей флотации занести в таблицу 7.1.

Таблица 7.1 – Показатели коллективной флотации

| Наименование продуктов обогащения | Выход | | Массовая доля сульфидных минералов, % | Извлечение сульфидных минералов, % |
|---|---|---|---|---|
| | г | % | | |
| Концентрат | | | | |
| Хвосты | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

Массовую долю сульфидов в продуктах обогащения (β, ϑ) или в исходной руде (α) и в одном из продуктов задаёт преподаватель.

В конце отчёта по выполненной работе делается вывод, в котором анализируются полученным результатам и намечаются способы их повышения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8
## МАГНИТНАЯ СЕПАРАЦИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Практическую работу по магнитной сепарации выполняют на лабораторном магнитном сепараторе для слабомагнитных руд. Результаты разделения минералов по их магнитной восприимчивости зависят от вещественного состава руды, крупности обогащаемого материала, напряжённости магнитного поля, производительности, высоты рабочей зоны и положения разделительного шибера. При выполнении работы потребуется получить зависимости выходных показателей качества процесса от указанных выше переменных факторов.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу роликового магнитного сепаратора;
- изучить влияние некоторых факторов на процесс магнитной сепарации;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала (200-500 г руды класса крупности -3+0 мм);
- сепаратор магнитный роликовый;
- весы электронные;
- чашки лабораторные;
- щётка для чистки сепаратора.

Магнитный сепаратор (рисунок 8.1) состоит из основания 1 с закреплённым на нём бункером 2 с регулировочным шибером 3. Бункер 2 установлен над вибролотком 4, выполненным из немагнитного материала и которого осуществляется подача материала в рабочую зону магнитной системы, образованной магнитопроводом 5 и профилированным роликом 6. На магнитопроводе установлены катушки электромагнита 7, подключенные к выпрямителю тока 8, содержащего приборы измерения тока 9 и напряжения 10. На лицевой панели выпрямителя установлены переключатели режима работы, выключатель и регулятор нагрузки по току. Регулирование выходов отдельных фракций осуществляется шибером 11, а очистка ролика 6 щёткой 12.

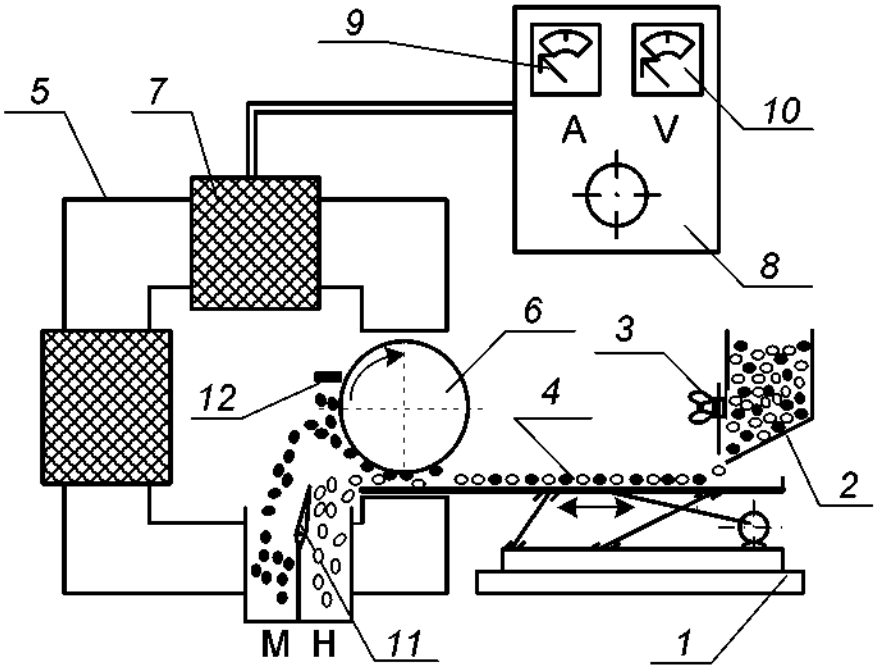



Рисунок 8.1 – Схема магнитного сепаратора

Перед опытом включают выпрямитель 8, устанавливают необходимое значение тока в обмотке электромагнита 7, включают привод вибролотка 4 и ролика 6. Материал из бункера 2 по вибролотку поступает в рабочий зазор, где и происходит разделение частиц по удельной магнитной восприимчивости. Частицы, имеющие большую удельную магнитную восприимчивость, выносятся роликом 6 из рабочего зазора, счищаются щёткой 12 и попадают в приёмник магнитной фракции. Регулирование производительности осуществляют смещением шибера 3. Положение шибера 3 изменяют в пределах от 10 до 30 мм, ток в обмотке электромагнита изменяют от 0 до 8 А.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию и определить конструктивные и механические параметры роликового магнитного сепаратора.
4. Подключить сепаратор и выпрямитель к сети переменного тока.
5. Установить заданные значения настроек сепаратора (положение шибера, сила тока).
6. Загрузить исходный материал в бункер и зафиксировать время начала и конца опыта.
7. Полученные продукты взвесить, выполнить визуальную оценку, провести их анализ.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 8***

Полученные результаты разделения магнитной сепарацией занести в таблицу 8.1.

Таблица 8.1 – Результаты магнитной сепарации

| № опыта | Наименование продукта | Выход | | Сила тока, А | Положение шибера, мм |
|---|---|---|---|---|---|
| | | г | % | | |
| 1 | Магнитный | | | 0,5 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 2 | Магнитный | | | 1,0 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 3 | Магнитный | | | 2,0 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 4 | Магнитный | | | 1,0 | 10 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 5 | Магнитный | | | 1,0 | 30 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |

Используя данные таблицы 8.1 построить экспериментальные зависимости количественных показателей процесса магнитной сепарации от переменных факторов:

$$\gamma_м = f(I) \text{ для } h = 20 \text{ мм}$$

$$\gamma_м = f(h) \text{ для } I = 1 \text{ А}.$$

где $I$ – сила тока в катушках, А;

$h$ – положение шибера, мм.

Сделать вывод о влиянии силы тока и положения шибера на получаемые технологические показатели.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Комлев, С.Г.* Основы обогащения полезных ископаемых: учебное пособие / С.Г. Комлев // Урал. гос. горный ун-т. – 5-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 153 с.

2. *Колтунов, А.В.* Дробление, измельчение, грохочение: учебное пособие / А.В. Колтунов, С.Г. Комлев // Урал. гос. горный ун-т. – 2-е изд., стереотип. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 122 с.

3. *Морозов Ю.П.* Флотационные методы обогащения: конспект лекций / Ю.П. Морозов // Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. – 155 с.

4. ГОСТ 2.105-95 «Общие требования к текстовым документам».

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Пример оформления титульного листа

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

**ФГБОУ ВО**
**«УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА «ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ»**

# ОТЧЁТ
## ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

по дисциплине:
**«Обогащение полезных ископаемых»**

**Руководитель**
**проф., д.т.н.** _____ **Е. Ф. Цыпин**

**Студент**
**группы ОПИ-00** _____ **А. В. Иванов**

Екатеринбург, 2018

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Правила и примеры оформления надписей к таблицам и рисункам

**Таблицы** следует располагать в тексте сразу же после первого упоминания их или на следующей странице. В тексте слово «таблица» пишется полностью с указанием порядкового номера. Заголовок таблицы выполняется без абзацного отступа с выравниванием «по центру». Точка в конце заголовка не ставится. Между основным текстом, заголовком таблицы и самой таблицей – пустая строка. Размер шрифта в таблице должен быть меньше размера основного текста (например, основной текст – 14, в таблице – 13 (12) и меньше).

Таблица 1 – Результаты флотационного обогащения

| **Наименование продуктов обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля полезного компонента, %** | **Извлечение полезного компонента, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **г** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Промпродукт | | | | |
| Хвосты | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

**Рисунок** вставляется после первого упоминания о нём в тексте. В тексте слово «рисунок» пишется полностью с указанием порядкового номера.

Наименование схемы, рисунка делается под рисунком и располагается симметрично относительно поля рисунка. Под наименованием рисунка после двоеточия помещают расшифровку обозначений и поясняющие записи.

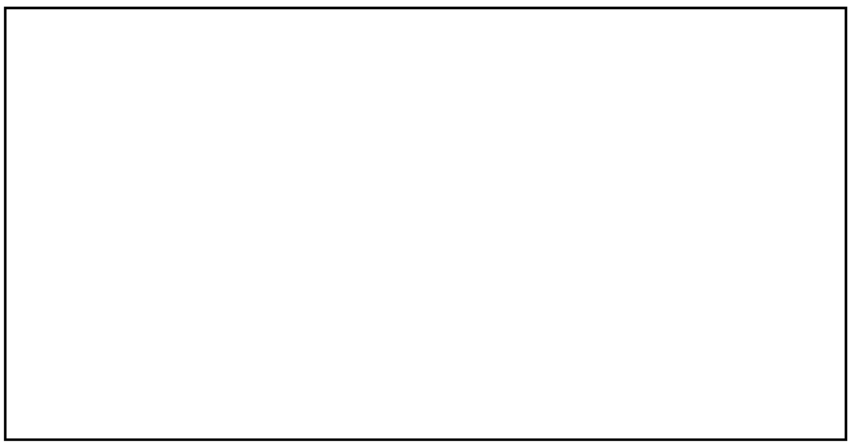


Рисунок 1 – Схема устройства оборудования:
1 – …; 2 – …




**Министерство образования и науки**
**Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное**
**образовательное учреждение**
**высшего образования**
**«Уральский государственный горный университет»**

**Е. Ф. Цыпин**
**Е. А. Бекчурина**
**И. Х. Хамидулин**

# ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***Учебно-методическое пособие***
**по выполнению практических работ**
**для студентов специальности 21.05.04 Горное дело**
**всех форм обучения**

**Екатеринбург – 2019**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета
«____» _____ 2019 г.
Председатель комиссии

_____ проф. В. П. Барановский

Е. Ф. Цыпин
Е. А. Бекчурина
И. Х. Хамидулин

# ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических работ
для студентов
направления 21.05.04 – «Горное дело»
всех форм обучения

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**ВВЕДЕНИЕ** ..... 4
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1**. ДРОБЛЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 5
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2**. ГРОХОЧЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 7
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3**. СИТОВЫЙ АНАЛИЗ МЕЛКИХ ПРОДУКТОВ ..... 8
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4**. ОБОГАЩЕНИЕ В ПОРШНЕВОЙ ОТСАДОЧНОЙ МАШИНЕ ..... 12
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5**. ОБОГАЩЕНИЕ НА СОТРЯСАТЕЛЬНОМ КОНЦЕНТРАЦИОННОМ СТОЛЕ ..... 16
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6**. ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УГЛЯ ..... 19
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7**. КОЛЛЕКТИВНАЯ ФЛОТАЦИЯ СУЛЬФИДНОЙ РУДЫ ..... 21
**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8**. МАГНИТНАЯ СЕПАРАЦИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ ..... 26
**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК** ..... 29
**ПРИЛОЖЕНИЕ А** ..... 30
**ПРИЛОЖЕНИЕ Б** ..... 31

## ВВЕДЕНИЕ

Цель практических занятий – развитие навыков проведения лабораторных опытов и помощь в закреплении теоретических знаний по дисциплине.

Практические работы выполняются побригадно, а отчёт по работе каждый студент составляет самостоятельно. Отчёт по работе должен содержать изложение последовательности выполнения работы с необходимыми расчётами (таблица 1.1), схемой подготовки проб, схемой устройства для проведения опытов, эскизами основных узлов, таблицами результатов опытов, графиками, математическими зависимостями и выводами по проделанной работе.

Таблица 1.1 – Расчётные выражения для определения показателей обогащения

| № п/п | Показатель | Расчётные выражения | |
|---|---|---|---|
| | | **два продукта разделения** | ***n* продуктов разделения** |
| 1 | Баланс по материалу | $Q = C + T$<br>$100 = \gamma_{к} + \gamma_{х}$ | $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$<br>$100 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ |
| 2 | Баланс по ценному компоненту | $Q \cdot \alpha = C \cdot \beta + T \cdot \vartheta$<br>$100 \cdot \alpha = \gamma_{к} \cdot \beta + \gamma_{х} \cdot \vartheta$<br>$100 = \varepsilon_{к} + \varepsilon_{х}$ | $100 \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \beta_i$ |
| 3 | Массовая доля ценного компонента | $\alpha = (P_{\alpha} / Q) \cdot 100,\ \%$<br>$\beta = (P_{\beta} / \tilde{N}) \cdot 100,\ \%$<br>$\vartheta = (P_{\vartheta} / T) \cdot 100,\ \%$ | $\beta_i = \frac{P_i}{Q_i} \cdot 100,\ \%$ |
| 4 | Выход продукта | $\gamma_{к} = (C/Q) \cdot 100 = \frac{(\alpha - \vartheta)}{(\beta - \vartheta)} \cdot 100,\ \%$<br>$\gamma_{х} = (T/Q) \cdot 100 = \frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \vartheta)} \cdot 100,\ \%$ | $\gamma_i = \frac{Q_i}{Q} \cdot 100,\ \%$ |
| 5 | Извлечение ценного компонента в продукт | $\varepsilon_{к} = \frac{C \cdot \beta}{Q \cdot \alpha} \cdot 100 = \frac{(\alpha - \vartheta) \cdot \beta}{(\beta - \vartheta) \cdot \alpha} \cdot 100,\ \%$<br>$\varepsilon_{х} = \frac{T \cdot \vartheta}{Q \cdot \alpha} \cdot 100 = \frac{(\beta - \alpha) \cdot \vartheta}{(\beta - \vartheta) \cdot \alpha} \cdot 100,\ \%$ | $\varepsilon_i = \gamma_i \cdot \frac{\beta_i}{\alpha}$ |

где $Q$, $C$, $T$ – массы исходного материала, концентрата и хвостов, соответственно; $\gamma_к$; $\gamma_х$ – выход концентрата и хвостов, соответственно; $\alpha$, $\beta$, $\vartheta$ – массовые доли компонента соответственно в исходном материале, в кон-

центрате, хвостах; $Q_i$, $\gamma_i$, – масса и выход $i$-ого продукта; $P_\alpha$, $P_\beta$, $P_\vartheta$, $P_i$ – масса ценного компонента в исходном материале, концентрате, хвостах, в $i$-ом продукте разделения; $\varepsilon_к$, $\varepsilon_х$ – извлечение ценного компонента в концентрат и в хвосты, соответственно.

На титульном листе отчёта должны быть указаны название работы, шифр группы, фамилия исполнителя. Отчёт должен быть подписан студентом.

Защиту отчёта проводят после его проверки преподавателем. При защите необходимо знать цель работы, устройство и назначение применяемых аппаратов, способы управления и органы управления, методику проведения работы, формулы (таблица 1.1), использованные для расчётов, а также уметь объяснять полученные результаты и закономерности.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1
## ДРОБЛЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***1. Цель:***

- изучить конструкции щековой и валковой дробилок;
- изучить способ дробления исходного продукта;
- определить степень дробления;
- определить фактическую производительность щековой и валковой дробилок.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала (крупность 150-0 мм);
- дробилка щековая;
- дробилка валковая;
- секундомер;
- набор стандартных лабораторных сит;
- линейка с делениями (штангенциркуль);
- весы;
- совки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу материала.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию дробилки и определить конструктивные и механические параметры.
4. Определить средний максимальный кусок до дробления.
5. Соблюдая меры предосторожности, пропустить пробу через ще-

ковую дробилку. При этом зафиксировать продолжительность цикла дробления.

6. Определить средний максимальный кусок после дробления.
7. Соблюдая меры предосторожности, пропустить пробу через валковую дробилку. При этом зафиксировать продолжительность цикла дробления.
8. Определить средний максимальный кусок после дробления.
9. Убрать рабочее место в лаборатории.
10. Обработать результаты работы.
11. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 1***

Для определения среднего максимального куска руды, как до, так и после дробления, отбирают 3 максимальных куска (визуально) и производят замер каждого из них в трёх направлениях. Для удобства рекомендуется использовать ёмкость с прямым углом, в уголок которой следует поместить кусок и обмерить.

Величину (мм) максимального куска $D$ определяют по формуле среднеарифметического:

$$D = \frac{L + B + H}{3},$$

где $L$ – длина куска, мм;

$B$ – ширина куска, мм;

$H$ – высота куска, мм.

Средний максимальный размер куска определяют по формуле:

$$D_{\max}^{\text{ср}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3}.$$

Аналогично рассчитывают средний максимальный кусок для дроблёного материала $d_{\max}^{\text{ñð}}$.

Степень дробления находят по формуле:

$$i_{cp} = \frac{D_{\max}^{\text{ср}}}{d_{\max}^{\text{ср}}},$$

где $D_{\max}^{\text{ср}}$ – средний максимальный кусок руды до дробления, мм;

$d_{\max}^{\text{ср}}$ – средний максимальный кусок руды после дробления, мм.

Фактическую производительность $Q$ определяют по формуле:

$$Q = 3{,}6\frac{q}{t},\ \text{т/ч},$$

где $q$ – количество дробленой руды, кг;

$t$ – время дробления, с.

В выводах по работе следует отразить результаты определения степеней дробления и производительности дробилок.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2
## ГРОХОЧЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу самоцентрирующегося инерционного грохота;
- изучить способ изменения режима работы грохота;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба после дробления в валковой дробилке;
- грохот самоцентрирующийся;
- секундомер;
- набор стандартных лабораторных сит;
- линейка с делениями (штангенциркуль);
- весы;
- совки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию грохота и определить конструктивные и механические параметры.
4. Засыпать пробу в приёмный бункер при закрытом затворе.
5. Включить грохот. Открыть затвор бункера для подачи материала на просеивающую поверхность. Продолжительность грохочения оценивать с точностью до десятых долей секунды: начало – в момент попадания первых зёрен на просеивающую поверхность; окончание – в момент выхода из бункера основной массы материала. В течение опыта необходимо следить за тем, чтобы материал не зависал в бункере. Очистить бункер.
6. Выключить грохот и зачистить поддон, перезапустить грохот несколько раз («пуск-остановка» – два-три раза) до полной очистки.

7. Взвесить надрешётный и подрешётный продукты.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы, определить эффективность грохочения.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 2***

Определение эффективности грохочения.

Существуют несколько методов определения эффективности грохочения, характеризующих полноту перехода частиц менее размера отверстия просеивающей поверхности в подрешётный продукт.

Наиболее общим является метод, рассматривающий эффективность грохочения как отношение массы подрешетного материала ко всей массе материала такой же крупности, содержащейся в руде, поступающей на грохот

$$E_1 = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot 100, \%,$$

где $Q_1$ – масса подрешётного материала (крупность материала $-a+0$ мм), кг;

$Q_2$ – масса материала той же крупности в исходном материале, поступающем на грохочение (крупность материала $-a+0$ мм), кг;

$a$ – размер отверстий просеивающей поверхности грохота, мм.

Однако, на производстве практически трудно взвешивать подрешётный продукт. Для определения эффективности грохочения отбирают пробы исходной руды и надрешётного продукта, определяют в них содержание класса крупности $-d_c+0$ мм. Эффективность грохочения рассчитывают по формуле:

$$E_2 = \frac{\alpha - \vartheta}{\alpha \cdot (100 - \vartheta)} \cdot 10^4, \%$$

где $\alpha$ – массовая доля зерен минус $a$ в исходном продукте, %;

$\vartheta$ – массовая доля зерен минус $a$ в верхнем продукте, %.

В выводах по работе следует привести результаты расчёта эффективности грохочения по двум формулам и сравнить их.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3
## СИТОВЫЙ АНАЛИЗ МЕЛКИХ ПРОДУКТОВ

***1. Цель:***

- изучить методику проведения ситового анализа;

- определить гранулометрический состав продукта;
- изучить конструкцию и работу вибровстряхивателя;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала крупностью –1+0 мм;
- набор стандартных лабораторных сит;
- вибровстряхиватель;
- весы электронные.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию стандартных сит и вибровстряхивателя.
4. Собрать комплект сит и поместить пробу на верхнее сито.
5. Провести ситовый анализ в течение времени, заданного преподавателем.
6. Определить массы полученных классов крупности: содержимое каждого сита перенести на листы бумаги и подписать классы; взвесить полученные классы крупности.
7. Убрать рабочее место в лаборатории.
8. Обработать результаты работы: рассчитать частный и суммарный выходы классов крупности в процентах от исходной навески, построить частную и суммарную гранулометрические характеристики.
9. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 3***

При проведении исследования на обогатимость полезных ископаемых весьма важной операцией является ситовый анализ.

Для производства ситовых анализов используют набор лабораторных стандартных сит. Конструкция стандартных сит представляет собой круглые ободы диаметром 150-300 мм, высотой от 25 до 50 мм, со вставленными в эти ободы ситами. Набор сит собирают в комплект с крышкой и поддоном.

Размеры отверстий смежных сит должны изменяться плавно, с определенной закономерностью. Почти во всех стандартных ситах это осуществляется применением постоянного множителя – модуля ситовой шкалы. Последовательный ряд размеров отверстий сит составляет геометрическую прогрессию – шкалу классификации.

Практическую работу выполняют на наборе сит с модулем 2.

За основание в наборе сит принято сито 200 меш, где 200 – число отверстий на одном линейном дюйме сетки. Размер отверстия этого сита равен 0,071 мм. На основание последовательно устанавливают сита с размерами отверстий 0,16 мм, 0,315 мм, 0,63 мм, 1,25 мм, 2,5 мм. Нижнее сито устанавливают в поддон такого же диаметра.

На верхнее сито загружают пробу материала в количестве 100-150 г, плотно закрывают крышкой, комплект сит устанавливают на вибровстряхиватель и закрепляют.

Продолжительность ситового анализа для данной пробы определяют экспериментально.

Первоначально продолжительность встряхивания принимается равной 10 минутам, после чего содержимое каждого сита переносят на листы бумаги и классы подписывают.

Качество рассева проверяют по классу минус 0,071 мм. Для этой цели класс крупности –0,16+0,071 мм взвешивают, переносят снова на сито 0,071 мм и подвергают ручному рассеву в течение 1 мин.

Если в результате контрольного рассева выход класса крупности минус 0,071 мм меньше 1 % от первоначальной массы класса крупности –0,16+0,071 мм, то рассев можно считать оконченным, каждый класс крупности взвешивают, и рассчитывают выходы классов крупности.

Если выход класса крупности минус 0,071 мм при контрольном рассеве более 1 %, то все классы крупности подвергают повторному рассеву в течение 5 мин.

После дополнительного просеивания снова повторяют контрольный ручной рассев, как это было описано выше, и так до тех пор, пока при контрольном рассеве выход класса крупности минус 0,071 мм не окажется менее 1 %. После этого все полученные классы крупности взвешивают, и результаты ситового анализа заносят в таблицу 3.1.

Расчёты частных выходов осуществляют по формуле выхода из таблицы 1.1.

По данным таблицы 3.1 строят кривые ситового анализа (гранулометрические характеристики) по частным и суммарным выходам. При этом по оси абсцисс откладывают размеры отверстий сит в миллиметрах, а по оси ординат – суммарные и частные выходы классов крупности в процентах.

Пример представления результатов ситового анализа приведён в таблице 3.2 и на рисунке 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты ситового анализа

| Классы крупности, мм | Выход | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Частный | | Суммарный | |
| | г | % | «по плюсу» | «по минусу» |
| +2,5 | | | | 100,0 |
| –2,5+1,25 | | | | |
| –1,25+0,63 | | | | |
| –0,63+0,315 | | | | |
| –0,315+0,16 | | | | |
| –0,16+0,071 | | | | |
| –0,071+0 | | | 100,0 | |
| Итого | | 100,0 | | |

Таблица 3.2 – Результаты ситового анализа дроблёной руды

| Класс крупности, мм | Выход, % | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Частный | | Суммарный | |
| | г | % | «по плюсу» | «по минусу» |
| +2,5 | 15,0 | 8,33 | 8,33 | 100,00 |
| –2,5+1,25 | 12,0 | 6,67 | 15,00 | 91,67 |
| –1,25+0,63 | 20,0 | 11,11 | 26,11 | 85,00 |
| –0,63+0,315 | 25,0 | 13,89 | 40,00 | 73,89 |
| –0,315+0,16 | 35,0 | 19,44 | 59,44 | 60,00 |
| –0,16+0,071 | 55,0 | 30,56 | 90,00 | 40,56 |
| –0,071+0 | 18,0 | 10,00 | 100,00 | 10,00 |
| Итого: | 180,0 | 100,00 | - | - |

Суммарный выход «по плюсу» показывает, какой процент из всей исходной пробы остался бы на данном сите, если бы в данном наборе сит оно было верхним. Расчёт суммарного выхода «по плюсу» осуществляют сверху вниз.

Суммарный выход по «минусу» показывает, какой процент из всей исходной пробы прошел бы через данное сито, если бы в данном наборе сит оно было нижним. Расчёт суммарного выхода по «минусу» осуществляют снизу вверх.

По форме кривой делают вывод о преобладании в пробе крупных или мелких классов.

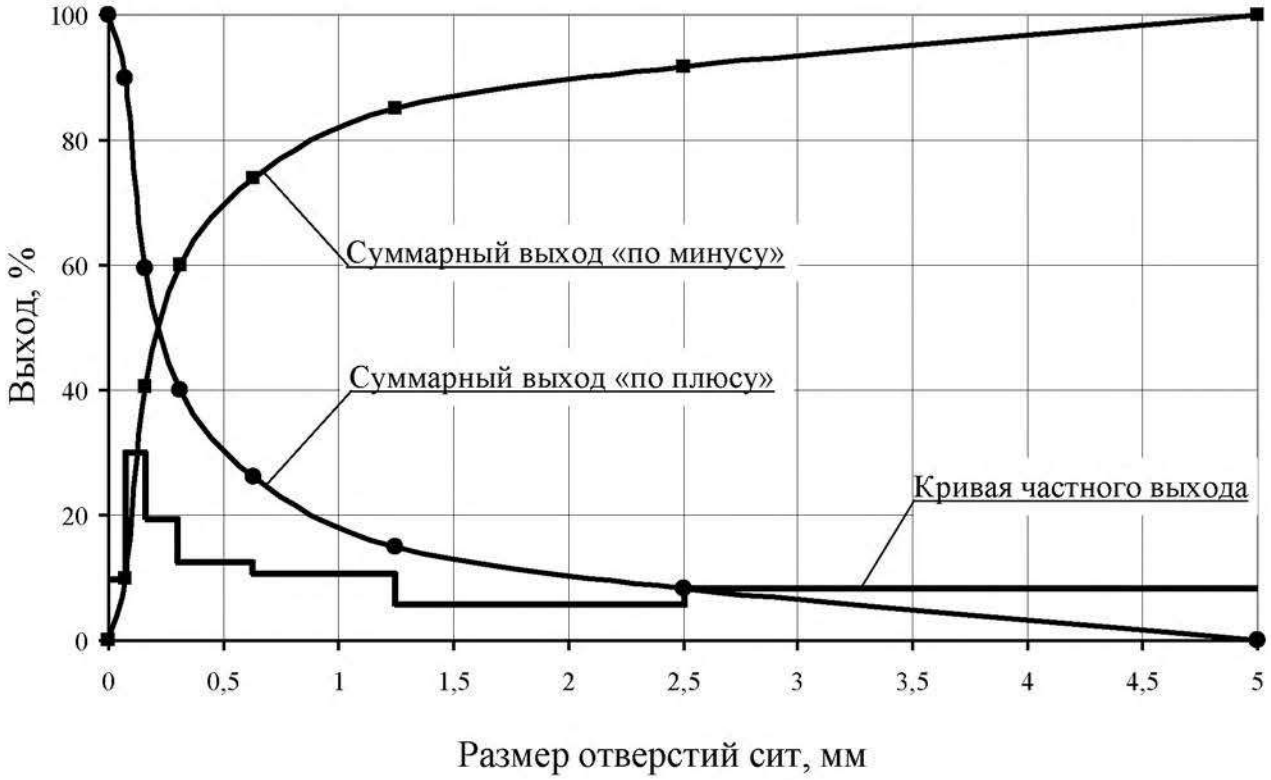



Рисунок 3.1 – Частная и суммарные гранулометрические характеристики

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4
## ОБОГАЩЕНИЕ В ПОРШНЕВОЙ ОТСАДОЧНОЙ МАШИНЕ

Гравитационные процессы обогащения основаны на различии в закономерностях движения различных минералов в той или иной среде под действием сил тяжести или инерционных сил. В большинстве случаев различие в закономерностях движения минералов в среде обусловлено разностью в плотности минералов, но нужно понимать, что это различие может быть обусловлено при разной плотности минералов различными размерами минеральных частиц или различной их формой.

К гравитационным процессам относят: обогащение отсадкой, обогащение на концентрационных столах, в винтовых и центробежных сепараторах, на шлюзах, обогащение в тяжёлых средах, классификация и другие. Гравитационные процессы, в зависимости от среды, в которой происходит обогащение, подразделяют на гидравлические (среда – вода) и пневматические (среда – воздух).

### *1. Цель:*

- изучить конструкцию и работу поршневой отсадочной машины;
- освоить регулировку процесса отсадки;

- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (каменный уголь);
- машина отсадочная поршневая;
- совки;
- весы технические.

Процесс разделения минералов по плотности в вертикальном потоке воды, переменном по направлению и амплитуде, называется ***отсадкой***.

Практическую работу выполняют на гидравлической поршневой двухкамерной отсадочной машине с неподвижным решетом и с боковой разгрузкой тяжёлых фракций (рисунок 4.1).

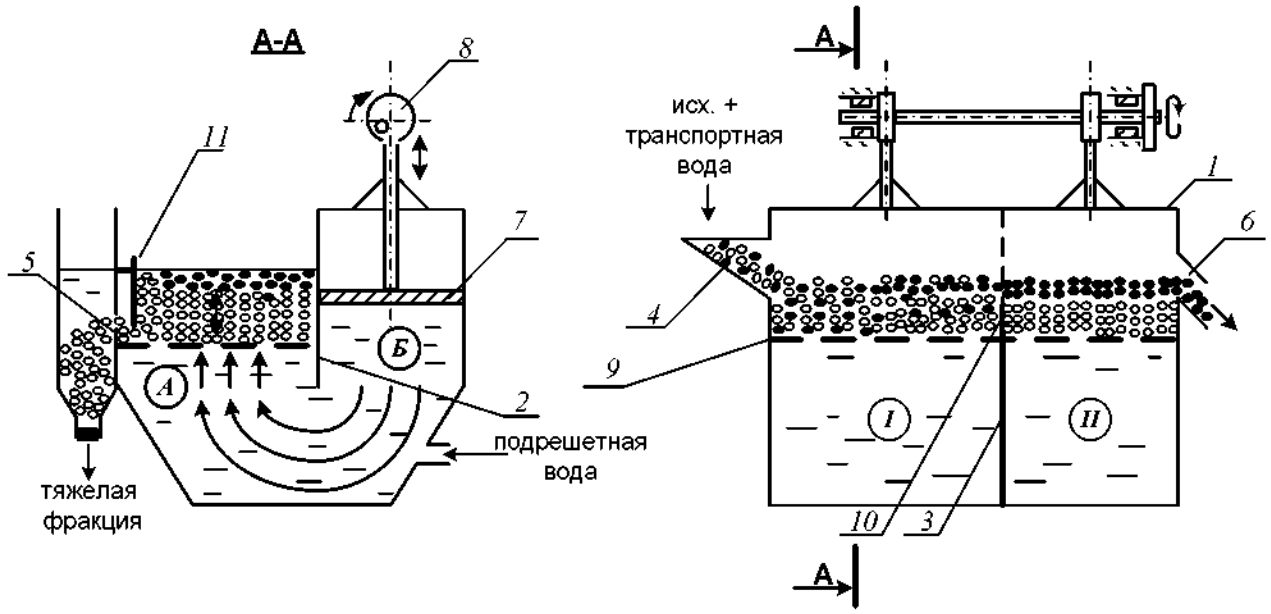



Рисунок 4.1 – Поршневая отсадочная машина

Машина состоит из корпуса 1, который продольной перегородкой 2, не доходящей до дна, разделён на два отделения: отсадочное А и поршневое Б, в котором расположены поршни 7, приводимые в движение эксцентриковым приводом 8.

Корпус машины разделён в поперечном направлении перегородкой 3 на два самостоятельных отделения. В отделении *I* со стороны загрузочной коробки 4 во время работы происходит накопление тяжёлой фракции (породы); в отделении *II* – сростков тяжёлого и лёгкого минералов (промежуточного продукта), а лёгкая фракция через сливной порог 6 выносится водой.

Расслоение обогащаемого материала отсадочной постели по плотности происходит в машине под действием вертикальных пульсаций подрешётной воды. При движении воды вверх зёрна меньшей плотности поднимаются выше, чем зёрна большей плотности (более тяжёлые). При движении потока воды вниз, наоборот, зёрна большей плотности оседают быстрее лёгких зерен. Так происходит постепенное расслоение материала, находящегося в машине, по плотностям.

Движение каждого минерального зерна и всей отсадочной постели вдоль машины по отсадочному решету 9 происходит за счёт транспортной воды и избытка подрешётной воды.

В начале работы, спустя некоторое время после начала загрузки исходного продукта в отделении *I* накапливается слой материала – отсадочная постель. Когда общая высота слоя материала будет больше высоты порога 10, разделяющего отсадочное решето в поперечном направлении, лёгкая фракция и часть тяжёлой фракции будут переходить во второе отделение машины *II*. Во втором отделении слой материала, накапливаясь и продвигаясь вдоль машины, достигает сливного порога 6, по которому лёгкие минералы вместе с водой скатываются, разгружаясь из машины.

Чтобы зёрна, имеющие большую плотность, не разгружались через сливной порог 6 при накоплении их в отделении *II* примерно до половины высоты сливного порога, открывают заслонки 11 в обоих отделениях, приподнимая их на такую высоту, чтобы в щели под заслонкой проходили зёрна тяжёлого минерала, но не уходили зёрна лёгкого минерала.

Разгрузку тяжёлой фракции в отделении *I* регулируют заслонкой 11 таким образом, чтобы получать в разгрузке только тяжёлые зерна (породу), а в отделении *II* – разгружать породу и сростки так, чтобы в слив уходил чистый уголь без частиц породы.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры поршневой отсадочной машины.
3. Провести обогащение каменного угля с получением трёх продуктов: лёгкой фракции (уголь), тяжёлой фракции (породы) и промежуточной фракции (промпродукта).
4. Открыть краны на трубопроводах, подающих транспортную и подрешётную воду и заполнить машину водой. Под разгрузочный порог подставить приёмник лёгкой фракции (коробка с

перфорированным дном).

5. Когда вода начнёт переливаться через порог 6, включить привод поршней машины. После этого начать загружать обогащаемый материал в приёмную коробку 4 вручную совками и продолжать загрузку до конца опыта.
6. При работе отсадочной машины необходимо следить за накоплением материала в отделениях *I*, *II*. Когда слой тяжёлых (породных) частиц достигнет примерно половины высоты сливного порога 6 во втором отделении, открыть заслонки 11, регулируя высоту их подъема, как указывалось выше. С этого момента начинается разгрузка породной и промпродуктовой фракции в боковые карманы.
7. В ходе работы необходимо следить за тем, чтобы отсадочная постель хорошо разрыхлялась в восходящем потоке воды и была подвижной – перемещалась импульсами вдоль машины. Последнее достигается одним или сочетанием следующих факторов оперативной регулировки:
   - изменением количества подаваемой подрешётной воды;
   - изменением количества загружаемого в машину обогащаемого продукта;
   - изменением величины разгрузочных щелей.

   Следует знать, что кроме этих факторов регулирования работы машины можно осуществлять изменением числа ходов поршней в минуту и величиной хода поршней (размахом колебаний). Значение этих факторов подбирают и устанавливают при настройке машины для обогащения того или иного исходного материала заранее, а при работе машины менять эти факторы не представляется возможным.
8. При работе машины необходимо следить за наполнением приёмников тяжёлой и промпродуктовой фракций, расположенных сбоку машины. Когда слой материала в приёмниках достигнет уровня разгрузочных щелей, опыт прекращают в такой последовательности:
   - прекратить загрузку материала в машину;
   - отключить привод машины;
   - прекратить подачу воды в машину.
9. Полученные продукты обогащения разгрузить, произвести обезвоживание дренированием и взвесить. Рассчитать выходы продуктов разделения.

10. Убрать рабочее место в лаборатории.
11. Обработать результаты работы.
12. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 4***

Массовые доли золы в продуктах задаёт преподаватель, остальные показатели рассчитывают по уравнению баланса и по известным формулам. Результаты расчета представляют в виде таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты обогащения угля на поршневой отсадочной машине

| **Продукты обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля золы, $A^d$, %** | **Извлечение золы, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **кг** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Промпродукт | | | | |
| Хвосты (порода) | | | | |
| Итого: | | 100,0 | $A^d_{исх}$ | 100,0 |

В выводах по работе следует описать личные наблюдения за возможностью регулирования процесса отсадки в машине, сравнить качество полученных продуктов разделения на основании их визуальной оценки.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5
## ОБОГАЩЕНИЕ НА СОТРЯСАТЕЛЬНОМ КОНЦЕНТРАЦИОННОМ СТОЛЕ

Обогащение мелких классов крупности (менее 3-4 мм) оловянных, вольфрамовых, марганцевых и им подобных руд и углей осуществляют на сотрясательных концентрационных столах.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию сотрясательного концентрационного стола;
- освоить регулировку процесса разделения на деке концентрационного стола при визуальном наблюдении за процессом разделения;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба измельчённой руды массой 5-7 кг;
- стол сотрясательный концентрационный СК-1;

- совки;
- весы технические.

Стол (рисунок 5.1) состоит из деки 1 с рифлями 2, привода деки 3, механизма изменения угла наклона деки 4, питающего жёлоба 5, жёлоба для подачи смывной воды 6.

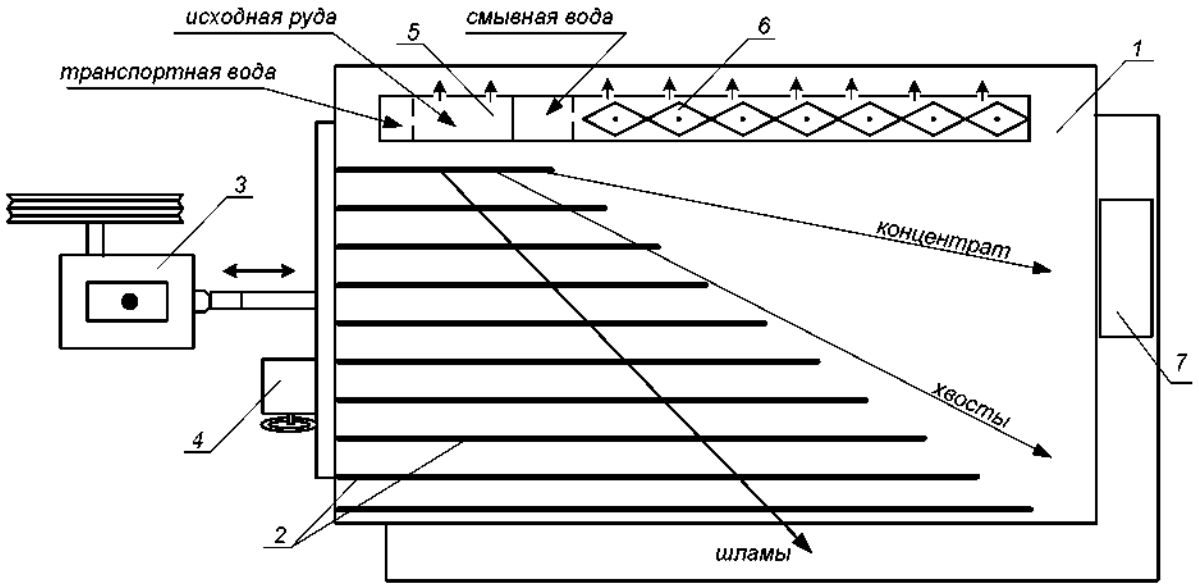



Рисунок 5.1 – Схема концентрационного стола

Разделение минералов по плотности на деке стола происходит за счёт различия в направлении движения лёгких и тяжёлых частиц по деке стола при одновременном действии на частицы минералов сил инерции, силы тяжести и гидродинамического напора смывной воды.

Вследствие сегрегации частиц в пространстве между рифлями тяжёлые частицы имеют больший контакт с декой и за счёт возвратно-поступательных движений деки продвигаются преимущественно вдоль неё. Лёгкие частицы, занимая верхний слой, испытывают большее воздействие потока смывной воды и движутся преимущественно поперек деки стола. На деке стола образуется «веер» частиц, располагающихся сверху-вниз по схеме: мелкие тяжёлые частицы → крупные тяжёлые, мелкие лёгкие → крупные лёгкие → шламы.

Частицы различных по плотности минералов, как правило, отличаются по цвету или блеску, что существенно упрощает наблюдение за образованием и распределением веера продуктов на деке стола.

Изменяя скорость смывного потока воды, можно «расширить» или «сузить» веер на гладкой поверхности деки (за рифлями).

Скорость смывного потока воды регулируют двумя факторами: расходом смывной воды и углом поперечного наклона деки стола.

Качество концентрата зависит от того, какую часть веера (верхнюю) направить в приёмник концентрата. Регулирование количества отсекаемого концентрата из веера частиц осуществляют передвижным жёлобом или перемещением приёмника концентрата вдоль среза деки.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры сотрясательного концентрационного стола;
3. Включить привод стола. Открыть краны на трубопроводе, подающем воду в питающий жёлоб и в жёлоб смывной воды. Отрегулировать равномерность потока смывной воды по деке стола поворотом резиновых флажков в жёлобе.
4. Настроить процесс разделения. Для этого в приёмный жёлоб загрузить несколько совков исходной руды, которая смывается водой на деку стола. Наблюдая за образованием веера частиц на деке стола, продолжать периодически загружать руду в приемный жёлоб. Отрегулировать ширину и чёткость веера частиц изменением расхода смывной воды и изменением угла наклона деки с помощью штурвала механизма 4 (рисунок 5.1). При получении чёткого веера частиц на деке стола регулирование стола прекратить.
5. Пробу постепенно совком загрузить в приёмный жёлоб. При этом необходимо наблюдать за веером частиц и при необходимости отрегулировать его. Кроме того, нужно следить за шириной части веера частиц, отсекаемой в приёмник концентрата с тем, чтобы забирать в приёмник концентрата постоянную ширину полосы концентрата. При необходимости приёмник можно передвигать.
6. После окончания загрузки руды выждать, пока вся руда не пройдёт по деке и не разгрузится в соответствующие приёмники.
7. Из полученного концентрата слить воду и взвесить его. Определить массу концентрата с учётом его влажности.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 5***

Массы продуктов разделения и рассчитанные технологические показатели обогащения на концентрационном столе занести в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Результаты обогащения на концентрационном столе

| **Продукты обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля извлекаемого компонента, %** | **Извлечение компонента, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **кг** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Хвосты (порода) | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

Все расчёты осуществляют по известным формулам.

По результатам опыта делают выводы, в которых следует отразить личные наблюдения за процессом разделения минералов на деке стола и за возможностью регулирования процесса разделения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6
## ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УГЛЯ

Фракционный анализ угля – это разделение угля по плотности на фракции, осуществляемое в тяжёлых средах с заданными плотностями тяжёлых сред. В качестве тяжёлых сред в лабораторных условиях применяют чаще всего водные растворы хлористого цинка ($ZnCl_2$).

***1. Цель:***

- изучить методику определения фракционного состава угля;
- изучить методику построения кривых обогатимости угля;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (каменный уголь) массой 5-10 кг;
- набор бачков с раствором хлористого цинка различной плотности;
- дешламационный бачок с сетчатым дном;
- бачки для ссыпания фракций различной плотности;
- сетчатый черпак для снятия всплывших фракций;
- совки;
- ареометр для проверки плотности растворов хлористого цинка;

- кружка для проверки плотности раствора хлористого цинка;
- резиновые перчатки для каждого члена бригады;
- весы технические.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Взвесить пробу.
3. Пробу засыпать в дешламатор (бачок с сетчатым дном) и подвергнуть дешламации орошением сильной струей воды или многократным опусканием и встряхиванием дешламатора с навеской угля в бачок с водой.
4. Дать воде стечь из дешламатора, после чего опустить дешламатор с исследуемой навеской в бачок с раствором хлористого цинка с наименьшей плотностью.
5. Всплывшую часть исследуемой навески снять сетчатым черпаком, давая стечь в бачок раствору хлористого цинка, и ссыпать в бачок с сетчатым дном, прополоскать чистой водой, высушить до воздушно-сухого состояния, взвесить и записать массу каждой фракции в рабочую тетрадь. После этого определить процентный выход её от исходной пробы. Плотность данной фракции будет меньше плотности раствора, в котором она всплыла.
6. Потонувшую часть навески, оставшуюся на дне первого дешламатора, вместе с дешламатором вынуть из первого бачка, дать стечь раствору (в тот же бачок) и перенести в бачок с раствором последующей плотности. Со всплывшей и потонувшей частью поступают так же, как и в предыдущем случае. Плотность зёрен всплывшей части будет лежать в пределах плотности смежных растворов.
7. Повторить пункты 5 и 6 необходимое количество раз.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 6***

На основании результатов фракционного анализа и результатов анализа каждой фракции на определение массовой доли золы (негорючей массы) строятся кривые обогатимости угля.

Кривые обогатимости угля позволяют решать различные задачи, связанные с выбором и расчётом технологических схем обогащения,

а также рассчитать теоретические (наилучшие) результаты процесса обогащения.

В данной работе фракционный состав угля определяют студенты, а зольность каждой фракции задает преподаватель.

Результаты расслойки пробы угля заносят в таблицу 6.1.

Таблица 6.1 – Фракционный состав угля

| Плотность фракций, кг/м$^3$ | Исходный уголь | | | Всплывшая фракция | | Потонувшая фракция | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Выход | | Зольность $A^d$, % | Выход $\gamma_i$, % | Зольность $A_i^d$, % | Выход $\gamma_i$, % | Зольность $A_i^d$, % |
| | кг | % | | | | | |
| < 1300 | | | | | | 100,0 | |
| 1300-1400 | | | | | | | |
| 1400-1500 | | | | | | | |
| 1500-1600 | | | | | | | |
| 1600-1700 | | | | | | | |
| > 1700 | | | | 100,0 | | | |
| Итого: | | 100,0 | | - | - | - | - |

Извлечение золы в каждую фракцию рассчитывают по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma_i \cdot A_i^d}{A^d},$$

где $\gamma_i$ – выход фракции, %;

$A^d$ – массовая доля золы (зольность) в исходном угле, %;

$A_i^d$ – массовая доля золы (зольность) во фракции, %;

$\varepsilon_i$ – извлечение золы во фракцию, %.

По данным фракционного состава угля строят кривые обогатимости угля, а также определяют категорию обогатимости угля.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7
## КОЛЛЕКТИВНАЯ ФЛОТАЦИЯ СУЛЬФИДНОЙ РУДЫ

Флотационный метод обогащения основан на различии в смачиваемости водой поверхности ценных минералов и минералов пустой породы.

Для создания гидрофобности (несмачиваемости) поверхности ценных минералов тонкоизмельченной руды, находящейся в водной среде, добавляют реагенты-собиратели. Благодаря гидрофобности, ценные минералы прикрепляются к пузырькам воздуха и поднимаются вместе с ними на поверхность пульпы, образуя минерализованный

пенный слой, который удаляют из камеры флотомашины. Минералы пустой породы смачиваются водой и остаются в объёме пульпы.

Флотационный метод широко применяют для обогащения сульфидных руд цветных металлов. В этом случае наиболее распространенными реагентами-собирателями являются ксантогенаты. Расход ксантогенатов при флотации сульфидных руд обычно не превышает 100 г/т. В процесс эти реагенты подают в виде водных растворов.

Для создания на поверхностях сульфидных минералов необходимой для закрепления ксантогенатов окисленной пленки в операцию измельчения руды подают реагент-регулятор среды, в качестве которого обычно используют известь или соду. Расходы их, в зависимости от вещественного состава полезного ископаемого, могут изменяться от 200 до 1500 г/т.

Для повышения механической прочности пузырьков воздуха, в результате которого улучшаются условия прилипания к ним ценных минералов, и увеличивается устойчивость флотационной пены, используют реагенты-пенообразователи. Одним из наиболее распространенных в настоящее время пенообразователей является реагент Т-92. Его расходы обычно колеблются от 20 до 100 г/т руды.

Кроме вышеперечисленных типов флотационных реагентов при селективной флотации руд используют реагенты-активаторы и подавители, которые усиливают или ослабляют действие собирателей.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу лабораторной флотационной машины;
- изучить способы изменения режима работы флотомашины;
- освоить методику определения объёма раствора реагента при заданном расходе реагента;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба (250 г сульфидной руды класса крупности –3+0 мм);
- мельница стрежневая;
- рольганги;
- машина флотационная лабораторная механического типа конструкции Механобр;
- реагенты флотационные (сода или известь, бутиловый ксантогенат, Т-92);
- чашки фарфоровые;
- чашки металлические для сбора продуктов;

- промывалки;
- посуда химическая;
- бумага фильтровальная;
- весы электронные.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Изучить конструкцию и определить конструктивные параметры лабораторной флотационной машины (рисунок 7.1).
3. Изучить схему флотационного опыта (рисунок 7.2).
4. Очистить стержневую мельницу, в которой будет проводиться измельчение руды, от образовавшейся ржавчины. Для этого поместить в неё 300 г гранита и 300 $см^3$ воды. Масса стержней должна составлять 3000 г. Заполненную мельницу плотно закрыть крышкой с резиновой прокладкой и поместить на рольганги, включив их на 5-10 минут.
5. Подготовить пробу, 250 $см^3$ воды и навеску реагента: соды или извести (вид реагента и его расход задаёт преподаватель).
6. Остановить рольганги, вылить содержимое мельницы, промыть водой её внутреннюю поверхность и стержни.
7. В промытую мельницу с загруженными в неё стержнями сначала поместить отмеренное количество воды, затем пробу сульфидной руды и навеску реагента – регулятора среды. Измельчать в течение времени, указанного преподавателем, обычно 10-15 минут.
8. За период измельчения необходимо подготовить реагенты: собиратель и пенообразователь. Их расходы задаёт преподаватель в г/т руды. Необходимо самостоятельно определить объёмы растворов реагентов, подаваемых в процесс флотации.
9. По истечении заданной продолжительности измельчения снять мельницу с рольгангов, перенести её содержимое с помощью промывалки в камеру флотомашины. При этом нужно следить за тем, чтобы количество добавляемой воды было минимальным. В свободную от пульпы мельницу загрузить стержни, залить воду до бортика и поставить на место хранения.
10. Закрепить камеру 2 на корпусе флотомашины 1, залить в случае необходимости воду и включить двигатель. Через 2 минуты перемешивания в камеру 2 добавить необходимый объём раствора ксантогената и после минутного перемешивания в пульпу ввести пенообразователь.

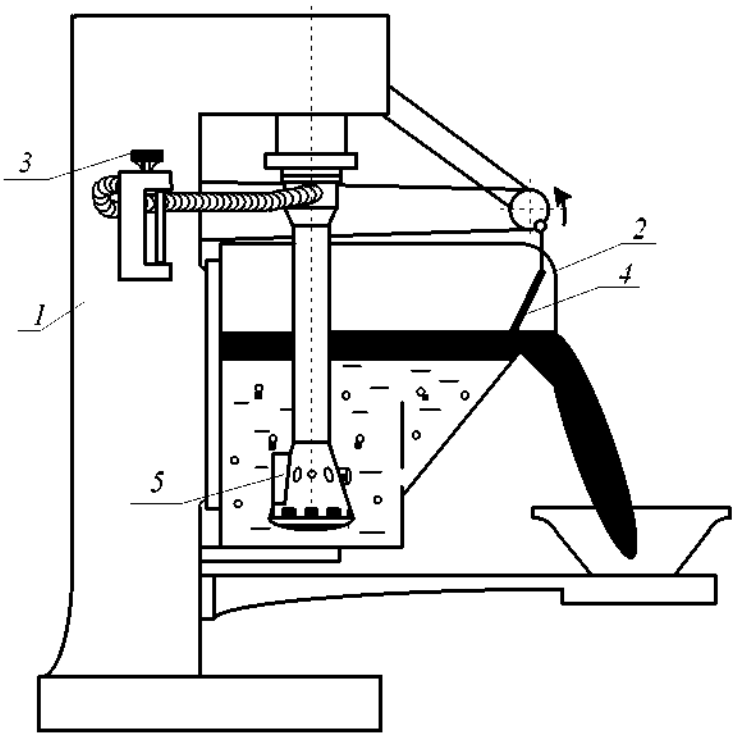



Рисунок 7.1 – Лабораторная флотационная машина

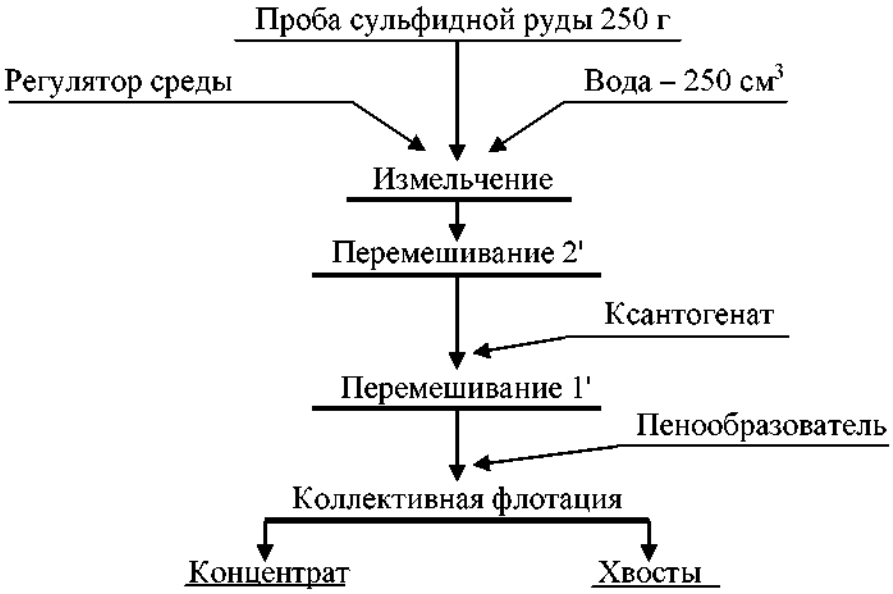



Рисунок 7.2 – Схема флотационного опыта

11. Осторожно повернуть вентиль воздушного крана 3, обеспечив этим засасывание воздуха в камеру для создания на её поверхности слоя минерализованной пены.
12. Включить пеносъёмник 4. В момент снятия первой порции пены зафиксировать время начала флотации. По мере снижения уровня пульпы в камере флотомашины добавлять воду из про-

мывалки, обмывая при этом её стенки и пеносъёмник от налипших минеральных частиц. Периодически следует отбирать пробу от пенного продукта в фарфоровую чашку. Постепенно нагруженность пены снижается, меняется и её цвет. Конец флотации фиксируется по отсутствию сульфидных минеральных частиц в фарфоровой чашке.

13. Закрыть воздушный кран 3, остановить пеносъёмник 4, выключить двигатель флотомашины. Пенный продукт отфильтровать на вакуум-фильтре и взвесить. Камерный продукт (хвосты) вылить в канаву.
14. Пустую камеру заполнить водой, закрепить на корпусе флотомашины и включить двигатель. Промыть машину в течение 2-3 минут. Затем ополоснуть из промывалки блок аэратора 5. Чистую камеру и блок аэратора протереть чистой тряпкой.
15. Убрать рабочее место в лаборатории.
16. Обработать результаты работы.
17. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 7***

Методика определения объёма раствора реагента при заданном расходе реагента.

Например, заданный расход бутилового ксантогената составляет 100 г/т руды. Составим и решим пропорцию:

$10^6$ г (1 т) руды – 100 г ксантогената

250 г руды – X г ксантогената

$$X = \frac{100\,\text{г} \cdot 250\,\text{г}}{10^6\,\text{г}} = \frac{2{,}5\,\text{г}}{10^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{г}$$

Следует учесть, что ксантогенат используют во флотации в виде 1 % растворов, то есть в 100 $см^3$ раствора содержится 1 г ксантогената.

Составив пропорцию и решив её, определим объём раствора, который следует подать в камеру флотомашины:

100 $см^3$ раствора – 1 г ксантогената

$V$ $см^3$ раствора – $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ г ксантогената

$$V = \frac{100\,\text{см}^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{г}}{1\,\text{г}} = 2{,}5\,\text{см}^3$$

Результаты расчёта показателей флотации занести в таблицу 7.1.

Таблица 7.1 – Показатели коллективной флотации

| Наименование продуктов обогащения | Выход | | Массовая доля сульфидных минералов, % | Извлечение сульфидных минералов, % |
|---|---|---|---|---|
| | г | % | | |
| Концентрат | | | | |
| Хвосты | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

Массовую долю сульфидов в продуктах обогащения (β, ϑ) или в исходной руде (α) и в одном из продуктов задаёт преподаватель.

В конце отчёта по выполненной работе делается вывод, в котором анализируются полученным результатам и намечаются способы их повышения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8
## МАГНИТНАЯ СЕПАРАЦИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Практическую работу по магнитной сепарации выполняют на лабораторном магнитном сепараторе для слабомагнитных руд. Результаты разделения минералов по их магнитной восприимчивости зависят от вещественного состава руды, крупности обогащаемого материала, напряжённости магнитного поля, производительности, высоты рабочей зоны и положения разделительного шибера. При выполнении работы потребуется получить зависимости выходных показателей качества процесса от указанных выше переменных факторов.

***1. Цель:***

- изучить конструкцию и работу роликового магнитного сепаратора;
- изучить влияние некоторых факторов на процесс магнитной сепарации;
- развить навыки анализа полученных данных.

***2. Оборудование и материалы:***

- проба материала (200-500 г руды класса крупности -3+0 мм);
- сепаратор магнитный роликовый;
- весы электронные;
- чашки лабораторные;
- щётка для чистки сепаратора.

Магнитный сепаратор (рисунок 8.1) состоит из основания 1 с закреплённым на нём бункером 2 с регулировочным шибером 3. Бункер 2 установлен над вибролотком 4, выполненным из немагнитного материала и которого осуществляется подача материала в рабочую зону магнитной системы, образованной магнитопроводом 5 и профилированным роликом 6. На магнитопроводе установлены катушки электромагнита 7, подключенные к выпрямителю тока 8, содержащего приборы измерения тока 9 и напряжения 10. На лицевой панели выпрямителя установлены переключатели режима работы, выключатель и регулятор нагрузки по току. Регулирование выходов отдельных фракций осуществляется шибером 11, а очистка ролика 6 щёткой 12.

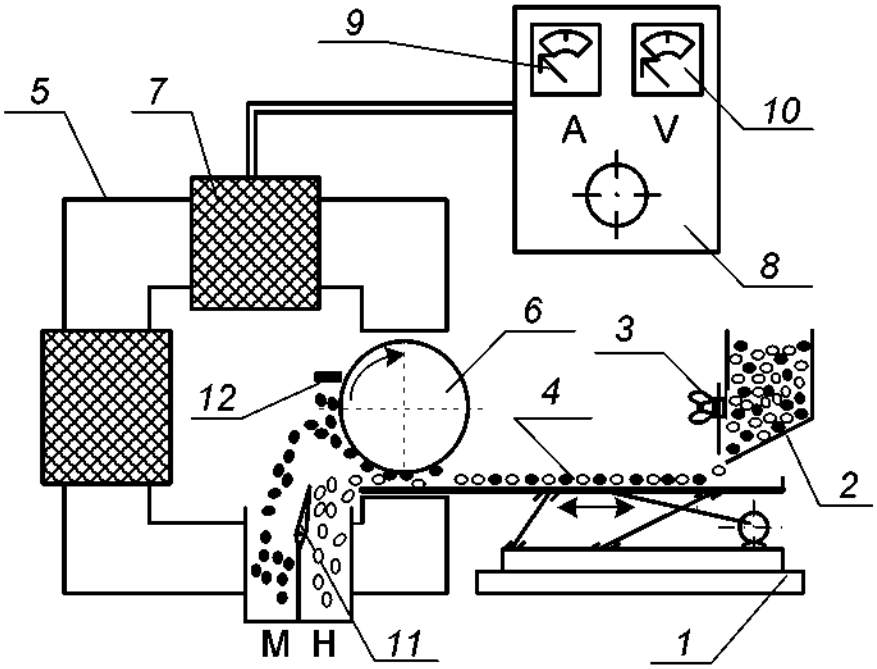



Рисунок 8.1 – Схема магнитного сепаратора

Перед опытом включают выпрямитель 8, устанавливают необходимое значение тока в обмотке электромагнита 7, включают привод вибролотка 4 и ролика 6. Материал из бункера 2 по вибролотку поступает в рабочий зазор, где и происходит разделение частиц по удельной магнитной восприимчивости. Частицы, имеющие большую удельную магнитную восприимчивость, выносятся роликом 6 из рабочего зазора, счищаются щёткой 12 и попадают в приёмник магнитной фракции. Регулирование производительности осуществляют смещением шибера 3. Положение шибера 3 изменяют в пределах от 10 до 30 мм, ток в обмотке электромагнита изменяют от 0 до 8 А.

***3. Ход работы:***

1. Получить у преподавателя пробу.
2. Определить массу пробы.
3. Изучить конструкцию и определить конструктивные и механические параметры роликового магнитного сепаратора.
4. Подключить сепаратор и выпрямитель к сети переменного тока.
5. Установить заданные значения настроек сепаратора (положение шибера, сила тока).
6. Загрузить исходный материал в бункер и зафиксировать время начала и конца опыта.
7. Полученные продукты взвесить, выполнить визуальную оценку, провести их анализ.
8. Убрать рабочее место в лаборатории.
9. Обработать результаты работы.
10. Составить отчёт по выполненной работе.

***Пояснения по обработке результатов в работе 8***

Полученные результаты разделения магнитной сепарацией занести в таблицу 8.1.

Таблица 8.1 – Результаты магнитной сепарации

| № опыта | Наименование продукта | Выход | | Сила тока, А | Положение шибера, мм |
|---|---|---|---|---|---|
| | | г | % | | |
| 1 | Магнитный | | | 0,5 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 2 | Магнитный | | | 1,0 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 3 | Магнитный | | | 2,0 | 20 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 4 | Магнитный | | | 1,0 | 10 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |
| 5 | Магнитный | | | 1,0 | 30 |
| | Немагнитный | | | | |
| | Исходный продукт | | 100,0 | | |

Используя данные таблицы 8.1 построить экспериментальные зависимости количественных показателей процесса магнитной сепарации от переменных факторов:

$$\gamma_м = f(I) \text{ для } h = 20 \text{ мм}$$

$$\gamma_м = f(h) \text{ для } I = 1 \text{ А}.$$

где $I$ – сила тока в катушках, А;

$h$ – положение шибера, мм.

Сделать вывод о влиянии силы тока и положения шибера на получаемые технологические показатели.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Комлев, С.Г.* Основы обогащения полезных ископаемых: учебное пособие / С.Г. Комлев // Урал. гос. горный ун-т. – 5-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 153 с.

2. *Колтунов, А.В.* Дробление, измельчение, грохочение: учебное пособие / А.В. Колтунов, С.Г. Комлев // Урал. гос. горный ун-т. – 2-е изд., стереотип. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 122 с.

3. *Морозов Ю.П.* Флотационные методы обогащения: конспект лекций / Ю.П. Морозов // Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. – 155 с.

4. ГОСТ 2.105-95 «Общие требования к текстовым документам».

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Пример оформления титульного листа

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

**ФГБОУ ВО**
**«УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА «ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ»**

# ОТЧЁТ
## ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

по дисциплине:
**«Обогащение полезных ископаемых»**

**Руководитель**
**проф., д.т.н.** _____ **Е. Ф. Цыпин**

**Студент**
**группы ОПИ-00** _____ **А. В. Иванов**

Екатеринбург, 2018

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Правила и примеры оформления надписей к таблицам и рисункам

**Таблицы** следует располагать в тексте сразу же после первого упоминания их или на следующей странице. В тексте слово «таблица» пишется полностью с указанием порядкового номера. Заголовок таблицы выполняется без абзацного отступа с выравниванием «по центру». Точка в конце заголовка не ставится. Между основным текстом, заголовком таблицы и самой таблицей – пустая строка. Размер шрифта в таблице должен быть меньше размера основного текста (например, основной текст – 14, в таблице – 13 (12) и меньше).

Таблица 1 – Результаты флотационного обогащения

| **Наименование продуктов обогащения** | **Выход** | | **Массовая доля полезного компонента, %** | **Извлечение полезного компонента, %** |
|---|---|---|---|---|
| | **г** | **%** | | |
| Концентрат | | | | |
| Промпродукт | | | | |
| Хвосты | | | | |
| Исходная руда | | 100,0 | | 100,0 |

**Рисунок** вставляется после первого упоминания о нём в тексте. В тексте слово «рисунок» пишется полностью с указанием порядкового номера.

Наименование схемы, рисунка делается под рисунком и располагается симметрично относительно поля рисунка. Под наименованием рисунка после двоеточия помещают расшифровку обозначений и поясняющие записи.

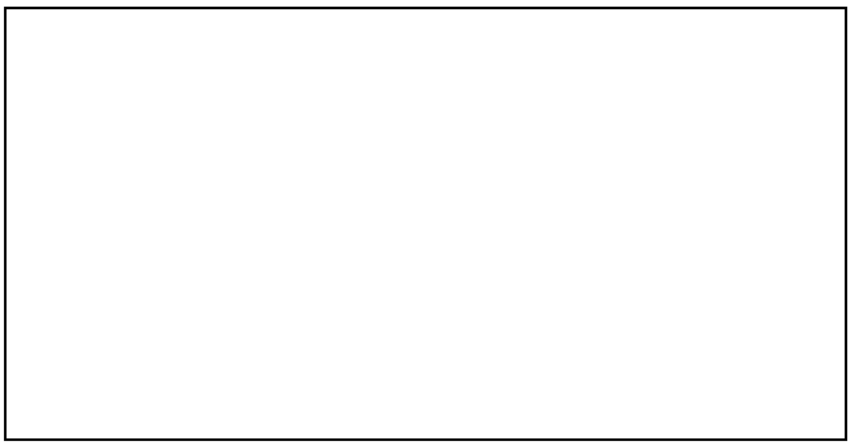


Рисунок 1 – Схема устройства оборудования:
1 – …; 2 – …

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор УГГУ
по учебно-методическому комплексу

_____С. А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.35.04 ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

форма обучения: очная, заочная

Автор: Пелевин А. Е., проф., д.т.н.

Одобрена на заседании кафедры

Обогащения полезных ископаемых
*(название кафедры)*

Зав. кафедрой _____
*(подпись)*

Козин В. З.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 29.09.2020
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией факультета

горно-механического
*(название факультета)*

Председатель _____
*(подпись)*

Осипов П. А.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 14.10.2020
*(Дата)*

Екатеринбург
2021

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ..... 3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ..... 4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса ..... 4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам ..... 5
Подготовка и написание контрольной работы ..... 6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) ..... 7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ..... 8
Подготовка к зачёту ..... 8
Подготовка к экзамену ..... 8

# ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

## Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

– рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

– изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
– изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– составление плана проведения эксперимента;
– составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
– аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

**Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

– чтение основной и дополнительной литературы;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– работа с конспектом лекций;
– ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

– решение задач по образцу и вариативных задач;
– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- -во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

**Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### Подготовка к экзамену

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГЕОДЕЗИЯ»

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

форма обучения: очная, заочная

Составитель: Акулова Е.А.

| | |
|---|---|
| Одобрен на заседании кафедры | Рассмотрен методической комиссией факультета |
| Геодезии и кадастров | Горно-механического |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| | *(подпись)* |
| Акулова Е.А. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол №1-2021/2022от 20.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

Г. П. КОЗИНА

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических работ

по дисциплине «Геодезия»

для студентов очного и заочного обучения

направления подготовки (специальности)
*21.05.04 Горное дело*
(уровень специалитета)

СОДЕРЖАНИЕ


| | | |
|---|---|---|
| 1. | РАБОТА С ТОПОГРАФИЧЕСКИМИ КАРТАМИ | 4 |
| 1.1. | Определение расстояний | 6 |
| 1.2. | Определение географических коорданат | 7 |
| 1.3. | Определение прямоугольных координат | 7 |
| 1.4. | Определение положения точки относительно осевого меридиана зоны | 8 |
| 1.5. | Определение дирекционного угла, истинного азимута и магнитного азимута линии | 8 |
| 1.6. | Определение отметок точек и превышения между точками | 9 |
| 1.7. | построение профиля местности по заданному направлению | 10 |
| 1.8. | Определение крутизны ската | 11 |
| 1.9. | Проектирование линии с заданной крутизной ската | 12 |
| 1.10. | Измерение площадей по топографическим картам полярным планиметром | 15 |
| 2. | РАБОТА С АЭРОФОТОСНИМКАМИ | 17 |
| 2.1. | Привязка аэроснимка к топографической карте | 17 |
| 2.2. | Определение масштаба аэрофотоснимка и высоты фотографирования | 18 |
| 3. | СОСТАВЛЕНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ПЛАНА | 20 |
| 3.1. | Построение координатной сетки | 20 |
| 3.2. | Нанесение точек съемочного обоснования по координатам | 22 |
| 3.3. | Нанесение ситуации, точек рельефа и проведение горизонталей | 23 |
| 3.4. | Вычерчивание топографического плана | 25 |
| 4. | ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ ТРАССЫ | 27 |
| 4.1. | Обработка результатов нивелирования | 27 |
| 4.2. | Построение профиля | 30 |
| 4.3. | Проектирование по прифилю | 32 |
| 5. | РАБОТА С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПРИБОРАМИ | 34 |
| 5.1. | Измерение горизонтальных и вертикальных углов | 34 |
| 5.2. | Измерение расстояний нитяным дальномером | 37 |
| 5.3. | Измерение превышений | 38 |

# I. РАБОТА С ТОПОГРАФИЧЕСКИМИ КАРТАМИ

Для современных топографических карт установлены следующие масштабы: 1:1 000 000, 1:500 000, 1:300 000, 1:200 000, 1:100 000, 1:50 000, 1:25 000, 1:10 000.

Топографические карты широко используются в народном хозяйстве для решения различных инженерных задач и служат основой для создания карт специального назначения.

Листы топографических карт различных масштабов объединены специальной системой разграфки и номенклатуры, основой которой является лист карты масштаба 1:1000 000. Каждый лист топографической карты ограничен с севера и юга параллелями, а с запада и востока – меридианами. Линии меридианов и параллелей образуют внутреннюю географическую рамку листа топографической карты, а их пересечение – углы рамки, которым соответствуют географические координаты, подписываемые на карте ( широта $\varphi$ и долгота $\lambda$ ). Например, координаты северо-западного угла рамки (рис. 1.1.).

$$\varphi = 54^0 20' \ , \ \lambda = 14^0 15'$$

Параллельно линиям географической раски с внешней ее стороны на карте показывается минутная рамка, линии которой разделены на черные и белые интервалы. Длины интервалов по северной и южной сторонам рамки соответствуют одной минуте долготы, а по западной и восточной – одной минуте широты.

Каждый интервал минутной рамки разбит точками на интервалы по 10". С помощью минутной рамки определяют географические координаты точек на карте: широта $\varphi$ и долгота $\lambda$ .

Для определения плоских прямоугольных координат точек на топографических картах наносится прямоугольная координатная сетка.

Линии координатной сетки проходят параллельно осям координат зоны, в которой расположен данный лист. Обычно линии координатной сети проходят через 1 км. Оцифровка линий координатной сетки дается у их выходов за географической рамкой (рис. 1.1). Полные абсциссы и ординаты в (километрах) подписываются на выходах крайних линий данного листа. Остальные линии подписываются двумя последними цифрами.

Например:

абсциссы: 6019, 20, 21, 22, 6023,

ординаты: 3452, 53, 54, 3455.

Листы топографических карт сопровождаются зарамочным оформлением. Над северной рамкой указывается номенклатура листа, его название, система координат (рис. 1.1.). Под южной рамкой указывается численный и линейный масштабы карты, высота сечения рельефа, система высот, данные о склонении магнитной стрелки и сближении меридианов, график заложений, вызодные данные, указывающие метод и год создания карты.

Между минутной и внешней рамками помещены номенклатуры смежных листов карт того же масштаба. На топографических картах специальными условными знаками изображаются контуры и рельеф местности, а также прочие сведения о ней.

Наличие на картах географической и прямоугольной сеток координат, данных о склонении магнитной стрелки и сближении меридианов, графика заложений и других данных позволяет решать по карте различные топографические и инженерные задачи.

студентами работы выполняются по топографической карте масштаба 1:10 000 на специальных бланках.

1.1. Определение раастояний

Циркулем – измерителем снимается величина отрезка на топографической карте между заданными точками. По линейке до 0,01 см измеряют длину этого отрезка ($\ell_{см}$). С помощью численного масштаба карты (I:M) определяется расстояние на местности (D) в метрах

$$\boldsymbol{D = \ell \cdot M},$$

где $\ell$ - длина отрезка с карты, измеренная по линейке в см;

*M* – знаменатель численного масштаба карты.

Пример: $\ell$=4,25 см, *M* – 10 000, *D* = 4,25 **&** 10 000 = 42 500 см = 425 м.

Это же расстояние определяют с помощью линейного масштада, который помещается за южной рамкой листа карты под численным масштабом (рис. 1.1). Для этого циркулем – измерителем отрезок с карты откладывается на линейном масштабе так, чтобы правая игла измерителя была поставлена на оцифрованное деление линейного масштаба справа от «0», а левая игла попадала на первое (дробное) основание – слева от «0». По линейному масштабу справа налево считывается расстояние в метрах.

$\boldsymbol{D = 425}$ м.

1.2. Определение географических координат $\varphi$ $\lambda$

Географические координаты определяются по минутной рамке. Для определения широты $\varphi$ через точку (Рис. 1.1 точки N) проводят параллель до пересечения с минутной рамкой. По западной или восточной сторонам рамки, считают число минут и секунд ($\Delta\varphi$) между южной стороной рамки и параллелью данной точки.

Широта ($\varphi$) точки будет $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ , $\varphi_0$ - широта южной стороны рамки, долгота - $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ , $\lambda_0$ - долгота западной стороны рамки.

Для определения долготы через точку проводят меридиан и по северной или южной стороне минутной рамки отсчитывают долготу ($\lambda$).

Пример: определить $\varphi$ и $\lambda$ точки *N* (Рис. 1.1).

$$\lambda_0 = 54^0 17' 30'' \quad \Delta\varphi = 1' 53'' , \; \varphi_N = 54^0 17' 30'' + 1' 53'' = 54^0 19' 23''$$

$$\lambda_0 = 14^0 15' \quad \Delta\lambda = 0' 32'' , \; \lambda_N = 14^0 15' + 0' 32'' = 14^0 15' 32''$$

1.3. Определение прямоугольных координат X и Y

Прямоугольные координаты точки на карте определяются по координатной сетке. Для этого из точки опускают перпендикуляры на южную и западную стороны квадрата координатной сетки. Измерителям с помощью линейного масштаба определяют расстояния по этим перпендикулярам в метрах, которые представляют приращения координат $\Delta X$ и $\Delta Y$ по оси абсцисс и оси ординат. Полученные приращения прибавляют к оцифрованным координатам сетки $X_i$ и $Y_i$.

Пример: определить прямоугольные координаты точки D (рис. 1.1).

$$X_D = X_i + \Delta X \; , \; Y_D = Y_i + \Delta Y$$

$X_i$ - абсцисса южной горизонтальной линии сетки квадрата, в котором находится D.

$$X_i = 6022 \text{ км} ,$$

$Y_i$ - ордината западной вертикальной линии этого же квадрата.

$$Y_i = 3453 \text{ км} .$$

$$\Delta X = 684м = 0{,}684км \; , \; \Delta Y = 460м = 0{,}460км$$

$$X_D = 6022км + 0{,}684км = 6022684м$$

$$Y_D = 3453км + 0{,}460км = 3453460м \; .$$

1.4. Определение положения точки относительно осевого меридиана зоны.

Долгота осевого меридиана зоны вычисляется по формуле:

$$L_0 = 6^0 \cdot n - 3^0 ,$$

где $n$ – номер зоны.

Для $n = 3$ $L_0 = 6^0 \cdot 3 - 3^0 = 15^0$

Расстояние от осевого меридиана до точки определяется по формуле:

$$d_D = Y_D - 500км \ , \ Y_D = 453460м$$

где $Y_D$ - ордината точки.

$$d_D = 453460м - 500км = -46540м$$

следовательно, точка D расположене к западу от осевого меридиана на расстоянии 46540 м.

1.5. Определение дирекционного угла $\alpha$, истинного азимута $A$ и магнитного азимута азимута $A_m$ линии.

Для определения дирекционного угла заданной линии через начальную точку линии проводят прямую параллельную оси абсцисс, направлением на север (рис. 1.1., линия 1 – 2), от которой транспортиром измеряют угол по ходу часовой стрелки до направления на конечную точку линии.

Пример: $\alpha_{1-2} = 238^0$.

Истинный и магнитный азимуты вычисляют по формулам, пользуясь данными о сближении меридианов и склонении магнитной стрелки или по графику взаимного расположения меридианов.

$A = \alpha + \gamma$ ,

$A_m = \alpha - (\delta - \gamma)$.

где $\gamma$ - сближение меридианов,

$\delta$ - склонение магнитной стрелки.

При вычислении $A$ и $A_m$ по формулам учитываются знаки $\delta$ и $\gamma$. Азимут истинный $A = 238^0 + (-0^0 35¶) = 237^0\ 25¶$.

Азимут магнитный $A_m = 238^0 - (0^0 45¶ – (-0^0\ 35¶)) = 236^0\ 40¶$.

Контроль вычисления $A$ и $A_m$ выполняют с помощью графика взаимного расположения меридианов (рис. 1.2).

Схема взаимного расположения меридранов

Из схемы видно, что $A_m = \alpha$ - (-$0^0$ 35¶+$0^0$ 45¶).

Для определения магнитного азимута на текущий год необходимо учесть годовое изменение склонения магнитной стрелки $\Delta\alpha = +2'$

2¶ & 34 года = 68 = $1^0$ 08¶ ; $\delta = 0\ ^0 45¶ + 1^0\ 08¶ = 1^0\ 53¶$.

На 1993 год $A_m = 238\ ^0 – (0\ ^0\ 35¶ + 1^0\ 53¶) = 238\ ^0 – 2\ ^0\ 28¶ = 235\ ^0\ 32¶$.

1.6 Определение отметок точек и превышений

Отметки точек на карте определяют по горизонталям. если точка находится на горизонтали, то ее отметка равна отметке этой горизонтали. Точки I находится на горизонтали с отметкой 187,5 м. Следовательно, $H_I$ = 187,5 м (рис. 1.3).

Если точка находится между горизонталями, то ее отметка определяется по формуле $\boldsymbol{H = H_0 + h'}$

где $\boldsymbol{H_0}$ - отметка ближайшей к точке горизонтали,

$\boldsymbol{h'}$ - превышение между точкой и горизонталью $\boldsymbol{H_0}$.

Превышение $\boldsymbol{h'}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Зная, что высота между горизонталями изменяется пропорционально заложению, $\boldsymbol{h'}$ определяют по формуле: $\boldsymbol{h' = \frac{h \cdot в}{a}}$,

где $h$ – высота сечения рельефа,

$\boldsymbol{a}$ - расстояние между горизонталями (заложение),

$в$ – расстояние от точки до ближайшей горизонтали $\boldsymbol{H_0}$.

Пример: Определить отметку $H$ точки 2.

$$\boldsymbol{h = 2{,}5м\ ,\ в = \frac{I}{2}a\ ,\ h' = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25м},$$

$$H_0 = 190{,}0 \text{ , } H_2 = H_0 + h' = 190{,}0м + 1{,}25м = 191{,}2м.$$

Привышение между двумя точками (точки I и 2 ) находят как разность отметок этих точек

$$h_{1-2} = H_2 - H_1,$$

$$H_I = 187{,}5м \text{ , } \quad H_2 = 191{,}2м \text{ ,}$$

$$h_{1-2} = 191{,}2м - 187{,}5 = +3{,}7м.$$

Рис. 1.3. Определение отметок точек

1.7. Помтроение профиля местности по заданному направлению

Профиль по заданному направлению строят по отметкам точек, расположенных на этой линии. Горизонтальный масштаб 1:10 000 (равен масштабу карты), вертикальный – 1:1 000. Пример: Построить профиль по линии 3 – 4 (рис. 1.4.). (Сплошные горизонтали проведены через 2,5 м).

Для построения профиля на миллиметровой бумаге проводят прямую АВ – основание профиля (рис. 1.5), на которую переносят все точки пересечения (а,в,с…) заданного направления с горизонталями карты, и подписывают их отметки. Основанию профиля дают условную отметку $H_0$ , которая должна быть меньше минимальных отметок точек линии на 15 – 30 м. В примере $H_0$ = 170,0 м). К основанию профиля в отмеченных точках проводят пунктиром перпендикуляры, на которых откладывают в данном вертикальном масштабе (1:1000) значения отметок. Полученные точки соединяют отрезками прямых линий.

Шкала отметок в вертикальном масштабе

Рис. 1.5. Профиль по заданному направлению

1.8. Определение крутизны ската

Крутизна ската $\nu^0$ определяют по графику заложений (рис. 1.6.). Для этого измерителем берут заложение «а» (в примере по направлению СД), которое затем откладывают на графике заложений вдоль его вертикальных линий. Затем по основанию графика заложений определяют угол наклона, характеризующий крутизну ската (рис. 1.6.).

$$\nu^0 = 1^0,3 .$$

График заложений

Рис. 1.6. Определение крутизны ската

1.9. Проектирование линии с заданной крутизной ската

Между точками 1 и 2 (рис. 1.7.) спроектировать линию с крутизной ската не более 2 $^0$. Для решения этой задачи по графику заложений измерителем берут заложение, которое соответствует заданной крутизне ската $\nu^0 = 2^0$. Этим раствором циркуля из точки I засекают следующую горизонталь и получают точку «а», затем из точки «а» засекают этим же раствором циркуля следующую горизонталь, получают точку «б» и т.д.

Соединив все точки, получают линию заданного уклона.

Задание выполняют на кальке, на которую предварительно копируют участок местности с горизонталями вдоль проектируемой линии.

Рис. 1.7. Проектирование линии с заданной крутизной ската

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

РАБОТА С ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ КАРТОЙ

1. Расстояние между точками

D = 4,25 см х 10 000 = 425 м по численному масштабу

По линейному масштабу D = 400 м + 25 м = 425 м

2. Географические координаты точек

$$\varphi_{Д} = 54^{0}19'37'' \qquad \lambda_{N} = 54^{0}19'23''$$

$$\lambda_{Д} = 14^{0}17'07'' \qquad \lambda_{N} = 14^{0}15'32''$$

3. Прямоугольные координаты точек

$X_Д$ = 6022584 м $X_N$ = 6022264 м

$X_Д$ = 453460 м $У_N$ = 451788 м

4. Долгота осевого меридиана зоны

$$L_0 = 6^0 \ \& \ n - 3^0 = 6^0 \ \& \ 3 - 3^0 = 15^0$$

5. Расстояние точки от осевого меридиана зоны

$d_Д = У_Д$ -500 км = 453460 м – 500 км = - 46540 м

6. Дирекционный угол и азимуты линии (1-2)

Дирекционный угол $\alpha$ = 238 $^0$

Истинный азимут А = 237$^0$ 25¶

Магнитный азимут $A_m$ = 236$^0$ 40¶

На 1993 г. магнитный азимут $A_m$ = 235$^0$ 32¶

7. Абсолютные отметки точек

$H_1$ = 187, 5 м

$H_2$ = 191,2 м

8. Превышение между точками

$$h = H_2 - H_1 = 191{,}2 \text{ м} - 187{,}5 \text{ м} = + 3{,}7 \text{ м}$$

9. профиль местности по заданной линии

10. Крутизна ската $\nu^0$

$$\nu^0_{max} = 7^0 \qquad \nu^0_{min} = 7^0{,}5$$

11. Проектирование линии с крутизной ската не более $2^0$

Преподаватель МД-94-1

Петров

1.10. Измерение площадей по топографическим картам полярным планиметром

полярный планиметр состоит из двух рычагов: полюсного и обводного. Обводный рычаг имеет ручку со шпилем для обвода контуров и подвижную каретку со счетным механизмом. Вместо шпиля может использоваться марка (точка, окружность), выгравированная на стеклянной пластине. полюсный рычаг на одном конце имеет груз с иглой, которая при обводе контура накалывается на бумагу и служит полюсом планиметра. На другом конце этого рычага находится шарнирная головка, которая вставляется в углубление на каретке счетного механизма и соединяет тем самым оба рычага планиметра в одно целое.

Рис. 1.8. счетный механизм планиметра

Счетный механизм планиметра (рис. 1.8.) состоит из циферблата (1) счетного колеса (2) , вращающегося на оси, параллельной обводному рычагу и верньера (3). При обводе фигуры счетное колесо катится по бумаге и дает отсчет. Первую цифру отсчета берут с циферблата, одно деление которого соответствует целому обороту счетного колеса (4) . Следующие две цифры отсчета берут со счетного колеса по нулевому штриху верньера 32 . Четвертая цифра отсчитывается по верньеру – это номер штриха верньера, совпадающего со штрихом счетного колеса - 5. Отсчет на рис. 1.8 равен 4323. площадь, измеренную планиметром вычисляют по формуле:

$$S = C \cdot \Delta h_{cp.} \quad \Delta n = n_2 - n_1$$

где: $C$ - цена деления планиметра;

$n_1$ - отсчет по планиметру до обвода контура;

$n_2$ - отсчет по планиметру после обвода контура.

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

<table>
<tr><td colspan="7">Определение площади на топокартах планиметром</td></tr>
<tr><td colspan="3">Обвод квадрата километровой сетки топокарты</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Обвод контура измеряемой площади</td></tr>
<tr><td>Приемы</td><td colspan="2">Отсчеты по планиметру</td><td>Разность отсчетов $\Delta n$</td><td colspan="2">Отсчеты по планиметру</td><td>Разность отсчетов $\Delta n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>$n_1$</td><td>1102</td><td rowspan="2">994</td><td></td><td>$n_1$</td><td>0085</td><td rowspan="2">1184</td></tr>
<tr><td>$n_2$</td><td>2096</td><td></td><td>$n_2$</td><td>1269</td></tr>
<tr><td></td><td>$n_2$</td><td>2096</td><td></td><td></td><td>$n_2$</td><td>1269</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td></td><td>993</td><td></td><td></td><td></td><td>1191</td></tr>
<tr><td></td><td>$n_3$</td><td>3089</td><td></td><td></td><td>$n_3$</td><td>2460</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$n_3$</td><td>3089</td><td></td><td></td><td>$n_3$</td><td>2460</td><td></td></tr>
<tr><td>III</td><td></td><td></td><td>986</td><td></td><td></td><td></td><td>1195</td></tr>
<tr><td></td><td>$n_4$</td><td>4075</td><td></td><td></td><td>$n_4$</td><td>3655</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">$\Delta n_{ср} = 991{,}0$</td><td></td><td colspan="3">$\Delta n_{ср} = 1190$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Площадь квадрата 100 га</td><td></td><td colspan="3">Измеряемая площадь<br>$S = C \cdot \Delta n_{ср}$<br>S = 0,1009 & 1190 = 120,1 га</td></tr>
<tr><td colspan="4">Цена деления планиметра<br>$C = \frac{100га}{\Delta n_{ср}} = \frac{100}{991} = 0{,}1009га$</td><td></td><td colspan="3">МД -94-2 Петров</td></tr>
</table>

Цену деления планиметра определяют обводом квадрата координатной сетки на топографической карте масштаба 1:10 000, площадь которого известно ($P_0$ = 100 га).

Для измерения площади устанавливают полюс планиметра вне контура так, чтобы при обводе угол между обводным и полюсным рычагами был в пределах от 30 $^0$ до 150 $^0$.

Затем устанавливают обводной шпиль над выбранной начальной точкой квадрата и берут по отсчетному механизму отсчет $n_1$. Обводят квадрат по часовой стрелке до исходной точки и берут отсчет $n_2$.

Затем выполняют следующие обводы, не меняя положения полюса; берут отсчеты $n_3$ и $n_4$. Отсчеты записывают в специальный бланк. Вычисляют разности отсчетов: $\Delta n_1 = n_2 - n_1$, $\Delta n_2 = n_3 - n_2$ , $\Delta n_3 = n_4 - n_3$ .Расхождение разностей не должно превышать 10 – 12 делений.

Находят среднее арифметическое из разностей по трем приемам:

$$\Delta n_{cp} \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2 + \Delta n_3}{3} = \frac{994 + 993 + 986}{3} = 992$$

цену деления планиметра вычисляют по формуле:

$$C = \frac{P_0}{\Delta n_{cp}} = \frac{100га}{991} = 0{,}1009га .$$

Заданную площадь по топографической карте измеряют также тремя приемами, обводя эту площадь по контуру (см. образец бланка, стр. 16).

$$S = C \cdot \Delta n_{ch} = 0{,}1009 \cdot 1190 = 120{,}1га .$$

## 2. РАБОТА С АЭРОФОТОСНИМКАМИ

Современные топографические карты создаются с помощью аэрофотосъемки. Аэрофотосъемка характеризуется масштабом

фотографирования, фокусным расстоянием аэрофотоаппарата, высотой фотографирования, форматом кадра и рядом других характеристик, которые можно определить непосредственно по аэрофотоснимкам.

2.1. Привязка аэроснимка к топографической карте

Для выполнения задания используют аэроснимок и соответствующую карту. Привязка снимка к карте заключается в отождествлении фотоизображения контуров границ снимка с их графическим изображением на топографической карте. С этой целью рассматривают аэрофотоснимок и карту, опознавая на них идентичные объекты: населенные пункты, элементы дорожной сети, гидрография, контуры растительного покрова и т.д. Изучив изображения идентичных объектов на аэрофотоснимке и карте, с помощью штриховых наметок карандашом фиксируют на карте примерные границы снимка. Если привязка аэрофотоснимка сделана правильно, то полученная фигура должна быть близка к квадрату.

2.2. Определение масштаба аэрофотоснимка
и высоты фотографирования

Масштаб аэрофотоснимка определяют по формуле:

$\mathbf{1} := \frac{\ell}{\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{M}}$, отсюда знаменатель масштаба аэроснимка $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{L}}{\ell} \cdot \boldsymbol{M}$,

где: $\ell$ - длина отрезка на аэрофотоснимке;

$\boldsymbol{L}$ - длина этого же отрезка на топографической карте;

$\boldsymbol{M}$ - знаменатель масштаба карты;

$\boldsymbol{m}$ - знаменатель масштаба аэроснимка.

Для определения масштаба аэрофотоснимка используют два отрезка, концы которых опознают на аэрофотоснимке и карте с погрешностью не более 0,2 мм. С этой целью используют четкие контурные точки аэрофотоснимка и карты: перекрестки дорог, углы построек, углы леса и сельхозугодий.

Оба отрезка должны проходить примерно через главную точку аэроснимка, а расстояния от главной точки до концов отрезка должны быть примерно равными (допустимая разность длин не должна превышать 1 – 2 см). Главная точка «0» аэрофотоснимка находится в точке пересечения линий, соединяющих координатные метки аэрофотоаппарата, изображения которых располагаются в середине каждой из четырех сторон аэрофотоснимка (рис. 2.1.).

Рис. 2.1. Определение главной точки аэроснимка

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБА АЭРОФОТОСНИМКА

И ВЫСОТЫ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ

Аэроснимок № 034

Лист карты Y-35-38-А-в-3

Исходные данные

Масштаб карты 1:M = 1:10 000

Фокусное расстояние аэрофотоаппарата f = 100 мм

$$m = \frac{L \cdot M}{\ell} \qquad H = m_{cp} \cdot f$$

допуст. $\Delta m = \frac{2 \cdot \Delta d \cdot M}{\ell_{cp}}$

M = 10 000

Схема расположения отрезков на аэроснимке

Измерение длины отрезков

| на аэроснимке | на карте |
|---|---|
| $\ell_1$ = 178,7 мм | $L_1$ = 195,2 мм |
| $\ell_2$ =148,3 мм | $L_2$ = 217,0 мм |
| $m_1$ = 10926 | $m_2$ = 10943 |
| $\Delta m = m_1 - m_2 = 17$ | доп. $\Delta m = 280$ |

$$m_{cp} = 10934$$

Высота фотографирования

H = 1093 м

Преподаватель

МД-94-1

Иванов

Опознав выбранные точки аэрофотоснимка на топографической карте, измеряют отрезок с помощью измерителя и линейки. Вычисления выполняют в бланке (стр. 19). Разность знаменателей масштаба $\Delta m$ аэрофотоснимка, полученная из определений по двум отрезкам, не должна превышать величины:

допустимая $\Delta m = \frac{2\Delta d \cdot M}{\ell_{ср}}$ , $\Delta m = m_2 - m_1$

где: $\Delta d$ - допустимая ошибка положения контуров на топографической карте ($\Delta d = \pm 1 мм$).

В качестве окончательного значения знаменателя масштаба аэрофотоснимка принимают его среднее значение из двух определений:

$$m_{ср} = (m_1 + m_2) : 2 \quad .$$

Высоту фотографирования определяют по формуле:

$$H = f \cdot \frac{L \cdot M}{\ell} \quad \text{или} \quad H = f \cdot m_{ср} \ ,$$

где $f$ - фокусное расстояние аэрофотоаппарата, которым была выполнена аэрофотосъемка.

Фокусное расстояние задается преподавателям.

Высоту фотографирования вычисляют в метрах.

## 3. СОСТАВЛЕНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ПЛАНА

По данным топографической съемки необходимо составить топографический план местности в масштабе 1:2000 с высотой сечения рельефа 1 м.

Составление плана выполняют в такой последовательности:

построение координатной сетки;

нанесение точек съемочного обоснования по координатам;

нанесение ситуации, точек рельефа на план и проведение горизонталей;

вычерчивание топографического плана.

3.1. Построение координатной сетки

Координатную сетку строят на листе чертежной бумаги размером 289 х 210 мм (формат А 4). Стороны координатной сетки принимают равными 5 х 5 см.

Для построения сетки на листе бумаги карандашом проводят диагонали (относительно углов листа). Из точки пересечения диагоналей откладывают на них циркулем-измерителем 4 равных отрезка (полудиагонали) длиной 12 – 13 см (рис. 3.1.), получают точки а,б,в,г. Соединив эти точки на диагоналях, получают стороны вспомогательного прямоугольника а,б,в,г, на которых, начиная от точки г, измерителем откладывают равные отрезки (по 5 см) – стороны сетки квадратов. Общий размер сетки 20 см по оси *Х*, 15 см – по оси *У*.

Правильность построения координатной сетки контролируют путем измерения циркулем-измерителем диагоналей всех квадратов сетки. Ошибки в длинах диагоналей не должны превышать 0,2 – 0,3 мм. После контроля все вспомогательные построения (на рис. 3.1.показаны пунктиром) убирают.

3.2. Нанесение точек съемочного обоснования по координатам

Для нанесения точек съемочного обоснования по координатам сетку координат оцифровывают через 100 метров. За начало координат принимают юго-западный угол рамки. Координаты юго-западного угла сетки выбирают так, чтобы точки съемочного обоснования разместились примерно в середине сетки. От юго-западного угла к северу подписывают абсциссы Х, к востоку – ординаты У.

Координаты, высоты точек съемочного обоснования и горизонтальные проложения приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

| Номера точек | Координаты | | Высоты, м | Горизонт. проложен., м |
|---|---|---|---|---|
| | X | У | | |
| I | 5319,8 | 2490,0 | 148,2 | |
| | | | | 169,2 |
| 2 | 5488,8 | 2481,6 | 156,6 | |
| | | | | 155,8 |
| 3 | 5469,6 | 2636,3 | 154,7 | |
| | | | | 159,2 |
| 4 | 5311,2 | 2619,8 | 146,5 | |
| | | | | 130,1 |

в примере координаты юго-западного угла удобно взять равными X = 5,2 км, У = 2,4 км (рис. 3.4). Нанесение каждой точки съемочного обоснования производят с помощью циркуля – измерителя и масштабной линейки. Вначале определяют, в каком квадрате располагается данная точка. Затем значение абсциссы циркулем-измерителем откладывают по обеим сторонам квадрата, наколы соединяют тонкой прямой линией. На этой линии откладывают значение ординаты У. Делают накол, полученную точку обводят условным знаком (кружочком), рядом слева подписывают номер точки, справа отметку до 0,1 м. Накладку точек съемочного обоснования обязательно контролируют. Для этого значение горизонтального проложения между двумя точками циркулем - измерителем берут по масштабной линейке и сравнивают с расстоянием между соответствующими точками на плане. Расхождение между этими величинами допускается 0,2 мм на плане (рис. 3.4.).

3.3. Нанесение ситуации, точек рельефа и проведение горизонталей

Ситуацию наносят на план по данным полевых измерений и абрисов (рис. 3.2 табл. 3.2).

Съемочные пикеты, снятые полярным способом, наносят на план по горизонтальному углу и горизонтальному проложению. Горизонтальные углы откладывают при помощи кругового транспортира от начального направления по ходу часовой стрелки, а горизонтальное проложение по линейке или циркулем-измерителем в заданном масштабе. Полученную точку обводят кружочком, рядом подписывают номер и отметку. Руководствуясь абрисом и записями, сделанными в примечании, вычерчивают условными знаками элементы ситуации. Виды угодий пока обозначают надписями (рис. 3.2.).

Нанесение съемочных пикетов, снятых на местности способом прямоугольных координат (перпендикуляров), производят с помощью линейки и треугольника, откладывая по линейке расстояния, указанные в абрисе, вдоль начального направления и перпендикулярно к нему в масштабе 1:2000 (рис. 3.2 а., начальное направление линия 3 – 4).

Рис. 3.2. а) Съемка способом перпендикуляров

Таблица 3.2

Исходные данные к составлению
топографического плана
станция 1 $H_1 = 148,2$
начальное направление на т.2

| Пикет | Гориз. угол $^0$ | Гориз. пролож. | Высоты Н, м | Примечание |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 350 | 20,0 | 150,0 | гран. пашни |
| 2 | 5 | 92,0 | 155,0 | гран. пашни |
| 3 | 27 | 64,5 | 153,2 | шосс. дор. |
| 4 | 44 | 94,0 | 153,7 | шосс. дорога (шир. 5 м |

Проводят горизонтали по отметкам точек с высотой сечения 1 м путем линейного интерполирования отметок по линии ската. в результате интерполирования находят на плане точки, отметки которых кратны принятому сечению. (На рис. 3.3 проведены горизонтали и отметками 154 и 153 м).

Рис. 3.3. Проведение горизонталей: а) графическим интерполированием, б) с помощью палетки

Горизонтали можно провести с помощью палетки. Для изготовления палетки берут восковку размером примерно 7 х7 см. На восковке проводят ряд параллельных линий через равные интервалы (0,5 см или 1,0 см), подписывают их значениями отметок через 1 метр, начиная с минимальной отметки (например 151, 152 и т.д. (рис. 3,3 б). Затем палетку накладывают на 2 соседние А и Б точки на плане таким образом, чтобы эти точки заняли на палетке соответствующее положение по высоте (152,4 и 154,4). Направление линии АБ пересекает линии палетки в точке «а» с отметкой 153 м, в точке «б» с отметкой 154 м. Точки «а» и «б» перекалывают на план и подписывают их

отметки. Таким же образом находят положение горизонталей между другими точками на плане. Соединяя точки с одинаковыми отметками плавными линиями, проводят горизонтали.

3.4. Вычерчивание топографического плана

План оформляют в соответствии с «Условными знаками для топографических планов масштабов 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000, 1:500».

Вычерчивают план в следующей последовательности:

пункты съемочного обоснования;

здания, постройки, отдельные местные предметы;

дороги, линии электропередач, просеки, границы контуров и другие элементы линейной протяженности;

надписи объектов и отметки высотных точек.

Вычерчивают горизонтали, выделяют утолщенные горизонтали краткие 5 метрам, размещают надписи горизонталей;

почвенно-растительный покров (условные знаки угодий, лес, луг и пр.);

рамку и зарамочное оформление.

Топографический план вычерчивают в карандаше.

Образец топографического плана приведен на рис. 3.4.

Рис. 3.4. Вычерчивание топографического плана

# 4. ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ ТРАССЫ

Трассой называют ось проектируемого линейного сооружения: дороги, канала, трубопровода и др. Профиль трассы является основным графическим, по которому выполняется проектирование высотного положения будущего инженерного сооружения. Строят профиль по результатам технического нивелирования пикетов, закрепленных на трассе через 100 м, промежуточных точек и поперечников.

## 4.1. Обработка результатов нивелирования

По результатам технического нивелирования по пикетажу трассы (рис. 4.1.) разбитой между пикетами 0 и 6 с известными отметками ($H_0$ = 127,410 м, $H_6$ = 133,446 м), получены превышения $h_{изм.}$, которые выписаны в специальную ведомость вычисления отметок в графу 2 (табл. 4.1., стр. 29).

Сначала вычисляют невязку нивелирного хода $f_h$ и допустимое значение невязки доп. $f_h$ по формулам:

$$f_h = \sum h_{изм.} - (H_6 - H_0) ,$$

доп. $f_h = 50мм\sqrt{L_{км}}$, где: $f_h$ - полученная невязка нивелирного хода, $\sqrt{h_{изм.}}$ - сумма измеренных превышений по всему нивелирному ходу $H_6$ – отметка конечного пикета (ПК 6), $H_0$ - отметка начального пикета (ПК 0), L – длина хода в км (0 . 6 км. ).

$f_h$ = + 6016 – (133,446 – 127,410) = 6016 – 6036 = - 20 мм;

$$\text{доп. } f_h = 50мм\sqrt{0{,}6_{км}} = 40мм .$$

Если полученная невязка меньше допустимой, то ее распределяют с обратным знаком на все измеренные превышения, для чего находим поправки $\delta_h$ к превышениям ($h_{изм}$).

$$\delta_h = -\frac{f_h}{n}, \text{ где n – число превышений.}$$

Поправки округляют до целых миллиметров, распределяют так, чтобы сумма поправок была равна невязке с обратным знаком. В примере $\delta_h = -(-\frac{20мм}{9}) = +2мм$ ( и остаток 2 мм). Остаток 2 мм распределяют еще по 1 мм на 2 превышения Таким образом, в нашем примере два превышения получили поправку по 3 мм, а семь превышение – по 2 мм.

Контроль: $\sum \delta_h \cdot 7 + 3мм \cdot 2 = +20мм$

Поправки выписывают в графу 2 над значениями $h_{изм.}$ В графу 3 записывают исправленные превышения ($h_{испр.}$), которые вычисляют по формуле.

$h_{испр.} = h_{изм.} + \delta_h$ = + 8800 +2 = + 0802; - 2100 + 2 = - 2098 и т.д.

Контроль: $\sum h_{испр.} = H_6 - H_0$

Рис. 4.1. Схема нивелирного хода

Далее вычисляют отметки пикетов плюсовых точек оси трассы, отметки поперечного профиля.

Отметки пикетов и плюсовых точек трассы вычисляют по формуле;

$$H_n = H_{n-1} + h_{испр.},$$

где: $H_n$ -отметка определяемого пикета

$H_{n-1}$ - отметка предыдущего пикета

$h_{испр.}$ - исправленное превышение между предыдущим и определяемым пикетами.

В нашем примере:

$$H_1 = H_0 + h_{испр.} = 127{,}410 + 0{,}802 = 128{,}212,$$

$$H_2 = H_1 + h_{испр.} = 128{,}212 - 2{,}098 = 126{,}114.$$

Контролем правильности вычисления отметок является полученная в результате вычисления отметка конечного пикета (ПК 6), ($H_6$ = 133,446 м). Отметки всех точек записывают в графу 4 используя полученные отметки пикетов оси трассы, вычисляют отметки точек поперечника.

В ведомости вычисления отметок нивелирного хода выписаны превышения между пикетом 5 и точками поперечного профиля.

Отметки точек поперечного профиля вычисляют по формуле:

$$H_1 = H_5 + h_i \ ,$$

где: $H_1$ - отметка определяемой точки;

$H_5$ - отметка пикета 5;

$h_i$ - превышение между ПК 5 и точкой поперечного профиля.

Таблица 4.1.

Ведомость вычисления отметок

| Номер точек | Превышения, мм | | Отметки Н м |
|---|---|---|---|
| | $h_{изм.}$ | $h_{испр.}$ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| ПК 0 | +2 | | 127,410 |
| | +0800 | +0802 | |
| ПК 1 | +2 | | 128,212 |
| | - 2100 | - 2098 | |
| ПК 1+ 40 | + 2 | | 126,114 |
| | - 0190 | - 0188 | |
| ПК 2 | +2 | | 127,618 |
| | +2412 | + 2414 | |
| X | + 2 | | 130.032 |
| | + 1408 | + 1410 | |
| ПК 3 | + 2 | | 131,442 |
| | + 2598 | + 2600 | |
| ПК 4 | + 3 | | 134,042 |
| | - 1202 | - 1199 | |
| ПК 5 | + 3 | | 132,843 |
| | + 0600 | + 0603 | |
| ПК 6 | | | 133,446 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sum h$ | + 6016 | + 6036 | $H_6 - H_0 = +6036$ |

Поперечный профиль

| Номер точек | Превышения $h_{испр.}$ | Отметка $H$ м |
|---|---|---|
| ПК 5 | +0810 | 132,843 |
| | | |
| Л + 5 | - 1588 | 133,653 |
| | | |
| Л + 10 | - 1342 | 131,255 |
| | | |
| П + 10 | | 131,501 |

В примере: $H_{Л+5} = 132 \cdot 843 + 0{,}810 = 133{,}653 м$

$$H_{Л+10} = 132 \cdot 843 - 1{,}588 = 131{,}255 м$$

$$H_{Л+10} = 132 \cdot 843 - 1{,}342 = 131{,}501 м$$

Вычисленные отметки записывают в ведомость в графу «отметки» против соответствующей точки.

4.2. Построение профиля

По вычисленным отметкам пикетов и промежуточных точек на миллиметровой бумаге строят продольный профиль трассы и профиль поперечника. Профили строят в масштабах:

Продольный профиль:

горизонтальный масштаб 1:2 000;

вертикальный масштаб 1:200;

Поперечный профиль:

горизонтальный масштаб 1:200;

вертикальный масштаб 1:200;

На листе миллиметровой бумаги размером 400 х 400 мм вычерчивают сетку профиля. Названия граф и размеры их в миллиметрах показаны на рис. 4.2.

В графе «расстояния» отмечают положение пикетов (через 5 см) и плюсовых точек в заданном масштабе. Между пикетами и плюсовыми точками выписывают расстояния. Икс – точки не строят. Ниже этой графи подписывают номера пикетов.

В графе «фактические отметки» выписывают из ведомости нивелирного хода отметки пикетов и плюсовых точек с округлением до 0,01 м.

Выбирают и подписывают отметку условного горизонта профиля, которая должна быть на 5 – 8 метров меньше самой низкой отметки по трассе. (В примере минимальная отметка ПК 1 + 60 Н = 125,93, следовательно отметку условного горизонта можно взять 120,0 м).

От линии условного горизонта на перпендикулярах, проведенных пунктирными линиями через точки трассы, откладывают отметки точек в масштабе 1:200. Полученные точки последовательно соединяют прямыми линиями, в результате чего получают продольный профиль местности по оси трассы.

Над продольным профилем строят сетку для поперечного профиля. Заполняют графи «расстояния» и «фактические отметки» так же, как и при построении продольного профиля. Под сеткой подписывают пикетажные обозначения точек поперечника (рис. 4.2.).

Выбрав условный горизонт, по вычисленным отметкам строят положение точек поперечника и, соединив эти точки, получают поперечный профиль местности.

4.3. Проектирование по профилю

Вдоль продольного профиля проектируют положение оси будущего инженерного сооружения. Проектную линию намечают графически с учетом следующих требований:

проектную отметку нулевого пикета принимают равной фактической отметке этого пикета;

уклоны отдельных участков проектной линии не должны превышать 0,050;

шаг проектирования (длину отдельного участка) принимают от 200 м до 600 м;

объем земляных работ должен быть минимальным, а объемы насыпей и выемок должны быть примерно одинаковыми, т.е. на профиле должно соблюдаться примерное равенство площадей насыпей и выемок;

изменение уклона проектной линии производят на пикетах или плюсовых точках.

На рис. 4.2. проектная отметка ПК 0 равна фактической отметке (127,41). Намечено три участка проектной линии с разными уклонами. Длина каждого участка 200 м. Вычисляют уклон участка проектной линии по формуле:

$$i = \frac{h}{D} = \frac{H_{кон.} - H_{нач.}}{D},$$

где: $i$ - уклон участка проектной линии,

$h$ - превышение участка проектной линии,

$D$ - горизонтальной проложение участка проектной линии,

$H_{нач.}$ - проектная отметка начального пикета участка проектной линии,

$H_{кон.}$ - проектная отметка конечного пикета участка проектной линии.

В примере уклоны равны:

$$i_1 = \frac{H_2 - H_0}{200} = \frac{127{,}62 - 127{,}41}{200} = \frac{0{,}21}{200} = 0{,}001 ,$$

$$i_2 = \frac{H_4 - H_2}{200} = \frac{134.04 - 127{,}61}{200} = \frac{6.43}{200} = 0{,}032 ,$$

$$i_3 = \frac{H_6 - H_4}{200} = \frac{133{,}45 - 134{,}01}{200} = \frac{-0{,}64}{200} = -0{,}003 .$$

Полученные уклоны округляют до 0,001 и выписывают в графу «Проектные уклоны» над диагональю. Под диагональю выписывают горизонтальное проложение участка с данным уклоном. Направление диагонали показывает знак уклона:

- уклон положительный;
- уклон отрицательный;
- уклон нулевой (горизонтальный участок).

Вычисляют проектные отметки точек продольного профиля по формуле:

$$H_{n+1} = H_n + i \cdot d ,$$

где: $H_{n+1}$ - проектная отметка определяемой точки,

$H_n$ - проектная отметка предыдущей точки,

$i$ - уклон данного участка,

$d$ - горизонтальное проложение между соответствующими точками.

В примере

$$H_1 = H_0 + i \cdot d = 127{,}41 + 0.001 \cdot 100 = 127{,}51 м$$

$$H_{1+40} = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 40 = 127{,}55 м$$

$$H_{1+60} = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 60 = 127{,}57 м$$

$$H_2 = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 100 = 127{,}61 м$$

Полученные проектные отметки выписывают в графу «Проектные отметки». Таким же образом вычисляют проектные отметки для второго участка.

$$H_3 = H_2 + i \cdot d = 127{,}61 + 0.032 \cdot 100 = 127{,}61 + 3{,}20 = 130{,}81$$ и т.д.

Контролем вычислений служат проектные отметки концов участка проектной линии (ПК 2, ПК 4, ПК 6).

Вычисляют рабочие отметки по формуле

$$H_{раб.} = H_{проект.} - H_{фактич.}$$

$$H_{раб.} = 127{,}51 - 128{,}21 = -0{,}70$$ и т.д.

Рабочие отметки выписывают около проектной линии: положительные (высота насыпи) – выше линии, отрицательные (глубина выемки) – ниже проектной линии.

На поперечном профиле по вычислено проектной отметке пикета 5 ($H_5$ = 133,71) от которого был разбит поперечник, наносят положение проектной линии. Ее проводят горизонтально по 6 метров влево и вправо от оси трассы. Показывают кюветы, (если линия идет в выемке) и откосы (если линия идет по насыпи). Уклон откосов и бортов канав 45 $^0$. Ширина дна кюветов 0,6 м., глубина 1 м.

Над проектной линией выписывают ее отметку (в примере 133,71).

Все проектные данные – проектные линии, уклоны, проектные отметки, рабочие отметки вычерчивают на профиле красным цветом.

Слева над продольным профилем вычерчивают штамп. (Размеры произвольные рис. 4.2).

## 5. РАБОТА С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПРИБОРАМИ

Работа с геодезическими приборами включает измерение горизонтальных углов, вертикальных углов, расстояний теодолитом (рис. 5.1) и измерение превышений нивелиром (рис. 5.5.).

Для выполнения измерений теодолит или нивелир приводят в рабочее положение – горизонтируют и фиксируют. Для горизонтирования теодолита поворотом алидады (8) устанавливают уровень (13) по направлению двух подъемных винтов прибора (5). Вращая эти винты в разные стороны выводят пузырек уровня на середину (в нольпункт). Открепив алидаду, поворачивают ее на 90 $^{0}$, устанавливая уровень по направлению третьего подъемного винта. Вращением этого винта приводят пузырек уровня на середину. Затеи вращением диоптрийного кольца (14) устанавливают резкое изображение сетки нитей (рис. 5.3).

5.1. Измерение горизонтальных и вертикальных углов

Устанавливают теодолит в вершине угла, горизонтируют его, вращением алидады (9) и трубы (10) при положении вертикального круга слева (КЛ) наводят ее с помощью визира (3) на левую визирную цель (рис. 5.2), устанавливают ее резкое изображение с помощью кремальеры (12).

Рис. 5.2. Расположение марок при измерении горизонтальных углов

Рис. 5.3. Сетка нитей теодолита

Далее наводящими винтами алидады (9) и трубы (11) точно совмещают центр сетки нитей с визирной целью и с помощью микроскопа (1) берут отсчеты по горизонтальному и вертикальному кругам и записывают в журнал (Табл. 5.1.), затем поворачивают алидаду, наводят сетку нитей на правую визирную цель и также берут и записывают отсчеты по кругам теодолита. Выполненные действия при «круге лево» (КЛ) составляют первый полуприем. Второй полуприем выполняют при «круге право» (КП), для чего трубу переводят через зенит и далее действуют аналогично первому

полуприему (КЛ). Порядок записи результатов измерений показан в жернале цифрами с по 8 .

Значение горизонтального угла получают дважды:

1 полуприем КЛ $\beta_л = 95^0 30' - 48^0 25' = 47^0 05'$ (9)

2 полуприем КП $\beta_п = 275^0 30' - 228^0 26' = 47^0 04'$ (10)

Допустимое расхождение угла КЛ – КП не должно превышать 2¶. За окончательное значение угла принимается его средняя величина

$$\beta_{ср} = (\beta_л + \beta_п) : 2 = 47^0 04'.5 \qquad (11)$$

Вертикальные углы вычисляют по формуле $\nu = КЛ - МО$

МО = (КЛ + КП – 180 $^0$) : 2, где КЛ и КП отсчеты по вертикальному кругу теодолита, МО – место нуля вертикального круга.

МО = (16 $^0$ 32 ¶ + 163 $^0$ 27 ¶ – 180 $^0$) : 2 = - 0¶.5 (12)

$$\nu = 16^0 32' - (-0,'5) = 16^0 32,'5 \quad (14)$$

Таблица 5.1.

ЖУРНАЛ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ И ДЛИН ЛИНИЙ

Дата 4 декабря исполнитель Иванов С. И.

| Точки стояния | Круг | Точки визирования | Горизонтальный круг | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Отсчет $^0$ ¶ | Измеренный угол $^0$ ¶ | Средний угол $^0$ ¶ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| В | КЛ | Д | 48 25 (1) | (9) 47 05 | (11) 47 04,5 |
| | | С | 95 30 (3) | | |
| | | Д | 228 26 (5) | (10) | |
| | | | (7) | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | КП | С | 275 30 | 47 05 | |

| Точки | | Круг | Вертикальный круг | | | Длина линий |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Стояния | Визирования | | Отсчет | Место нуля | Угол наклона | Измеренн. Гориз. прол. |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| В | Д | КЛ | 16 32 (2) | (12) - 0¶, 5 | (14) | 17,6 (16) |
| | | КП | 163 27 (6) | | 16 32,5 | |
| В | С | КЛ | 351 18 (4) | (13) | (15) -8 42,5 | |
| | | КП | 188 43 (8) | + 0,5 | | |
| | | КЛ | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

5.2. Измерение расстояний нитяным дальномером

Измерение расстояний нитяным дальномером производят по рейке с сантиметровыми шашечными делениями (рис. 5.4), для чего труба теодолита наводят на рейку и наводящим винтом трубы (11) совмещают верхнюю дальномерную нить сетки нитей с ближайшим целым дециметровым делением рейки (например 10 дц.). Затем берут отсчет $n_2$ по нижней нити с точностью до 1 мм.

На рис. 5.4 $n_1$ = 1000 мм $n_2$ =1176 мм

Измеренное расстояние $S = K(n_1 - n_2)$, где К – коэффициент дальномера. $K = 100$

$S = 100\ (1176\text{-}1000) = 17{,}6$ м

Результат записывают в графу 13 журнала (табл. 5.1). (16)

5.3. Измерение превышений

Нивелир (рис. 5.5) приводят в рабочее положение – горизонтируют, приводя на середину пузыре круглого уровня (7) подъемными винтами (11), фокусируют сетку нитей (1). Затем наводят трубу на заднюю рейку,



(1) (2)

добиваются ее резкого изображения с помощью кремальеры (5). Элевационным винтом (8) приводят пузырек цилиндрического уровня (9) на середину, берут отсчет по черной стороне рейки средней горизонтальной нитью до 1 мм (рис. 5.6), затем – по красной стороне рейки. Отсчеты записывают в графу 3 журнала ( табл. 5.2). Затем рейку устанавливают на переднюю точку и действуя аналогично, берут отсчеты по черной и красной сторонам передней рейки и , записывая их в графу 4 журнала.

Превышение вычисляют по формуле $\boldsymbol{h = a - в}$

где : $a$ - отсчет по задней рейке,

$в$ – отсчет по передней рейке.

Превышение вычисляют дважды: по черным и красным сторонам рейки

$h_{ч} = 1171 - 1793 = -622$ (5)

$h_{к} = 5854 - 6478 = -624$ (6) $h_{ч} - h_{к} = 2$ мм

Расхождение между $h_{к}$ и $h_{к}$ не должно превышать 5 мм. В графе 7 вычисляют среднее превышение (7)

$h_{ср.} = (h_{ч} + h_{к}) : 2 = -623$ мм.

Рис. 5.5. Основные части нивелира Н-3

1 – диоптрийное кольцо; 2 – зрительная труба; 3 – визир; 4 – объектив; 5 – кремальера; 6 – наводящий вид; 7 – круглый уровень; 8 – элевационный винт; 9 – цилиндрический уровень; 10 – закрепительный винт; 11 – подъемный винт; 12 – подставка.

Рис. 5.6. Поле зрения зрительной трубы нивелира

Таблица 5.2

Журнал нивелирования

| №№ станций | Номер точек наблюдений | Отсчеты по рейкам, мм | | | Превышения, мм | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Задней а | Передний в | Промежуточный | Вычисленный | Средние |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 1 | 1171 (1) | | | | |
| 1 | | 5854 (2) | | | - 622 (5) | |
| | 2 | | 1793 (3) | | | - 623 (7) |
| | | | 6478 (4) | | - 624 (6) | |

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГЕОДЕЗИЯ»

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

форма обучения: очная, заочная

Составитель: Акулова Е.А.

| Одобрен на заседании кафедры | Рассмотрен методической комиссией факультета |
|---|---|
| Геодезии и кадастров | Горно-механического |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| | *(подпись)* |
| Акулова Е.А. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол №1-2021/2022от 20.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**Содержание**


| | Стр. |
|---|---|
| **1.Общие положения …….** | **3** |
| **2. Требования к уровню освоения образовательной программы……** | **4** |
| **3. Внутренние факторы, способствующие активизации самостоятельной работы** | **4** |
| **4. Виды самостоятельной работы …….** | **5** |
| **5. Организация СРС…….** | **7** |
| **6. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы……** | **17** |
| **7. Требования к учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов……** | **23** |
| **8. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста…….** | **27** |
| **Список используемой литературы……** | **28** |

## 1. Общие положения

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. Любой вид занятий, создающий условия для зарождения самостоятельной мысли, познавательной активности студента связан с самостоятельной работой. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа студентов – это средство вовлечения студента в самостоятельную познавательную деятельность, формирующую у него психологическую потребность в систематическом самообразовании.

Сущность самостоятельной работы студентов как специфической педагогической конструкции определяется особенностями поставленных в ней учебно-познавательных задач. Следовательно, самостоятельная работа – это не просто самостоятельная деятельность по усвоению учебного материала, а особая система условий обучения, организуемых преподавателем.

Основные задачи самостоятельной работы:

- развитие и привитие навыков студентам самостоятельной учебной работы и формирование потребностей в самообразовании;

- освоение содержания дисциплины в рамках тем, выносимых на самостоятельное изучение студента;

- осознание, углубление содержания и основных положений курса в ходе конспектирования материала на лекциях, отработки в ходе подготовки к семинарским и практическим занятиям;

- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий, при написании курсовых и дипломной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Активная самостоятельная работа студентов возможна только при наличии серьезной и устойчивой мотивации. Самый сильный мотивирующий фактор - подготовка к дальнейшей эффективной профессиональной деятельности.

## 2. Требования к уровню освоения образовательной программы «Картография»

**Цель дисциплины**: формирование научного и практического представления о средствах и методах геодезических работ при топографо-геодезических изысканиях; овладение навыков определения пространственно-геометрического положения объектов, выполнения необходимых геодезических и маркшейдерских измерений, обработки и интерпретации их результатов.

**Место дисциплины в структуре ОПОП**: Дисциплина **«Геодезия»** является дисциплиной базовой части Блока 1 «Дисциплины» учебного плана по направлению подготовки ***20.03.01 Техносферная безопасность***.

## 3. Внутренние факторы, способствующие активизации самостоятельной работы

Среди них можно выделить следующие:

1. Полезность выполняемой работы. Если студент знает, что результаты его работы будут использованы в лекционном курсе, в методическом пособии, в лабораторном практикуме, при подготовке публикации или иным образом, то отношение к выполнению задания существенно меняется в лучшую сторону и качество выполняемой работы возрастает. При этом важно психологически настроить студента, показать ему, как необходима выполняемая работа.

Другим вариантом использования фактора полезности является активное применение результатов работы в профессиональной подготовке. Так, например, если студент получил задание на дипломную (квалификационную) работу на одном из младших курсов, он может выполнять самостоятельные задания по ряду дисциплин гуманитарного и социально-экономического, естественно-научного и общепрофессионального циклов дисциплин, которые затем войдут как разделы в его квалификационную работу.

Материальные стимулирующие факторы могут выражаться в надбавках к основной стипендии, номинированные на именные стипендии, участие в конкурсах научно-исследовательских работ, где в качестве приза могут выступать материальные поощрения.

2. Участие студентов в творческой деятельности. Это может быть участие в научно-исследовательской, опытно-конструкторской или методической работе, проводимой на кафедре.

3. Участие в олимпиадах по учебным дисциплинам, конкурсах научно-исследовательских или прикладных работ и т.д.

4. Использование мотивирующих факторов контроля знаний (накопительные оценки, рейтинг, тесты, нестандартные экзаменационные процедуры). Эти факторы при определенных условиях могут вызвать стремление к состязательности, что само по себе является сильным мотивационным фактором самосовершенствования студента.

5. Поощрение студентов за успехи в учебе и творческой деятельности (стипендии, премирование, поощрительные баллы) и санкции за плохую учебу. Например, за работу, сданную раньше срока, можно проставлять повышенную оценку, а в противном случае ее снижать.

6. Индивидуализация заданий, выполняемых как в аудитории, так и вне ее, постоянное их обновление.

7. Мотивационным фактором в интенсивной учебной работе и, в первую очередь, самостоятельной является личность преподавателя. Преподаватель может быть примером для студента как профессионал, как творческая личность. Преподаватель может и должен помочь студенту раскрыть свой творческий потенциал, определить перспективы своего внутреннего роста.

## 4. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

— формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);

— написание рефератов;

— подготовка к лабораторным работам, их оформление;

— выполнение микроисследований;

— подготовка практических разработок;

— выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;

— выполнение конкретного задания в период прохождения учебной практики;

— компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;

— подготовка докладов и презентаций для конкурсов НИРС и конкурсов профессионального мастерства;

— подготовка к контрольным мероприятиям, таким как текущий контроль знаний в виде проверочных тестов или расчетно-графических работ, зачетов, экзаменов;

— выполнение курсовой работы или проекта;

— подготовка выпускной квалификационной работы.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

— текущие консультации;

— прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);

— прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);

— выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);

— выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);

— прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);

— выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

## 5. Организация СРС

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

***При чтении лекционного курса*** непосредственно в аудитории контролируется усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам, тестового контроля знаний, опроса студентов и т.д.

На практических и лабораторных занятиях различные виды СРС позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

***На практических занятиях*** не менее 1 часа из двух (50% времени) отводится на самостоятельное решение задач. Лабораторные занятия строятся следующим образом:

1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены).

2. Беглый опрос.

3. Решение 1-2 типовых задач.

4. Самостоятельное решение задач.

5. Проверка решения задач с обязательной работой над ошибками. Лабораторная или практическая работа считается выполненной при условии отсутствия ошибок.

Для проведения занятий необходимо иметь большой банк заданий и задач для самостоятельного решения, причем эти задания могут быть дифференцированы по степени сложности. В зависимости от дисциплины или от ее раздела можно использовать два пути:

1. Давать определенное количество задач для самостоятельного решения, равных по трудности, а оценку ставить за количество решенных за определенное время задач.

2. Выдавать задания с задачами разной трудности и оценку ставить за трудность решенной задачи.

По результатам самостоятельного решения задач следует выставлять по каждому занятию оценку.

***При проведении лабораторных работ и учебных практик*** студенты могут выполнять СРС как индивидуально, так и малыми группами, каждая из которых разрабатывает свою задачу. Выполненная задача затем рецензируется преподавателем и членами бригады. Публичное обсуждение и защита своего варианта повышают роль СРС и усиливают стремление к ее качественному выполнению. Данная система организации практических занятий позволяет вводить в задачи научно-исследовательские элементы, упрощать или усложнять задания.

Активность работы студентов на обычных практических занятиях может быть усилена введением новой формы СРС, сущность которой состоит в том, что на каждую задачу студент получает свое индивидуальное задание (вариант), при этом условие задачи для всех студентов одинаковое, а исходные данные различны. Перед началом выполнения задачи преподаватель дает лишь общие методические указания (общий порядок решения, точность и единицы измерения определенных величин, имеющиеся справочные материалы и т.п. ). Выполнение СРС на занятиях с проверкой результатов преподавателем приучает студентов грамотно и правильно выполнять технические расчеты, пользоваться вычислительными средствами и справочными данными. Изучаемый материал усваивается более глубоко, у студентов меняется отношение к лекциям, так как без понимания теории предмета, без хорошего конспекта трудно рассчитывать на успех в решении задачи. Это улучшает посещаемость как практических, так и лекционных занятий.

Выполнение лабораторного практикума, как и другие виды учебной деятельности, содержит много возможностей применения активных методов обучения и организации СРС на основе индивидуального подхода.

Любая лабораторная работа должна включать глубокую самостоятельную проработку теоретического материала, изучение методик проведения и планирование эксперимента, освоение измерительных средств, обработку и интерпретацию экспериментальных данных. При этом часть работ может не носить обязательный характер, а выполняться в рамках самостоятельной работы по курсу. В ряд работ целесообразно включить разделы с дополнительными элементами научных исследований, которые потребуют углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

Разработка комплекса методического обеспечения учебного процесса является важнейшим условием эффективности самостоятельной работы студентов. К такому комплексу следует отнести тексты лекций, учебные и методические пособия, лабораторные практикумы, банки заданий и задач, сформулированных на основе реальных данных, банк расчетных, моделирующих, тренажерных программ и программ для самоконтроля, автоматизированные обучающие и контролирующие системы, информационные базы дисциплины или группы родственных дисциплин и другое. Это позволит организовать проблемное обучение, в котором студент является равноправным участником учебного процесса.

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;

- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;

- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;

- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;

- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;

- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.

В последние годы наряду с традиционными формами контроля - коллоквиумами, зачетами, экзаменами достаточно широко вводятся новые методы, то есть организация самостоятельной работы студентов производится на основе современных образовательных технологий. В качестве такой технологии в современной практике высшего профессионального образования часто рассматривается рейтинговая система обучения, позволяющая студенту и преподавателю выступать в виде субъектов образовательной деятельности, т.е. являться партнерами.

Тестовый контроль знаний и умений студентов, который отличается объективностью, экономит время преподавателя, в значительной мере освобождает его от рутинной работы и позволяет в большей степени сосредоточиться на творческой части преподавания, обладает высокой степенью дифференциации испытуемых по уровню знаний и умений и очень

эффективен при реализации рейтинговых систем, дает возможность в значительной мере индивидуализировать процесс обучения путем подбора индивидуальных заданий для практических занятий, индивидуальной и самостоятельной работы, позволяет прогнозировать темпы и результативность обучения каждого студента.

Тестирование помогает преподавателю выявить структуру знаний студентов и на этой основе переоценить методические подходы к обучению по дисциплине, индивидуализировать процесс обучения. Весьма эффективно использование тестов непосредственно в процессе обучения, при самостоятельной работе студентов. В этом случае студент сам проверяет свои знания. Не ответив сразу на тестовое задание, студент получает подсказку, разъясняющую логику задания и выполняет его второй раз.

Следует отметить и все шире проникающие в учебный процесс автоматизированные обучающие и обучающе-контролирующие системы, которые позволяют студенту самостоятельно изучать ту или иную дисциплину и одновременно контролировать уровень усвоения материала.

***Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.***

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

***Работа с книгой.***

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. Первичное - эти внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятного олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача вторичного чтения  полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

***Правила самостоятельной работы с литературой.*** Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

• Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

• Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

• Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
• Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

• При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

•Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

• Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

• Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое,

то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

• «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

• Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

- информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких ***видов чтения***:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает досконального освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

***Основные виды систематизированной записи прочитанного:***

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

***Методические рекомендации по составлению конспекта:***

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

***Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя***

*студент должен:*

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными

стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

*студент может:*

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ГОС ВПО/ГОС СПО по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

## 6. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы зияний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма

продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

*Работоспособность* - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов),* причем

максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра*.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия

физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

***Самопроверка.***

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

***Консультации***

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

***Подготовка к экзаменам и зачетам.***

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неутомительные занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

***Правила подготовки к зачетам и экзаменам:***

• Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

• Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

• Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету,

что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

• Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

• Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

## 7. Требования к учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов

Для нормальной самостоятельной работы студент должен быть обеспечен достаточным количеством учебных пособий разного вида. Чем более разнообразны учебные пособия, тем более успешна будет самостоятельная работа студента, так как каждый может выбрать себе учебное пособие по силам, по склонностям, по материальным возможностям. Должны быть пособия краткие и подробные, с неглубокими и глубокими теоретическими обоснованиями, теоретического и практического содержания. Нужны справочники, конспекты-справочники, учебники. Часть учебных пособий должна находиться в учебной студенческой библиотеке, часть пособий студент должен иметь возможность купить для личного пользования в книжном магазине учебного заведения. Основная часть учебных пособий должна быть в бумажном виде (книги, брошюры, чертежи и т.д.).

Наряду с ними нужно создавать, накапливать в учебных фондах и продавать учебные пособия электронного вида. Этот вид учебных пособий в обозримом будущем не может стать основным и вряд ли когда-нибудь станет. Это – вспомогательные, дополнительные учебные пособия, используемые в основном для заочного, дистанционного образования. Количество учебных пособий в учебном фонде библиотеки должно быть таким, чтобы каждый студент мог получить хотя бы один из рекомендованных учебников.

Многоуровневая система высшего образования должна предоставлять человеку условия для развития его потенциальных возможностей и наиболее полного удовлетворения потребности личности в самореализации. Поэтому на каждом из уровней подготовки самостоятельная работа студентов (СРС) есть обязательное условие, которое должно быть соблюдено для достижения проектируемых результатов обучения. Правильная (психологически и дидактически обоснованная) организация СРС при изучении каждой дисциплины – это один из основных педагогических путей развития и становления творческих качеств личности учащегося на каждом уровне обучения.

Из дидактики следует, что для непрерывного развития учащегося и становления его как творческой личности все элементы содержания образования (знания, умения и навыки, опыт творческой и оценочной деятельности), выделенные в рамках определенной дисциплины, должны быть им усвоены с установкой на перенос и активное использование. Поэтому на первом уровне обучения каждого студента по каждой учебной дисциплине нужно снабдить комплектом учебно-методических материалов, помогающих ему организовывать самостоятельную работу. В такой комплект обязательно должны входить: программа, адаптированная для студента; учебная литература (учебник, задачник, руководство по выполнению лабораторных работ); система заданий для самостоятельной работы студентов; методические указания по организации самостоятельной работы при выполнении заданий по разным видам занятий, включая и курсовые работы (проекты).

На втором и третьем уровнях обучения их следует снабдить методическими указаниями по выполнению выпускной работы, завершающей подготовку специалиста. Программа должна содержать: обоснование необходимости изучения дисциплины, написанное в убеждающей и понятной для студентов форме; четкую формулировку цели изучения и задач, которые должны быть решены для достижения общей цели; последовательность тем и разделов курса дисциплины, обязательных для данного направления подготовки; перечень видов деятельности, которые должен освоить студент, выполняя задания по дисциплине; перечни методологических и предметных знаний, общеобразовательных и специальных умений (с указанием уровня их усвоения), которыми необходимо овладеть в процессе изучения данной дисциплины; сроки и способы текущего, рубежного и итогового контроля уровня усвоения знаний сформированности умений.

Учебная литература по содержанию и последовательности представления материала должна соответствовать программе. Объем, научный уровень и стиль изложения должны

позволять каждому студенту самостоятельно усвоить приведенный в ней материал за время, отведенное на его изучение, и овладеть знаниями, умениями, видами деятельности, перечисленными в программе. Для обеспечения терминологической однозначности в системе знаний, усваиваемых студентом, каждое учебное пособие (или другой вид учебной литературы) должно содержать словарь основных терминов, используемых в нем.

Задания для самостоятельной работы должны быть конкретными. Их содержание, соответствуя программе, должно знакомить студентов с современными методами решения задач данной дисциплины.

Структура заданий должна соответствовать принципу доступности: от известного к неизвестному и от простого к сложному, а трудоемкость – времени, выделенному программой на самостоятельную работу по изучению данной темы. В заданиях следует указывать знания и умения, которыми должен овладеть студент по мере их выполнения. Кроме того, в них нужно включать вопросы для самоконтроля и взаимного контроля, тесты и контрольные вопросы для оценки и самооценки уровня усвоения знаний, сформированности умений.

Методические указания по организации СРС на каждом уровне обучения должны способствовать непрерывному развитию у них рациональных приемов познавательной деятельности в процессе изучения конкретных дисциплин. Основное назначение всех методических указаний – дать возможность каждому студенту перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя, к деятельности, организуемой самостоятельно, к полной замене контроля со стороны преподавателя самоконтролем. Поэтому они должны содержать подробное описание рациональных приемов выполнения перечисленных видов деятельности, критериев оценки выполненных работ, а также рекомендации по эффективному использованию консультаций и по работе при подготовке и сдаче экзаменов.

Каждый из названных учебно-методических материалов влияет в большей степени на один из этапов усвоения знаний и видов деятельности, но одновременно способствует осуществлению других этапов и более полной реализации их задач.

Так, программа с четко выделенной целью и перечнем задач, влияющих на ее достижение, определяет мотивационный этап и способствует организации деятельности на всех остальных, указывая последовательность изучаемых разделов, сроки контроля. Учебная литература служит информационной основой, прежде всего для ориентировочного

этапа. В то же время работа с литературой усиливает мотивацию, если изложение материала по уровню сложности соответствует зоне ближайшего развития студента; помогает осуществлению исполнительского и контрольного этапов, если в ней указаны особенности выполнения заданий, даны контрольные вопросы.

Задания для самостоятельной работы организуют исполнительский этап, задавая последовательность видов деятельности, необходимых для усвоения знаний и приобретения умений. Так как задания содержат средства контроля, то они определяют и контрольный этап.

Вопросы и задачи в заданиях требуют от студента не только воспроизведения знаний, но и проявления творчества, формируют и развивают его опыт творческой деятельности. Это расширяет основы мотивации, усиливает и укрепляет ее. В целом содержание и структура заданий, отвечающих перечисленным требованиям, позволяет регулярно занимающимся студентам получать удовлетворение от самостоятельно выполненной работы. Такой эмоциональный фон, в свою очередь, формирует положительное отношение к выполненному делу, а через него – и к изучаемой дисциплине.

Методические указания по организации СРС способствуют грамотному и рациональному осуществлению исполнительского этапа, обеспечивают контрольный этап. Для этого виды деятельности, активно используемые при изучении дисциплины, должны быть подробно описаны в указаниях с выделением последовательности действий и даже операций. В этом случае сами виды деятельности становятся предметом изучения, что дает верное направление ориентировочному этапу и, безусловно, усиливает мотивацию обучения. Работа студентов с такими методическими указаниями позволяет им уже при изучении общенаучных дисциплин усвоить полную и обобщенную ориентировочную основу для каждого из таких видов деятельности, как работа с литературой, проведение эксперимента, решение задач.

Таким образом, создание для каждой учебной дисциплины рассмотренного комплекта учебно-методических материалов обеспечивает обязательные этапы усвоения знаний, видов деятельности, опыта творчества, Снабжение таким комплектом каждого студента – необходимое условие полной реализации в процессе обучения всех возможностей СРС как вида познавательной деятельности, метода и средства учения и преподавания.

## 8. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение

оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебе с будущей профессиональной деятельности.

## Список используемой литературы


1. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ направление подготовки бакалавриата 05.03.06 Экология и природопользование
2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы./ ГОУ ВПО «Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова». 2010г

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## Б1.О.21 МАРКШЕЙДЕРСКОЕ ДЕЛО

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Направленность
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Автор: Голубко Б. П., доцент, канд. техн. наук, Вахонина Ю. Х., старший преподаватель

| | |
|---|---|
| Одобрен на заседании кафедры | Рассмотрены методической комиссией факультета |
| Маркшейдерского дела | Горно-механического |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Жабко А.В. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1-2021/2022 от 28.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

# ВВЕДЕНИЕ

**Методические рекомендации для обучающихся по освоению учебной дисциплины**

В процессе изучения учебной дисциплины следует:

1. Ознакомиться с рабочей учебной программой дисциплины. Рабочая учебная программа содержит перечень тем, которые необходимо изучить, планы лекционных и практических занятий, вопросы к текущей и промежуточной аттестации, перечень основной, дополнительной литературы и ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет».

2. Ознакомиться с календарно-тематическим планом самостоятельной работы обучающихся.

3. Посещать теоретические (лекционные) и практические занятия.

4. При подготовке к практическим занятиям, а также при выполнении самостоятельной работы следует использовать методические указания для обучающихся.

При подготовке к практическим занятиям требуется:

- изучить теоретический материал, используя основную и дополнительную литературу, электронные ресурсы;
- выполнить расчетно-графические работы;
- ответить на вопросы опросного списка.

Изучение дисциплины производится в тематической последовательности. Самостоятельному изучению материала, как правило, предшествует лекция. На лекции даются указания по организации самостоятельной работы, срокам сдачи заданий, порядке проведения зачета. Информацию о графике выполнения самостоятельных работ и критериях оценки учебной работы студента преподаватель сообщает на первой лекции курса.

Для организации и контроля учебной работы студентов используется проверка расчетно-графических работ, опрос, контрольная работа. Форма промежуточной аттестации: экзамен.

**Организация самостоятельной работы студентов**

Самостоятельная работа студентов (СРС) - обязательная и неотъемлемая часть учебной работы студента по данной учебной дисциплине. Объемы и виды трудозатрат по всем отдельным видам представлены в разделе 7. Общие планируемые затраты времени на выполнение всех видов аудиторных и внеаудиторных заданий соответствуют бюджету времени работы студентов, предусмотренному учебными планами по дисциплине в текущем семестре.

Перечни аудиторных и внеаудиторных занятий и заданий (расчетно-графические работы), вносимых в графики СРС, определяются в соответствии с программой учебной дисциплины.

**Работа с книгой**

Изучать курс рекомендуется по темам, предварительно ознакомившись с содержанием каждой из них по программе. При первом чтении следует стремиться к получению общего представления об излагаемых вопросах, а также отмечать трудные или неясные моменты. При повторном изучении темы необходимо освоить все теоретические положения, математические зависимости и их выводы, а также принципы составления уравнений реакций. Рекомендуется вникать в сущность того или иного вопроса, но не пытаться запомнить отдельные факты и

явления. Изучение любого вопроса на уровне сущности, а не на уровне отдельных явлений способствует более глубокому и прочному усвоению материала.

Для более эффективного запоминания и усвоения изучаемого материала, полезно иметь рабочую тетрадь (можно использовать лекционный конспект) и заносить в нее формулировки законов и основных понятий химии, новые незнакомые термины и названия, формулы и уравнения реакций, математические зависимости и их выводы и т.п. Весьма целесообразно пытаться систематизировать учебный материал, проводить обобщение разнообразных фактов, сводить их в таблицы. Такая методика облегчает запоминание и уменьшает объем конспектируемого материала.

Изучая курс, полезно обращаться и к предметному указателю в конце книги. Пока тот или иной раздел не усвоен, переходить к изучению новых разделов не следует. Краткий конспект курса будет полезен при повторении материала в период подготовки к экзамену.

Изучение курса должно обязательно сопровождаться выполнением упражнений и решением задач. Решение задач - один из лучших методов прочного усвоения, проверки и закрепления теоретического материала. Этой же цели служат вопросы для самопроверки и тренировочные тесты, позволяющие контролировать степень успешности изучения учебного материала.

**Консультации**

Изучение дисциплины проходит под руководством преподавателя на базе делового сотрудничества. В случае затруднений, возникающих при изучении учебной дисциплины, студентам следует обращаться за консультацией к преподавателю, реализуя различные коммуникационные возможности: очные консультации (непосредственно в университете в часы приема преподавателя), заочные консультации (посредством электронной почты).

## САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТЕМ КУРСА

При самостоятельном изучении теоретического курса студентам необходимо:

самостоятельно освоить и проработать темы теоретического курса в соответствии с учебной программой дисциплины, основательно подготовить ответы на вопросы, приведенные после каждой темы.

Самостоятельно изучаемые вопросы курса в последующем включаются в экзаменационные билеты.

## ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИЛА ЛЕКЦИЙ

Для приобретения прочных знаний и выработки навыков самостоятельной работы по учебной дисциплине «Маркшейдерское дело» необходимо повторить материал лекционных занятий, а также прочитать основную и дополнительную литературу, рекомендованную для самостоятельного изучения по данной дисциплине [1-10]. Работа с материалом должна носить системный характер.

## ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для успешной подготовки к практическим занятиям студенту невозможно ограничиться слушанием лекций. Требуется предварительная самостоятельная работа студентов по теме планируемого занятия. Не может быть и речи об эффективности занятий, если студенты предварительно не поработают над конспектом, учебником, учебным пособием, чтобы основательно овладеть теорией вопроса.

## ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ

**Тема 1: Содержание и задачи дисциплины**

1. Основные задачи маркшейдерского дела.
2. Основная цель маркшейдерских работ.
3. Какие особенности ведения маркшейдерских работ?
4. Какие разделы геодезии необходимо знать для изучения дисциплины?
5. Основные исторические этапы развития маркшейдерии.
6. Какова структура маркшейдерских отделов?

**Тема 2: Опорные маркшейдерские сети на карьерах**

1. Опорные маркшейдерские сети – цель и задачи.
2. Что является главной геометрической основой всех видов съемки горного предприятия?
3. Назовите исходные пункты для построения маркшейдерских опорных сетей.
4. Кем создаются маркшейдерские опорные сети?
5. Какие основные методы создания опорных сетей?
6. Как закрепляются центры опорных сетей?
7. Какой класс точности координат центров опорных сетей?

**Тема 3: Создание съемочных маркшейдерских сетей на карьерах**

1. Каковы цель и задачи съемочных маркшейдерских сетей?
2. Кем создаются съемочные сети на карьерах?

3. Назовите основные требования к созданию и реконструкции съемочных сетей?
4. Как подразделяются съемочные маркшейдерские сети?
5. От чего зависит выбор способа создания съемочных сетей?
6. Как закрепляются пункты съемочных сетей?
7. Назовите классические способы создания съемочных сетей.

**Тема 4: Маркшейдерская съемка карьеров и отвалов**

1. Назовите цель и задачи маркшейдерской съемки на карьерах и отвалах.
2. Какие способы съемки на карьерах и отвалах?
3. Какова периодичность съемки на карьерах и отвалах?
4. В каких масштабах выполняется маркшейдерская съемка на карьерах?
5. Каковы особенности и перспективы аэрофотограмметрической съемки карьеров?
6. Каковы особенности и перспективы наземной фотограмметрической съемки карьеров?
7. Каковы особенности и перспективы маркшейдерской съемки с использованием лазерного сканирования?

**Тема 5: Маркшейдерские работы при обеспечении буровзрывных работ**

1. Каковы цель и задачи маркшейдерских работ при обеспечении буровзрывных работ?
2. Назовите маркшейдерские работы до производства буровзрывных работ.
3. Какие маркшейдерские работы при производстве бурения взрывных скважин?
4. Назовите маркшейдерские работы после производства взрывных работ в карьере.
5. Какие основные задачи маркшейдера при составлении плана – проекта на буровзрывные работы?
6. Какие способы выноса в натуру взрывных скважин в карьере?
7. Какие способы маркшейдерского контроля глубины и сетки взрывных скважин?

**Тема 6: Маркшейдерские работы при проходке траншей**

1. Главная цель и задачи маркшейдера при проходке траншей.
2. Какие горно-графические материалы составляются для проходки траншей?
3. Методика расчета элементов параметра траншеи.
4. Способы привязки и выноса в натуру параметров траншеи.
5. Способы задания направления оси и параметров траншеи.
6. Методика расчета уклона трассы траншеи.
7. Маркшейдерский контроль проходки оси и параметров траншеи.

**Тема 7: Маркшейдерские работы при дражном и гидравлическом способах разработки**

1. Какими методами создаются опорные и съемочные сети на полигонах?
2. Как контролируется процесс строительства драги?
3. Как контролируется процесс добычи песков?
4. Какие способы измерения глубины черпанья драги?

5. Какие способы маркшейдерской съемки на полигонах?
6. Маркшейдерский контроль объемов добычи дражных полигонов.
7. Маркшейдерский контроль объемов добычи гидравлических полигонов.

**Тема 8: Применение спутниковой геодезии на карьерах**

1. Назовите основной принцип спутниковой геодезии.
2. Какие основные спутниковые системы применяются в маркшейдерии?
3. Какие в области спутниковых технологий маркшейдерских работ существуют схемы?
4. Дайте краткую характеристику навигационных спутников.
5. Что такое сегмент наземного контроля к управлению спутниковой системы?
6. Что такое технология дифференциальной GPS для определения точных координат пунктов?
7. Назовите схемы создания опорных, съемочных сетей и маркшейдерской съемки с использованием спутниковой геодезии.

**Тема 9: Маркшейдерские работы при рекультивации земель на горных предприятиях**

1. Основные задачи маркшейдерской службы при рекультивационных работах.
2. Методы планового съемочного обоснования для производства маркшейдерских работ.
3. Методы высотного съемочного обоснования для производства маркшейдерских работ.
4. Методы прогнозирования нарушенности земной поверхности и планирования работ.
5. Маркшейдерские работы при засыпке отработанных карьеров.
6. Маркшейдерские работы по реализации агрохимического плана.
7. Маркшейдерские работы при рекультивации породных отвалов.

**Тема 10: Маркшейдерские подземные опорные сети**

1. Цель и задачи маркшейдерских подземных опорных сетей.
2. Способы создания опорных подземных сетей.
3. Основные требования при создании и реконструкции подземных опорных сетей.
4. Закрепление пунктов подземных опорных сетей.
5. Методика и требования при измерении углов и длин подземных опорных сетей.
6. Методика и способы определения высотной отметки пунктов подземных опорных сетей.
7. Оценка точности определения плановых координат и высотной отметки пунктов подземных опорных сетей.

**Тема 11: Маркшейдерская съемка в подземных горных выработках**

1. Цель и задачи маркшейдерской съемки подземных горных выработок.
2. Способы создания и реконструкции маркшейдерских съемочных сетей.
3. Закрепление пунктов подземных съемочных сетей.
4. Методика и требования при измерении углов и длин съемочных сетей.

5. Цель и задачи маркшейдерской съемки контуров подземных горных выработок.
6. Схемы и методика производства маркшейдерской съемки контуров подземных горных выработок.
7. Камеральная обработка и оценка точности съемочных сетей и съемки контуров подземных горных выработок.

**Тема 12: Геометрический способ ориентирования подземных горных выработок**

1. Цель и задачи геометрического способа ориентирования.
2. Практическое значение геометрического способа ориентирования.
3. Какие способы ориентирования в зависимости от схемы вскрытия месторождения?
4. Методика и схемы ориентирования через наклонный ствол или штольню.
5. Схема ориентирования через один вертикальный ствол.
6. Схема ориентирования через два вертикальных ствола.
7. Оценка точности геометрических способов ориентирования.

**Тема 13: Гироскопический способ ориентирования подземных горных выработок**

1. Цель и задачи гироскопического способа ориентирования.
2. Практическое значение гироскопического способа ориентирования.
3. Какие схемы гироскопического ориентирования в зависимости от схемы вскрытия месторождения?
4. Методика и схема гироскопического ориентирования через один вертикальный ствол.
5. Методика и схема гироскопического ориентирования через два вертикальных ствола.
6. Основные понятия теории гироскопического ориентирования.
7. Схема и методика определения поправки гирокомпаса.

**Тема 14: Вертикальная соединительная съемка подземных горных выработок**

1. Цель и задачи вертикальной соединительной съемки.
2. Практическое значение вертикальной соединительной съемки.
3. Какие методы и схемы передачи высотной отметки в шахту?
4. Методика и схема передачи высотной отметки в шахту глубиномером ДА-2.
5. Методика и схема передачи высотной отметки в шахту шахтной лентой или рулеткой.
6. Методика и схема передачи высотной отметки в шахту светодальномером или лазерной рулеткой.
7. Оценка точности вертикальной соединительной съемки.

# ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *экзамену* по дисциплине «*Маркшейдерское дело*» обучающемуся рекомендуется:

Повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «*Маркшейдерское дело*»

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса.

## Рекомендуемая литература

1. Голубко Б.П. Часть 1. Маркшейдерские работы на карьерах и разрезах: Учебное пособие. – Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2010. –212 с.

2.Голубко Б.П. Маркшейдерия. Решение типовых маркшейдерских задач при разработке месторождений открытым способом: Учебное пособие. – Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2018. – 71с.

3. Маркшейдерия. Часть 1. Маркшейдерские работы на карьерах и разрезах: учебное пособие/ Б.П. Голубко, В.А. Гордеев, В.Н. Яковлев. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. – 212 с.

4. Маркшейдерское дело. Учебник для Вузов. Под ред. Д.Н.Оглоблина, Г.И. Герасименко, А.Г. Акимова и др. М.: Недра, 1981.

5. Маркшейдерия. Решение типовых маркшейдерских задач при разработке месторождений полезных ископаемых подземным способом. Учебное пособие. Б.П. Голубко, Г.В. Земских, О.С. Раева // Екатеринбург, УГГУ, 2017 – 98 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебно-методическому комплексу _____ Упоров С.А.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ И ЗАДАНИЯ**

**ГОРНОПРОМЫШЛЕННАЯ ЭКОЛОГИЯ**

Специальность

***21.05.04 Горное дело***

Специализация

***Электрификация и автоматизация горного производства***

Автор(ы) Цейтлин Е. М., доцент, к. г. м. н.,
Студенок Г. А., доцент, к. т. н.

Одобрена на заседании кафедры

Инженерной экологии
*(название кафедры)*

Зав. кафедрой _____
*(подпись)*

Хохряков А.В.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 1 от 10.09.2021 г.
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией

Горно-механического факультета
*(название факультета)*

Председатель _____
*(подпись)*

Осипов П.А.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 12.10.2021 г.
*(Дата)*

Екатеринбург

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В процессе изучения дисциплины «Горнопромышленная экология» студенты должны изучить теоретический материал, выполнить контрольную работу и другие, предусмотренные рабочей программой дисциплины, самостоятельные задания. По окончании изучения дисциплины предусмотрен экзамен.

Занятия по дисциплине «Горнопромышленная экология» проводятся в форме лекций и практических (семинарских) занятий.

Цель лекции – формирование основы для последующего усвоения учебного материала.

Цель практических и семинарских занятий – оказание помощи студентам в изучении наиболее важных вопросов учебного курса, углубление и закрепление, систематизация соответствующих знаний студентов по предмету.

При изучении дисциплины «Горнопромышленная экология» важную роль играет самостоятельная работа студентов, которая заключается в организации систематического изучения учебной дисциплины, закреплении и углублении полученных знаний и навыков, подготовке к предстоящим занятиям, а также в формировании культуры умственного труда и самостоятельном поиске новых знаний.

Для успешного изучения дисциплины и приобретения компетенций (см. программу дисциплины) студенты должны посетить аудиторные занятия, повторить материалы лекций, провести подготовку к практическим и семинарским занятиям, самостоятельно прочитать рекомендуемую основную и дополнительную литературу, подобрать и ознакомиться с понятийным аппаратом.

Выбор литературы для изучения делается обычно по программе дисциплины либо путем самостоятельного отбора.

Во время изучения литературы необходимо конспектировать и делать записи прочитанного. Такие записи способствуют лучшему осмыслению и усвоению, выработке навыков кратко и точно излагать материал.

Вся рекомендуемая для изучения курса литература подразделяется на основную и дополнительную. К основной литературе относятся источники, необходимые для полного и твердого усвоения учебного материала (учебники и учебные пособия). Необходимость изучения дополнительной литературы диктуется прежде всего тем, что в учебниках зачастую остаются неосвещенными современные проблемы, а также не находят отражение изменения в законодательстве и тенденции практики. Поэтому дополнительная литература рекомендуется для более углубленного изучения программного материала.

Перечень вопросов, подлежащий изучению, приведен в программе курса.

Теоретические знания, полученные в ходе прослушивания лекций, изучения основной и дополнительной литературы, участие в семинарских и практических занятиях позволяют студентам формировать всю полноту и объективность знаний.

Выполняя контрольную работу, другие письменные задания, студент учится самостоятельно работать с основной и дополнительной литературой, выявлять наиболее важные аспекты, углублённо и более детально изучать материалы по дисциплине и расширять свой кругозор.

Практические задачи, составляющие содержание практических занятий, контрольной работы и других письменных заданий, помогут выработать умения и навыки применения теоретических знаний.

Кроме того, студентам предлагается выполнить тест для самопроверки и самоконтроля, ответ на который после изучения отдельных тем курса и курса в целом позволят студенту проверить полученные знания.

При постоянном, последовательном изучении всех тем дисциплины, активной работе на лекциях и практических (семинарских) занятиях студенту удается полностью освоить изучаемый предмет.

Степень и качество освоения курса будет зависеть от самодисциплины.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ВИДАМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

*Самостоятельная* работа студента состоит из следующих видов работ:

- повторение материалов лекций;
- самостоятельное изучение отдельных тем курса;
- ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля);
- подготовка к устному опросу;
- подготовка к докладу;
- работа с порталом электронных образовательных ресурсов;
- работа с литературой и интернет-ресурсами;
- тестирование.

*Повторение материалов лекций* предполагает их прочтение, запоминание основных терминов и определений, разбор смысла и содержания основных понятий, подготовку (запись) вопросов, которые остались неясными, непонятными. Поскольку не все важные вопросы достаточно полно раскрываются в лекциях, студент должен самостоятельно работать с учебными пособиями, дополняя конспект лекций.

*Самостоятельное изучение отдельных тем дисциплины* предполагает чтение основной и дополнительной литературы по соответствующей теме, изучение научных статей и материалов, подготовку конспекта.

*Ответы на вопросы для самопроверки и для подготовки к устному опросу* позволяют оценить объем теоретических знаний. Ответы на все вопросы позволяют перейти к материалам для практических и семинарских занятий. Если ответить на вопрос затруднительно, следует повторить теоретический материал и найти ответ в лекциях, дополнительной литературе.

*Работа с порталом электронных образовательных ресурсов* предполагает регулярное использование студентом различных учебно-методических материалов, размещенных на портале.

*Работа с литературой и интернет-ресурсами* дополняет учебную работу на лекциях и практических (семинарских) занятиях. Для начала рекомендуется изучение тех источников, которые указаны преподавателем, при необходимости следует расширить круг изучаемых источников. Работа с информацией - поиск информации в библиотеке, Интернете, отбор информации для решения конкретной учебной задачи. При работе с интернет-ресурсами следует иметь в виду, что качество некоторых материалов может быть не соответствующим необходимому уровню.

*Тестирование* позволяет провести проверку знаний отдельных тем курса и всей дисциплины в целом.

*Выполнение домашних заданий* предусмотрено в следующей форме:

*Подготовка к докладу* – подготовка доклада на определенную тему, включающего обзор соответствующих литературных и других источников или краткое изложение книги, научной работы, статьи, исследования;

Конкретные виды заданий по дисциплине «Горнопромышленная экология» указаны далее.

Важнейшее требование для всех письменных работ - самостоятельность их выполнения.

Добросовестное выполнение данных методических указаний будет способствовать усвоению знаний, приобретению навыков практической деятельности, формированию указанных в программе учебной дисциплины компетенций.

**Тема 1. Воздействие антропогенных факторов горного производства на подсистемы биосферы.**

**Цель**: закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 1 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

– прочитать главу 1 учебного пособия: Промышленная экология : учебное пособие / В. А. Зайцев. - Москва : БИНОМосква Лаборатория знаний, 2013. - 382 с

*2. Вопросы для самоконтроля:*

1. Что такое безотходные технологии?
2. В чём заключается загрязнение окружающей среды от горнопромышленных производств?
3. Какие существуют компоненты земной атмосферы?
4. Назовите основные пути решения экологических проблем.

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный только один.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1. Как правильно оценивается эффективность экологической охраны окружающей среды?**

- как системный показатель прибыли, полученный от сохранения чистоты продуктивности природной среды, являющейся индикатором здоровья людей и продолжительность их жизни;
- как системный показатель прибыли, полученный от сохранения и рационального использования природных ресурсов и естественных условий;
- как показатель эколого–социально–экономической прибыли, понимаемый как конечный результат природоохранных мероприятий.

**2. Какую роль в управлении и экономическом регулировании экологической охраны природы и окружающей среды играют кадастры и реестры природных ресурсов?**

- введение стимулирующих льготных налогов, цен на экологически чистую продукцию;
- дифференцирование взимания платы за пользование природными ресурсами с учетом ренты;
- установление нормативных налоговых и других видов платежей, штрафных санкций за загрязнение окружающей среды.

**3. Расставьте по степени снижения их вредного воздействия на окружающую среду виды транспорта:**

- ракетно-космический;
- водный;
- авиационный;
- железнодорожный;
- автомобильный;
- трубопроводный.

**4. Расставьте в последовательности увеличения экологической нагрузки на окружающую среду объекты топливно-энергетического комплекса:**

- ТЭС, сжигающие уголь и горючие сланцы;
- геотермальные электростанции;
- ТЭС, сжигающие нефтепродукты;
- ТЭС, сжигающие газ;
- АЭС, при их безаварийной работе.

**5. Что такое экологический фактор?**

**6. Что представляют собой абиотические факторы?**

**7. Антропогенные факторы это…**

**8. Каким геологическим процессам подвергаются отвалы техногенных пород?**

а) выветривания;

б) испарению;

в) водной и ветровой эрозии.

**9. Какие геохимические изменения природы вод происходят в результате разработки сульфидных месторождений?**

а) накопление тяжёлых металлов;

б) условия миграции химических элементов;

в) рассеяние тяжёлых металлов.

**10. К каким изменениям приводит разработка месторождений нефти на шельфе?**

## Тема 2. Взаимодействие природных и техногенных процессов, преобразование вещества и энергии в горном производстве.

**Цель**: закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 2 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

– прочитать главу 2 учебного пособия: Промышленная экология : учебное пособие / В. А. Зайцев. - Москва : БИНОМосква Лаборатория знаний, 2013. - 382 с

*2. Вопросы для самоконтроля и для подготовки к устному опросу:*

1. Как промышленное производство воздействует на окружающую среду?
2. Назовите принципы нормирования техногенного воздействия промышленности на окружающую среду.
3. Какие существуют требования к технологическим процессам горного производства?
4. Какие существуют требования к аппаратному оформлению, сырью, энергоресурсам и готовой продукции?

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный только один.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1. Выветривание горных пород, связанное с круговоротом воды, называется..**

**2. Основные горные породы земли и металлы, слагающие земную кору- это..**

**3. Наибольшую опасность представляет нарушение герметичности сосуда хранения жидкостей 1 и 2 категории (правильный ответ):**

А. выше уровня жидкости; Б. ниже уровня жидкости;

В. отказ предохранительного клапана.

**4. Взрывом называют:**

А. Внезапное высвобождение энергии, сопровождающееся быстрым увеличением давления в ограниченном пространстве;

Б. Внезапное высвобождение энергии, сопровождающееся изменением состояния вещества;

В. Сильный и шумный хлопок, связанный с нагнетанием и сбросом давления.

**5.Что из нижеперечисленного является основным поражающим фактором при взрыве?**

А. Тепловая энергия;

Б. Ударная волна;

В. Звуковая волна.

**6. Какие виды взрывов бывают? (согласно классификации)**

**7. К легко воспламеняющимся жидкостям относятся …**

**8. Взрыв расширяющихся паров вскипающей жидкости происходит при(выберите правильный ответ):**

А. Разгерметизации сосуда под давлением;

Б. Нахождении сосуда под давлением в зоне пожара;

В. Разлитии воспламеняющегося вещества

**9. Физические характеристики токсичных веществ (выберите неправильный ответ):**

А. Способность к рассеиванию;

Б. Стойкость;

В. Гидрофильность.

**Тема 3. Оценка воздействия на окружающую среду горных предприятий. Разделы ООС и ОВОС в проектной документации.**

**Цель:** закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 3 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

- ознакомиться со следующими нормативно-правовыми документами:

| | |
|---|---|
| Закон «Об охране окружающей природной среды» | Верховный Совет РФ с изменениями на 27 декабря 2018 года |
| Об утверждении Положения об оценке воздействия намечаемой хозяйственной и иной деятельности на окружающую среду в Российской Федерации | Приказ Госкомэкологии РФ от 16.05.2000 N 372. Зарегистрировано в Минюсте РФ 04.07.2000 N 2302 |
| Закон «Об экологической экспертизе» | Законодательное Собрание РФ |

*2. Вопросы для самоконтроля и для подготовки к устному опросу:*

1. Что такое оценка воздействия на окружающую среду?
2. В чём заключается государственная экологическая экспертиза?
3. Сколько этапов в себя включает ОВОС?
4. В чём заключается экологическая экспертиза и экологический аудит? В чём их различие?

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный только один.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1. Что первоначально проводится при проведении ОВОС?**

1. Собрание ГЭЭ.
2. Рекогносцировочная оценка.
3. Предварительная проверка.
4. Оценка по проведению ОВОС.

**2. Что готовит заказчик/инвестор на любой стадии разработки проектной документации?**

1. Информацию о состоянии ОПС.
2. Участников процесса ОВОС
3. Техническое задание.
4. Оценку доходов на предприятии.

**3. Что включает в себя предварительная оценка воздействия на окружающую среду?**

1. Анализ, проверка, выявление и прогноз.
2. Описание, анализ и характеристика.
3. Характеристика и оценка.
4. Анализ и меры по снижению воздействия

**4. Какие разделы предусматриваются в проекте ТЕО?**

**5. Описание, анализ, характеристика, оценка и меры мы можем отнести к…**

**6. Сколько этапов содержит, согласно "Положению об ОВОС в РФ", данная процедура?**

1.три

2.четыре

3. пять

**7. Какой итоговый документ первого этапа ОВОС выдается, согласно "Положению об ОВОС в РФ"?**

1. Сводка воздействий на ОС
2. Техническое задание на проведение ОВОС
3.Разрешение на проведение ОВОС

**8. Является ли обязательным информирование общественности на первом этапе ОВОС?**

1. Да
2. Нет

**9. Итогом третьего этапа ОВОС, согласно "Положению об ОВОС в РФ", является…**

**10. Что не должны содержать материалы ОВОС проектов новых технологий и техники?**

1. Характеристику технологического процесса
2. Бизнес-план применения данной технологии
3. Оценку методического подхода к определению и расчёту выбросов (сбросов)
4. Алгоритмы расчёта удельных количеств ЗВ, поступающих в ОС

## Тема 4. Охрана атмосферного воздуха в горном производстве, причины, источники и нормирование воздействия, методы очистки.
## Тема 5. Охрана поверхностных и подземных вод в горном производстве, причины, источники и нормирование воздействия, методы очистки.
## Тема 6. Охрана и рациональное использование недр и земной поверхности при строительстве и эксплуатации подземных сооружений, шахт и карьеров.

**Цель:** закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 4,5,7 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

– прочитать главы 4,5 учебного пособия: Промышленная экология : учебное пособие / В. А. Зайцев. - Москва : БИНОМосква Лаборатория знаний, 2013. - 382 с

*2. Вопросы для самоконтроля и для подготовки к устному опросу:*

1. Какие существуют нормативы качества атмосферного воздуха?
2. Перечислите основные источники загрязнения атмосферы от горных проивзодств.
3. Какие существуют инженерные методы защиты воздуха от загрязнений?
4. Что такое рециркуляция газов?
5. В чем заключается смысл создания замкнутых водооборотных систем?
6. Как нормируется качество воды?
7. Какие существуют мероприятия по охране водных ресурсов?
8. Перечислите инженерные методы очистки сточных вод.
9. В чём заключается антропогенное воздействие на ландшафты от горных производств?
10. Что такое почвы? В чём проявляются её свойства?
11. Какие существуют мероприятия по охране земельных ресурсов?

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный только один.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1. Что не относится к мерам по предотвращению загрязнения воздуха?**

а) разбавление метана свежим атмосферным воздухом за счёт общешахтной нагнетательной вентиляции и местной всасывающей;

б) изоляция выработанного пространства;

в) средства индивидуальной защиты шахтёра («самоспасатель»);

в) контроль за состоянием и качеством проветривания;

г) опережающая дегазация пластов;

д) дегазация выработанного пространства;

е) применение горного оборудования во взрывобезопасном исполнении.

**2. Что не относится к способам борьбы с рудничной пылью?**

а) применение очистных и проходческих комбайнов с крупным срезом стружки;

б) предварительное нагнетание в пласт воды;

в) применение взрывной отбойки патронированными ВВ;

г) орошение забоя;

д) сухое пылеулавливание;

е) связывание пыли полимерами;

ж) применение средств индивидуальной защиты (респиратор).

**3. Что не относится к защите гидросферы от загрязнений?**

а) механическая очистка сточных и шахтных вод;

б) бурение шпуров и скважин с промывкой;

в) использование коагулянтов и сорбентов;

г) хлорирование;

е) утилизация жидких промышленных отходов;

ж) создание пневмобарьера.

**4. Что не относится к защите литосферы?**

а) технологии по утилизации и обезвреживанию промышленных отходов;

б) сжигание токсичных отходов;

в) ликвидация воронок обрушения;

г) переработка отходов в шлаковом расплаве;

д) рекультивация карьера и промплощадки рудника (шахты);

е) обеззараживание загрязнённых территорий;

ж) противоэрозионные мероприятия.

**5. Какие мероприятия не относятся к изоляции и захоронению отходов?**

а) хранение отходов в специальных наземных, слабоуглубленных и подземных сооружениях;

б) размещение отходов в глубоких океанических впадинах с застойными режимами перемещения вод;

в) закладка выработанного пространства;

г) размещение отходов в мощных толщах материковых льдов;

д) преобразование отходов в нейтральное вещество;

е) сжигание, переработка отходов.

**6. Что не относится к экологическому воздействию?**

а) вентиляция шахт и карьеров;

б) водоотлив и водозабор;

в) осушение месторождений;

г) сооружение отвалов, хвостохранилищ;

д) шум, сейсмика взрывов;

ж) отчуждение и изъятие земель;

з) оформление земельного и горного отвода;

и) добычные работы.

**7. Какие техногенные загрязнения окружающей среды могут вызвать «региональную экологическую катастрофу?**

**8. Наибольший объём среди отходов бурения составляют:**

- буровые сточные воды;
- хозяйственно-бытовые отходы;
- буровой шлам.

**9. Основой стратегии создания экологически безопасной технологии бурения является:**

- безопасный сброс буровых сточных вод в объекты природной среды;
- утилизация отходов бурения;
- применение оборотного водоснабжения.

**10. В каких зонах морей самоочищение нефти происходит быстрее:**

- в холодных водах;
- в тёплых водах;
- в арктических водах.

**11. Что не является конструктивной частью бунового заграждения:**

- плавучая часть;
- нефтесборщики;
- экранирующая и балластная части.

**12. Наиболее надёжными методами ликвидации нефтяного загрязнения в морях являются:**

- биологические методы;
- механические;
- химические.

**13. При бурении и эксплуатации геотехнологических скважин наибольшее загрязнение оказывает:**

- подземное растворение солей;
- подземное выщелачивание металлов;
- подземная выплавка серы.

**14. Какие наиболее дисперсные загрязнители содержатся в буровых сточных водах:**

- взвеси в виде тонкодисперсных суспензий и эмульсий;
- растворимые минеральные соли;
- коллоидные и высокомолекулярные соединения.

**15. К механическим методам очистки буровых сточных вод не относятся:**

- центрифугирование;
- адсорбция;
- отстаивание.

**16. Для обезвреживания и утилизации отработанного бурового раствора и шлама не применяется следующий метод:**

- отверждение;
- электрокоагуляция;
- физико-химическая нейтрализация.

**17. Когда должны разрабатываться профилактические мероприятия по минимизации вредного воздействия объектов недропользования на окружающую среду?**

1. – в процессе строительства и эксплуатации объекта
2.- при проектировании объекта
3. – после завершения эксплуатации объекта

**18. Что контролирует, учитывает и прогнозирует горно-геологический мониторинг на объектах недропользования**?

1. – климатические изменения
2. – загрязнение воздушного и водного бассейнов
3. – изменение ландшафта

4. - движение разведанных запасов полезных ископаемых, их погашение, потери и разубоживание.

**19. Назовите один из приоритетных принципов геоэкологической экспертизы.**

1.– производственная необходимость

2. – экономическая целесообразность

3.- соблюдение технологических норм проектирования и экологии недропользования

4.– корпоративные интересы недропользователей

**20.Укажите супертоксичную геохимическую группу элементов:**

1.– Cu, Zn, S, Bi, Ag

2. - Ti, Na, K, Ta, Rb, Ca, Si, Nb

3.– Hg, Cd, Tl, Be, U, Rn, радионуклиды Sr и др.

4. – Pb, Se, Te, As, Sb

**21. Какая взаимозависимость (корреляции) между величинами потерь и разубоживания?**

1. – прямая

2. – обратная

3. – неопределенная

**22. Какими показателями выражается регламентация санитарно – защитных зон предприятий при добыче полезных ископаемых?**

1. – расстояние, м

2. – площадь, м2

3. – объем, м3

**23. Укажите группу минерального сырья с наибольшим размером платежа на ее добычу.**

1. – горно-химическое сырье

2.– радиоактивное сырье

3. – нефть, природный газ

4. – черные металлы

5. – цветные и редкие металлы

**24. Укажите загрязняющее вещество за сброс, которого в поверхностные и подземные воды плата наиболее высокая:**

1. – нефть и нефтепродукты

2. – ртуть

3. – железо

**25. Соотнести группы нормативов качества атмосферного воздуха с определениями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | (ПДКр.з.) | А. | Среднесуточная предельно допустимая концентрация загрязняющих веществ в воздухе населенных мест, которая не должна оказывать на человека прямого или косвенного воздействия в условиях неопределенного долгого круглосуточного вдыхания |
| 2. | (ПДКс.с.) | Б. | Временный гигиенический норматив сроком на три года, по истечении которого он должен быть пересмотрен или заменен значениями ПДК |
| 3. | (ПДКм.р.) | В. | Предельно допустимая концентрация загрязняющих веществ в воздухе рабочей зоны, которая не должна вызывать у работающего при ежедневном вдыхании в пределах 8 часов в течение всего рабочего стажа заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследования непосредственно в процессе работы или в отдельные сроки |
| 4. | ОБУВ | Г. | Максимальная разовая концентрация загрязняющих веществ в воздухе населенных мест, которая не должна вызывать в течение 30 минут рефлекторных реакций в организме человека |

**26. Дайте определение санитарно-защитной зоне (СЗЗ)**….

**27. При введении предприятия в эксплуатацию требуются расчеты ПДВ:**

а) Для всех компонентов выбросов, входящих в выброс

б) Для веществ, составляющих основную часть выброса

в) Для веществ, опасность которых для жизни и здоровья человека не установлена

г) Верно все

д) Верно б, в.

**28. В целях определения критериев безопасности и (или) безвредности воздействия химических, физических и биологических факторов на людей, растения, животных и т.д., а также в целях оценки состояния атмосферного воздуха устанавливаются**:

а) Гигиенические нормативы качества атмосферного воздуха;
б) Экологические нормативы качества атмосферного воздуха
в) Предельно допустимые уровни физических воздействий
г) Временно согласованные сбросы
д) Качественные показатели сбросов

**29. В соответствии с федеральным законом от 10 января 2002 г. № 7-ФЗ "Об охране окружающей среды" под нормированием в области охраны окружающей среды понимается:**
а) установление нормативов на эксплуатацию природных ресурсов, вовлечение их в хозяйственный оборот
б) установление нормативов качества окружающей среды
в) установление нормативов допустимого воздействия на окружающую среду при осуществлении хозяйственной и иной деятельности
г) разработка нормативных правовых документов в области охраны окружающей среды

**30. В соответствии с федеральным законом от 10 января 2002 г. № 7-ФЗ "Об охране окружающей среды" под мониторингом окружающей среды (экологическим мониторингом) понимается:**
а) независимая, комплексная, документированная оценка соблюдения субъектом хозяйственной и иной деятельности требований в области охраны окружающей среды
б) система мер, направленная на предотвращение, выявление и пресечение нарушений законодательства в области охраны окружающей среды
в) вид деятельности по выявлению, анализу и учету прямых, косвенных и иных последствий воздействия на окружающую среду планируемой хозяйственной и иной деятельности
г) комплексная система наблюдений за состоянием окружающей среды, оценки и прогноза изменений состояния окружающей среды под воздействием природных и антропогенных факторов.

## Тема 7. Горное производство как источник образования отходов, экологические аспекты обращения с отходами, учёт и отчетность при обращении с отходами.

**Цель:** закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 6 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

– прочитать главу 6 учебного пособия: Промышленная экология : учебное пособие / В. А. Зайцев. - Москва: БИНОМосква Лаборатория знаний, 2013. - 382 с

*2. Вопросы для самоконтроля и для подготовки к устному опросу:*

1. Какие существуют источники образования и виды деятельности с отходами производства и потребления?

2. Какие основные отходы образуются в результате горного производства?

3. Какие предъявляются требования к обеспечению экологической безопасности при обращении с опасными отходами?

4. Какие существуют классы опасности отходов?

5. Что такое нормативы образования отходов и лимиты на их размещение?

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный только один.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1.Отходы, которые после соответствующей обработки могут быть снова использованы в производстве, называются:**

1. Возобновимыми ресурсами.
2. Вторичными ресурсами.
3. Невозобновимыми ресурсами.
4. Оборотными ресурсами.
5. Сбереженными ресурсами.

**2. Показатель качества окружающей среды, определяющий максимально допустимое содержание вредного вещества, которое на протяжении длительного времени не оказывает отрицательного влияния на здоровье организма и его потомства, называется:**

1. Государственный стандартом.
2. ОБУВ (ориентировочный безопасный уровень воздействия).
3. ГОСТом.
4. ПДК.
5. Нет верного ответа.

**3. Разновидность малоотходных процессов - это... , при котором использованная в производстве вода очищается, охлаждается и снова пускается на производственные нужды.**

1. Оборотное водоснабжение.
2. Реутилизация.
3. Экономичное водоснабжение.
4. Минимальное водоснабжение.
5. Оптимальное водоснабжение.

**4. Какой из источников вносит наибольший вклад в антропогенное повышение в атмосфере концентрации углекислого газа?**

1. Извержение вулканов.
2. ТЭЦ.
3. Автотранспорт.
4. Разложение органических веществ почвы.
5. Котельные жилых домов.

**5. Ресурсосберегающие технологии – это:**

1. Строго фиксированная оплата труда.
2. Использование новых технологических разработок.
3. Минимальные затраты труда и энергии.
4. Строго фиксированные ежемесячные затраты.
5. Нет верного ответа.

**6. Сероулавливающие установки в крупных городах позволяют использовать до 90% сернистого газа для производства серной кислоты. Какой принцип учтен в таком производстве?**

1. Принцип сверхточных технологий.
2. Принцип исключения.
3. Принцип взаимоприспособляемости.
4. Принцип рециклизации.
5. Принцип неопределенности.

**7. Остатки сырья, материалов, полуфабрикатов химических соединений, образующиеся при производстве продукции или выполнении работ, утратившие полностью или частично свои потребительские свойства:**

а) основные отходы;

б) вторичные материальные отходы;

в) отходы потребления;

г) отходы производства;

д) отходы предприятия

**8. Складирование твёрдых отходов горного производства осуществляется в качестве:**

А) потенциального минерально-сырьевого ресурса

Б) отходов предприятия

**9. Рециркуляция, это…**

**10. Системы классификации отходов подразделены:**

а) по отраслевому принципу;

б) по агрегатному состоянию;

в) направлениям использования;

г) все перечисленное

**Тема 8. Экономические аспекты воздействия горного производства на окружающую среду.**

**Цель:** закрепление и систематизация знаний по теме, разработка навыков работы с литературой.

**Задания**

*Домашнее устное задание:*

*1. Повторение материала лекций:*

– прочитать раздел 9 учебного пособия: Обеспечение экологической безопасности в промышленности: учебно-методическое пособие/ А.В.Хохряков, А.Г.Студенок, И.В.Медведева, А.М.Ольховский, В.Г.Альбрехт, Е.А.Летучая, А.Ф.Фадеичев, О.А. Москвина, Е.М. Цейтлин, Г.А. Студенок; Институт инженерной экологии УГГУ. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017.

– прочитать главы 10,12,13, 15 учебного пособия: Промышленная экология : учебное пособие / В. А. Зайцев. - Москва: БИНОМосква Лаборатория знаний, 2013. - 382 с

*2. Вопросы для самоконтроля и для подготовки к устному опросу:*

1. Как рассчитывается плата за выбросы загрязняющих веществ в атмосферу?
2. Что входит в плату за сброс загрязняющих веществ в водные объекты?
3. Какие экологические проблемы проявляются от горного производства?
4. Как рассчитывается плата за размещение отходов?

*Задания для тестирования:*

*Инструкция***.** Внимательно прочитайте вопрос и варианты ответов. Из предложенных ответов правильный может быть один или несколько.

На листе бумаги напишите тему, номера вопросов и проставьте рядом номер правильного ответа или впишите словами.

**1. Как соотносятся экология и экономика по затратным статьям:**

- прямая корреляционная связь;
- обратная корреляционная связь;
- отсутствие связи (взаимозависимости).

**2. Куда поступает плата за пользование недрами?**

- на производственные нужды предприятия – недропользователя;
- в бюджет административных управленческих структур;
- на статью соцкультбыта населения.

**3. Какое структурное подразделение выдает лицензию на право недропользования, на выбросы, сбросы и размещение твердых отходов?**

- Министерство сельского хозяйства РФ;

- Росгортехнадзор;
- Министерство природных ресурсов РФ;
- Министерство образования и науки РФ.

**4. С каким понятием связано случайное вредное воздействие на окружающую среду объектами недропользования?**

- «парникового эффекта»;
- технического риска;
- роялти.

**5. Какие причины конфликтов между бизнесом и охраной окружающей среды?**

**6. Для чего создается система экологических отходов?**

**7. Государственное управление в области промышленной безопасности осуществляется через:**

А. Лицензирование деятельности;

Б. Платежи за эксплуатацию технических систем повышенной опасности;

В. Систему административной и уголовной ответственности за нарушение правил эксплуатации опасных технологий

**8. Декларация безопасности промышленного объекта должна включать следующие сведения (выберите неправильный ответ):**

А. Основные характеристики технологических процессов;

Б. Перечень мероприятий по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций;

В. Перечень мероприятий по предупреждению и ликвидации экологических последствий чрезвычайных ситуаций;

Г. Сведения о природно-климатических особенностях района размещения объекта.

**9. Экологическая экспертиза устанавливает соответствие между:**

а) намечаемой хозяйственной деятельностью и экологическими требованиями;

б) существующей деятельностью человека и экологическими требованиями;

в) результатами деятельности человека и экологическими требованиями

**10. Как называется предельное количество вещества, разрешаемое к выбросу от данного источника, которое не создает приземную атмосферную концентрацию, опасную для людей, растительного и животного мира?**

Для проведения контроля самостоятельной работы студентов применяются: доклад, тестирование; экзамен.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ**
**(уровень творческой деятельности)**

Написать Доклад – подготовить доклад на определенную тему.

Доклад должен включать 3 раздела: 1 - проблемный - практический (анализ, обзор, творческое изложение статей ученых на выбранную тему в научных журналах за два года (текущий и предшествующий), 2 - собственное мнение на выделенную проблему; 3 - список научной литературы по выбранной теме.

Выбор темы осуществляется студентом самостоятельно.

1. Экологические факторы и их действие
2. Экосистемы: структура и динамика
3. Круговорот веществ в биосфере
4. Законы экологии
5. Источники воздействия на природную среду на горнодобывающих предприятиях.
6. Характеристика источников загрязнения литосферы, гидросферы, воздушного бассейна
7. Задачи органов управления охраной и регулированием использования природных ресурсов
8. Технико-эколого-экономическая оценка эффективности использования и охраны минеральных ресурсов при разработке месторождений полезных ископаемых
9. Оценка эффективности использования и охраны земель при добыче и переработке полезных ископаемых
10. Охрана и рациональное использование земель при добыче и переработке полезных ископаемых
11. Рекультивация карьерных выемок, мульд сдвижения и зон обрушения.
12. Водоснабжение горных предприятий. Водопотребление при добыче и переработке полезных ископаемых. Способы подачи воды.
13. Охрана воздушного бассейна от пылегазовых выбросов предприятий. Планирование достижений предельно допустимых выбросов.
14. Утилизация отходов производства.
15. Использование подземного пространства земных недр.
16. Технология экологически замкнутого производства.
17. Принципы утилизации и использования шахтного метана.
18. Мониторинг загрязнения атмосферы и источников выброса.
19. Способы складирования углесодержащих и радиоактивных горных пород.
20. Влияние газопылеобразных отходов на биосферу и климат планеты.

Объем Доклада не более 25 листов. Оформление работы должно отвечать общим требованиям, установленным в университете.

Результат работы представляется на практическом (семинарском) занятии по соответствующей теме.

*Требования к докладу на практическом (семинарском) занятии*

Студенту предоставляется время для выступления на практическом (семинарском) занятии продолжительностью не более 15 минут: 10 минут - доклад, 5 минут - ответы на вопросы.

Студент представляет доклад в форме компьютерной презентации, выполненной в MS PowerPoint.

Презентация должна иметь:

слайд, содержащий полное название доклада, ФИО автора;

слайд, содержащий четко сформулированную решаемую задачу;

несколько слайдов, описывающих решение задачи;

слайд, содержащий краткие выводы из работы.

## ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Оформление самостоятельной работы студента должно отвечать общим требованиям, установленным в университете Положением о требованиях к оформлению Докладов, отчетов по практике, контрольных, курсовых, дипломных работ и магистерских диссертаций.

## ОЦЕНКА ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

***Критерии оценки Доклада*** – новизна текста, степень раскрытия сущности вопроса, соблюдение требований к оформлению.

*Новизна текста* - актуальность темы Доклада; новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы; умение работать с литературой, нормативными правовыми актами, систематизировать и структурировать материал; наличие авторской позиции, самостоятельность оценок и суждений.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - соответствие содержания доклада его теме; полнота и глубина знаний по теме; умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по вопросу (проблеме); оценка использованной литературы (привлечены ли наиболее известные работы по теме доклада статистические данные, справки и т.д.).

*Соблюдение требований к оформлению* - правильность оформления ссылок на источники, списка использованных источников; грамотное изложение текста (орфографическая, пунктуационная, стилистическая культура); владение терминологией; соблюдение требований к объёму доклада.

***Критерии оценки публичного выступления (защита Доклада)*** - логичность построения выступления; грамотность речи; глубина выводов; умение отвечать на вопросы; оригинальность формы представления результата; поведение при защите работы *(*манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы и т.д.).

*Критерии оценки презентации* - эстетическое оформление; использование эффектов анимации.

***Выполнение Доклада и доклад его результатов на занятии оценивается*** по четырёхбалльной шкале: отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно.

Оценка *«отлично»* **-** Доклад полностью соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки).

Оценка «*хорошо*» - Доклад в основном соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки).

Оценка *«удовлетворительно*» - Доклад частично соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки).

Оценка *«неудовлетворительно*» - Доклад не соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки).

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебно-методическому комплексу

_____С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# Б1.О.24 БЕЗОПАСНОСТЬ ВЕДЕНИЯ ГОРНЫХ РАБОТ И ГОРНОСПАСАТЕЛЬНОЕ ДЕЛО

Специальность

***21.05.04 Горное дело***

Специализация

***Электрификация и автоматизация горного производства***

Автор: Кочнева Л. В., старший преподаватель, Батанин Ф. К., старший преподаватель

Одобрена на заседании кафедры

Безопасности горного производства
*(название кафедры)*

Зав. кафедрой _____
*(подпись)*

Елохин В. А.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 1 от 14.09.2021
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией

Горно-механического факультета
*(название факультета)*

Председатель _____
*(подпись)*

Осипов П. А.
*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 12.10.2021
*(Дата)*

Екатеринбург

# ВВЕДЕНИЕ

## Методические рекомендации для обучающихся по освоению учебной дисциплины

В процессе изучения учебной дисциплины следует:

1. Ознакомиться с рабочей учебной программой дисциплины. Рабочая учебная программа содержит перечень тем, которые необходимо изучить, планы лекционных и практических занятий, содержание дисциплины с указанием объема лекционных занятий, практических занятий и самостоятельной работы, перечень основной, дополнительной литературы и ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет».

2. Ознакомиться с календарно-тематическим планом самостоятельной работы обучающихся.

3. Посещать теоретические (лекционные) и практические занятия.

4. При подготовке к практическим занятиям, а также при выполнении самостоятельной работы следует использовать методические указания для обучающихся.

При подготовке к практическим занятиям требуется:

- изучить теоретический материал, используя основную и дополнительную литературу, электронные ресурсы;
- ответить на вопросы тестов.

Изучение дисциплины производится в тематической последовательности. Самостоятельному изучению материала, как правило, предшествует лекция. На лекции даются указания по организации самостоятельной работы, срокам сдачи заданий, порядке проведения экзамена. Информацию о графике выполнения самостоятельных работ и критериях оценки учебной работы студента преподаватель сообщает на первой лекции курса.

Для организации и контроля учебной работы студентов используется проверка выполнения тестовых заданий. Форма промежуточной аттестации: экзамен.

**Организация самостоятельной работы студентов**

Самостоятельная работа студентов (СРС) - обязательная и неотъемлемая часть учебной работы студента по данной учебной дисциплине. Объемы и виды трудозатрат по всем отдельным видам представлены в программе. Общие планируемые затраты времени на выполнение всех видов аудиторных и внеаудиторных заданий соответствуют бюджету времени работы студентов, предусмотренному учебными планами по дисциплине в текущем семестре.

Перечни аудиторных и внеаудиторных занятий и заданий (тестов), вносимых в графики СРС, определяются в соответствии с программой учебной дисциплины.

**Работа с книгой**

Изучать курс рекомендуется по темам, предварительно ознакомившись с содержанием каждой из них по программе. При первом чтении следует стремиться к получению общего представления об излагаемых вопросах, а также отмечать трудные или неясные моменты. При повторном изучении темы необходимо освоить все теоретические положения. Рекомендуется вникать в сущность того или иного вопроса, но не пытаться запомнить отдельные факты и явления. Изучение любого вопроса на уровне сущности, а не на уровне отдельных явлений, способствует более глубокому и прочному усвоению материала.

Для более эффективного запоминания и усвоения изучаемого материала, полезно иметь рабочую тетрадь (использовать лекционный конспект) и заносить в нее формулировки и основные понятия, новые незнакомые термины, названия, определения и т.п. Весьма целесооб-

разно пытаться систематизировать учебный материал, проводить обобщение разнообразных фактов, сводить их в таблицы. Такая методика облегчает запоминание и уменьшает объем конспектируемого материала.

Изучая курс, полезно обращаться и к предметному указателю в конце книги. Пока тот или иной раздел не усвоен, переходить к изучению новых разделов не следует. Краткий конспект курса будет полезен при повторении материала в период подготовки к экзамену.

Изучение курса должно обязательно сопровождаться выполнением необходимых упражнений и решением задач. Решение задач - один из лучших методов прочного усвоения, проверки и закрепления теоретического материала. Этой же цели служат вопросы для самопроверки и тренировочные тесты, позволяющие контролировать степень успешности изучения учебного материала.

**Консультации**

Изучение дисциплины проходит под руководством преподавателя на базе делового сотрудничества. В случае затруднений, возникающих при изучении учебной дисциплины, студентам следует обращаться за консультацией к преподавателю, реализуя различные коммуникационные возможности: очные консультации (непосредственно в университете в часы приема преподавателя), заочные консультации (посредством электронной почты).

## САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТЕМ КУРСА

При самостоятельном изучении теоретического курса студентам необходимо:

самостоятельно освоить и проработать темы теоретического курса в соответствии с учебной программой дисциплины, основательно подготовить ответы на вопросы тестов по темам программы .

Самостоятельно изучаемые вопросы курса в последующем включаются в экзаменационные билеты.

## ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИЛА ЛЕКЦИЙ

Для приобретения прочных знаний и выработки навыков самостоятельной работы по учебной дисциплине «Безопасность ведения горных работ и горноспасательное дело» необходимо повторить материал лекционных занятий, а также прочитать основную и дополнительную литературу, рекомендованную для самостоятельного изучения по данной дисциплине. Работа с материалом должна носить системный характер.

## ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для успешной подготовки к практическим занятиям студенту невозможно ограничиться слушанием лекций. Требуется предварительная самостоятельная работа студентов по теме планируемого занятия. Студенты должны предварительно поработать над конспектом, учебником, учебным пособием, чтобы основательно овладеть теорией вопроса.

## ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к экзамену по дисциплине «Безопасность ведения горных работ и горноспасательное дело» обучающемуся рекомендуется:

Повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «Безопасность ведения горных работ и горноспасательное дело»

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса.

## УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПРИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ И ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. О промышленной безопасности опасных производственных объектов [Электронный ресурс]: федеральный закон от 21.07.1997 № 116-ФЗ (с доп. и изм.). - Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза.

2. Об аварийно-спасательных службах и статусе спасателя. [Электронный ресурс]: федеральный закон от 22.08.1995 № 151-ФЗ (с доп. и изм.). - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

3. Об утверждении Положения о профессиональных аварийно-спасательных службах, профессиональных аварийно-спасательных формированиях, выполняющих горноспасательные работы, и Правил расчета стоимости обслуживания объектов ведения горных работ

профессиональными аварийно-спасательными службами, профессиональными аварийно-спасательными формированиями, выполняющими горноспасательные работы [Электронный ресурс]: постановление Правительства РФ от 27.04.2018 № 517. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

4. Об утверждении Положения о ВГСЧ [Электронный ресурс]: постановление Правительства РФ от 28.01.2012 № 45 (с изм. и доп.). - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

5. Положение о проведении аттестации аварийно-спасательных служб, аварийно-спасательных формирований, спасателей и граждан, приобретающих статус спасателя [Электронный ресурс]: постановление Правительства РФ от 22.12.2011г. № 1091. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

6. Положение о разработке планов мероприятий по локализации и ликвидации последствий аварий на опасных производственных объектах [Электронный ресурс]: постановление Правительства РФ от 15.09.2020г. № 1437. Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

7. «Методические рекомендации о порядке составления планов ликвидации аварий при ведении работ в подземных условиях» [Электронный ресурс]:. РД 15-11-2007: приказ Ростехнадзора от 24.05.2007 № 364. - Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза

8. Об утверждении табеля технического оснащения ВГСЧ [Электронный ресурс]: приказ МЧС России от 13.12.2012. № 766. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

9. Руководство по организации технического обслуживания горноспасательного оснащения ФГУП «ВГСЧ» [Электронный ресурс]:: приказ ФГУП «ВГСЧ» МЧС России от 27.05.2014г. № 375. – Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза

10. Нормативы организации ВГСЧ [Электронный ресурс]: приказ МЧС от 29.11.2012г. № 707. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

11. Положение о прохождении службы в ВГСЧ [Электронный ресурс]: Приказ МЧС от 18.03.2013г. № 180. - Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза

12. Устав внутренней службы военизированных горноспасательных частей [Электронный ресурс]: Приказ МЧС от 31.10.2018г. № 484. - Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза

13. Порядок создания ВГК [Электронный ресурс]: приказ МЧС от 22.11.2013г. № 765 (с доп. и изм.). - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

14. Положение об условиях оплаты труда, предоставления гарантий и компенсаций работникам ВГСЧ [Электронный ресурс]: приказ МЧС от 03.11.2015г № 581. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

15. Устав ВГСЧ по организации и ведению горноспасательных работ [Электронный ресурс]:. приказ МЧС России от 09.06.2017 № 251. - Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза

16. Федеральные нормы и правила в области промышленной безопасности «Правила безопасности при ведении горных работ и переработке твердых полезных ископаемых» [Электронный ресурс]: приказ Ростехнадзора от 8.12.2020 № 505. – Режим доступа: ИПС «КонсультантПлюс», в локальной сети вуза.

17. Федеральные нормы и правила в области промышленной безопасности «Инструкция по локализации и ликвидации последствий аварий на опасных производственных объектах, на которых ведутся горные работы» [Электронный ресурс]: приказ Ростехнадзора от 11.12.2020 г. № 520. - Режим доступа: ИПС «Гарант», в локальной сети вуза.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

# Б1.О.26.01 РУССКИЙ ЯЗЫК И ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ

Специальность
*21.05.04. Горное дело*

Специализация
*Электрификация и автоматизация горного производства*

квалификация выпускника: специалист

формы обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доцент

| Одобрены на заседании кафедры | Рассмотрены методической комиссией |
|---|---|
| Иностранных языков и деловой коммуникации | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ *(подпись)* | Председатель _____ *(подпись)* |
| Юсупова Л. Г. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 г. | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

## Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженные в РПД.

# Методические материалы к практическим занятиям

## ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

**Цель –** вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Лексикография** – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей. |
| **Энциклопедический словарь** – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания. |
| **Лингвистический словарь** – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п. |
| **Словарная статья** – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.). |
| **Помета** – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления. |

**Задание 1**. *Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.*

**ФАЗА** – **1.** В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). **2.** В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*[1]).

**ФА́ЗА**, -ы, *ж.* [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* **2.**

[1] Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.edudic.ru/geo/

*физ.* Величина, характеризующая состояние какого-н. процесса в каждый момент времени. *Ф. колебания маятника. Газообразная ф. вещества.* **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. **3.** *эл.* Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810).

**ФА́ЗА**, -ы, *ж.* **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр. положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.). *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* **2.** Отдельная группа обмоток генератора (спец.). || *прил.* **фа́зовый**, -ая, -ое (к 1 знач.) *и* **фа́зный**, -ая, -ое (ко 2 знач.). ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике: глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. М., 2005. С. 847).

**Задание 2**. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

**ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ**

| **Типы помет** | **Примеры помет** | **Значение отсутствия помет** |
|---|---|---|
| **1.** Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю | *науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн.* и др. | Слово межстилевое |
| **2.** Помета, указывающая на сферу употребления слова | *обл., прост., жарг.*, *спец.* и др. | Слово общеупотребительное |
| **3.** Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу | *устар., ист., арх.*, *нов.* и др. | Слово принадлежит к активному запасу |
| **4.** Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова | *ласк., ирон., шутл., унич., бран., пренебр., высок., неодобр.* и др. | Слово нейтральное |

**Задание 3.** *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

**Абориге́н**, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж.* **абориге́нка** (разг.)

**Грамоте́й**, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

**Деяние**, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

**Жена́тик**, -а, *м.* (прост. шутл.) – женатый человек (обычно о молодожене).

**Иждиве́нчество**, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет.

**Карапу́з**, -а, *м.* (разг. шутл.) – толстый, пухлый малыш.

**Кляча**, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь.

**Ле́нчик**, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла.

**Мате́рщина**, -ы, *ж., собират.* (прост. груб.) – неприличная брань.

**Му́шка**, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь.

**Небезызве́стный**, -ая, -ое; -тен, -тна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

**Неулыба**, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив.

**Новоде́л**, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

**Нувори́ш**, -а, *м.* (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

**Общепи́т**, -а, *м.* (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. || *прил.* **общепи́товский**, -ая, -ое (разг.).

**Остоло́п**, -а, *м.* (прост. бран.) – глупец, болван.

**Отчи́зна**, -ы, *ж.* (высок.) – отечество, родина.

**Побо́ры**, -ов. **1.** Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). **2.** *перен*. Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

**Предуве́домить**, -млю, -мишь; -мленный; *сов.*, *кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

**Риста́лище**, -а, *ср.* (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

**Сва́ра**, -ы, *ж.* (прост.) – шумная перебранка, ссора.

**Торга́ш**, -а, *м.* **1.** То же, что торговец (устар. неодобр.). **2.** *перен*. Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

**Умка**, -и, *м.* (обл.) – белый медведь.

**Упова́ние**, -а, *ср.* (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

**Ха́м**, -а, *м.* (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

**Задание 4.** *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

## НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ[2]

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

ба́рхатка *и* бархо́тка;

ведёрцев *и* ведёрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещённый на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к

[2] Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредо́вый *и доп.* бредово́й;

белёсый *и доп.* беле́сый;

ма́шет *и доп.* маха́ет.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:

ворва́лся *и доп. устар.* ворвался́

вспе́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспе́нен, вспе́нена *и доп. устар.* вспенённый, вспенён, вспенена́

бу́до[чн]ик *и доп. устар.* бу́до[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:

бало́ванный ! *не рек.* ба́лованный;

вручу́т ! *не рек.* вру́чит;

гру́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -е́й.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:

горшо́чек, горшо́чка ! *не рек. устар.* горше́чек;

да́рит ! *не рек. устар.* дару́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:

вы́боры, вы́боров ! неправ. выбора́, выборо́в;

компромету́ровать, -рую, -рует ! неправ. компроме[н]ту́ровать

| Рекомендательные пометы | Запретительные пометы |
|---|---|
| | |

## ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

**Цель –** повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Орфографические нормы** – это правила написания слов. |
| **Пунктуационные нормы** – это правила расстановки знаков препинания. |

**Задание 1.** *Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.*

Я р…шил в…рнуться д…мой. Быстрыми шагами я прошел зар…сли кустов. У моих ног т…нулась р…внина а дальше ст…ной возвышался мрачный лес. Я осм…трел окрес…ность и спустился с х…лма. Высокая тр…ва на дне д…лины б…лела р…вной скат…ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб…раться по у…кой тр…пинке. Кругом р…сла высокая ро…ь. Н…чная птица промчалась и к…снулась меня св…им крылом. В т…шине глухо разд…вались мои шаги. Но вот на в…чернем небе стали заж…гаться звезды. Забл…стел серп м…л…дого мес…ца. Теперь я узнал д…рогу и предпол…гал что через час буду дома.

**Задание 2.** *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п…р…езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра…ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр…бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра…пряженных телегах сидят пр…старелые пр…езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр…бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по…ъезжаем к ограде пр…вязываем лошадей. На дощатом пр…лавке ра…ложены картинки и книги, и мещанин-пр…давец по…совывает календари и книги с з…манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр…смотреть липового меда п…дешевле п…торговаться в свое удовольствие пр…купить гостинцев родным.

В обед негаданно с…бирается туча, и дождь, по…нимая пыль, барабанит по усыпанной по…солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр…ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра…кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра…ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

**Задание 3.** *Повторите правописание Ъ и Ь (учтите разные функции Ь). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред…юбилейное мероприятие, обжеч…ся огнем, решил удалит…ся проч…, кофе был горяч…, достан…те багаж…, чувствовать гореч… неудач…, выть по-волч…и, любител…ская кинос…емка, должность камен…щика, выйти замуж… осен…ю, береч… здоров…е, сроч…ный заказ, лечить кон…юнктивит, уловить фал…ш… в голосе, трех…этажный павил…он, заменить мед…ю, назнач…те время трех встреч…, с…еш… во время лан…ча, следить за своей реч…ю, купает…ся в реке, оформиш… пен…сию, остав…те антиквару старинную брош…, четырех…ядерный процессор, волосы до плеч…, сер…езный компан…он, умнож…те полученный резул…тат, он хорош… собой, выявить из…ян, декабр…ские морозы, с…агитировать на выборы, коротко стрич…ся, сверх…естественный об…ект, боиш…ся ос…минога, неб…ющаяся вещ…, об…емный текст п…есы, не забуд…те плащ…, невтерпеж… ждать, раз…яренный бык, разрабатывать кар…ер.

**Задание 4.** *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн…о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален…ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы отполирован…ые плиты гранита. В этом заброшен…ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен…ыми из обожжен…ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен…ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен…ы под цвет камен…ых глыб. Комнаты соединен…ы переходами из плетен…ых циновок. Все разложен…о аккуратн…о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион…ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален…ой. Бросался в глаза и меч повеш…н…ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен…ой цветными пометками. Все, что нанесен…о на нее, – плод трудн…ых поисков в горах прокален…ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

**Задание 5.** *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н…)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н…)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н…)один из бедных чиновных ее жителей (н…)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н…)приятнен? Здесь единствен…ое место, где показываются люди (н…)по(н…)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об…емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н…)сколько лет (н…)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н…)пр…мен…о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н…)составляет (н…)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен…о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н…)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н…)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н…)кто этого (н…)заметит. (по Н. В. Гоголю)

**Задание 6.** *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш…(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк… (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж… этот(то) поезд

притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж… раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться… (По Ч. Айтматову)

**Задание 7.** *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)
2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо нарядятся в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)
3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)
4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)
5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)
6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)
7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)
8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)
9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)
10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)

11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

## ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

**Цель –** повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений[3].

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Акцентологические нормы** – это правила постановки ударения в слове. |
| **Омонимы** – слова, у которых от постановки ударения зависит значение. |

**Задание 1.** *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, ста́ртер и стартёр):*

**1)** Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремень, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

**2)** Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотровый, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

**3)** Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

**Задание 2.** *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

*Например: пла́чу (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – плачу́ (1 лицо ед. число от глагола «платить»).*

---

[3] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

**Задание 3.** *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, использовав любые слова из* ***задания 1*** *и / или* ***2****.*

1. В последнем квартале этого года эксперты одной из фирм заключили выгодный договор на прокладку газопровода**,** за что были премированы. 2. Для обеспечения здорового образа жизни исключите из своего рациона арахис, торты и алкоголь, а включите в него творог, свеклу и щавель. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести красивейшие кухонные гарнитуры по оптовым ценам.

## ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

**Цель –** повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений[4].

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Орфоэпические нормы** – это правила произношения слов.<br>**Транскрипция** – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках). |

**Задание 1.** *Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

| **[шн]** | **[шн]** и **[чн]** | **[чн]** |
|---|---|---|
| | | |

**1)** Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

**2)** Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

**Задание 2.** *Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

| **Твёрдое произношение** | **Варианты** | **Мягкое произношение** |
|---|---|---|
| | | |

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуары, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

---

[4] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

**Задание 3.** *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:*

**1)** Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадежный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

**2)** Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

Совершенные пропорции – совершенные поступки;

Крестный ход – крестный отец.

**Задание 4.** *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:*

1) Ма**сс**а, су**рр**огат, гру**пп**а, гри**пп**, те**рр**аса, а**тт**естат, ко**лл**ега, мета**лл**, су**мм**а, а**нн**отация, криста**лл**, оди**нн**адцать, и**лл**юзия, ва**нн**а, апе**лл**яция, ка**сс**а, га**лл**юцинация, не**тт**о.

2) Дро**жж**и, бу**хг**алтер, по**зж**е, во**жж**и, и**зж**арить, вы**жж**енный, пе**сч**аный, и**зж**ить, ра**зж**ать, же**стч**е, ни**зш**ий, до**жд**и, ре**зч**е, ви**зж**ать, и**зж**ога, ма**сш**таб, мо**жж**евельник, бе**зж**изненный, ра**сч**ет, съе**зж**у, прие**зж**ай.

**Задание 5*.** *Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:*

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

## ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

**Цель** – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Словообразовательные нормы** – это правила образования новых слов. |

**Задание 1.** *Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.*

**1.** Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины. **2.** Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию. **3.** Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади. **4.** Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск. **5.** Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия. **6.** Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях. **7.** После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад. **8.** Многие кавказские народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии заместо высшей математики.

## ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

**Цель** – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

**Основные понятия темы:**

**Лексические нормы** – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях.

**Паронимы** – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению.

**Речевая избыточность** – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм).

**Лексическая сочетаемость** – это способность слова соединяться с другими словами по значению.

**Жаргонизм** – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей.

**Фразеологизм** – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

**Задание 1.** *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодовитый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

**Задание 2.** *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

**1.** При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.**

Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

**Задание 3.** *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

**1.** Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

**Задание 4.** *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

**1.** Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. **2.** Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. **3.** Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. **4.** Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. **5.** Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

**Задание 5.** *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

**1.** Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. **2.** В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. **3.** Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. **4.** После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. **5.** Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

**Задание 6.** *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

**1.** Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. **2.** Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. **3.** Его обещания рубля ломаного не стоят. **4.** Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». **5.** К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

**Задание 7*.** *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

**1.** Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. **2.** В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. **3.** Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. **4.** Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. **5.** Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. **6.** Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. **7.** Исправьте

ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. **8.** Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. **9.** К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. **10.** После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. **11.** В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. **12.** Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. **13.** На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. **14.** Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. **15.** После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

## ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

**Цель** – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари[5]).

**Основные понятия темы:**

| |
|---|
| **Морфологические нормы** – это правила образования грамматических форм слова. |

**Задание 1.** *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

**1)** Атташе, авеню, адвокат, амплуа, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (*склоняемые и несклоняемые существительные*).

**2)** Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (*имена собственные*).

**3)** АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (*аббревиатуры*).

**Задание 2.** *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания* ***прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

---

[5] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

**Задание 3.** *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

*Кому:*

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

*От кого:*

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапиро, Станислав Горбачевич.

**Задание 33.** *Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.*

| Окончание **–а/ –я** | Окончание **–ы/ –и** | Варианты **–а/ –я** и **–ы/ –и** |
|---|---|---|
| | | |

*Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, ордер**а** – «документы» и ордер**ы** – «элементы в архитектуре»).*

**1)** Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

**2)** Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

**Задание 4.** *Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ла́сты – ла́ст**ов** и ла́ст□).*

Армяне, апельсины, басни, блюдца, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

**Задание 5.** *Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.*

**1.** Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). **2.** Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). **3.** Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. **4.** За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). **5.** Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

**Задание 6.** *Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:*

**1.** Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. **2.** Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. **3.** Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. **4.** Двоих подруг она уже встретила по приезде в родной город. **5.** Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

**Задание 7.** *Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.*

**1.** Всем стало понятно, что ейное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. **2.** После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. **3.** Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазиет в аудиторию 3519. **4.** Съездя в другой город, она поняла, как хорошо на родине. **5.** Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. **6.** Он схватился за канат двумями руками. **7.** Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. **8.** Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. **9.** Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. **10.** В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

**Задание 8.** *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

**1.** Новый преподаватель кажется более образованнее. **2.** Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. **3.** ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. **4.** В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. **5.** Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. **6.** МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. **7.** В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. **8.** Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. **9.** На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. **10.** Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. **11.** На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. **12.** Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. **13.** На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. **14.** Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. **15.** Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

## ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

**Цель** – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

**Основные понятия темы:**

**Синтаксические нормы** – это правила, регулирующие порядок и связь слов в

словосочетании и предложении.

**Задание 1.** *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

**Задание 2.** *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

*Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации (**действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему**).*

*Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.*

**1.** Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. **2.** Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. **3.** Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. **4.** Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. **5.** Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. **6.** Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. **7.** Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. **8.** Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. **9.** Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. **10.** Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

**Задание 3.** *Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.*

**1.** Много знаменитых людей закончили наш университет. **2.** Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. **3.** Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. **4.** На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. **5.** Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. **6.** Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». **7.** Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. **8.** Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. **9.** Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. **10.** Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

**Задание 4.** *Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

**1.** Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. **2.** Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. **3.** Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. **4.** Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. **5.** В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. **6.** Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. **7.** Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. **8.** В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. **9.** Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. **10.** Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. **11.** Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. **12.** Учебное пособие не только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

## ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

**Цель** – повторить систему функциональных стильных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

**КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):**

**Функциональный стиль** – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный**, **официально-деловой**, **публицистический**, **литературно-художественный**, **церковно-религиозный**. Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые

вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризмов, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обознаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

| Функциональный стиль | Стилеобразующий фактор | | | | | | Жанры |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Доминирующая языковая функция | Форма общественного сознания | Основная форма речи | Типичный вид речи | Тон речи | Тип адресата | |
| Научный | Сообщение | Научное сознание | Письменная | Монолог | Нейтральный | Массовый (подготовленный к восприятию научной информации) | Учебник, монография лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад |
| Официально-деловой | Сообщение / воздействие | Правовое сознание | Письменная | Монолог | Нейтральный / императивный | Массовый | Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика |
| Публицистический | Сообщение + воздействие | Идеологическое сознание | Письменная и устная | Монолог и диалог | Обусловленный содержательно | Массовый | Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка |
| Литературно-художественный | Воздействие | Эстетическое сознание | Письменная | Обусловленный родом и жанром литературы | Обусловленный эстетической задачей | Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений) | Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада |
| Церковно-религиозный | Воздействие | Религиозное сознание | Письменная и устная | Монолог | Обусловленный ситуативно | Массовый | Исповедь, проповедь, житие, молитва |
| Разговорный | Общение | Обыденное сознание | Устная | Диалог и полилог | Обусловленный ситуативно | Личный (конкретный собеседник) | Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка |

**Задание 1.** *Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.*

**Текст 1**

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

**Текст 2**

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

**Текст 3**

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

**Текст 4**

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

**Текст 5**

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает

крестную силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

**Текст 6**

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травою такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхнула белым огнем; тотчас же опять загремел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыпятся обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки. (*А. П. Чехов. Степь*)

**Задание 2.** *Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.*

**1.** Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. **2.** В статье сообщается, что левые лекарства отследят по аптекам и конфискуют. **3.** Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. **4.** Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. **5.** Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. **6.** Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. **7.** Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. **8.** Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. **9.** Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. **10.** Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

**Задание 3.** *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов*[6]*. Попытайтесь обосновать свою точку зрения.*

**Текст 1**

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 2**

Веруем в Единого Бога Отца Всемогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девой Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознесся на Небо и воссел одесную Всемогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 3**

**В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.**

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

[6] Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей** в **Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 4**

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 5**

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 6**

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень больное сердце // А что такое больное сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообщем / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай

вам Бог узнать / что такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять…

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 7**

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 8**

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезающая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетавшаяся пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурою неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 9**

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то

обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 10**

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

**Текст 11**

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (как Бог на душу положит; как у Христа за пазухой; человек предполагает, а Бог располагает). Некоторые слова изменили свою семантику (воскресение, братия), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (вертеп).

| | |
|---|---|
| 1) разговорному | 4) научному |
| 2) художественному | 5) публицистическому |
| 3) официально-деловому | 6) церковно-религиозному |

## ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

**Цель** – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

**КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):**

**Научный стиль –** один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

**Основные стилевые черты научного стиля:**

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых*, *во-вторых*, *наконец*, *итак*, *следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов; четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность** и **отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– **насыщенность фактической информацией**;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

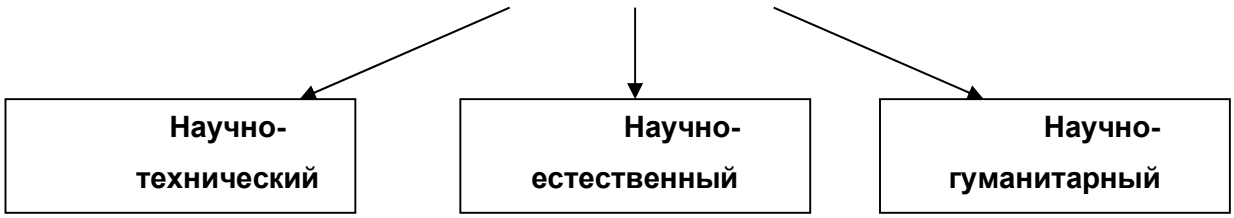
**Основные языковые особенности научного стиля:**

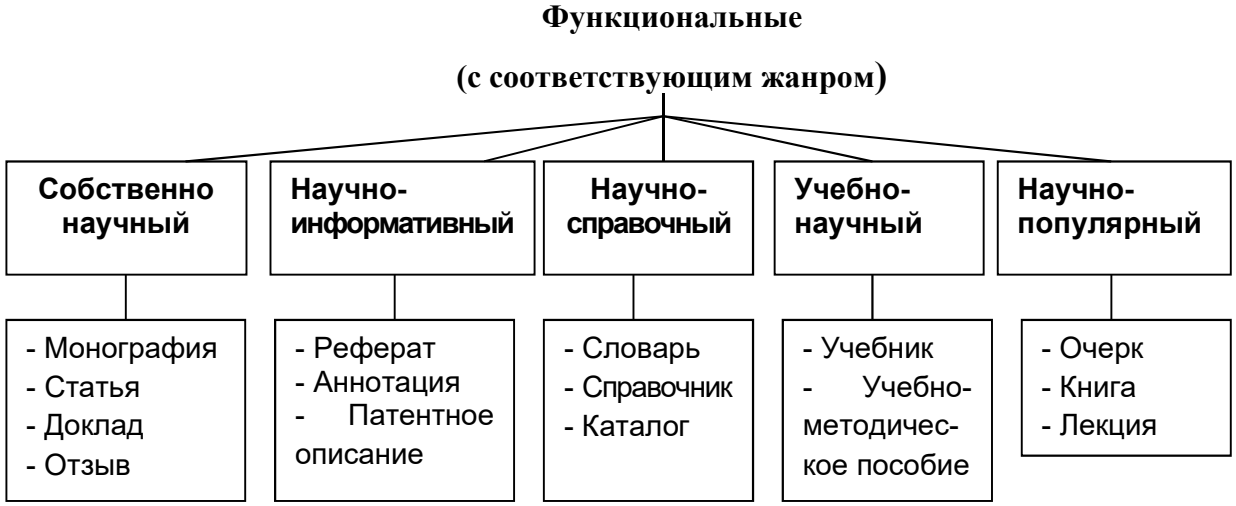
| Языковые особенности | Примеры |
|---|---|
| **Лексические** | |
| 1) термины | *обогащение полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело* и др. |
| 2) общенаучная лексика | *закон, теория, аспект, носитель, конструкция* и др. |
| 3) книжная лексика абстрактного значения | *применение, явление, замедление, обязательство, подготовка* и др. |
| **Морфологические** | |
| 1) частотность существительных | (Примерно 40 % существительных на единицу текста) |

| | |
|---|---|
| 2) частотность форм родительного падежа существительных | *попадание в водоемы масло-смазывающих продуктов* (род. п.) *отдельных узлов* (род. п.) *механического оборудования* (род. п.) *гидротехнических сооружений* (род. п.) и т. п. |
| 3) широкое использование существительных среднего рода | *отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение* и др. |
| 4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени | *равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет* и др. |
| 5) полузнаменательные глаголы-связки | *есть, быть, являться* |
| 6) употребление причастий и деепричастий | *подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив* и др. |
| **Синтаксические** | |
| 1) вводные слова и конструкции | *вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей* и др. |
| 2) бессубъектные конструкции | *карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен* и др. |
| 3) безличные предложения | *необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов* и др. |
| 4) обобщенно-личные предложения | *подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков* и др. |
| 5) цепочки однородных членов | *Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.* |
| 6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью | *Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизуется, а затем ставится новый эксперимент.* |

**Подстили научной речи:**

**Тематические**






**Задание 1.** *Проанализируйте текст по следующей схеме:*

***1.*** *Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.*

***2.*** *Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.*

***3.*** *Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.*

***4.*** *Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.*

***5.*** *Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.*

**Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ**[7]

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач немыслимо без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как

[7] Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательно значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической*, или *прикладной*, геологией.

## ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ[8]

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных

[8] Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина, П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

## Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА[9]

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

---

[9] Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, Сi), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горно-добывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

**Задание 2.** *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

**1.** В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. **2.** Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. **3.** Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. **4.** Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза

энергетического голода. **5.** Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. **6.** Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. **7.** Компьютерный вирус – это сильный паразит! **8.** Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения интердисциплинарных исследований. **9.** Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога, как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

## ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

**Цель** – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

**КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):**

**Официально-деловой стиль** – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

**Основные стилевые черты официально-делового стиля:**

– **объективный**, **абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);

– **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;

– **стандартизированность**, **стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета*, *справка*, *инструкция*, *заявление*, *деловое письмо* и т. д.);

– **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волюнтативность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю*, *приказываю*, *поздравляю*; формами долженствования – *надлежит*, *необходимо*, *следует*, *предлагается*);

– **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

**Основные языковые особенности официально-делового стиля:**

| Языковые особенности | Примеры |
|---|---|
| **Лексические** | |
| 1) языковые штампы (канцеляризмы, клише) | *ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока* и др. |
| 2) профессиональная терминология | *недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие* и др. |
| 3) архаизмы | *оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание* и др. |
| 4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой | *прибыть* (вместо *приехать, прилететь, прийти* и т. д.), *транспортное средство* (вместо *автобус, самолет, «Волга»* и т. д.), *населенный пункт* (вместо *деревня, город, село* и т. д.), *помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)* |
| **Морфологические** | |
| 1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием | *налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель* и др. |
| 2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода | *сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина* и др. |
| 3) отглагольные существительные с частицей *не-* | *нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание* и др. |
| 4) производные предлоги | *в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании* и др. |
| 5) инфинитивные конструкции | *провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность* и др. |
| 6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия | *обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф* и др. |

| | |
|---|---|
| 7) сложные слова, образованные от двух и более основ | *бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижепоименованный* и др. |
| 8) нанизывание существительных с суффиксом *-ние* | *Приготовлением к преступлению признается приискание и приспособление средств или орудий или умышленное создание условий для совершения преступлений....* |
| 9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п. | *Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.* |
| 10) широкое использование аббревиатур | *РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечать и др.* |
| 11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже | *Для применения (род. п.) мер (род. п.) общественного воздействия (род. п.); в целях широкой гласности (род. п.) работы (род. п.) Министерства (род. п.) высшего образования (род. п.); результаты деятельности (род. п.) органов (род. п.) налоговой полиции (род. п.)* и др. |
| **Синтаксические** | |
| 1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10) | *Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является имущество: земельный участок, насаждения, хозяйственные или иные постройки, мелиоративные и другие сооружения, продуктивный и рабочий скот, птица, сельскохозяйственная и иная* |

| | |
|---|---|
| | *техника, оборудование, транспортные средства, инвентарь и другое имущество* и др. |
| 2) наличие пассивных конструкций | *платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год* и др. |
| 3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными условия | *При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное в настоящей статье возмещение в том случае, если спор решен в пользу работника*. |

**Документ –** зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

**Форма** документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

| | **Состав реквизитов документа** |
|---|---|
| **1.** | Государственный герб Российской Федерации |
| **2.** | Герб субъекта Российской Федерации |
| **3.** | Эмблема организации или товарный знак |
| **4.** | Код организации |
| **5.** | Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН) |
| **6.** | Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП) |
| **7.** | Код формы документа |
| **8.** | Наименование организации |
| **9.** | Справочные данные об организации |
| **10.** | Наименование вида документа (жанр документа) |
| **11.** | Дата составления документа |
| **12.** | Регистрационный номер документа |
| **13.** | Ссылка на регистрационный номер или дату документа |
| **14.** | Место составления или издания документа |
| **15.** | Адресат |
| **16.** | Гриф утверждения документа |
| **17.** | Резолюция |
| **18.** | Заголовок к тексту |
| **19.** | Отметка о контроле |
| **20.** | Текст документа |
| **21.** | Отметка о наличии приложения |
| **22.** | Подпись |

| | |
|---|---|
| **23.** | Гриф согласования документа |
| **24.** | Визы согласования документа |
| **25.** | Оттиск печати |
| **26.** | Отметка о заверении копии |
| **27.** | Отметка об исполнителе |
| **28.** | Отметка об исполнении документа и направлении его в дело |
| **29.** | Отметка о поступлении документа в организацию |
| **30.** | Идентификатор электронной копии документа |

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата**, **адресанта**, **название жанра документа**, **основной текст документа**, **список приложений**, **дату** и **подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

**Способы классификации документов:**

1. ***По месту составления***: *внутренние* и *внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).

2. ***По содержанию***: *простые* и *сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление*, *объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы*, *письма*, *инструкции*).

3. ***По форме***: *индивидуальные* и *типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).

4. ***По срокам исполнения***: *срочные* и *бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).

5. ***По происхождению***: *служебные* и *личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).

6. ***По виду оформления***: *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно

воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).

7. ***По функции***: **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание, положение о персонале, должностную инструкцию*), **распорядительные** документы, содержащие конкретные распоряжения (*приказы, распоряжения, указания, решения*)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (*трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты*), **письма**, **договоры**.

**Задание 1.** *Проанализируйте текст официально-делового стиля:*

***1.*** *Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.*

***2.*** *Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.*

***3.*** *Опишите стилевые и языковые особенности текста*[10].

**Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ**
**«О государственном языке Российской Федерации»**

С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.
Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года
Одобрен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

*Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации*

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-I «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

---

[10] Возможна работа по вариантам: 1 вариант – анализ Статьи 1; 2 вариант – анализ Статьи 3; 3 вариант – анализ статьи 4.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<…>

*Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации*

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов

отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<…>

*Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации*

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<…>

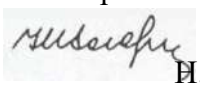
Президент Российской Федерации В. Путин

**Задание 2**. *Проанализируйте следующий текст*[11]*:*

***1.*** *Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.*

***2.*** *Опишите стилевые и языковые особенности.*

***3.*** *Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.*

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор УГГУ**,** профессор

_____ Н.П. Косарев

**РЕГЛАМЕНТ**
**ношения форменной одежды преподавателями,**
**сотрудниками и студентами УГГУ**

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

– на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
– на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
– на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– во время лекционных занятий;
– при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;

[11] Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

– при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
– при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;
– при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

– при посещении ректората, деканатов;
– на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
– при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.



Ученый секретарь совета, профессор О. В. Ошкордин
28.09.2005 г.

**Задание 3.** *Проанализируйте текст[12] с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтативность.*

*Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.*




**Правила внутреннего распорядка обучающихся**
**в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»**
*Дата введения 01 сентября 2014 года*

<…>

**5. Основные права и обязанности обучающихся**

[12] Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

***5.1 Права обучающихся***

Обучающиеся в университете имеют право:

– получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;

– бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;

– участвовать в управлении университетом;

– свободно выражать собственные мнения и убеждения;

– выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;

– участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;

– осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);

– определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;

– ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;

– участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;

– бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;

– принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;

– совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;

– представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;

– обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;

– переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;

– получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

***5.2 Обязанности обучающихся***

Обучающиеся в университете обязаны:

– добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;

– выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;

– постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;

– нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;

– бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;

– нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;

– незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;

– соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;

– поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше правомочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

***5.3 Требования к ношению формы***

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

– на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;

– на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;

– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<…>

## ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

**Цель** – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

**КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):**

**Заявление** – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

**Основные реквизиты заявления:**

**1.** Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

**2.** Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).

**3.** Наименование жанра документа.

**4.** Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.

**5.** Опись приложений к документу, если они имеются.

**6.** Дата.

**7.** Подпись.

**Образец оформления заявления**

*Декану ФГиГ*
*проф. Талалаю А. Г.*
*от студента группы МПГ-16*
*Волкова Михаила Владимировича*

***Заявление***

*Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2018 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.*

*Копию справки-вызова прилагаю.*

*01.10.2018 г.*

---

**Доверенность** – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

**Основные реквизиты разовой доверенности:**

**1.** Наименование жанра документа.

**2.** Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

**3.** Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

**4.** Формулировка доверяемой функции.

**5.** Дата.

**6.** Подпись.

**Образец оформления разовой доверенности**

***Доверенность***

*Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-16 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГГУ мою стипендию за март 2017 года.*

*25.02.2017 г.* 

---

**Расписка** – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

**Основные реквизиты расписки:**

**1.** Наименование жанра документа.

**2.** Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

**3.** Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

**4.** Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).

**5.** Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.

**6.** Дата.

**7.** Подпись.

**Образец оформления расписки**

***Расписка***

*Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-17 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2005 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.*

*Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2017 г.*

*07 ноября 2017 г.* 

---

**Докладная записка** – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

**Основные реквизиты докладной записки:**

**1.** Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

**2.** Наименование жанра документа.

**3.** Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

**4.** Опись приложений к документу, если они имеются.

**5.** Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

**6.** Дата.

**Образец оформления докладной записки**

*Ректору УГТУ*
*проф. Душину А. В.*

*Докладная записка*

*24 декабря 2018 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.*

*Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.*

*Описание прилагается.*

*Студент группы ТБ-17* *Вутенко Б. Н.*

*25 декабря 2018 г.*

---

**Объяснительная записка** – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

**Основные реквизиты объяснительной записки:**

**1.** Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

**2.** Наименование жанра документа.

**3.** Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

**4.** Опись приложений к документу, если они имеются.

**5.** Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

**6.** Дата.

**Образец оформления объяснительной записки**

*Зав. кафедрой ИЯДК*
*доц. Юсуповой Л. Г.*

***Объяснительная записка***

*05.03.2018 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.*

*Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.*

*Студентка группы МЭ-15* *Вайслер Ю. М./*
*07.03.2018 г.*

---

**Задание 1.** *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;

б) заявление с просьбой принять Вас на работу;

в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;

г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;

д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;

е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;

ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

**Задание 2.** *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

**Текст 1**

*Декану УГТУ*
*От студента III курса очной формы обучения факультета гражданской защиты*
*Волк Василия Васильевича*

*заявление*

*В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.*

*09.09.18 г.*

**Текст 2**

*Ректору УГТУ*
*Н. П. Косареву*

*доверенность.*

*Я, Задорин Виктор, студент УГТУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).*

*1.5.18 г.* *Задорин В. З./*

**Текст 3**

*Кафедре ИЯДК*

*расписка*

*Я – Пустник Валентин Тимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.*

*Обязуюсь вернуть в срок.*

*25 сентября*

**Текст 4**

*Декану ГМФ*
*Козину Владимиру*
*Зиновьевичу*

*Докладная*

*Уважаемый Владимир Зиновьевич!*

*Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ГМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.*

*Пропали: куртка черная кожанная, красная сумка в цветочек, белый платок.*



*1 октября 2018 года*

**Текст 5**

*Зав. кафедры ТТФ Волкову М. Н.*
*От студента Хлебникова Семена.*

*Объяснительная о прогуле*

*Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из 6 городской больницы прилогаю.*

*01.11.18* *Хлебников С.*

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

| *№ п/п* | *Наименование* |
|---|---|
| 1 | *Веселкова Т. В.* Культура устной и письменной коммуникации: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Саратов: Вузовское образование, ИЦ «Наука», 2020. – 264 с. – ISBN 978-5-4487-0707-0. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/94281.html |
| 2 | *Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания). |
| 3 | *Меленскова Е. С.* Культура речи и стилистика русского языка: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 –«Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. 87 с. |
| 4 | *Меленскова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с. |
| 5 | *Меленскова Е. С.* Русский язык и культуре речи: учебное пособие с тестовыми заданиями для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 – «Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело» / Е. С. Меленскова. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 98 с. |

### Дополнительная литература

| *№ п/п* | *Наименование* |
|---|---|
| 1. | *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания) |
| 2. | *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с. |
| 3. | *Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Москва: Логос, 2014. – 432 с. – ISBN 978-5-98704-534-3. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/39711.html |
| 4. | *Зверева Е. Н.* Русский язык и культура речи в профессиональной коммуникации: учебное пособие / Е. Н. Зверева, С. С. Хромов. – Москва: Евразийский открытый институт, 2012. – 432 с. – ISBN 978-5-374-00575-2. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/14648.html |
| 5. | *Культура научной и деловой речи*: учебное пособие для студентов-иностранцев / М. Б. Будильцева, И. Ю. Варламова, Н. С. Новикова, Н. Ю. Царёва. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2013. – 240 с. – ISBN 978-5-209-05463-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22186.html |

| | |
|---|---|
| 6. | *Курганская М. Я.* Деловые коммуникации: курс лекций / М. Я. Курганская. – Москва: Московский гуманитарный университет, 2013. – 121 с. – ISBN 978-5-98079-935-9. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22455.html |
| 7. | *Лапынина Н. Н.* Русский язык и культура речи: курс лекций / Н. Н. Лапынина. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 с. – ISBN 978-5-89040-431-2. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22667.html |
| 8. | *Меленскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с. |
| 9. | *Меленскова Е. С.* Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с. |
| 10. | *Меленскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с. |
| 11. | *Петрова Ю. А.* Культура и стиль делового общения: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Москва: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – ISBN 5-476-003-476. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/1129.html |
| 12. | *Решетникова Е. В.* Русский язык в деловых коммуникациях: учебное пособие / Е. В. Решетникова. – Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2018. – 99 с. – ISBN 2227-8397. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/84078.html |
| 13. | *Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи / Л. И. Скворцов. – Москва: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – ISBN 978-5-94666-556-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/14555.html |
| 14. | *Усанова О. Г.* Культура профессионального речевого общения: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – ISBN 5-94839-062-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/56426.html |
| 15. | *Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А.* Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.:Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания) |


## ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. *ГОСТ 6.30-2003.* «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация http://docs.cntd.ru/document/1200031361).

2. *Грамота (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru.
3. *Культура письменной речи (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru.
4. *Русский язык*: *энциклопедия русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://russkiyyazik.ru.
5. *Словари и энциклопедии по русскому языку на Академике (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://dic.academic.ru.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.26.02 УПРАВЛЕНИЕ КОЛЛЕКТИВОМ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| *Управления персоналом* | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав.кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Ветошкина Т. А | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 5 |
| 2 | Методические рекомендации по составлению тестовых заданий | 9 |
| 3 | Методические рекомендации к опросу | 11 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 13 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 15 |
| 6 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 17 |
| 7 | Заключение | 19 |
| | Список использованных источников | 22 |

## ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

### *Требования к составлению тестовых заданий*

***Тестовое задание (ТЗ)*** - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

**1.** Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.

**2.** Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.

**3.** Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.

**4.** Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

### *Требования к формам ТЗ*

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.

Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

***Тестовое задание закрытой формы***

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом

количестве часто бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

***Тестовое задание открытой формы***

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

***Тестовые задания на установление правильной последовательности***

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

***Тестовые задания на установление соответствия***

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

## 3. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).

---

[2] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

## 4. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к

пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 6.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена,

проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают,

что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# Б1.О.26.03 САМООРГАНИЗАЦИЯ И SELF-МЕНЕДЖМЕНТ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| *Управления персоналом* | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав.кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Ветошкина Т.А | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 5 |
| 2 | Методические рекомендации по составлению тестовых заданий | 9 |
| 3 | Методические рекомендации к опросу | 11 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 13 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 15 |
| 6 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 17 |
| 7 | Заключение | 19 |
| | Список использованных источников | 22 |

## ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

### *Требования к составлению тестовых заданий*

***Тестовое задание (ТЗ)*** - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

**1.** Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.

**2.** Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.

**3.** Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.

**4.** Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

### *Требования к формам ТЗ*

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.

Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

***Тестовое задание закрытой формы***

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом

количестве часто бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

***Тестовое задание открытой формы***

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

***Тестовые задания на установление правильной последовательности***

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

***Тестовые задания на установление соответствия***

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

## 3. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).

---

[2] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

## 4. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые

методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 6.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена,

проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают,

что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# Б1.О. 26.05 РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Направление подготовки/специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Одобрена на заседании кафедры

Философии и культурологии
*(название кафедры)*
Зав. кафедрой _____
*(подпись)*
Беляев В.П.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 29.09.2021
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией

ГМФ
*(название факультета)*
Председатель _____
*(подпись)*
Осипов П.А.
*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 12.10.2021
*(Дата)*

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по работе с текстом лекций | 5 |
| 2 | Методические рекомендации по подготовке к опросу | 7 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации) | 9 |
| 4 | Методические рекомендации по написанию эссе | 11 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям | 14 |
| 6 | Методические рекомендации по подготовке к дискуссии | 15 |
| 7 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 17 |
| | Заключение | 20 |
| | Список использованных источников | 21 |

## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

***Самостоятельная работа студента*** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям*:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

***Вступление***.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;
- современную оценку предмета изложения;

- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

***Основная часть.***

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

***Заключение.***

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

| *Критерии оценки доклада, сообщения* | *Количество баллов* |
|---|---|
| Содержательность, информационная насыщенность доклада | 1 |
| Наличие аргументов | 1 |
| Наличие выводов | 1 |
| Наличие презентации доклада | 1 |
| Владение профессиональной лексикой | 1 |
| Итого: | 5 |

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен

## 4. Методические рекомендации по написанию эссе

***Эссе*** - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

*Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

***Дискуссия*** (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении** дискуссии выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета

«___» _____ 2018 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебное пособие*

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от «07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

**Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.**

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018
©Уральский государственный горный университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ..... 4
1.1. Основные понятия статики ..... 4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия ..... 9
1.3. Произвольная плоская система сил ..... 16
1.4. Равновесие систем тел ..... 26
1.5. Произвольная пространственная система сил ..... 34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения ..... 44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА ..... 55
2.1. Криволинейное движение точки ..... 55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела ..... 62
вокруг неподвижной оси ..... 62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела ..... 73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела ..... 84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ..... 100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки ..... 100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ ..... 114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки ..... 114
4.2. Колебания материальной точки ..... 124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки ..... 134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ..... 146
5.1. Теорема о движении центра масс системы ..... 146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы
относительно оси ..... 148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы ..... 153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию
движений твёрдого тела ..... 162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ..... 177
6.1. Принцип Даламбера для системы ..... 177
6.2. Принцип возможных перемещений ..... 182
6.3. Общее уравнение динамики ..... 189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода ..... 201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ ..... 220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1 ..... 220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2 ..... 226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3 ..... 231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4 ..... 233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5 ..... 236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6 ..... 241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ..... 249

# 1. СТАТИКА

## 1.1. Основные понятия статики

**Статика** представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

**Материальной точкой** называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

**Силой** в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил.**

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной,** или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

## Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

**Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения.** Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

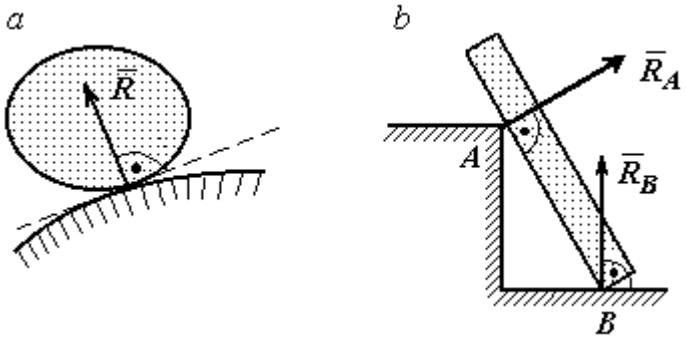



Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормалям к поверхности пола и поверхности бруса.

**Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток).** Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

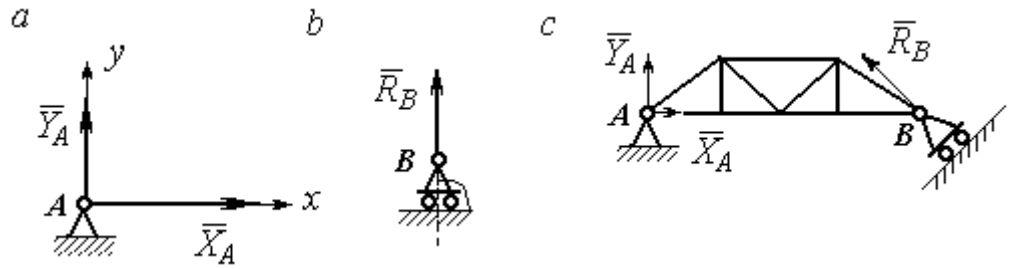



Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
*a* – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

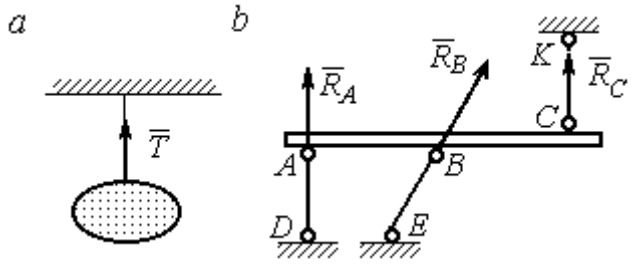



Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

**Гибкая связь и жесткий невесомый стержень.** Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

**Сферический шарнир.** Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира $A$ разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

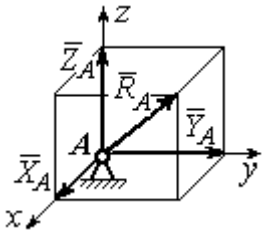


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

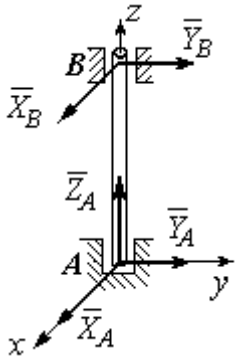


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

**Подшипник и подпятник.** Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника *B* разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям. Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник *A*). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

### Проекция силы на ось и на плоскость

**Проекция силы на ось** есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, *a*, на ось *x*: $F_x = F\cos\alpha$, $Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi$, $P_x = P\cos 90^\circ = 0$.

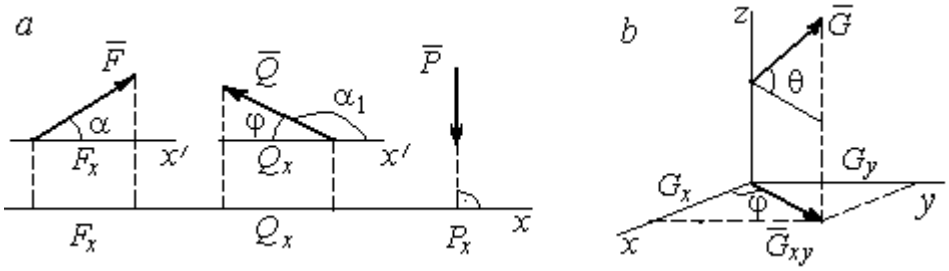



Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
*a* – проекция силы на ось; *b* – проекция силы на плоскость

**Проекцией силы на плоскость** называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, *b* вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость *xy*. По величине $G_{xy} = G\cos\theta$, где $\theta$ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси $xyz$: $G_x = G_{xy}\cos\varphi = G\cos\theta\cos\varphi$, $G_y = G_{xy}\sin\varphi = G\cos\theta\sin\varphi$, $G_z = G\sin\theta$.

## 1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

где $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$ – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, где $F_{kx}, F_{ky}$ – проекции всех сил на координатные оси.

**Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил**

**Задача 1.** Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120°$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

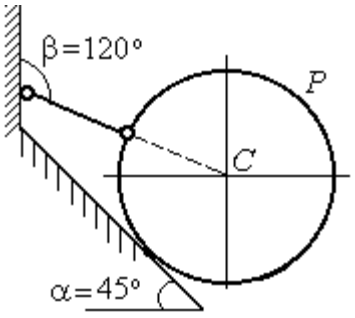



Рис. 1.7. Равновесие шара

*Решение*

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0.$$

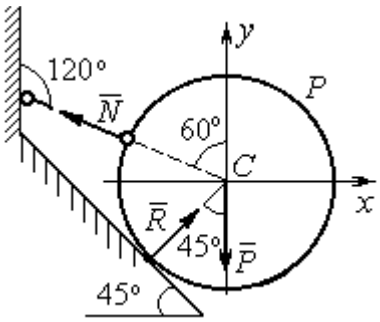


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N\cos 30^\circ + R\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N\cos 60^\circ + R\cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14{,}64$ кН, $R = 17{,}93$ кН.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

**Задача 2.** Кронштейн состоит из невесомых стержней *AC* и *BC*, скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень *BC* горизонтален, стержень *AC* составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру *C* прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10$ кН и $G_2 = 12$ кН. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок *D* так, что угол наклона участка троса *CD* к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней *BC* и *AC*.

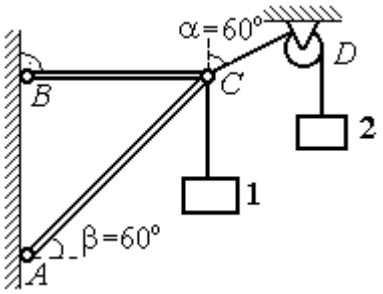


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

*Решение*

Рассмотрим равновесие узла *C*, в котором закреплены стержни и тросы. На узел *C* действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней *BC* и *AC* (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат $xCy$, как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2\cos 60^\circ - T_2\cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2\cos 30^\circ + T_1 - T_2\cos 60^\circ = 0.$$

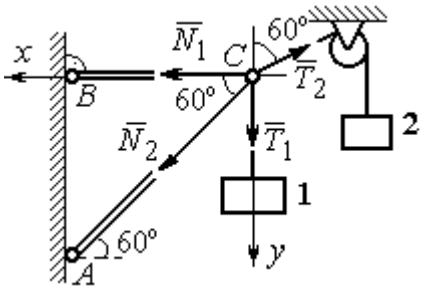



Рис. 1.10. Силы, действующие на узел *C* при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12{,}7$ кН, $N_2 = -4{,}62$ кН. Отрицательная величина $N_2$ означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня *AC* направлен в противоположную сторону.

**Задача 3.** Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном *ABC* посредством каната, перекинутого через блоки *B* и *D* (рис. 1.11). Блок *B* установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней *AB* и *BC*, блок *D* укреплён так, что участок троса *DB* составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни *AB* и *BC* соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз *P*, переброшен через блок *E* и на отрезке *BE* составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока *B*, определить усилия в стержнях *AB* и *BC* при равновесии груза.

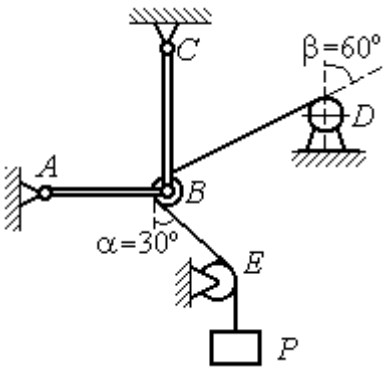



Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

*Решение*

Рассмотрим равновесие блока *B* вместе с отрезками нити *BE* и *BD*. Освободим блок *B* от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити *BD*, приложенная в точке *D*, численно равная весу груза *P*, реакция $\vec{T}'$ нити *BE*, приложенная в точке *E* и также численно равная весу груза *P* и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

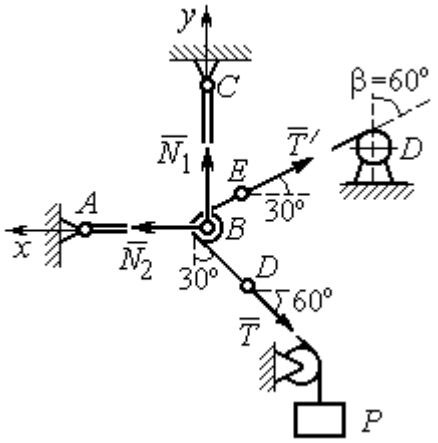



Рис. 1.12. Силы, действующие на блок *B*, при его равновесии

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T'\cos 30^\circ - T\cos 60^\circ = 0;\ \sum F_{ky} = N_1 + T'\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P$ = 20 кН, получим: $N_1$ = 7,32 кН, $N_2$ = 27,32 кН.

**Задача 4.** Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса *CBDP*, натянутого грузом весом *P* = 50 Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса *CB*, *BD*, *DP* и натяжения оттяжек *BA* и *DE*, если угол отклонения оттяжки *BC* от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса *BD* от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

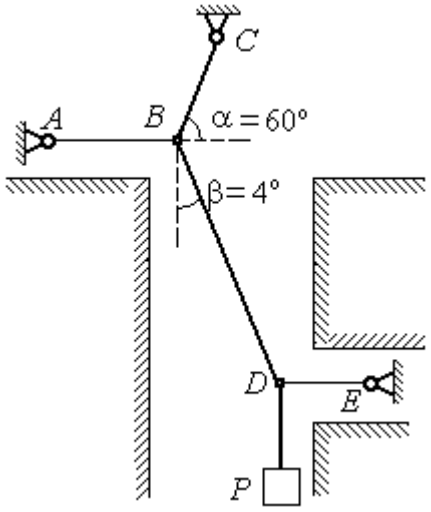



Рис. 1.13. Схема отвеса

*Решение*

Рассмотрим равновесие узла *D*, в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки *DE* и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

*DP*, равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат *xDy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *D:*

$$\sum F_{kx} = S\cos 86^\circ - T_E = 0\,; \;\; \sum F_{ky} = S\cos 4^\circ - T_P = 0\,.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке *DP* $T_P = P =$ 50 Н, находим натяжение $S$ на среднем участке отвеса: $S = \dfrac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50{,}12$ Н. Из первого уравнения находим натяжение $T_E = S\cos 86^\circ = 3{,}49$ Н.

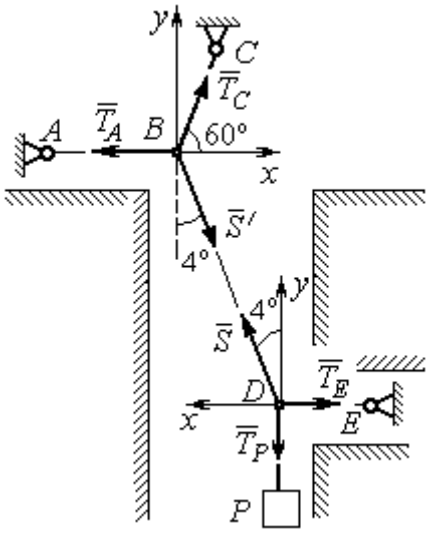


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах *B* и *D* при равновесии отвеса

Теперь рассмотрим равновесие узла *B*, на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки *BA*, реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса *BC* и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$, а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *B:*

$$\sum F_{kx} = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ - T_A = 0\,; \quad \sum F_{ky} = T_C\cos 30^\circ - S'\cos 4^\circ = 0\,.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке *BC* и натяжение $T_A$ оттяжки *BA*: $T_C = \dfrac{S'\cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57{,}73$ Н; $T_A = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ = 32{,}36$ Н.

**Задача 5.** Груз *P* = 20 кН удерживается двумя стержнями *AC*, *AD* одинаковой длины и цепью *AB*, скреплённых в точке *A*, так, что плоскость треугольника *ADC* горизонтальна (рис. 1.15). Цепь *BA* отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние *CE* = *ED.* Трос закреплён одним концом в точке *A*, а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок *K* так, что отрезок

троса $AK$ находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

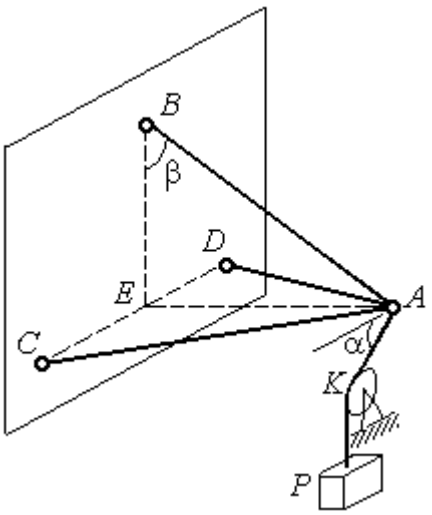


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

*Решение*

Рассмотрим равновесие узла $A$. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии $AK$ и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

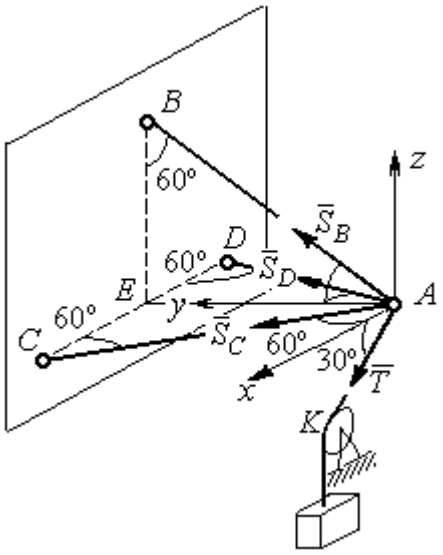


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел $A$, при его равновесии

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел $A$ действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$ – проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27{,}32$ кН; $S_D = 7{,}32$ кН. Знак минус величины $S_C$ показывает, что реакция стержня $AC$ имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

**Задача 6.** Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор $DB$ и $DA$ и растяжки $DC$, соединённых в точке $D$. В точке $D$ к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

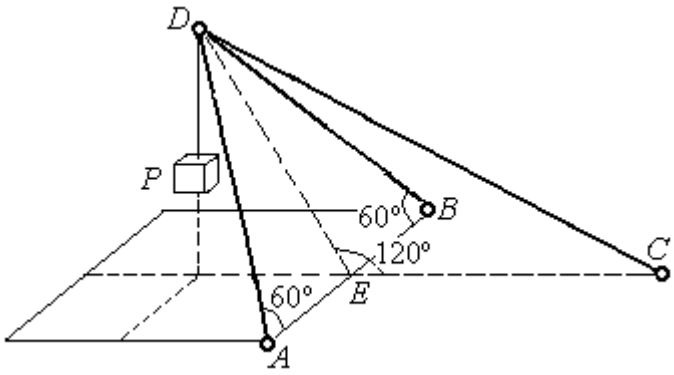


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

*Решение*

Рассматриваем равновесие узла $D$. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

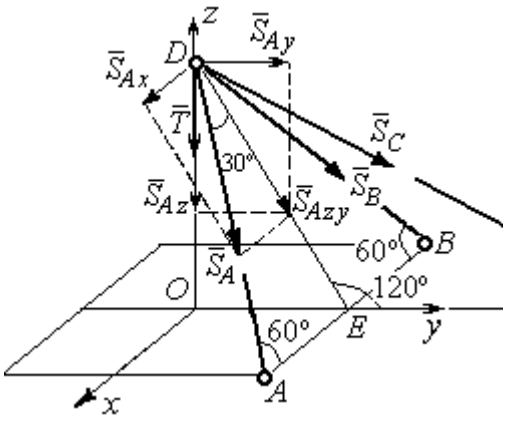


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел $D$, при его равновесии

На узел $D$ действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось $Ox$ и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость $Oyz$, а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси $Oy$ и $Oz$. На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A\cos60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy}\cos60^\circ = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy}\cos30^\circ = -S_A\cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости $Oyz$ и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C\cos30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C\cos60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла $D$ принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ + S_B\cos30^\circ\cos60^\circ + S_C\cos30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A\cos60^\circ - S_B\cos60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A\cos^2 30^\circ - S_B\cos^2 30^\circ - S_C\cos60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения $S_A$ и $S_B$ означают, что реакций стержней $AD$ и $DB$ направлены в противоположную сторону. В результате стержни $AD$ и $DB$ сжаты, а стержень $DC$ растянут.

### 1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил.**

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра $O$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния $h$ от центра до линии действия силы (рис. 1.19, *а*): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину $h$ называют **плечом силы.** Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

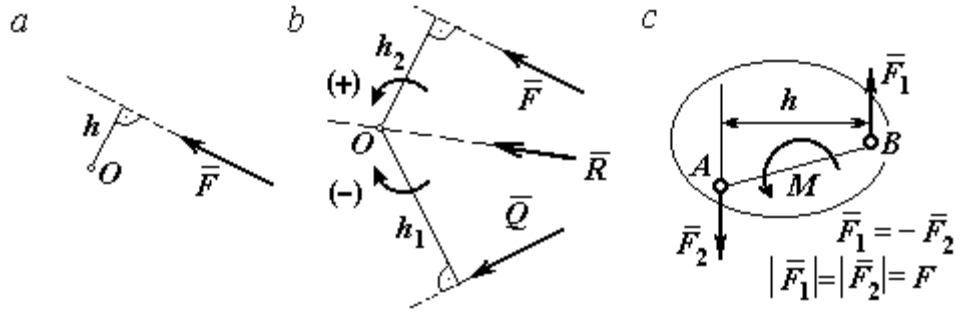



Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
*a*, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

**Парой сил,** или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо $h$ и момент *M*: $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.19, *c*).

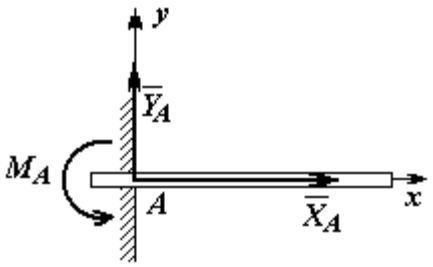



Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

**Жесткая заделка.** Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом $M_A$. Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи $h_1$ и $h_2$ относительно центра *O*. Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

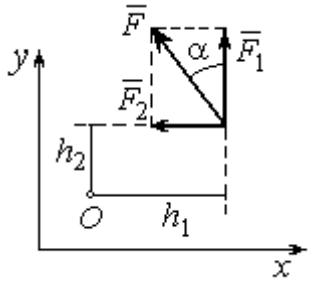


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

**Распределённая нагрузка.** Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределенными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*. Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

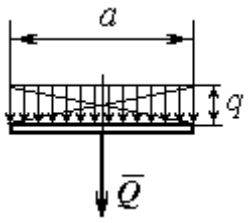


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где $a$ – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

**Основная форма условий равновесия плоской системы сил.** Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где $F_{kx}, F_{ky}$ – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра $A$.

## Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

**Задача 7.** Однородная балка $AB$ весом $P$ = 100 кН прикреплена к стене шарниром $A$ (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке $B$, перекинутого через блок $D$ и несущего груз $Q$. Участок троса $DB$ образует с вертикалью угол 30°. В точке $C$ к балке подвешен груз $G$ весом $G$ = 200 кН. Определить вес груза $Q$, удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира $A$, пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0{,}25BA$.

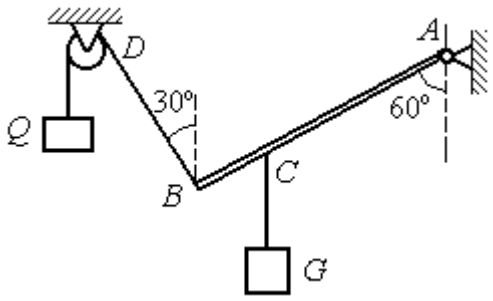


Рис. 1.23. Равновесие балки

*Решение*

Объектом равновесия является балка $AB$. На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка $AB$, реакция шарнира $A$, представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз *Q*, и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз *G*. Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0\,;\ \sum F_{ky} = 0\,;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0\,.$$

Выберем систему координат *xAy,* как показано на рис. 1.24.

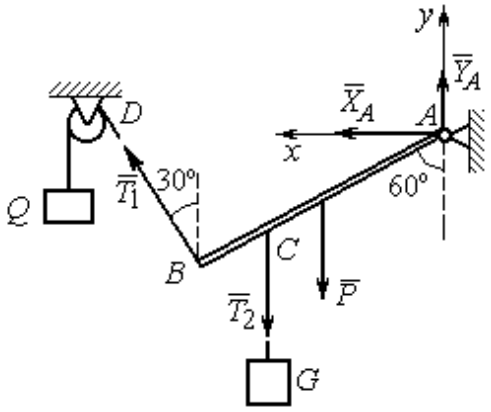



Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1\cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку *A* и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра *A* имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1\ell + T_2\frac{3}{4}\ell\cos 30^\circ + P\frac{1}{2}\ell\cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз *Q*, по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз *G*, численно равна весу груза *G*: $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q\cdot 0{,}5 = 0,\ \ Y_A + Q\cdot 0{,}866 - 300 = 0,\ \ -Q + 173{,}2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173{,}2$ кН, $X_A = -86{,}6$ кН, $Y_A = 150{,}01$ кН.

**Задача 8.** Рама *ACE* (рис. 1.25, *a*) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке *AB* нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке *E* под прямым углом к отрезку *CE* рамы прикреплен трос, перекинутый через блок и несущий груз $P = 20$ кН.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

*Решение*

Рассмотрим равновесие рамы *ACE*. Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.25, *b*.

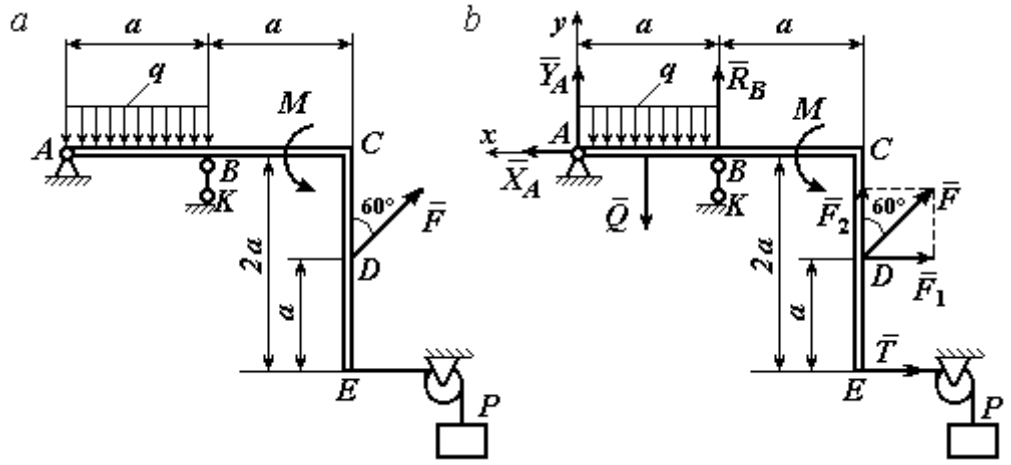



Рис. 1.25. Равновесие рамы:
*a* – конструкция и нагрузка рамы; *b* – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси *Ax* и вертикальной *Ay*. Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Действие груза *P* на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка $AB$ и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, *b* показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры *BK* выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы *ACE* действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M$) ~ 0. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *Ax*, *Ay*, первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0. \qquad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира *A*, проходят через центр *A*, плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, *b*). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы *F* на оси координат: $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра *A* равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра *A*: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0{,}5a + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0. \qquad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных $X_A, Y_A, R_B$. Решая эту систему, найдем: $X_A$= 28,66 кН; $Y_A$= 59,66 кН; $R_B$ = – 60,66 кН.

Отрицательное значение величины $R_B$ означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры $BK$ противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень $BK$ растягивается. Реакция шарнирной опоры *A* – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18$ кН.

**Задача 9.** Прямоугольная рама *ABCED* (рис. 1.26) в точке *A* закреплена жёсткой заделкой. В точке *E* к раме прикреплена нить, составляющая угол 60º к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом *P* = 15 кН. На раму действуют: пара сил с моментом $M$ = 12 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *C* под углом 30° к горизонтальному участку рамы *BE*, и равномерно распределенная на отрезке *BC* нагрузка интенсивностью *q* = 2 кН/м. В точке *D* под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

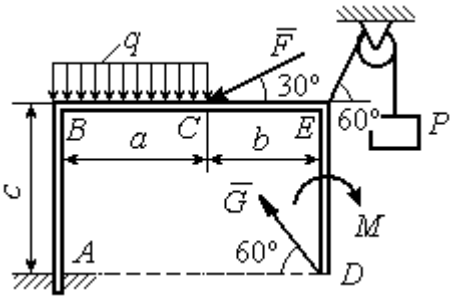


Рис. 1.26. Конструкция рамы

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке *A*, если размеры рамы: *a* = 2 м, *b* = 1 м, *c* = 5 м.

*Решение*

Объектом равновесия является рама *ABCED.* Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке *A* и нить, натянутая грузом *P.* Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке *A* в виде силы, которую представим двумя ее составляющими $-\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом $M_A$ (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке *E*, направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

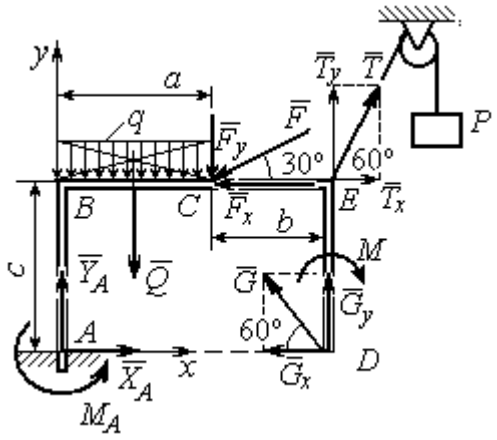



Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия для такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - G\cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F\cos 60^\circ + T\cos 30^\circ + G\cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F\cos 30^\circ$, $F_y = F\cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра *A* равно *c* (как длина перпендикуляра, проведённого из центра *A* на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние *a*. По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра $A$ равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a .$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G\cos 30^\circ \cdot (a+b)$; $M_A(\vec{T}) = -T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

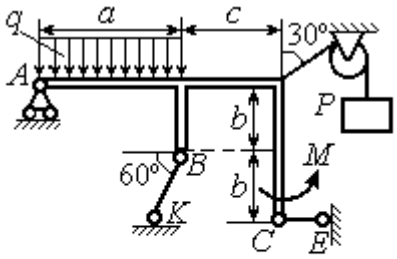
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a - T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b) +$$

$$+ G\cos 30^\circ \cdot (a+b) - Q\frac{a}{2} - M + M_A = 0. \qquad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных $X_A, Y_A, M_A$, откуда найдём значения реакций: $X_A$= 11,16 кН; $Y_A$= –21,31 кН; $M_A$ = –70,73 Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции $M_A$ направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ = 24,05 кН.

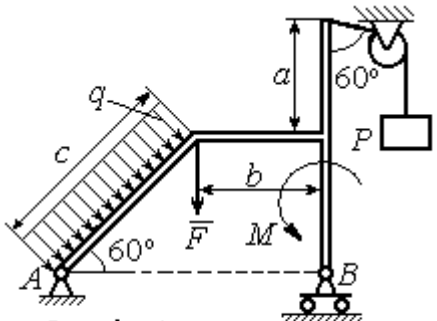
## Упражнения

Упражнение 1.1




$a$ = 3 м, $b$ = 1 м, $c$ = 2 м,
$P$ = 15 кН, $M$ = 3 кНм, $q$ = 5 кН/м.
Найти реакцию стержней $BK$, $CE$
и реакцию шарнира $A$

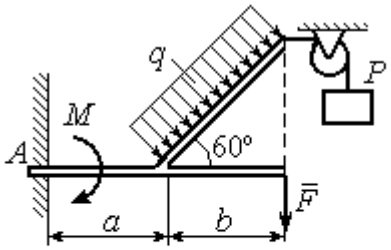
Упражнение 1.2




$a$ = 2 м, $b$ = 1 м, $c$ = 3 м,
$M$ = 3 кНм, $q$ = 3 кН/м,
$P$ = 2 кН, $F$ = 4 кН.
Найти реакцию шарниров $A$ и $B$

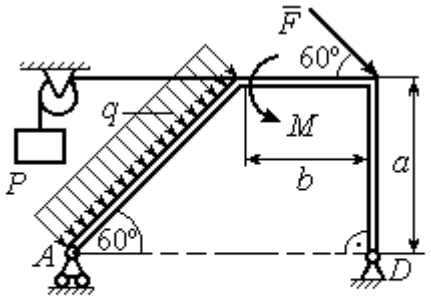
Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3




$a = 1$ м, $b = 2$ м, $F = 2$ кН,
$P = 3$кН, $M = 3$ кН·м,
$q = 2$ кН/м
Найти реакцию жесткой заделки

Упражнение 1.4




$a = 3$ м, $b = 1$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН,
$M = 3$ кН·м, $q = 2$ кН/м.
Найти реакцию шарниров $A$ и $D$

Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

## 1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. **При этом реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

### Примеры решения задач на равновесие систем тел

**Задача 10.** Диск весом $Q$ = 100 кН опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку $AB$. На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30º к его вертикальному диаметру.

Однородная балка $AB$ весом $G = 80$ кН закреплена в точке $A$ шарнирно и удерживается под углом 60º к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке $B$, а другой – переброшен через блок и несёт груз весом $P$. Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира $A$ и вес груза $P$, удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки $AB$ $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

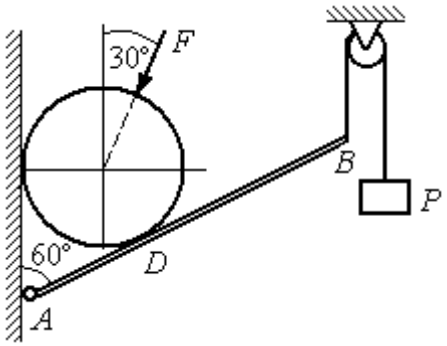



Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

*Решение*

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке $D$ является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке $K$ и на балку в точке $D$ (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

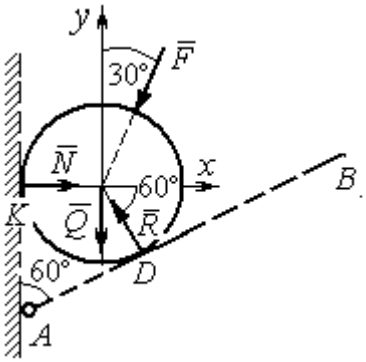



Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

$$\sum F_{kx} = -F\cos 60^\circ - R\cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F\cos 30^\circ + R\cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки $AB$ (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира $A$, (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза $P$, и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

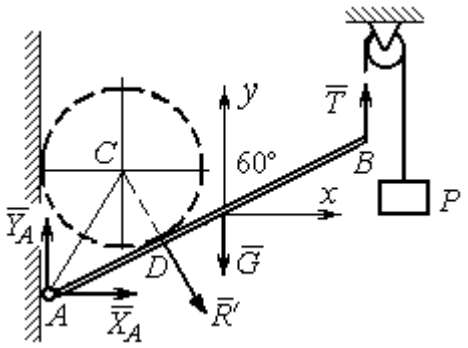



Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку $A$ центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R'\cos 60^\circ = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R'\cos 30^\circ - G + T = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + T\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{1.10}$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки $AB$ уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165{,}47$ кН; $N = 107{,}74$ кН; $P = 95{,}26$ кН; $X_A = -82{,}73$ кН; $Y_A = 128{,}03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

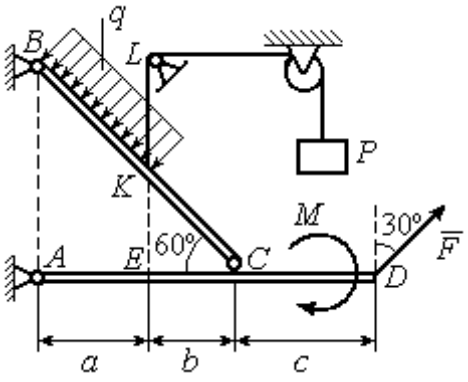



Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

**Задача 11.** Кронштейн состоит из горизонтальной балки $AD$, прикрепленной к вертикальной стене в точке $A$, и откоса $BC$, соединённого с балкой $AD$ в точке $C$ под углом 60º и прикреплённого к вертикальной стене в точке $B$ (рис. 1.33). Все соедине-

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке $D$ под углом 30º к вертикали и равная по модулю $F$ =10 кН, пара сил с моментом $M$ = 8 кН·м и равномерно распределенная на отрезке $BK$ нагрузка интенсивностью $q$ = 3 кН/м. В точке $K$ к балке $BC$ прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом $P$ = 5 кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров $A$, $B$ и $C$, если $a$ = 2 м, $b$ = 1 м, $c$ = 3 м, а на отрезке $KL$ нить натянута вертикально.

*Решение*

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки $BC$ и балки $AD$. Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

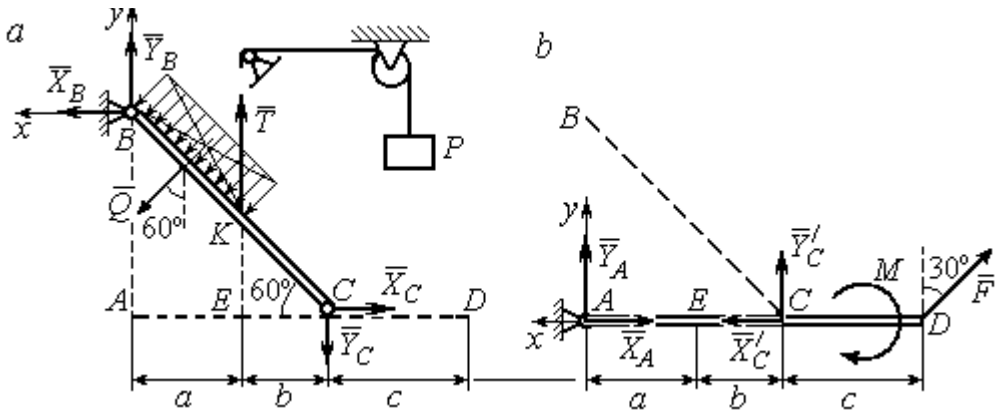



Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кронштейна:
*a* - силы, действующие на балку *BC*; *b* - силы, действующие на балку *AD*

На рис. 1.34, *a* показаны реакции внешних и внутренних связей балки $BC$: реакция $\vec{R}_B$ шарнира $B$, реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T = P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира $C$. Реакции шарниров $B$ и $C$ представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка $BK$ (см. рис. 1.34, *a*) и численно равной $Q = q \cdot BK = q \cdot \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил ($\vec{Q}$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{T}$), действующая на балку *BC*, является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.34, *a*, и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $AB = (a+b)\mathrm{tg}60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки *AD* (рис. 1.34, *b*).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира *A* и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, *b* реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат *xAy* как показано на рис. 1.34, *b*, и составим уравнения равновесия балки *AD*, вычисляя моменты сил относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \tag{1.15}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \tag{1.16}$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$X_A$ = 5,99 кН, $Y_A$ = 5,99 кН, $X_C$ = 10,99 кН, $Y_C$ = – 14,65 кН;

$X_B$ = 0,6 кН, $Y_B$ = – 13,65 кН,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8{,}47 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18{,}31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13{,}65 \text{ кН}.$$

**Задача 12.** Вертикальная балка *AB* с горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *LC* балки *AB*, а в точке *E* опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил с моментом $M = 5$ кН·м. Определить реакцию жесткой заделки *A* и реакции шарниров *C* и *E*, если параметр *a*, определяющий размеры конструкции, равен $a = 2$ м.

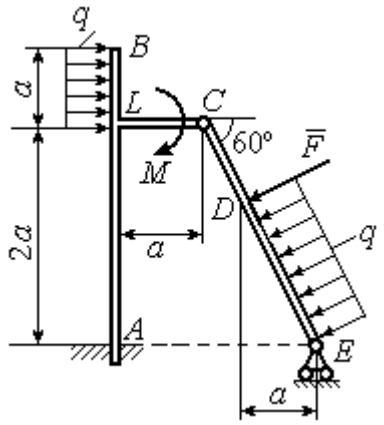



Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

*Решение*

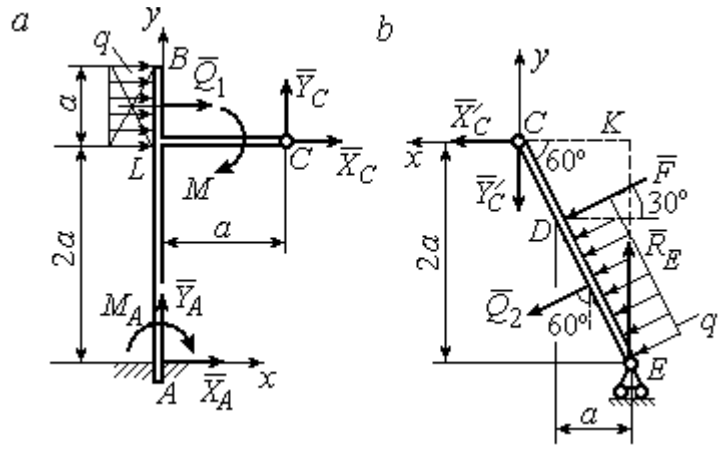



Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
*a* - силы и реакции связей, действующие на балку *AB*;
*b* - силы и реакции связей, действующие на балку *CE*

Разделим систему на две части по шарниру *C* и рассмотрим равновесие балок *ABC* и *EC* отдельно.

Рассмотрим балку *ABC* (рис. 1.36, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, численно равной $Q_1 = qa = 4$ кН. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом *M* и реакции связей – жёсткой заделки в точке *A* и шарнира *C*.

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом $M_{\text{A}}$. Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a,* и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \tag{1.17}$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \dfrac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b,* и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a\,\text{tg}30^\circ = 0. \tag{1.21}$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

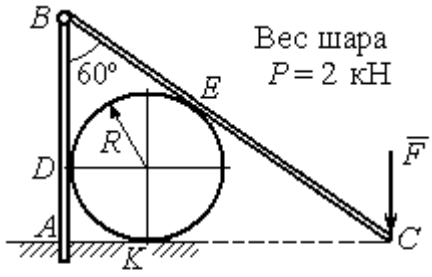
$$X_A = 11{,}59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2{,}76 \text{ кН}; \quad M_A = 42{,}87 \text{ кН·м};$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2{,}76 \text{ кН}; \quad R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире $C$: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91$ кН; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83$ кН.

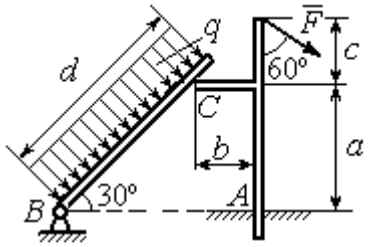
## Упражнения

Упражнение 1.5



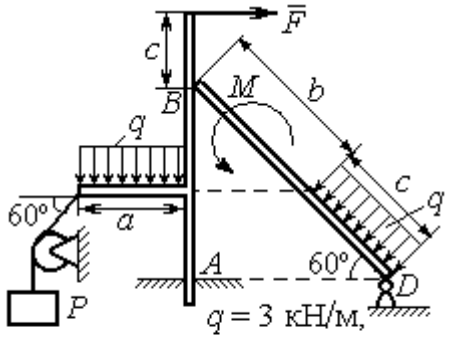

$R = 1$ м, $F = 8$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$, реакцию шарнира $B$, реакцию опоры шара в точках $D$, $K$, $E$

Упражнение 1.6



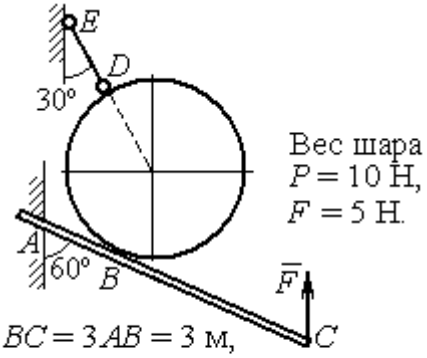

$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $d = 5$ м,
$q = 3$ кН/м, $F = 4$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$, реакцию шарнира $B$ и реакцию опоры в точке $C$

Упражнение 1.7




$q = 3$ кН/м,
$F = 4$ кН, $P = 3$ кН, $M = 2$ кН·м,
$a = 2$м, $b = 3$м, $c = 1$м
Найти реакцию заделки $A$, шарнира $D$ и реакцию опоры $B$

Упражнение 1.8




$BC = 3AB = 3$ м,
Найти реакцию жесткой заделки $A$, реакцию стержня $DE$ и реакцию опоры в точке $B$

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

## 1.5. Произвольная пространственная система сил

**Моментом силы относительно оси** называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси $z$:

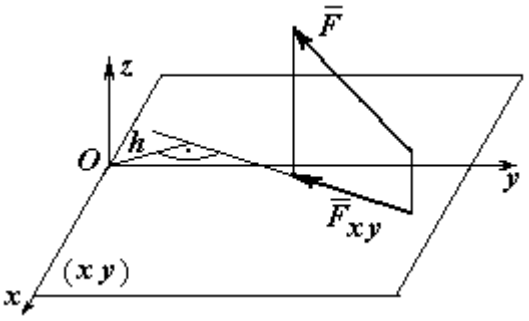



Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где $O$ – точка пересечения оси $z$ с плоскостью $xy$, перпендикулярной оси $z$; $\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость $xy$; $h$ – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра $O$. Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

**Равновесие пространственной системы сил.** Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат $x$, $y$, $z$ были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$ – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, ...$

### Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

**Задача 13.** Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике $C$ и подшипнике $K$. Вал имеет шкив $B$ радиуса $R$ и шкив $D$ радиуса $r$.

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*.

Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива *D* по касательной в точке *L* параллельно плоскости *zCx*, так что радиус шкива *D*, проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30º.

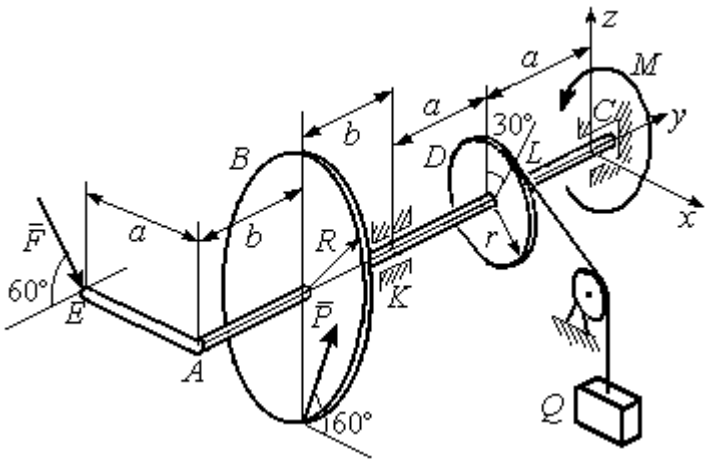


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива *B*, параллельна плоскости *zCx* и составляет угол 60° с направлением оси *Cx*. Определить вес удерживаемого груза $Q$ и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м.

*Решение*

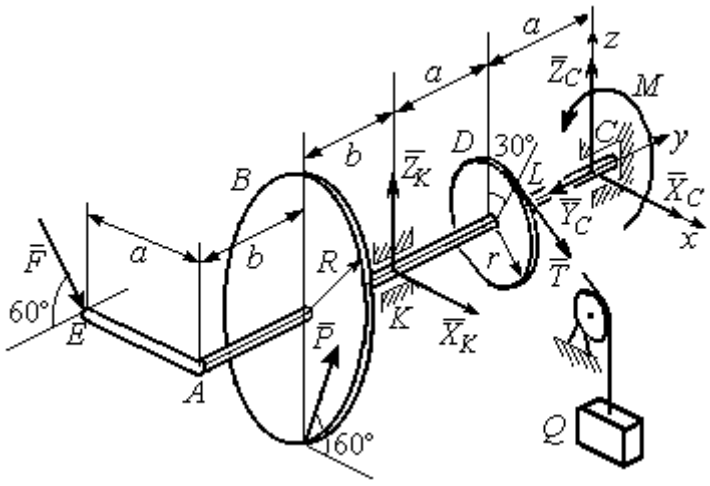


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом $Q$, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника *K* лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *L* и по модулю равна весу груза *Q*.

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

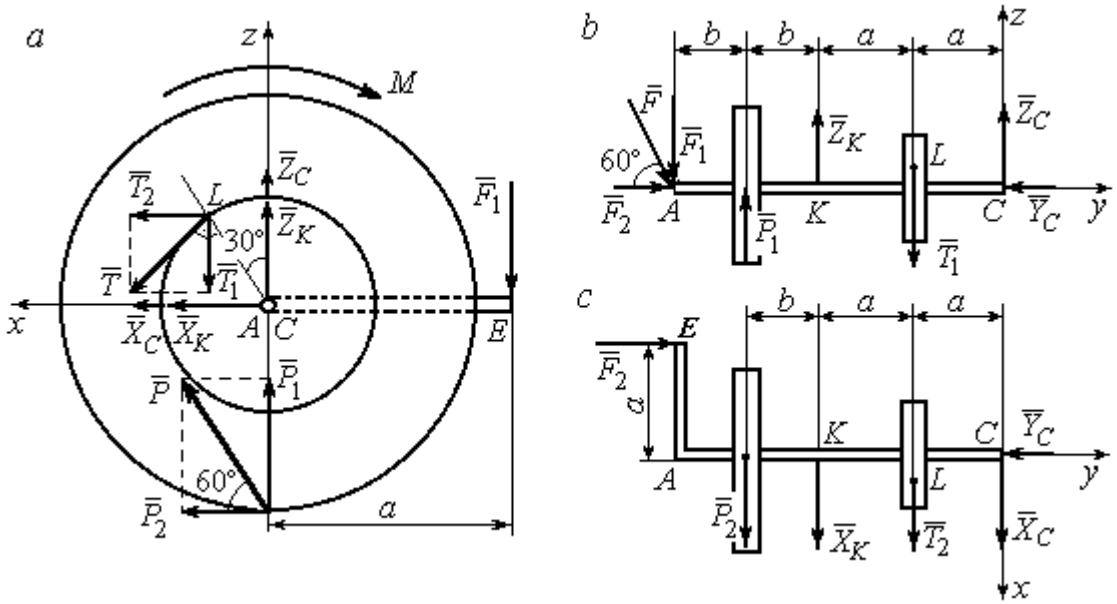



Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
*a* – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
*b* – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
*c* – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*

На рис. 1.41, *a* показаны проекции вала и всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций сил относительно точки *C*, получим значения моментов этих сил относительно оси *y*. При вычислении моментов сил относительно оси *x* достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (рис. 1.41, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси *z* (рис. 1.41, *c*).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P\cos 30^\circ$;

$P_2 = P\cos 60^\circ$; $T_1 = T\cos 60^\circ$; $T_2 = T\cos 30^\circ$; $F_1 = F\cos 30^\circ$; $F_2 = F\cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P\cos 60^\circ + X_K + T\cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F\cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P\cos 30^\circ + Z_K - T\cos 60^\circ + Z_C - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T\cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P\cos 30^\circ \cdot (2a + b) +$$

$$+ F\cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F\cos 30^\circ \cdot a - P\cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T\cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P\cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F\cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8{,}09 \text{ кН}, \; Y_C = 1 \text{ кН}, \; Z_C = 4{,}65 \text{ кН}, \; Z_K = 2{,}92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10{,}02 \text{ кН}, \; T = 18{,}6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9{,}4 \text{ кН}, \; R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10{,}44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза *Q* равен реакции нити *T*.

**Задача 14.** Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира *A*, подшипника *B* и удерживается в вертикальном положении стержнем *CO*, лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10$ кН, приложенная на верхней стороне плиты в точке *H* под углом 30° к линии *EC*, и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5$ кН, приложенная в точке *D* параллельно стороне *AB*.

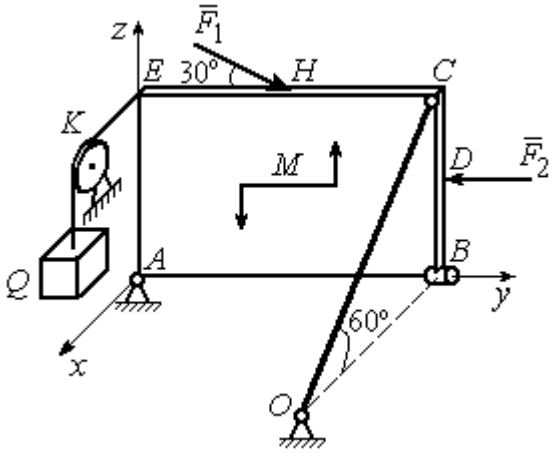



Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке $E$ к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок $K$, подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса $EK$ перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира $A$, подшипника $B$ и реакцию стержня $CO$, если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

*Решение*

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом $M$ и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир $A$, нить, натянутая грузом $Q$, подшипник $B$ и невесомый стержень $CO$.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира $A$ раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси $Ax$ и равна весу груза $T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника $B$ расположена в плоскости, перпендикулярной оси $Ay$, и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня $CO$ направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

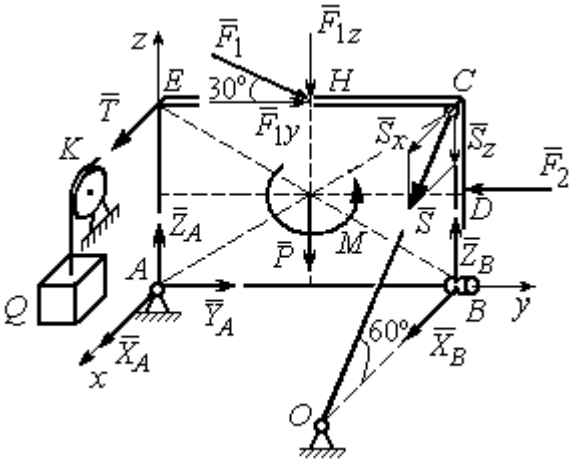



Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1\cos 60^\circ - P + Z_B - S\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -F_1\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - F_1\cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0{,}5 \cdot AB +$$

$$+ F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S\cos 30^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S\cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S\cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17{,}53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12{,}89$ кН.

**Задача 15.** Прямоугольная фрамуга *ACEB* весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках *A* и *B* цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60º (рис. 1.44). На фрамуге в точке *H* закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок *K*, несёт груз *Q*. При этом линия верёвки *HK* параллельна прямой *ED*. На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке *C* перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

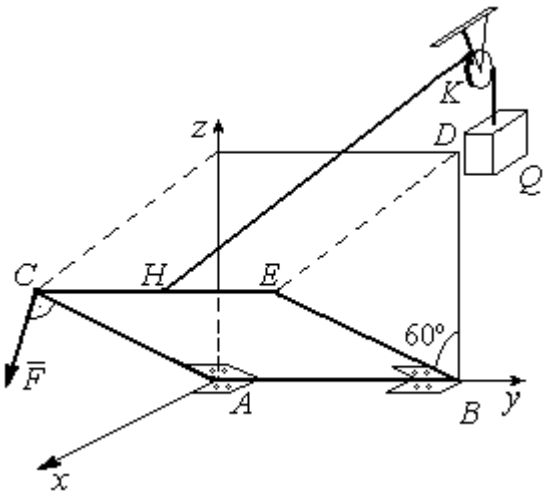


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза *Q*, необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров *A* и *B*, если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

*Решение*

Рассмотрим равновесие фрамуги *ABCE*. Изображаем внешние активные силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира *A* и *B* (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом *Q*. Выберем систему координат *Axyz*, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров *A* и *B* раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось *Ay*), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

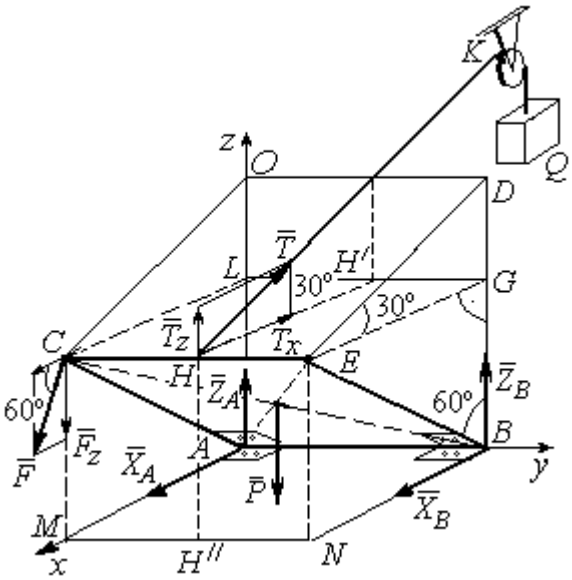



Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси *Ax* определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость *zAy* относительно точки *A* – пересечения оси *Ax* и перпендикулярной ей плоскости *zAy* (см. рис. 1.46, *a*). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси *Az* достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость *xAy* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *b*).

Значения моментов сил относительно оси $Ay$ получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость $zAx$ относительно точки $A$ (см. рис. 1.46, *c*).

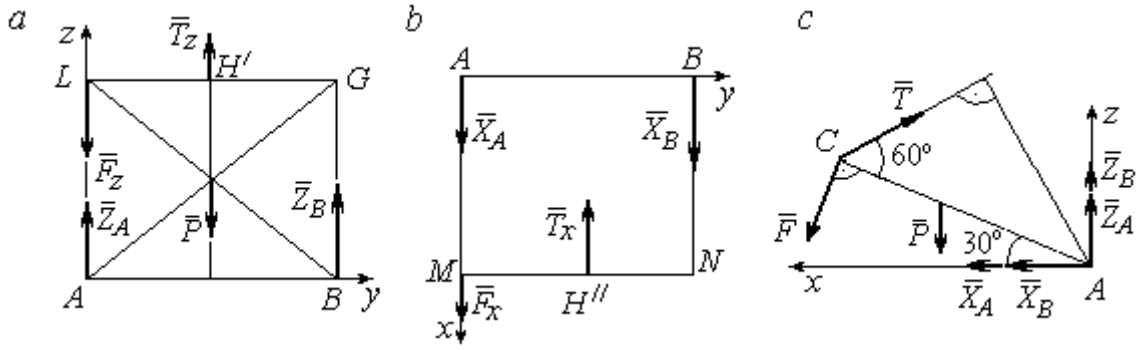



Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:
*a* – проекция на плоскость *zAy* со стороны положительного направления оси *x*;
*b* – проекция на плоскость *xAy* со стороны положительного направления оси *z*; *c* – проекция на плоскость *zAx* со стороны положительного направления оси *y*

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T_z \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB =$$

$$= T\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0{,}5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18{,}22 \text{ Н},\ Z_B = 14{,}41 \text{ Н},\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23{,}31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10{,}83 \text{ Н},\ Z_A = 27{,}41 \text{ Н},\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29{,}47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42{,}37$ Н.

**Задача 16.** Горизонтальный коленчатый вал *AD* (рис. 1.47) закреплен в подпятнике *A* и подшипнике *C*. Вал имеет шкив радиуса $r$ и рукоять *DH*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *DH* образует угол 30º к направлению оси *Ax*. Колено вала расположено в горизонтальной плоскости *xAy*. Нить, удерживающая груз *Q*, намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ приложена в верхней точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси *Ay* и находится в плоскости *zAy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке *H* рукояти параллельно оси *Az*. Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке *K* стойки колена вала под углом 60º к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом *M* создаёт вращение вала вокруг оси *Ay*.

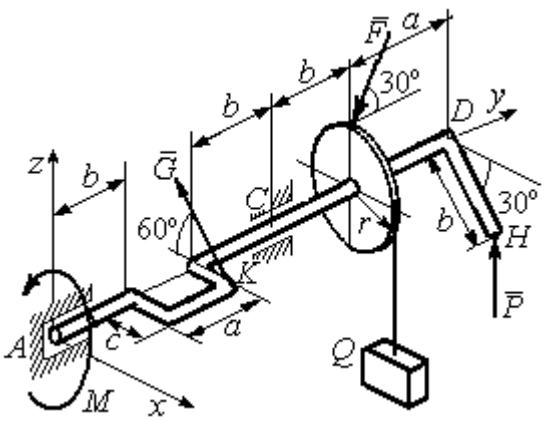


Рис. 1.47. Равновесие вала

Определить вес удерживаемого груза $Q$ и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН; $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м; $c = 0{,}2$ м.

*Решение*

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом $Q$, подпятник *A* и подшипник *C*.

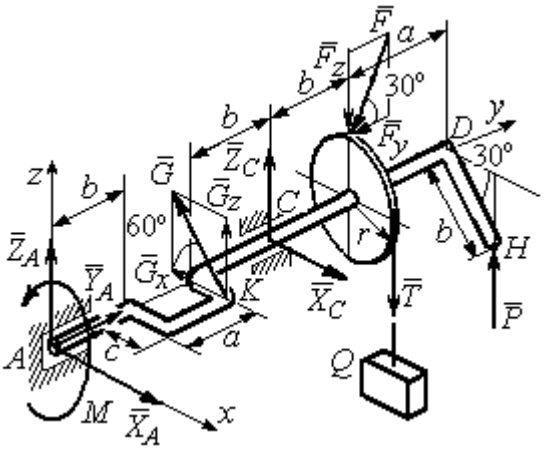


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

Реакцию подпятника $A$ раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника $C$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей $Ax$, $Az$. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G\cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G\cos 30^\circ + Z_C - F\cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r -$$

$$- T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb\cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G\cos 30^\circ$; $G_x = G\cos 60^\circ$; $F_z = F\cos 60^\circ$; $F_y = F\cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

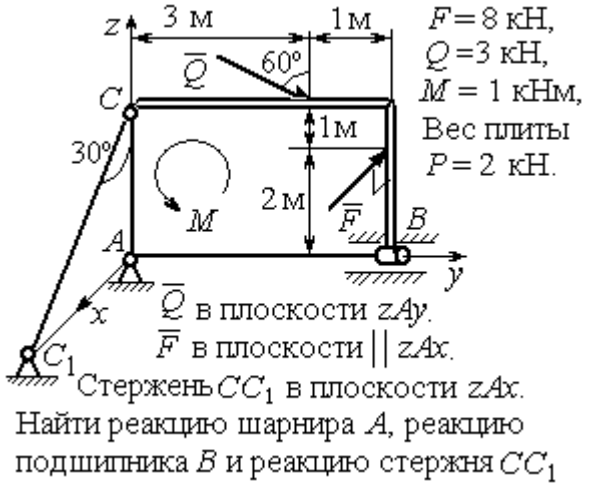
$$X_C = 2{,}25 \text{ кН}; \; Z_C = 13{,}57 \text{ кН}; \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0{,}39 \text{ кН}; \; Y_A = 10{,}39 \text{ кН}; \; X_A = 0{,}75 \text{ кН}; \; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10{,}42 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25{,}03$ кН.

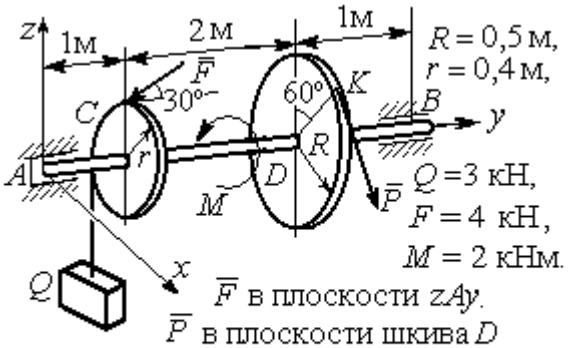
## Упражнения

Упражнение 1.9




Найти реакцию шарнира $A$, реакцию подшипника $B$ и реакцию стержня $CC_1$

Упражнение 1.10




и направлена по касательной в точке $K$.
Найти реакцию подпятника $A$, подшипника $B$ и уравновешивающую силу $P$

Упражнение 1.11




Упражнение 1.12

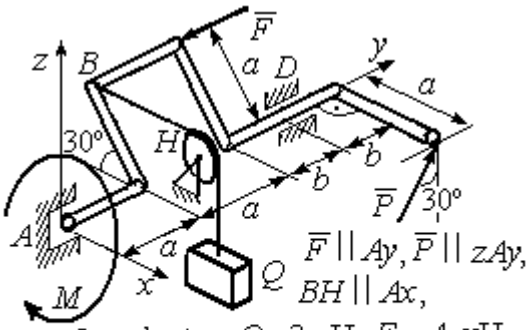



Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

## 1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

**Трение скольжения.** При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

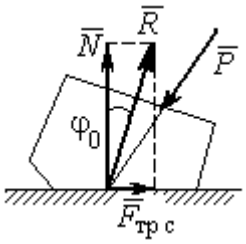



Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

Наибольший угол $\varphi_0$, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**. Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где $f$ – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

**Трением качения** называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$ смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения $k$ называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

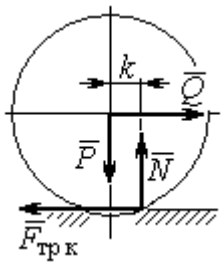



Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$. Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

### Примеры решения задач на равновесие тел с трением

**Задача 17.** Груз $Q$ весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе $Q$, а к другому, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом $P$. Отрезок нити $AB$ горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30º к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза $P$, при которых груз $Q$ может начать скольжение по плоскости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом $Q$ и наклонной плоскостью $f = 0{,}4$.

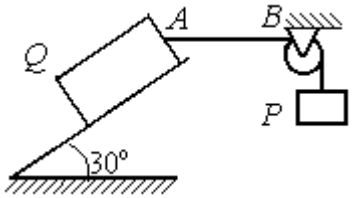


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

*Решение*

Рассмотрим равновесие груза $Q$ при минимальном значении веса груза $P$. На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, *а*). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравновешивающего груза $P$ имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз $Q$ начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза $P$, направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *a*).

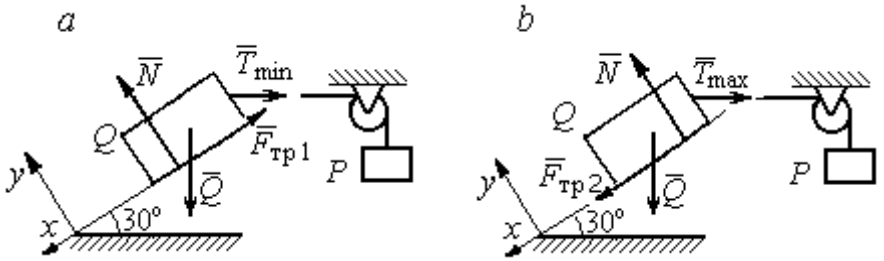



Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
*a* – минимальный вес уравновешивающего груза;
*b* – максимальный вес уравновешивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\min}\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\min}\cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7{,}21$ Н. Минимальное значение веса уравновешивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7{,}21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза $Q$ при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза $P$. На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, *b*).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза $P$ больше максимального вызывает движение груза $Q$ вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза $Q$:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\max}\cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\max}\cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза $P$: $P_{\max} = T_{\max} = 63{,}54$ Н.

Таким образом, груз $Q$ будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравновешивающего груза находится в пределах $8{,}87 < P < 48{,}87$ Н.

**Задача 18.** Цилиндрический каток радиуса $r$ = 0,5 м, весом $P$ = 50 Н удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец которой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом $Q$ (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_{\text{к}}$ = 0,02 м. Наклонная плоскость составляет угол 30º с горизонтом.

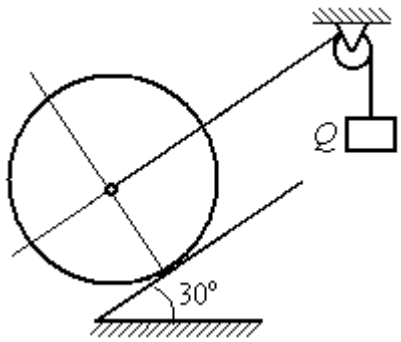


Рис. 1.54. Равновесие катка

Определить наименьшую и наибольшую величину веса $Q$, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{с}}$, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

*Решение*

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза $Q$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

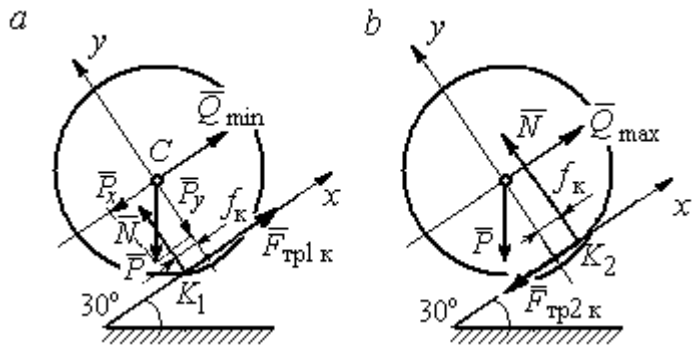



Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
*a* – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке $K_1$, слева от нормального к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки $K_1$:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P\cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P\cos 30^\circ \cdot f_к = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7{,}68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43{,}3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17{,}32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза $Q$ вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка $K_2$) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр2 к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки $K_2$ имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр2 к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P\cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42{,}32$ Н; $N = 43{,}3$ Н; $F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7{,}68 \le Q \le 42{,}32$ Н.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр с}}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр с}} > F_{\text{тр к}}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр с}} = f_{\text{с}} N = 43{,}3 f_{\text{с}}$, где $f_{\text{с}}$ – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр к}} = F_{\text{тр1 к}} = F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43{,}3 f > 17{,}32$, откуда $f > 0{,}4$.

**Задача 19.** Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец $A$ рычага $AB$, соединённого цепью $CD$ с концом $D$ тормозного рычага $ED$ с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0{,}4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок $m$ и подвижный блок $n$, удерживает груз $Q$ весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком $m$, составляет 30º.

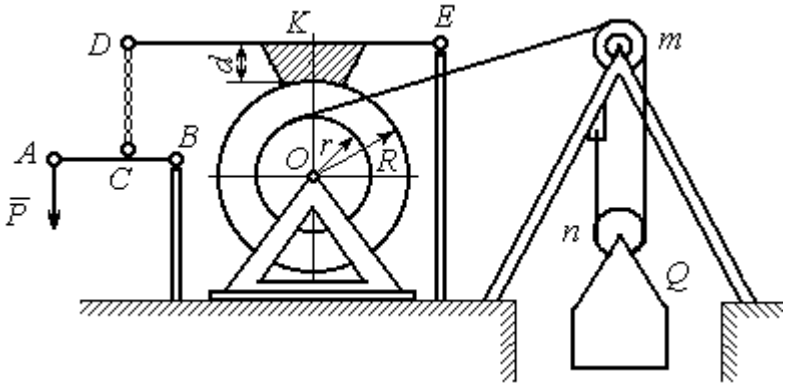


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

Определить величину силы $\vec{P}$, уравновешивающей груз $Q$, и реакции шарниров $O$ и $E$, если вес ворота $G$ = 140 Н, высота тормозной колодки $d = 0{,}1$ м, расстояния $AB$ = 1 м, $BC$ = 0,1 м; $ED = 1{,}2$ м; $EK = 0{,}6$ м.

*Решение*

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага $DE$ и рычага $AB$ (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком $n$ (см. рис. 1.57, *а*). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок $n$.

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \qquad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{бл}$ – радиус блока *n*. Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0{,}5Q = 500$ Н.

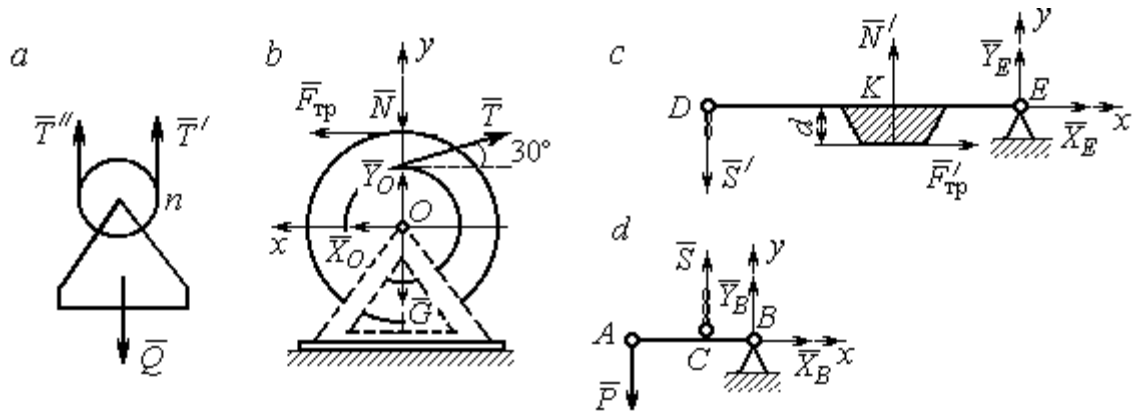



Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
*a* – равновесие груза; *b* – силы, действующие на барабан; *c* – силы, действующие на тормозной рычаг *DE*; *d* – силы, действующие на рычаг *AB*

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира *O*, представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, *b*).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{G}$, $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$) ~ 0. Составим уравнение моментов относительно точки *O*:

$$-Tr + F_{тр}R = 0,\ \text{откуда с учётом } T = T'\ F_{тр} = 200 \text{ Н}.$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{тр} = fN$, тогда $N = \dfrac{F_{тр}}{f} = 500$ Н.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, *b*:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{тр} - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T\cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира *O*:

$$X_O = 233 \text{ Н};\ Y_O = 390 \text{ Н};\ R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454{,}3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага *DE* (см. рис. 1.57, *c*).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке *D* на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира *E*, разложенная на составляющие $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ вдоль осей *x*, *y*. Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \qquad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200$ Н, $N' = N = 500$ Н, определим усилие $S'$, с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира *E*:

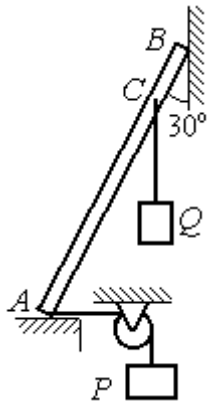
$$S' = 233{,}33 \text{ Н};\ X_E = -200 \text{ Н};\ Y_E = -266{,}67 \text{ Н};\ R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333{,}34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравновешивания груза *Q*, найдём рассматривая равновесие рычага *AB* (см. рис. 1.57, *d*) . На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира *B*, показанная на рис. 1.57, *d* составляющими $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки *B*: $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдем $P = 23{,}3$ Н.

## Упражнения

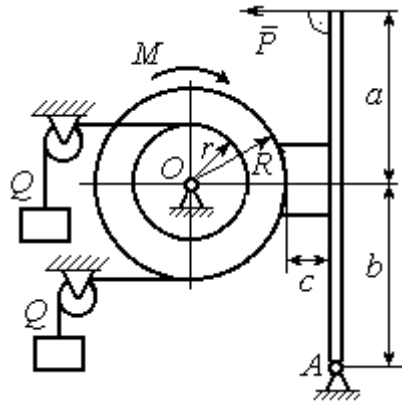
Упражнение 1.13




Невесомый стержень $AB$ опирается в точках $A$ и $B$ на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0{,}2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30°. В точке $C$ к стержню подвешен груз $Q$. Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке $A$ и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз $P$. В каких границах можно изменять вес груза $P$, не нарушая равновесия стержня?

$AB = 3$ м, $AC = 2$ м, $Q = 200$ Н.

Упражнение 1.14




Шкив $O$ состоит из двух барабанов радиусов $R$ и $r$. На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами $Q$. К шкиву приложена пара сил с моментом $M$. Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0{,}4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравновешивающую шкив. Найти реакцию шарнира $A$.

$a = b = 1$ м; $c = 0{,}1$ м; $Q = 100$ Н; $M = 120$ Н·м;
$R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}2$ м.

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

# 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

## 2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

**Координатный способ** задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

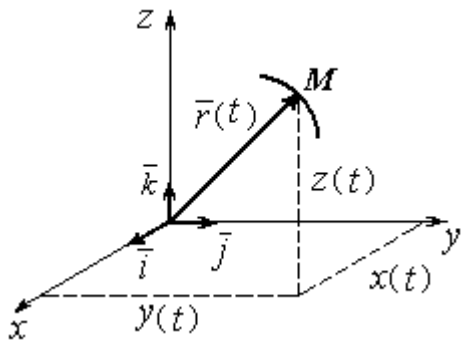


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

**Мгновенная скорость,** или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины $V_x$, $V_y$, $V_z$ проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

**Мгновенное ускорение** точки**,** или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины $a_x$, $a_y$, $a_z$ проекций вектора ускорения на координ-

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

**Естественный способ** задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $O\breve{M} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

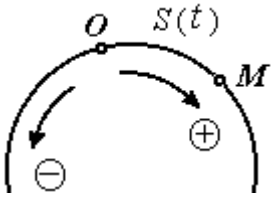


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где $S$ – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось $\tau$) и перпендикулярную к ней нормальную (ось *n*):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; $a_\tau$ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; $a_n$ – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции $V_\tau$ и $a_\tau$ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

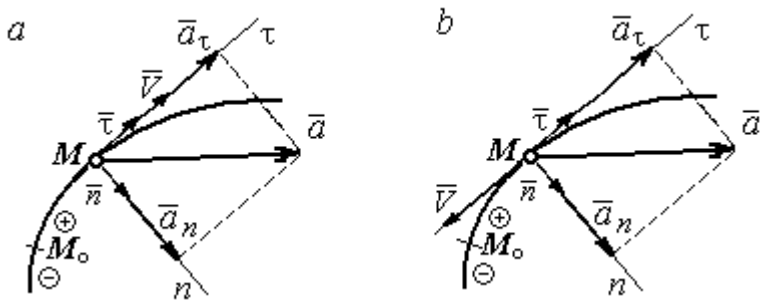



Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
*a* – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau,\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

где $\rho$ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

### Примеры решения задач на криволинейное движение точки

**Задача 20.** Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где *x*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени $t_1$ = 0,25 с, $t_2$ = 0,75 с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

*Решение*

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

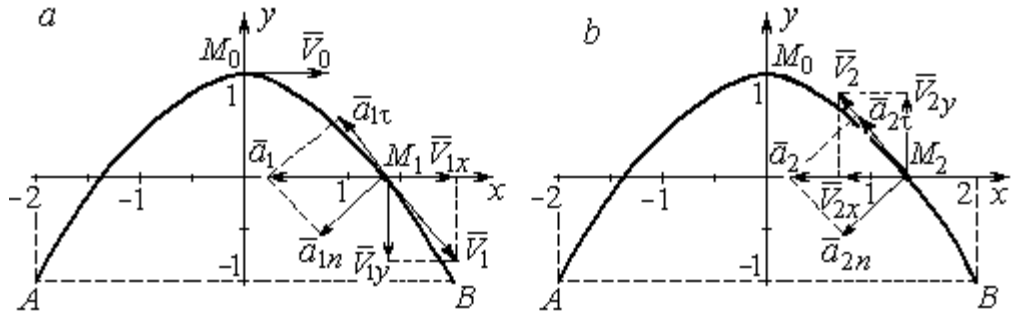



Рис. 2.4. Траектория движения точки:

*a* – замедленное движение точки на участке от $M_0$ к *B*;
*b* – ускоренное движение точки на участке от *B* к $M_0$

Определяем параметры движения точки в момент времени $t_1$ = 0,25 с.

Находим координаты $x_1$, $y_1$ положения точки $M_1$:

$$x_1 = x(0{,}25) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0{,}25) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции $V_{1x}$, $V_{1y}$ вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t; \; V_y(t) = \dot{y} = -2\pi\sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0{,}25) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0{,}25) = -2\pi\sin\frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции $a_{1x}$, $a_{1y}$ вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin\pi t;\ a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0{,}25) = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2}\ \text{см/с}^2;\ a_{1y} = a_y(0{,}25) = -4\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2\sqrt{2}$ см/с.

Положение точки $M_1$ в момент времени $t_1 = 0{,}25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, *а*.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении $M_1$ – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, *а*). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0{,}75$ с положение $M_2$ совпадает с положением $M_1$:

$$x_2 = x(0{,}75) = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\ \text{см};\ y_2 = y(0{,}75) = \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0{,}75) = 2\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2}\ \text{см/с};\ V_{2y} = V_y(0{,}75) = -2\pi\sin 2\pi\frac{3}{4} = 2\pi\ \text{см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0{,}75) = -2\pi^2 \sin\frac{3\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2}\ \text{см/с}^2;\ a_{2y} = a_y(0{,}75) = -4\pi^2 \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0{,}75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки $M_2$ в момент времени $t_2$ = 0,75 с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения $M_0$ ($t_0$ = 0) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения *B* на траектории ($t_B$ = 0,5 с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения $M_0$ ($t_{M_0}$ = 1 с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

**Задача 21.** Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса *R* = 1 км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

*Решение*

Примем за начало отсчёта расстояния точку $M_0$, где поезд выходит на закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты *S*. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

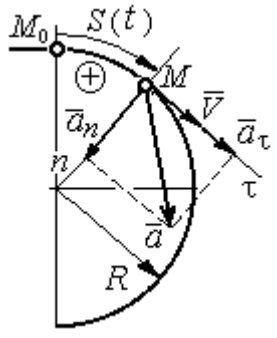


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: $a_\tau$ = const. Так как $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где $V_\tau$ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 =$ = 54 км/ч = 15 м/с. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: $C_1$ = 15 м/с; $C_2$ = 0.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t .$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь $S$ = 500 м. Подставляя это условие во второе уравнение, получим $a_\tau$ = 7 м/с$^2$. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения $V_\tau$ = 85 м/с. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса $R$ = 1000 м в момент времени $t$ = 10 с равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R}$ = 7,23 м/с$^2$. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ = 10,06 м/с$^2$. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

**Задача 22.** Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса $R$ = 80 м. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной $V_0$ = 18 км/ч до конечной $V_1$ = 9 км/ч.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь $S$ = 60 м.

*Решение*

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t\,; \quad S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2{,}5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м. Получим систему:

$$-2{,}5 = a_\tau t_1\,; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0{,}16$ м/с$^2$.

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0{,}31$ м/с$^2$.

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0{,}35$ м/с$^2$. В конце движения нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}08$ м/с$^2$. Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0{,}18$ м/с$^2$.

## 2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

**Вращением** твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

**Вектор угловой скорости** вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось $z$) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла $\varphi$, при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось $z$) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: $\omega_z$ = const. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где $\varphi_0$ – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: $\varepsilon_z$ = const. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела **(**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где $\omega$ – угловая скорость тела; $h$ – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

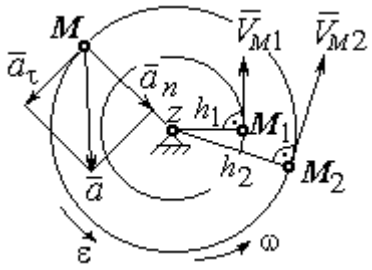


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от этих точек до оси вращения: $\dfrac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \dfrac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

**Ускорение точки вращающегося твердого тела** рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $\omega$, $\varepsilon$ – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; $h$ – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

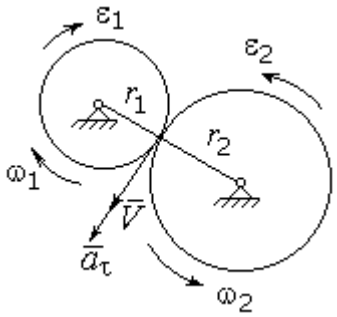


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

## Примеры решения задач на вращательное движение тел

**Задача 23.** Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

*Решение*

Допустим, вращение вала вокруг оси $z$ происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2$ мин $= 120$ с; $\varphi_1 = 3600$ об $= 7200\pi$ рад. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 24.** В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

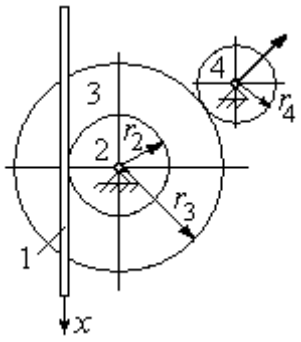


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

*Решение*

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси $x$ (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось $x$ $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2: $\omega_{2z} = \dfrac{V_{1x}}{r_2} = \dfrac{4\pi\cos\pi t}{6} = \dfrac{2\pi}{3}\cos\pi t$ рад/с. Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одного тела другому: $\dfrac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \dfrac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \dfrac{V_{1x} r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{5\pi}{3}\cos\pi t$ с$^{-1}$. Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

**Задача 25.** Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

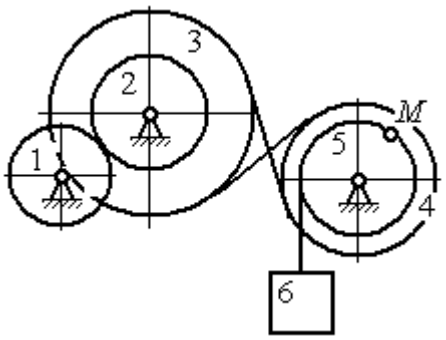


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки $M$ на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

*Решение*

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой $\varphi_1$.

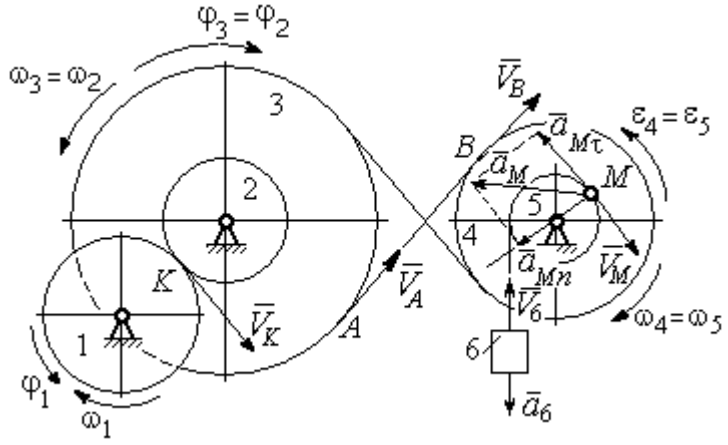


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла $\varphi_1$. Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости $\omega_1$ колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой $\omega_1$.

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта *K*. Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3=\omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой $\omega_2$.

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки *A*, где ремень сходит со шкива 3, и до точки *B*, где ремень набегает на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек *A* и *B* равны: $V_A=V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3=\omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3=\omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4=\frac{\omega_3 r_3}{r_4}=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5=\omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой $\omega_4$.

Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_5 r_5$. В момент времени $t_1=1$ с $\omega_5=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}=5$ рад/с и $V_M=20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке *M* и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки *M*: $V_6=V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1=1$с груз поднимается со скоростью $V_6=20$ см/с.

Определим ускорение точки *M*. Вектор ускорения точки *M* равен сумме векторов: $\vec{a}_M=\vec{a}_M^{\tau}+\vec{a}_M^{n}$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5: $\omega_{5z} = \dfrac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25$ рад/с. Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 $\varepsilon_{5z}$ равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20$ рад/с$^2$. Так как в момент времени $t_1 = 1$ с знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5$ рад/с $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$ $\varepsilon_{5z} = +20$ рад/с$^2$), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой $\varepsilon_5$.

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с$^2$. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки $M$ направлен по касательной к траектории в точке $M$ в сторону углового ускорения $\varepsilon_5$ (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки $M$ рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = 5$ рад/с и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^{\,n} = 100$ см/с$^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^{\,n}$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки $M$ в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128{,}06$ см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^{\,n}$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение $a_6$ груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с$^2$. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

**Задача 26.** По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos\pi t + \sin\pi t$ см.

*Решение*

Звено 1 движется поступательно вдоль оси *x*. Положительное направление движения задаётся направлением оси *x* (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi\sin\pi t + \pi\cos\pi t$ .

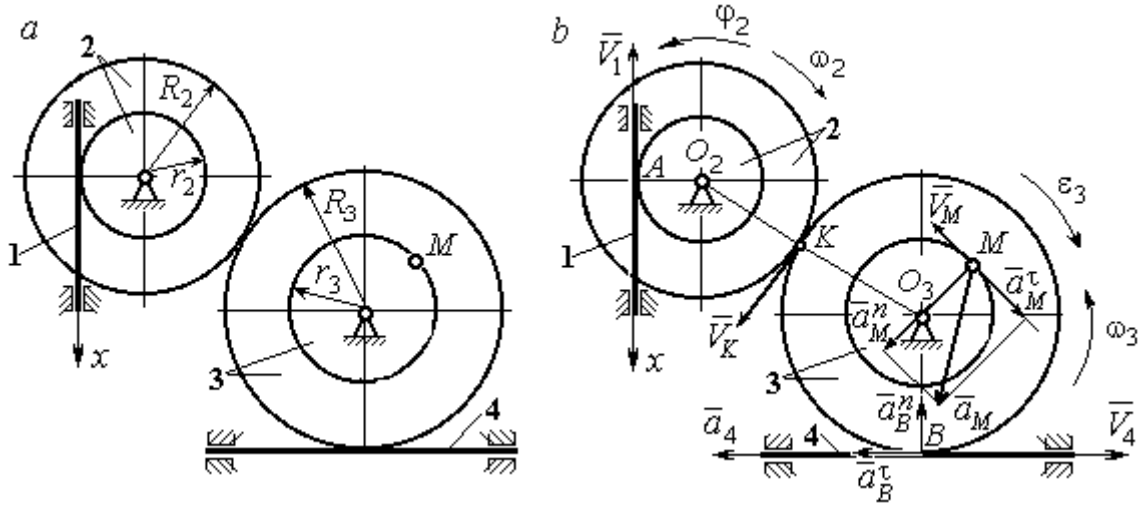



Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
*a* – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей
и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка $A$ соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой $\omega_2$.

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке *K*. Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой $\omega_3$.

Модуль скорости точки $M$ $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки *M* в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки *B* касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки *M*. Найдём алгебраическое значение $\omega_{3z}$ угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение $\varepsilon_{3z}$ углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}; \varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис 2.11, *b* направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой $\varepsilon_3$.

Касательное ускорение точки $M$ рассчитывается по формуле $a_M^{\tau} = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^{\tau} = 2\pi^2$ см/с$^2$. Вектор касательного ускорения точки $M$ $\vec{a}_M^{\tau}$ направлен по касательной к траектории точки $M$ в сторону углового ускорения $\varepsilon_3$ (см. рис. 2.11, *b*).

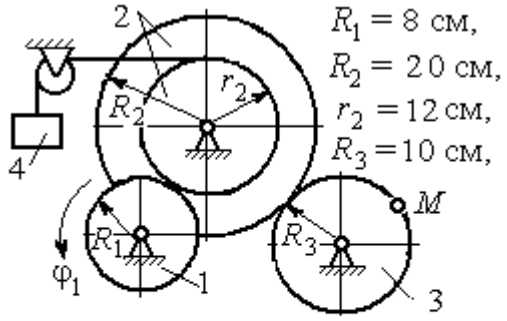
Нормальное ускорение точки $M$ рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с$^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки $M$: $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^{\tau})^2} = \pi^2\sqrt{5}$ см/с$^2$. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки $B$ (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^{\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с$^2$. Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки $B$.

## Упражнения

Упражнение 2.1

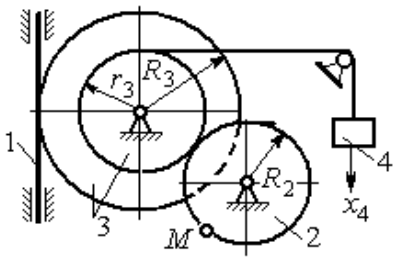



$R_1 = 8$ см,
$R_2 = 20$ см,
$r_2 = 12$ см,
$R_3 = 10$ см,

$\varphi_1 = 3t + 2\sin\frac{\pi t}{2}$ рад,

Найти скорость и ускорение точки $M$ и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2




$R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}3$ м,

$x_4 = t - 1 - \sin\frac{\pi t}{3} + \cos\frac{\pi t}{3}$ м.

Найти скорость и ускорение точки $M$ и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

## 2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

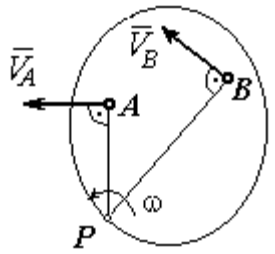
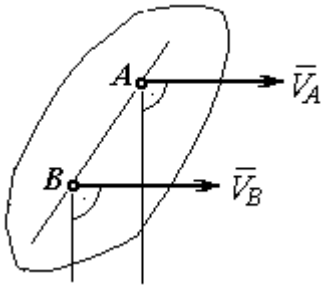
**Плоскопараллельным,** или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

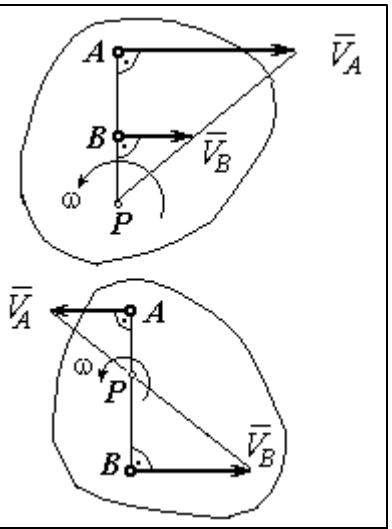
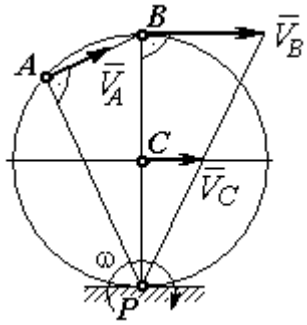
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек $A$ и $M$ тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A\cos\alpha = V_M\cos\beta$, где $\alpha$, $\beta$ – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки $A$ и $M$.

**Мгновенным центром скоростей** (МЦС) называется точка $P$ плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Способы построения мгновенного центра скоростей**

| | |
|---|---|
| 1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек $A$ и $B$ плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей $P$ находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей. |  |
| 2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки $A$ и $B$ не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр $P$ бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$. |  |

| | |
|---|---|
| 3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки $A$ и $B$ лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей $P$ находится как пересечение прямой, соединяющей точки $A$ и $B$ и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$. |  |
| 4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей $P$ расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью. |  |

**Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела**

**Задача 27.** Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип $O_1C$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку $O_1$ перпендикулярно плоскости чертежа. Определить скорость поршня $D$ и угловые скорости шатуна $BC$, коромысла $AB$ и штока $AD$, если $O_1C$ = 20 см, $OB = 2 \cdot OA$ = 40 см, $AD$ = 60 см.

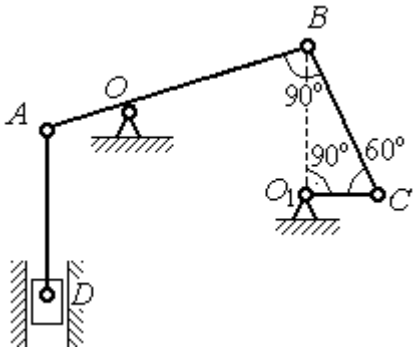



Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

*Решение*

Предположим для определённости, что кривошип $O_1C$ вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки $C$ направлен

перпендикулярно кривошипу $O_1C$, в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло $AB$ качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку $O$, параллельно оси вращения кривошипа. Скорость точки $B$ направлена перпендикулярно коромыслу $AB$ вдоль шатуна $BC$ (рис. 2.14).

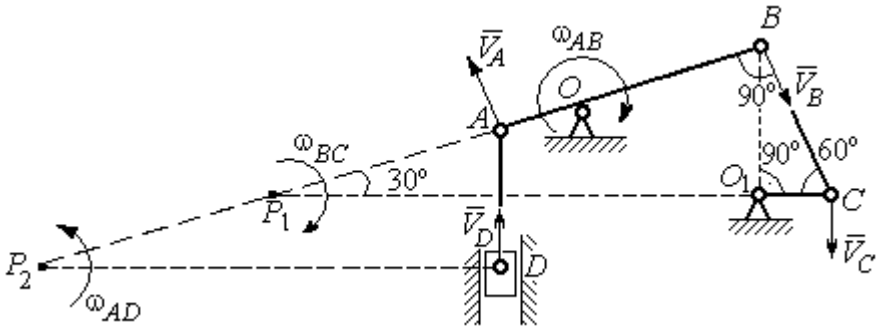



Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун $BC$ совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна $P_1$ расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек $C$ и $B$ шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна $BC$ $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_1} = 0{,}5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна $BC$ определяется направлением вращения кривошипа $O_1C$ и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой $\omega_{BC}$.

Скорость $V_B$ найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек $C$ и $B$ на линию $BC$. Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла $AB$ $\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой $\omega_{AB}$.

Скорость точки $A$ коромысла равна половине скорости точки $B$: $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу $AB$ в сторону его вращения.

Точка $P_2$ пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока $AD$. Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки $A$ и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой $\omega_{AD}$.

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

**Задача 28.** Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа $OA$, вращающегося вокруг оси $O$ и несущего в точке $A$ ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в точке $B$ шарнирно прикреплён шатун $BC$ длиной $BC = 8$ см, который в точке $C$ передаёт движение коромыслу $CO_1$ длиной $CO_1 = 16$ см.

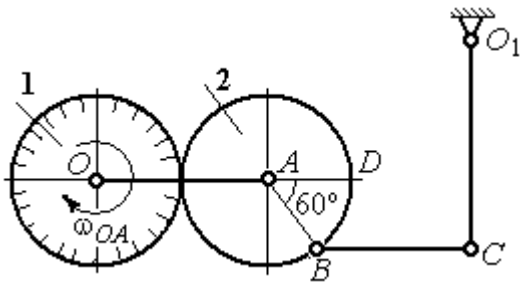


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна $BC$, коромысла $CO_1$, а также скорости точек $A$, $B$, $C$, $D$ в момент, когда кривошип $OA$ и шатун $BC$ горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

*Решение*

Найдём скорость точки $A$ кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу $OA$ и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей $P_2$ шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой $\omega_2$.

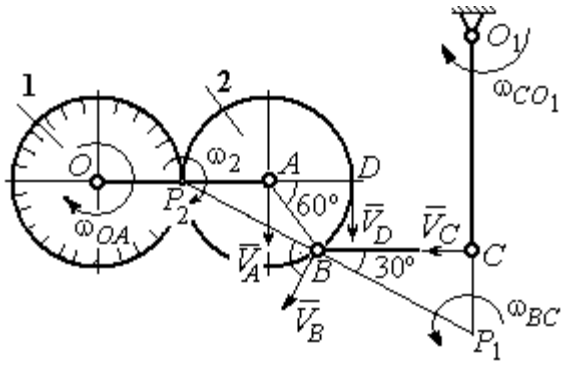


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние $P_2B$ из равнобедренного треугольника $P_2AB$ по теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки $B$ $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии $P_2B$ и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки $D$: $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии $P_2D$ и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки $C$ перпендикулярна линии $CO_1$. Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения $P_1$, которая будет мгновенным центром скоростей шатуна $BC$. Расстояние $P_1B = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = \dfrac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой $\omega_{BC}$.

Скорость точки $C$: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \dfrac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна $BC$.

Угловая скорость коромысла $CO_1$: $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = \dfrac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

**Задача 29.** В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип $OA$ длиной $OA$ = 25 см вращается вокруг неподвижной оси $O$, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью $\omega_{OA}$ = 3,6 рад/с. На конец $A$ кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса $r_1$ = 45 см, соосным с кривошипом $OA$ и вращающимся с угловой скоростью $\omega_1$ = 1 рад/с. Шатун $BC$, шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке $B$, приводит в движение кривошип $CO_1$. Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна $BC$ и кривошипа $CO_1$, скорости точек $A$, $B$, $C$ в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна $BC$ = 100 см, длина кривошипа $CO_1$ = 50 см.

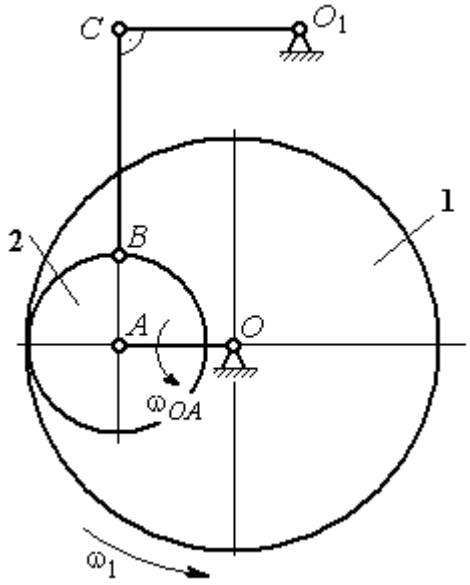


Рис. 2.17. Планетарный механизм

*Решение*

Найдём скорости точек $A$ и $D$

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу $OA$ в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу $OD$ колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей $P_2$ шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки $A$ и $D$, и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек $A$ и $D$ Расстояние $P_2D$ от центра скоростей до точки $D$ находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда $P_2D$ = 20 см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \dfrac{V_D}{P_2 D} = 2{,}25$ рад/с. Направление угловой скорости $\omega_2$ показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой $\omega_2$.

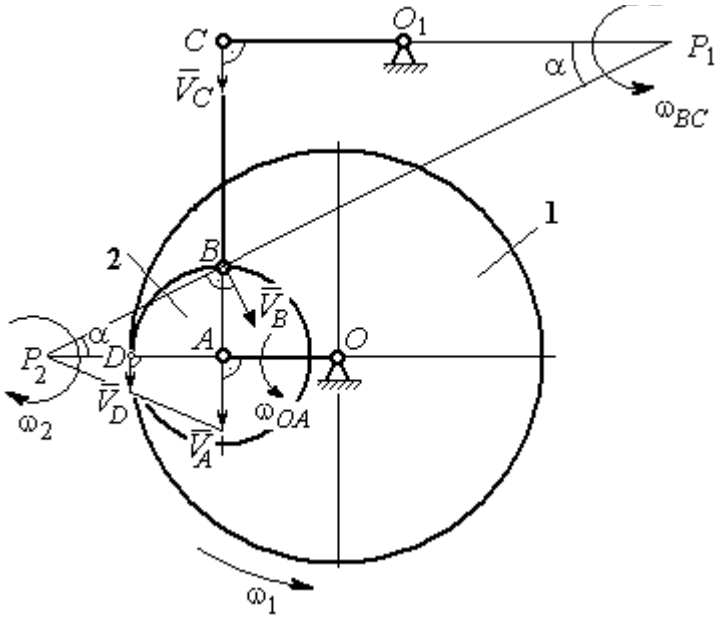


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Скорость точки *B,* которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии $P_2B$ и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу $CO_1$ и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка $P_1$ пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна *BC.* Расстояние $P_1B$ найдём из треугольника $P_1BC$: $P_1B = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha = \dfrac{AB}{P_2B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = 0{,}45$ рад/с. Скорость точки *C* шатуна *BC* найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек *C* и *B* на линию, проходящую через эти точки Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos\alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа $CO_1$ $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = 1{,}8$ рад/с.

**Задача 30.** В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип $OA$ вращается вокруг оси $O$ с угловой скоростью $\omega_{OA}$. На конец $A$ кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни $r_1$ и $r_2$. Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном $BC$, закреплённым на шестерне в точке $B$ и на колесе в точке $C$. Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек $A$, $B$, $C$ и угловые скорости шатуна $BC$, шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

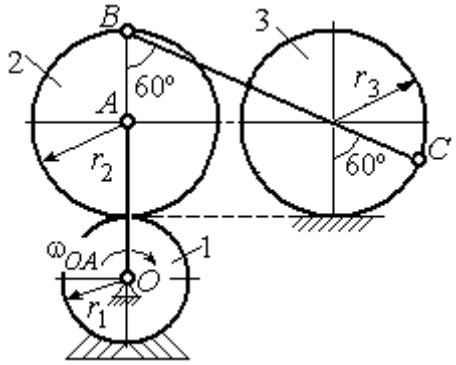


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

*Решение*

Рассмотрим вращательное движение кривошипа $OA$. Скорость точки $A$ кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу $OA$ в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения $P_2$ является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с.

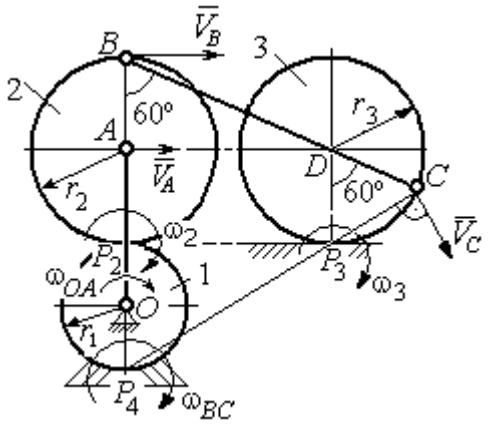


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Скорость точки $B$ шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 96$ см/с.

Точка $P_3$ касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки $C$ колеса 3 перпендикулярен линии $P_3C$ и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна $BC$ – точка $P_4$ находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек $B$ и $C$. По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна $BC$ $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек $C$ и $B$ $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

**Задача 31.** В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип $OC$, вращаясь вокруг неподвижной оси $O$, приводит в движение два шатуна $CD$ и $CE$, присоединённых к кривошипу в точке $C$. Шатун $CE$ прикреплён в точке $E$ к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну $CD$ в точке $D$ прикреплён ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун $CE$ горизонтален.

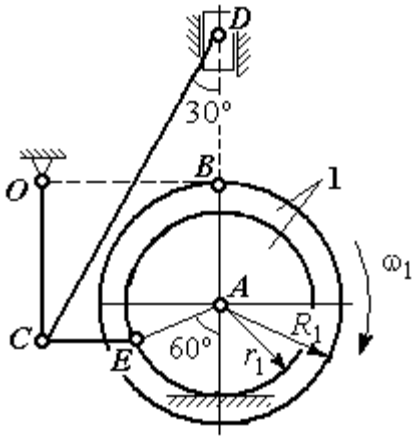


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек $A$, $E$, $C$, $D$ и угловые скорости диска 1, шатунов $CE$, $CD$ и кривошипа $CO$, если известна скорость точки $B$ на ободе диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление $\omega_1$ угловой скорости диска.

*Решение*

Изобразим вектор скорости точки $B$ диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности рельса точка $P_1$ касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

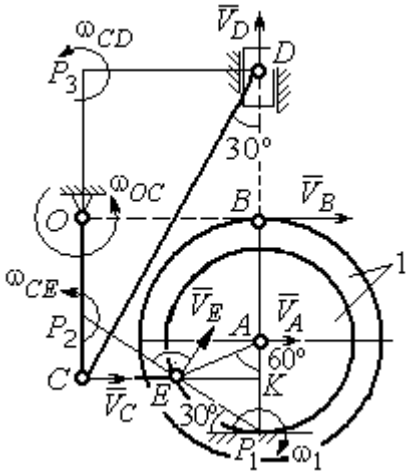



Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1} = 2$ рад/с. Скорость точки $A$ $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4$ см/с. Скорость точки $E$ $V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны, соответственно, линиям $AP_1$ $EP_1$ и направлены в сторону вращения диска.

Шатун $CE$ совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки $C$ шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу $OC$ и направлен вдоль $CE$ в сторону точки $E$. Мгновенный центр скоростей $P_2$ шатуна $CE$ находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

Расстояние $EP_2 = \dfrac{EC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см. Угловая скорость шатуна $CE$ $\omega_{CE} = \dfrac{V_E}{EP_2} = 0{,}86$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки $E$, на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой $\omega_{CE}$. Скорость точки $C$ шатуна $CE$ $V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \dfrac{V_E}{2} = 2$ см/с.

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \dfrac{V_C}{OC} = 0{,}5$ рад/с.

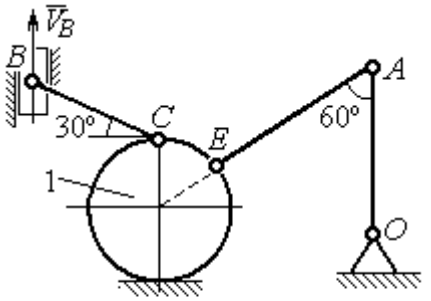
Для шатуна $CD$ известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки $C$ и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки $D$. Мгновенный центр скоростей шатуна $CD$ находится в точке $P_3$, полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ)\operatorname{ctg} 30^\circ = 9{,}92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна $CD$: $\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}21$ рад/с.

Скорость ползуна $D$: $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD}(CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1{,}2$ см/с.

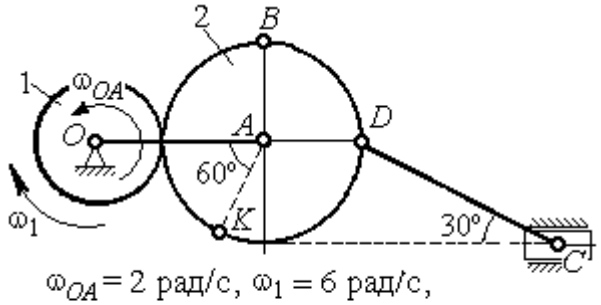
## Упражнения

Упражнение 2.3




$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
$BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
Найти: $\omega_{OA}, \omega_{AE}, \omega_{CB}, \omega_1, V_C, V_A, V_E$

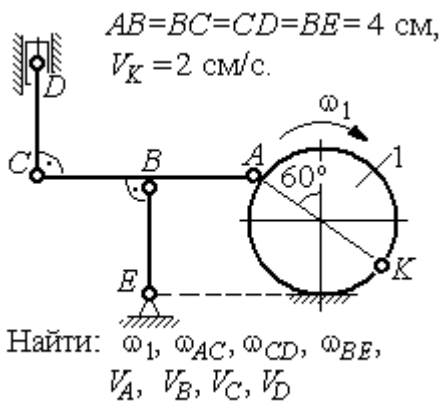
Упражнение 2.4



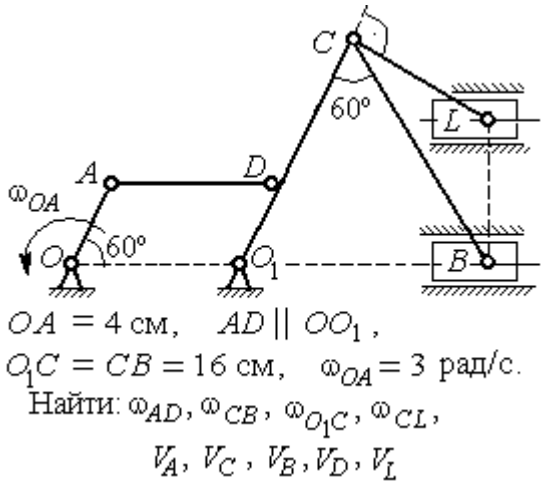

$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
Найти: $\omega_2, \omega_{DC}, V_B, V_K, V_D, V_C$

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

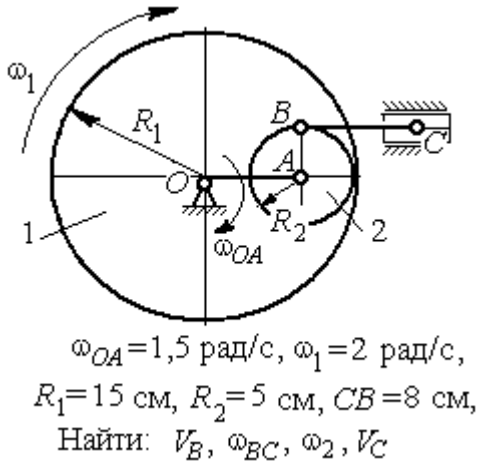
Упражнение 2.5




Упражнение 2.6




Упражнение 2.7




Упражнение 2.8

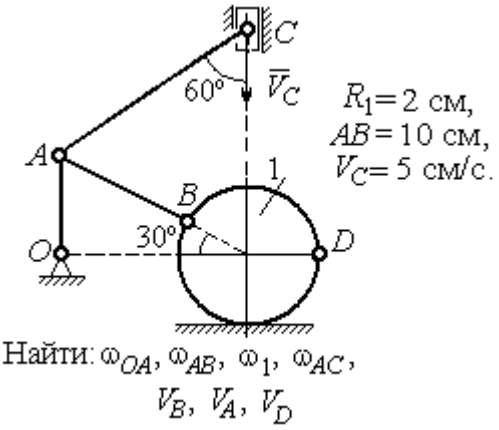



Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

## 2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки $M$ плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса $A$; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A* (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, *a*), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, *b*). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки *M* определяются по формулам:

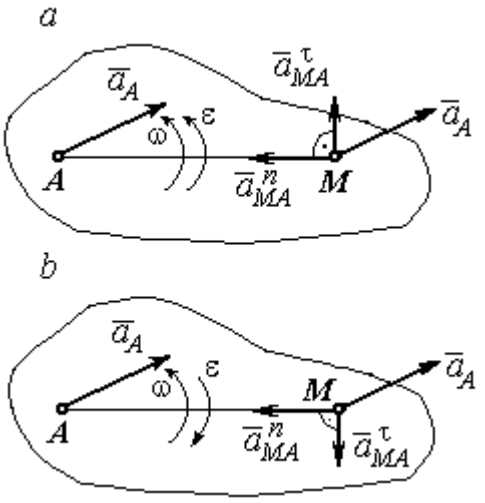



Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
*a* – ускоренное движение;
*b* – замедленное движение

$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$, где $\omega$, $\varepsilon$ – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); $AM$ – расстояние от точки *M* до полюса *A*.

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса *A* и точки *M*, то для определения ускорения точки *M* используется векторное равенство $\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA}$, где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* и полюса *A* при движении их по заданным траекториям.

### Примеры решения задач на определение ускорений точек

**Задача 32.** Поршень *D* гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом *OABD*. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка *L* рычага имеет скорость $V_L = 0{,}6$ м/с и ускорение $a_L = 0{,}5$ м/с$^2$. Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0{,}6$ м, длина звена $AB = 0{,}4$ м. Определить скорость и ускорение поршня *D*, угловую скорость и ускорение звена *AB*.

*Решение*

Найдём угловую скорость рычага $OL$: $\omega_{OL} = \dfrac{V_L}{OL} = \dfrac{2}{3}$ рад/с.

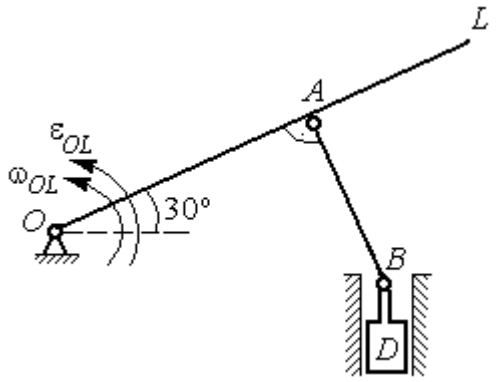



Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки $L$ представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^{\,\tau} + \vec{a}_L^{\,n}$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки $L$ $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0{,}4$ м/с$^2$. Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^{\tau} = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0{,}3 \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_{OL} = \frac{a_L^{\tau}}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки $A$ перпендикулярна рычагу $OL$ и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0{,}4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки $B$ направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка $P_1$ – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ - определяет положение мгновенного центра скоростей звена $AB$. Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0{,}4\sqrt{3}$ м.

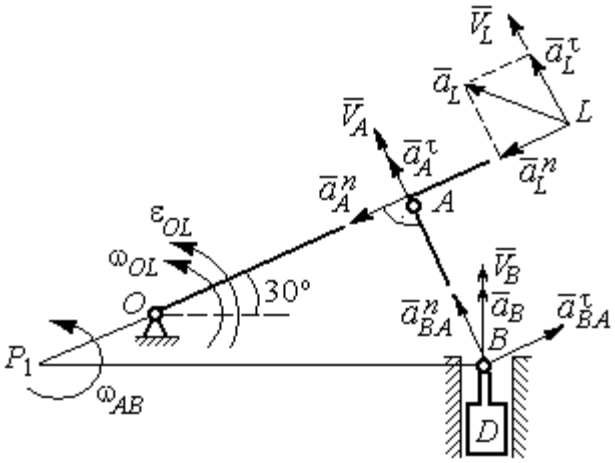



Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена $AB$ $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{P_1A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки $B$ через полюс $A$: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса $A$; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки $B$ при вращении звена $AB$ вокруг полюса $A$. Так как траекторией точки $A$ является окружность с центром в точке $O$, ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A}$. В результате ускорение точки $B$ представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a^{n}_{A} = \omega^{2}_{OL} \cdot OA = 0{,}27 \text{ см/с}^2;\ a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{AB} \cdot AB = 0{,}13 \text{ см/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{A} = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение $\varepsilon_{AB}$ звена $AB$ неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки $B$ на оси $x$, $y$, где ось $x$ проходит вдоль линии звена $AB$, ось $y$ – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a^{\tau}_{A} + a^{n}_{BA};\ \ a_B \cdot \cos 60^\circ = -a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA}.$$

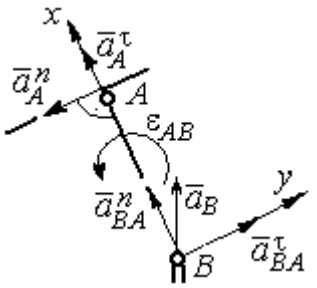


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки $B$: $a_B = 0{,}38$ см/с$^2$ и величину касательного ускорения: $a^{\tau}_{BA} = 0{,}46$ см/с$^2$. Угловое ускорение стержня $AB$ $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 1{,}15$ рад/с$^2$. Направление углового ускорения $\varepsilon_{AB}$ звена $AB$ определяется направлением вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ касательного ускорения точки $B$ при вращении звена вокруг полюса $A$ (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня $D$ равно ускорению точки $B$: $a_D = a_B = 0{,}38$ см/с$^2$.

**Задача 34.** Колесо 1 радиуса $r_1 = 0{,}6$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке $B$ на его ободе. На другом конце шатуна в точке $C$ к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

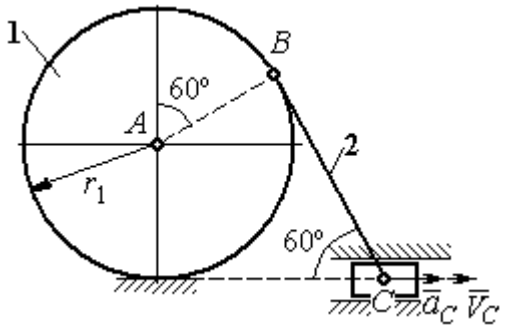


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра $A$ колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна $C$: $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с$^2$.

*Решение*

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка $P_1$ касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии $P_1B$. Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке $P_2$ определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

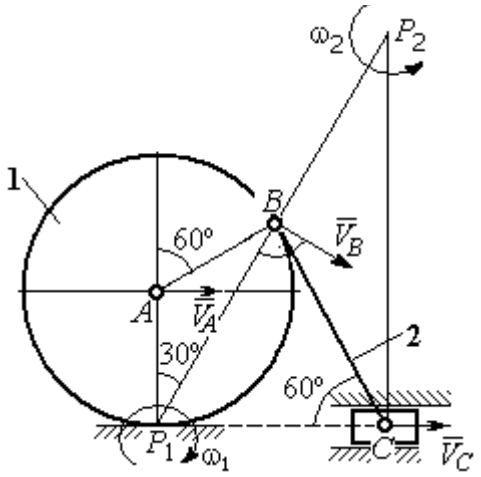


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние $P_1B$ (см. рис. 2.30) найдём из треугольника $P_1AB$ по теореме косинусов: $P_1B = r_1\sqrt{3} = 1{,}04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей $P_1$ и $P_2$ следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние $P_2C$ определяется из треугольника $P_1P_2C$: $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}8$ м.

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{P_2C}$ = 5рад/с. Направление угловой скорости $\omega_2$ определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки *B* найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = 5,2 м/с.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = 5 рад/с. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A$ = 3 м/с.

Найдём ускорение точки *A*.

Примем точку *B* за полюс и выразим ускорение точки *A* через полюс *B*: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса *B*; $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$, $\vec{a}^{\,n}_{AB}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *A* при вращении диска 1 вокруг полюса *B* (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$ точки *A* выбраны в предположении ускоренного движения диска.

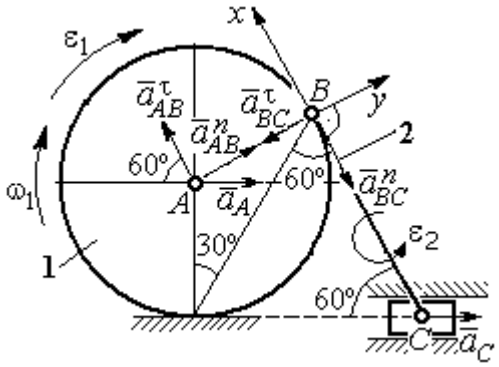


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса *B* выразим через полюс *C*: $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса *C*; $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$, $\vec{a}^{\,n}_{BC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *B* при вращении шатуна 2 вокруг полюса *C*. Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$ точки *B* выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки *A* выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки $A$ до мгновенного центра скоростей колеса $P_1$ остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки $A$) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускорение $a^{\tau}_{AB}$ точки $A$ при вращении диска 1 вокруг полюса $B$ $a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a^n_{AB} = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2;\ a^n_{BC} = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2C$ для определения углового ускорения $\varepsilon_2$ невозможно, так как расстояние $P_2C$ от мгновенного центра скоростей $P_2$ шатуна 2 до точки $C$ меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки $A$ на оси $x$, $y$, выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x\text{: } -a_A \cos 60^\circ = a^{\tau}_{AB} - a^n_{BC} - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y\text{: } a_A \cos 30^\circ = a^n_{AB} - a^{\tau}_{BC} + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a^{\tau}_{AB} = a_A$, найдём ускорение точки $A$: $a_A$ = 18,67 м/с$^2$. Положительное значение ускорения точки $A$ означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2{,}29$ м/с$^2$. Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|a_{BC}^{\tau}\right|}{BC} = 2{,}2$ рад/с$^2$. Из того, что касательное ускорение $a_{BC}^{\tau}$ положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

**Задача 35.** По неподвижной шестерне 1 радиуса $r_1$ обкатывается шестерня 2 радиуса $r_2$, насаженная в центре на кривошип $OA$ (рис. 2.32). Кривошип $OA$ вращается вокруг оси $O$ с угловой скоростью $\omega_{OA}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{OA}$. На ободе шестерни 2 в точке $B$ шарнирно прикреплен стержень $BC$, соединенный другим концом с центром $C$ диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки $D$ и угловое ускорение стержня $BC$, если $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с$^2$. Длина стержня $BC = 1$ м.

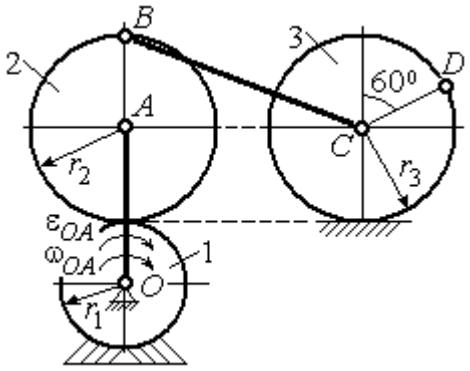


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

*Решение*

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа $OA$. Скорость его точки $A$: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2{,}4$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу $OA$ в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения $P_2$ является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} =$ 6 рад/с. Скорость точки $B$ шестерни 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 =$ 4,8 м/с.

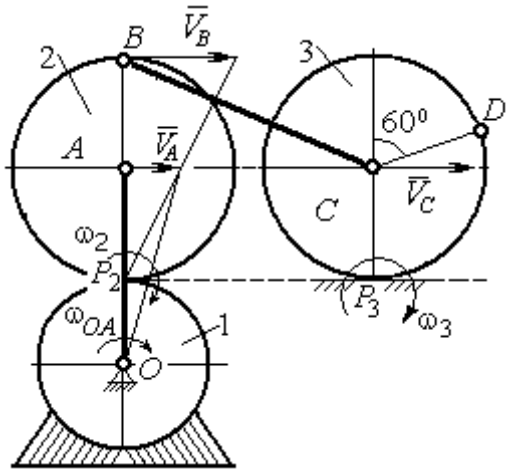



Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня $BC$ заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки $B$ и $C$ не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня $BC$ отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение. При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня $BC$ одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B =$ 4,8 м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка $P_3$ касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} =$ 12 рад/с. Направление угловой скорости $\omega_3$ определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки $C$, направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс $B$. Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса $B$; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки $C$ при вращении

стержня $BC$ вокруг полюса $B$. Вектор $\vec{a}^{n}_{CB}$ направлен вдоль стержня от точки $C$ к полюсу $B$, вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ перпендикулярен стержню $BC$. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня $BC$, показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой $\varepsilon_{CB}$.

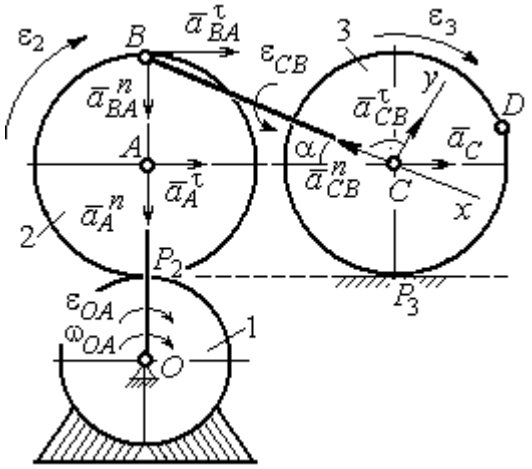



Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки $B$ через полюс $A$ в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса $A$; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки $B$ при вращении шестерни 2 вокруг полюса $A$. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки $B$ к полюсу $A$, вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен линии $BA$. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа $OA$. Вектор ускорения точки $A$ кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси $O$ представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки $A$. Вектор $\vec{a}^{n}_{A}$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}^{\tau}_{A}$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения $\varepsilon_{OA}$ вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки $C$ имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14{,}4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние $AP_2$ остается постоянным, равным $r_2$. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки $A$ производная от скорости равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, получим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3$ рад/с$^2$ и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1{,}2$ м/с$^2$.

Выберем оси $Cx$, $Cy$, как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка $BC$ и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки $C$. Получим систему уравнений:

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin\alpha = -a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha - a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где $\alpha$ – угол между стержнем $BC$ и линией центров $AC$, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки $C$: $a_C = 12{,}83$ м/с$^2$, из второго – касательное ускорение точки $C$ при вращении стержня $BC$ вокруг полюса $B$: $a_{CB}^\tau = 33{,}95$ м/с$^2$. Величина углового ускорения стержня $BC$: $\varepsilon_{CB} = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 33{,}95$ рад/с$^2$. Положительное значение $a_{CB}^\tau$ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения $\varepsilon_{CB}$ стержня $BC$ совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка $C$ движется по прямой и расстояние $CP_3$ остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как движение точки $C$ является прямолинейным, производная от скорости точки $C$ равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равенство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32{,}07$ рад/с$^2$.

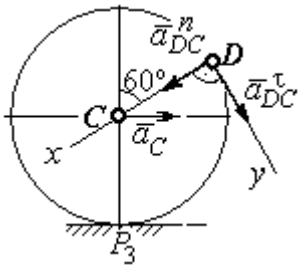


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки $D$

Выразим ускорение точки $D$ через полюс $C$, ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки $C$; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки $D$ при вращении диска 3 вокруг полюса $C$. Модули ускорений

$$a_C = 12{,}83 \text{ м/с}^2;\ a^n_{DC} = \omega_3^2 DC = 57{,}6 \text{ м/с}^2;\ a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 DC = 12{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси $Dx$ и $Dy$, как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки $D$ на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a^n_{DC};\quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a^\tau_{DC}.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46{,}49$ м/с$^2$; $a_{Dy} = 19{,}25$ м/с$^2$.

Величина ускорения точки $D$: $a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 50{,}32$ м/с$^2$.

Заметим, что для определения ускорения точки $D$ невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки $D$ через

ускорения полюсов $C$, $B$ и $A$, так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - $a_{Dx}$, $a_{Dy}$ и величина ускорения $a_{CB}^{\tau}$.

**Задача 36.** Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип $OA$, вращающийся вокруг неподвижной оси $O$, шестерню 1 радиуса $r_1$, насаженную на кривошип в точке $A$ и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун $BC$, присоединённый одним концом в точке $B$ к шестерне, а другим – в точке $C$ к коромыслу $CO_1$. В положении, указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла $CO_1$, если $\omega_{OA}$ = 2 рад/с; $\varepsilon_{OA}$ = 4 рад/с$^2$; $OA$ = 0,8 м; $r_1$ = 0,4 м; $AB$ = 0,2 м; $BC$ = 0,6 м. Для этого же положения определить ускорение точки $C$.

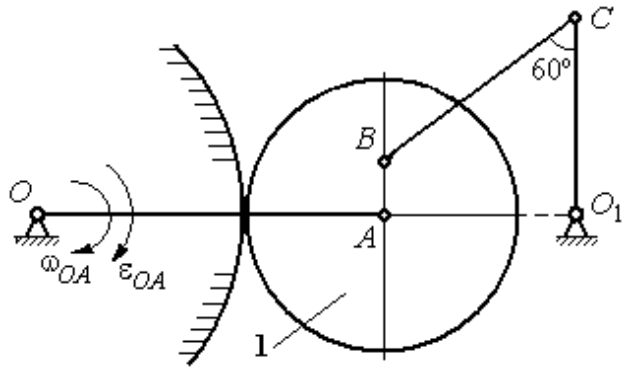


Рис. 2.36. Механизм качалки

*Решение*

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки $A$ кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$ = 1,6 м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания $P_1$ шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1}$ = 4 рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой $\omega_1$.

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки $B$ $P_1B$ = 0,45 м. Скорость точки $B$: $V_B = \omega_1 \cdot P_1B$ = 1,8 м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии $P_1B$ и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла $CO_1$ вокруг неподвижной оси $O_1$ вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка $P_2$, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек $B$ и $C$, является мгновенным центром скоростей шатуна $BC$ (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC\cos 30^\circ = 0{,}52$ м; $\cos\alpha = \dfrac{AP_1}{BP_1} = 0{,}89$; $P_2B = \dfrac{BK}{\cos\alpha} = 0{,}58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = 3{,}1$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой $\omega_{BC}$.

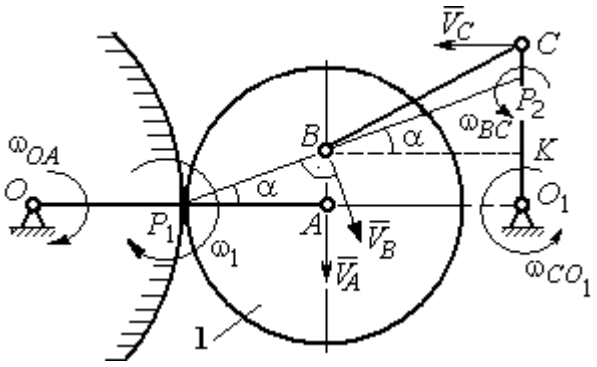



Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Расстояние $P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin\alpha = 0{,}04$ м. Скорость точки $C$ шатуна $BC$: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0{,}12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0{,}5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{CO_1} = 0{,}24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка $C$ принадлежит шатуну $BC$, выразим ускорение точки $C$ через полюс $B$: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса $B$; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки $C$ при вращении шатуна вокруг полюса $B$.

Полагая, что точка $B$ принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс $A$: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки $A$ шестерни; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки $B$ при вращении шестерни вокруг полюса $A$.

Поскольку точка $A$ принадлежит и кривошипу $OA$, а точка $C$ – коромыслу $CO_1$, вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих точек можно представить в виде сумм векторов:

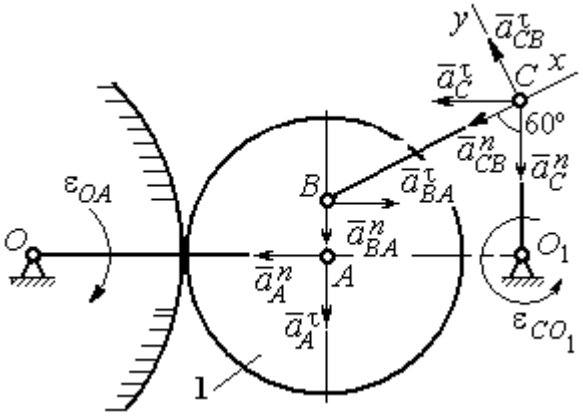



Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_C = \vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau},$$

где $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_A^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки $A$ при вращении кривошипа вокруг оси $O$; $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_C^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки $C$ при вращении коромысла вокруг оси $O_1$.

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau} = \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;\ \ a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5{,}77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ \ a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения $\varepsilon_1$ углового ускорения шестерни 1 продифференцируем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A^\tau}{r_1} = 8$ рад/с$^2$.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1{,}6$ м/с$^2$.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ и $\vec{a}^{\tau}_{C}$. Выберем ось $x$ вдоль шатуна $BC$, как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a^{n}_{C}\cos 60^{\circ} - \vec{a}^{\tau}_{C}\cos 30^{\circ} = -a^{n}_{CB} - a^{n}_{BA}\cos 60^{\circ} + a^{\tau}_{BA}\cos 30^{\circ} - a^{n}_{A}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{A}\cos 60^{\circ},$$

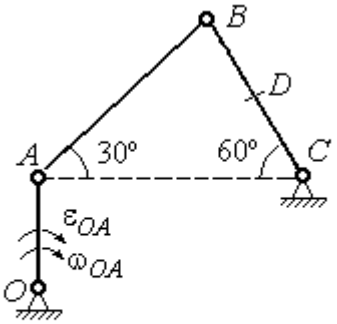
откуда найдём ускорение $a^{\tau}_{C}$ = 11,94 м/с$^2$. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{\left|a^{\tau}_{C}\right|}{CO_1} = 23{,}88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения $a^{\tau}_{C}$ свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}^{\tau}_{C}$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки $C$ (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

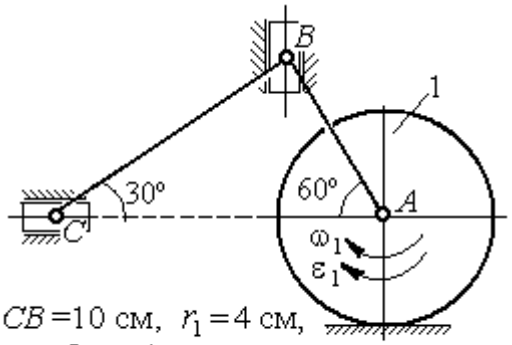
## Упражнения

Упражнения 2.9




$OA = 4$ см, $BD = DC = 4$ см,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с$^2$.
Найти ускорение точки $D$

Упражнения 2.10




$CB = 10$ см, $r_1 = 4$ см,
$\omega_1 = 3$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с$^2$.
Найти ускорение точки $C$

Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

# 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

## 3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной.**

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным.**

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

**Переносной скоростью** точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса:** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_{\text{к}}$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_{\text{к}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_{\text{к}}| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

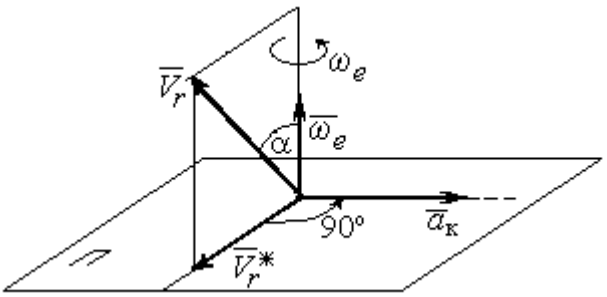


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость *П*, перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости *П* вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_{\text{к}} = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

## Примеры решения задач на сложное движение точки

**Задача 37.** Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу *AB* с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке *A* и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат *xOy*, если радиус $OA = 0{,}5$ м, радиус кривизны канала в точке *A* $\rho = 0{,}8$ м, угол между нормалью *n* к кривой *AB* в точке *A* и радиусом *OA* $\alpha = 30^\circ$.

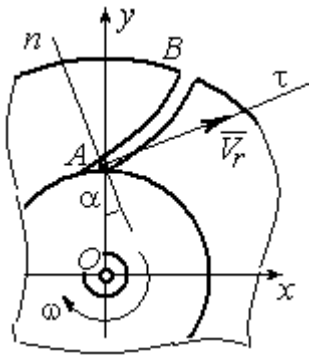


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

*Решение*

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки *A* компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу *OA* и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой *AB* (стенки канала) в точке *A*.

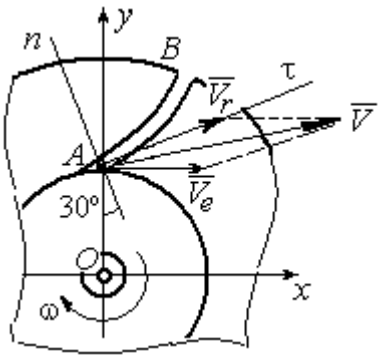


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси *x*, *y*. Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8{,}46 \text{ м/с}; \; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{к}}.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

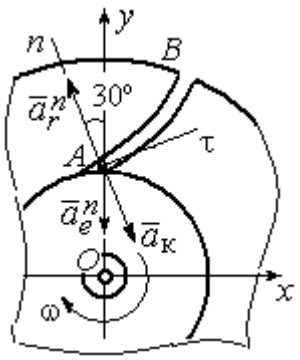


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки *A* вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$, где $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке А выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0,\ a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2;\ a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2;\ a_{\text{к}} = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат *xOy*. Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_к \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_к \cos 30^\circ = -101{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106{,}28$ м/с$^2$.

**Задача 38.** При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворота крана (рис. 3.5) груз *A* перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан *B* радиуса $r_1 = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с$^2$, а кран разворачивается вокруг оси $O_1O_2$ с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0{,}5$ рад/с$^2$.

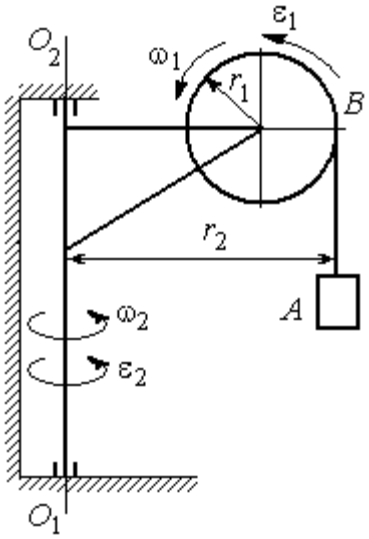


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

*Решение*

Подъём груза *A* на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана *B* из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3$ рад/с. Скорость подъёма груза *A* в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1) r_1 = 1{,}5$ м/с. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$. При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с. Переносная скорость груза $A$ равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса $r_2$: $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

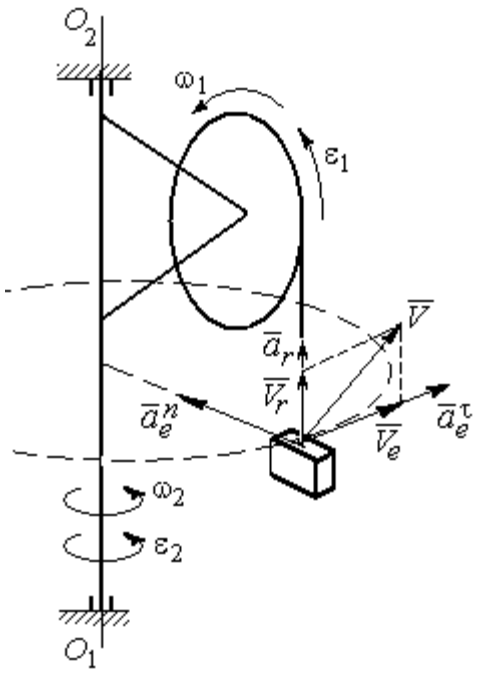


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5{,}22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_\text{к} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_\text{к}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$, $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$, $\vec{a}_\text{к}$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение $a_r^n$ груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное $a_r^\tau$ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1{,}5$ м/с$^2$. Направление вектора $\vec{a}_r^{\,\tau}$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

Переносные нормальное $a_e^n$ и касательное $a_e^\tau$ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2$ = 2,5 м/с$^2$; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2$ = 5 м/с$^2$. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса $a_к$ равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_к = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (\vec{a}_e^\tau)^2 + (\vec{a}_r)^2}$ = 5,79 м/с$^2$.

**Задача 39.** Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину $A$ треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой $\varphi$.

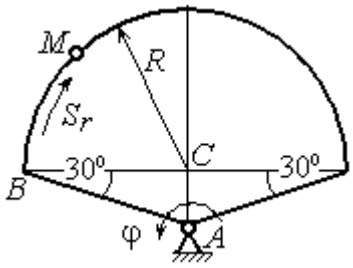


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка $M$. Уравнение движения точки: $\breve{BM} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги $BM$ показано дуговой стрелкой $S_r$ (см. рис. 3.7). Радиус диска $R$ = 9 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки $M$ в момент времени $t_1$ = 1 с.

*Решение*

Переносным движением точки $M$ является вращение фигуры вокруг оси $A$, относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки $M$ на окружности определяется центральным углом: $\alpha = \dfrac{S_r}{R}$, где $S_r$ – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки $M$ на рис. 3.8 обозначено $M_1$.

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\varphi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с. Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла $\varphi_e$ и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой $\omega_e$.

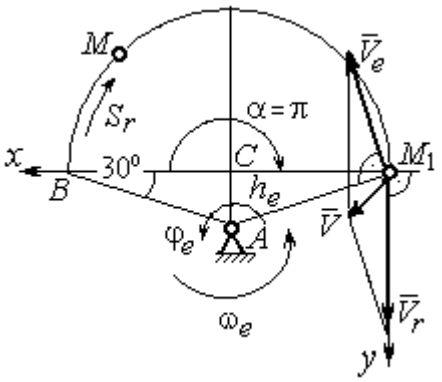


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки $V_e$ – это скорость расчётного положения точки $M$ вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = = \omega_e AM_1 = \dfrac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10{,}39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку $AM_1$ и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку $CM_1$ и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат $M_1x$, $M_1y$, как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 5{,}2 \text{ см/с}, \; V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = 47{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47{,}8$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_\text{к}$.

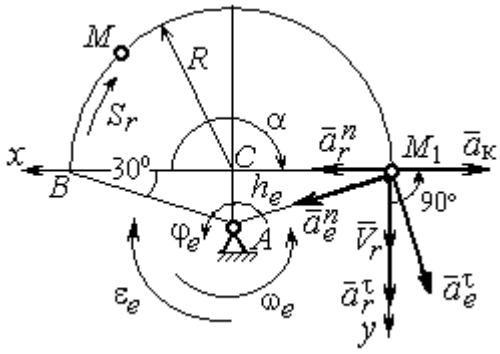



Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$, где $\vec{a}_e^{\,\tau}$ и $\vec{a}_e^{\,n}$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_\text{к}$.

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки $M_1$.

Относительное касательное ускорение $a_r^\tau$ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с$^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки $a_r^n$ вычисляется по формуле: $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно 355,3 см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,n}$ направлен по радиусу диска к центру $C$ (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e| = 4$ рад/с$^2$. Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с$^2$), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой $\varepsilon_e$. Модуль переносного касательного ускорения $a_e^\tau$ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с$^2$. Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен $AM_1$ и направлен в сторону углового ускорения фигуры $\varepsilon_e$ (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10{,}4$ см/с$^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка $M_1A$ к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega V_r =$ $=113{,}1$ см/с$^2$. По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси $M_1x$ и $M_1y$, как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 230{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250{,}3 \text{ см/с}^2.$$

**Задача 40.** Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси $O_1O_2$, проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой $\varphi$. Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30º к вертикальному, движется точка $M$ по закону $CM = S_r = (4t-1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки $C$ на краю диска. Положительное направление движения точки $M$ показано стрелкой $S_r$. Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки $M$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

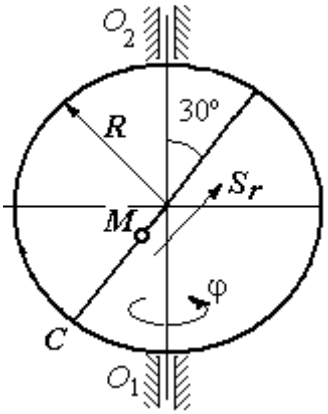


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

*Решение*

Переносным движением точки $M$ является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние $S_r$, пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка $M$ в данный момент времени находится на противоположном от точки $C$ конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой $M_1$.

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой $\omega$.

Переносная скорость точки $V_e$ – это скорость точки $M_1$ на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки $M_1$. Очевидно, $KM_1 = 0{,}5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, *a*).

(На рис. 3.11, *a* символ ⊙ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ ⊕ – «от нас».)

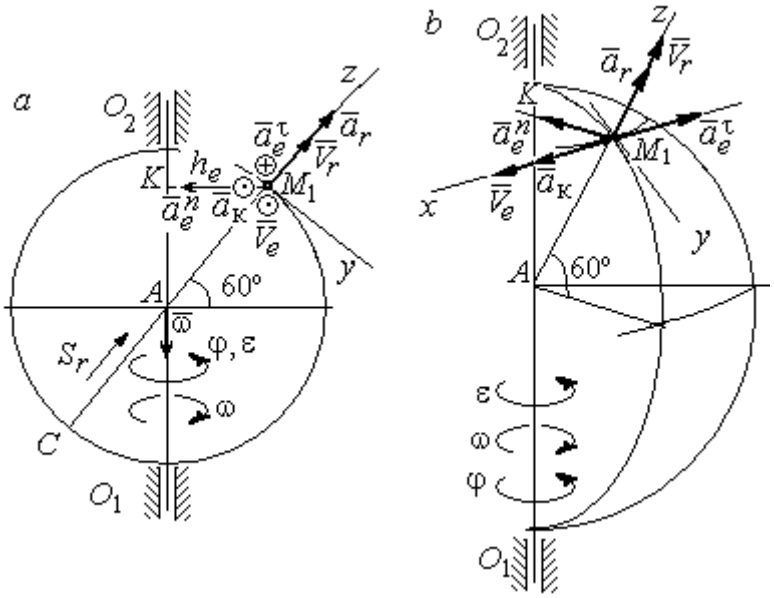



Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
*a* – плоская модель движения;
*b* – пространственная модель движения

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|8(4t - 1)\right|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении $M_1$ направлен вдоль диаметра диска $CM_1$ в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24{,}33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}$.

Относительное ускорение точки $a_r = \left|\ddot{S}_r\right| = 32$ см/с$^2$. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке $M_1$ направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \left|\dot{\omega}\right| = \left|4t - 4\pi\sin\pi t\right|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 4$ рад/с$^2$. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4$ рад/с$^2$) означает, что угловое ускорение $\varepsilon$ направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой $\varepsilon$. Модуль переносного касательного ускорения $a_e^{\tau}$ определяется по формуле $a_e^{\tau} = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{\tau} = 8$ см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_e^{\tau}$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке $M_1$ и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение $a_e^{n}$ рассчитывается по формуле $a_e^{n} = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{n} = 8$ см/с$^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{n}$ направлен вдоль отрезка $M_1K$ к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150º. Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1$ с $a_{\text{к}} = 2\left|\omega\right\|V_r\left|\sin 150^\circ = 48\right.$ см/с$^2$. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, *а* это будет проекция на линию $KM_1$. Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, *а* вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке $M_1$ и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат $M_1x$, $M_1y$ и $M_1z$, как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, *а* ось $M_1x$ направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

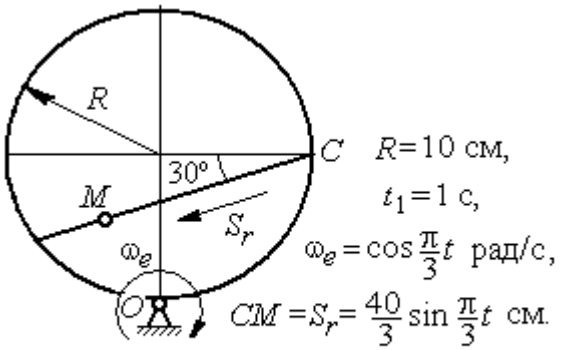
$$a_x = -a_e^{\tau} + a_{\text{к}} = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49{,}32$ см/с$^2$.

## Упражнения

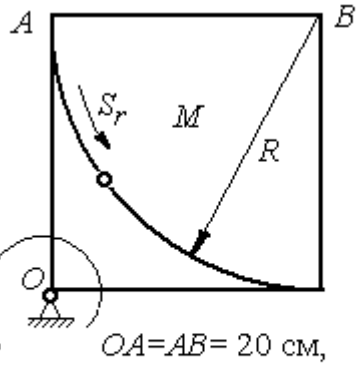
Упражнение 3.1




$R = 10$ см,
$t_1 = 1$ с,
$\omega_e = \cos\frac{\pi}{3}t$ рад/с,
$CM = S_r = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3}t$ см.

Найти скорость и ускорение точки $M$ в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2




$OA = AB = 20$ см,
$\overset{\smile}{AM} = S_r = 5\pi t^2$ см, $\varphi_e = t^2 - 5t$ рад.
Найти скорость и ускорение точки $M$ в момент $t = t_1 = 1$ с

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

# 4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

## 4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ldots,\ \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\ ,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\ .$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\ ;\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}\ ;\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}\ ,$$

где $m$ – масса точки; $x$, $y$, $z$ – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\ ;\ \ m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}\ ;\ \ m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ ,$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}\ ;\ \ m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}\ ;\ 0 = \sum F_{kb}\ ,$$

где $\rho$ – радиус кривизны траектории; $\tau$, $n$, $b$ – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

### Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

**Задача 41.** При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке $A$ сортировочного стола $AB$ начальную скорость $V_0$, направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом $\alpha$ к горизонту. Нижний край стола в точке $B$ поднят на высоту $h$ над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения $f$. Дойдя до края стола в точке $B$, частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты $h$. На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку $C$ и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

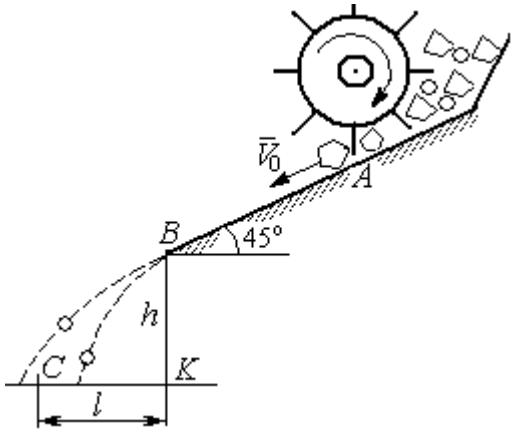


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1{,}2$ м, угол наклона $\alpha = 45°$, высота точки отрыва $BK = h = 1{,}5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0{,}4$.

*Решение*

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку $C$ (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат *xAy*, направив ось *x* вдоль линии движения, а ось *y* – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

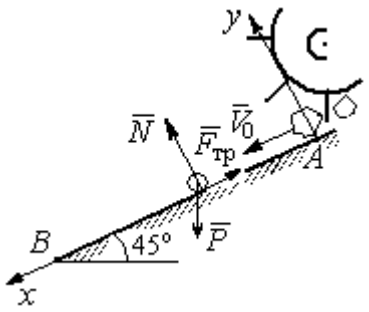


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси *y* частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения, которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где $f$ – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1-f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0{,}4: \ \frac{dV_x}{dt} = 4{,}18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4{,}18t + C_1$; $x = 2{,}09t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования $C_1$, $C_2$ находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке *AB* сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4{,}18t + 1$; $x = 2{,}09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола $B$ в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4{,}18t_B + 1$, $S = 2{,}09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8{,}36S}$. При длине стола $S$ = 1,2 м скорость отрыва $V_B$ = 3,32 м/с.

Рассмотрим участок $BC$ свободного падения частицы, брошенной с высоты $h$ с начальной скоростью $V_B$, направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат $xKy$ с началом координат в точке $K$ (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$$

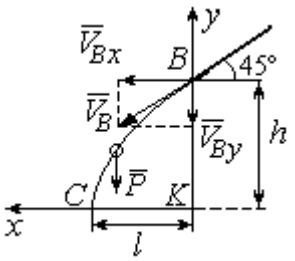


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси $x$ описывается уравнениями $\dot{x} = C_3;\ x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования $C_3$ и $C_4$. определяются из начальных условий движения: при $t$ = 0 , $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где $V_{Bx}$ – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось $x$, $V_{Bx} = V_B\cos45^\circ$ = 2,35 м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: $C_4$ = 0, $C_3$ = 2,35. В результате, движение частицы вдоль оси $x$ при её свободном падении описывается уравнением $x = 2{,}35t$.

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси $y$. Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси $y$: при $t$ = 0 , $y(0) = h$ = 1,5 м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B\cos45^\circ = -2{,}35$ м/с, где $V_{By}$ – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось $y$. Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2{,}35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси $y$ при её свободном падении описывается уравнением $y = -4{,}91t^2 - 2{,}35t + 1{,}5$.

В момент $t = t_{\text{п}}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2{,}35t_{\text{п}},\ 0 = -4{,}91t_{\text{п}}^2 - 2{,}35t_{\text{п}} + 1{,}5.$$

Исключая в системе время $t_{\text{п}}$, выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1{,}12\ell - 1{,}68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0{,}85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0{,}4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0{,}4$) – недолетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0{,}5$ равна 0,61 м.

**Задача 42.** Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где $k$ – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; $t$ – время в секундах. Определить величину коэффициента $k$, при котором скорость точки за первую секунду от начала движения увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

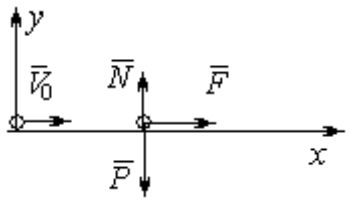


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

*Решение*

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат $x$, $y$ с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось *x* положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс *x* у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент $t_1$ точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента *k*, получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51{,}86$ м.

**Задача 43.** Материальная точка массой $m$ = 1 кг, находясь на высоте $h_1$ = 2 м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось $x$) с начальной скоростью $V_0$ = 4 м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0{,}5mV^2$ Н, где $V$ – скорость точки. Определить, на какой высоте $h_2$ от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

*Решение*

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается движение точки вверх с высоты $h_1$ с начальной скоростью $V_0$ и определение максимальной высоты полёта $H$, на втором этапе – падение точки вниз с высоты $H$ без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

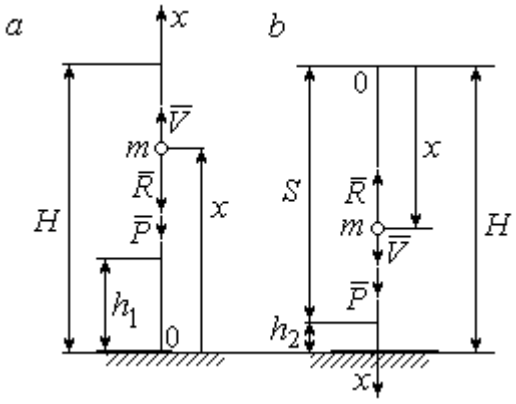



Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
*a* – движение точки вверх;
*b* – движение точки вниз

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось $x$, вдоль которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось $x$: $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось $x$: $P_x = -P = -mg$; $R_x = -0{,}5mV^2$. Полагая $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, получим уравнение движения точки в виде: $\dfrac{dV}{dt} = -(g + 0{,}5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}=\frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g+0{,}5V^2}=-2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g+0{,}5V^2)=-x+C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C=h_1+\ln(g+0{,}5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x=h_1+\ln\left(\frac{g+0{,}5V_0^2}{g+0{,}5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x=H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя $H$, получим: $H=h_1+\ln\left(1+\frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2{,}6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты $H$ без начальной скорости. Выберем ось $x$ по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки: $m\frac{dV}{dt}=P_x+R_x = mg-0{,}5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду: $\frac{dV^2}{g-0{,}5V^2}=2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g-0{,}5V^2)=-x+C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1=\ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением $x = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V^2}\right)$.

Расстояние $S$, которое пролетела точка с высоты $H$, приобретя скорость, $V_0$: $S = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V_0^2}\right)$. Высота $h_2$ этого положения от уровня Земли: $h_2 = H - S$ (см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2{,}6$ м высота $h_2 = 0{,}91$ м.

**Задача 44**. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью $V_1$ на высоте $h$. Точка 2 массой $m_2$ находится в начале координат (рис. 4.6).

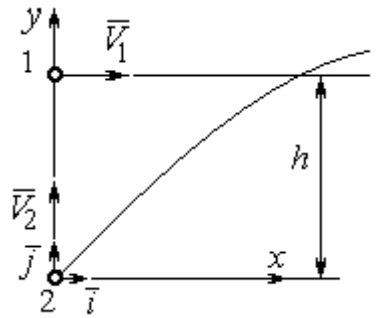


Рис. 4.6. Схема встречного движения точек

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали $y$, точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью $V_2$. В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представлена в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат $xy$: $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где $p$, $q$ – const. С какой скоростью $V_2$ должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

*Решение*

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси $x$, $y$: $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

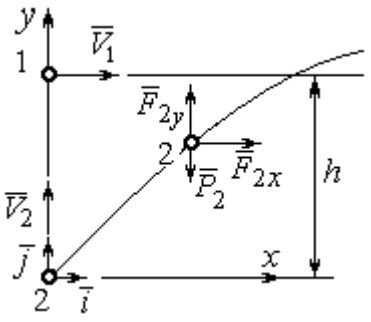


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

Уравнения движения точки в проекциях на оси $xy$ имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p,\ m_2\ddot{y} = q - m_2 g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси $x$ описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси $y$: $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси $y$: $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2 t$.

Обозначим $t_1$ – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1 t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \qquad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2 t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1 m_2}{p}$.

## Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы $m$ = 2 кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения $f$ = 0,4. На тело действует сила $F = kt + 0{,}5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента $k$ и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь $S$ = 2 м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы $m$ = 1 кг, находящуюся на высоте $H$ = 10 м над уровнем Земли, бросили под углом φ = 30° к горизонту с начальной скоростью $V_0$. Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость $V_0$ и горизонтальную дальность полета $l$ при падении точки на Землю, если высоту $h$ =7 м она пересекла через 1 с от начала движения.

## 4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой $m$ движется вдоль оси О$x$ под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где $c$ – постоянный коэффициент, $x$ – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где $\omega$ – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.** В случае гармонического возмущения $Q = H\sin pt$, где $H$, $p$ – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}$$

где $\omega$ – угловая частота собственных колебаний; $h$ – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае возникновения резонанса ($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью $c_1$ и $c_2$ можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

## Примеры решения задач на колебания точки

**Задача 45.** Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз $Q$ массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

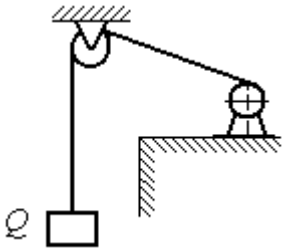


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

*Решение*

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной $\ell_0$ можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза $Q$ на пружине показана на рис. 4.9.

Ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* (точка *O*) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox* имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение колебаний:

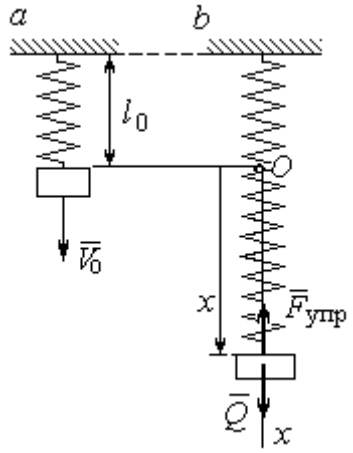



Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
*a* – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где $\omega$ – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0{,}69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0{,}71$ м. Окончательно, движение груза после защемления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0{,}69\cos 14{,}14t + 0{,}71\sin 14{,}14t + 0{,}69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где $A$ – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\alpha$ – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1{,}68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134{,}4$ кН.

**Задача 46.** Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60º. Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

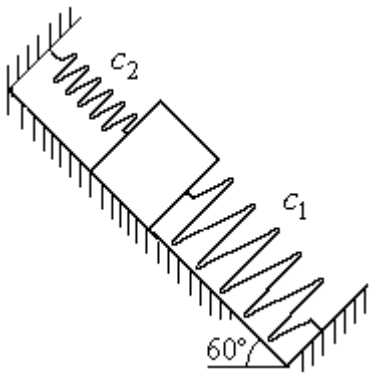


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0{,}12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

*Решение*

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикреплённого к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_э = c_1 + c_2$ = 900 Н/м (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза $x$ выберем в положении его статического равновесия (точка $O$) (см. рис. 4.11).

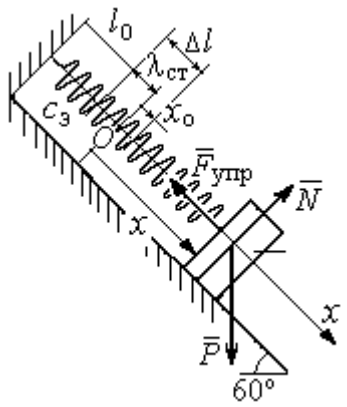



Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось $Ox$: $m\ddot{x} = P_x - F_{упр\,x}$. Проекция силы упругости пружины на ось $Ox$: $F_{упр\,x} = -c_э \Delta\ell$, где $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст})$ – удлинение пружины, включающее её растяжение $\lambda_{ст}$ относительно положения нерастянутой пружины и растяжение $x$ относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{ст}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P\cos 30^\circ - F_{упр} = 0{,}87mg - c_э\lambda_{ст} = 0.$$

Находим $\lambda_{ст} = \dfrac{0{,}87mg}{c_э} = 0{,}085$ м.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0{,}87mg = c_э\lambda_{ст}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_э x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega$ – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 10$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси $Ox$ (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{ст} = 0{,}035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0{,}035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2 \sin\omega_2 t + C_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0{,}035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0{,}035$ м. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}63$ с.

**Задача 47.** Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины $c$ = 350 Н/м. Груз массой $m$ = 5 кг падает с высоты $h$ = 0,3 м.

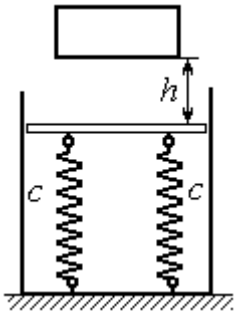


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

*Решение*

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_э = 2c$ = 700 Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси $x$ (точка $O$), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, $c$ предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось $x$: $m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой $x$ (см. рис. 4.13, *c*), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния (см. рис. 4.13, *a*) составляет величину: $\Delta\ell = x + \lambda_{ст}$. Величина $\lambda_{ст}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, *b*): $P - F_{упр\,ст} = P - c_э\lambda_{ст} = 0$.

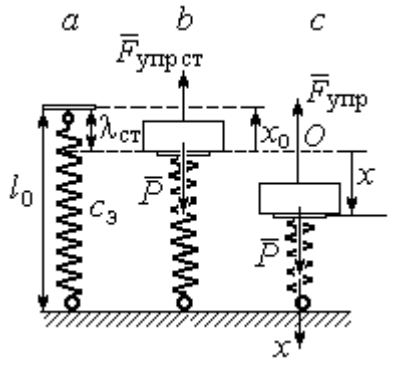



Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
*a* – недеформированная пружина;
*b* – положение статического равновесия груза; *c* – произвольное положение

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} + c_э x = 0$ или $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 11,83 рад/с – угловая частота колебаний.

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{ст} = -\dfrac{mg}{c_э} = -0{,}07$ м.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где $s$ – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая $s$ = 0,3, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: $V$ = 2,43 м/с. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось $x$ положительна: $V_{0x} = V$ = 2,43 м/с.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0{,}07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0{,}2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0{,}07\cos 11{,}83t + 0{,}2\sin 11{,}83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}21$ м. Проседание амортизатора $H$ отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0{,}28$ м.

**Задача 48.** Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа $A$ совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью $c$. К нижнему концу пружины подвешен груз $P$ массой $m$ с индикаторной стрелкой $B$ (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе $A$. В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки $B$ вдоль шкалы, если масса груза $m$ = 1 кг, жесткость пружины $c$ = 10 Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a\sin pt$ см, где амплитуда $a$ = 0,02 м, частота колебаний платформы $p$ = 7 рад/с.

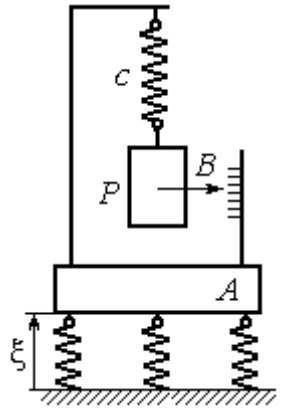


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

*Решение*

Выберем неподвижную ось $x$, связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку $O$ выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой $x$ (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x+\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия груза, определяемое из условия $P-c\lambda_{ст}=0$. Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины. В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме: $\Delta\ell=(x+\lambda_{ст}+\xi)$.

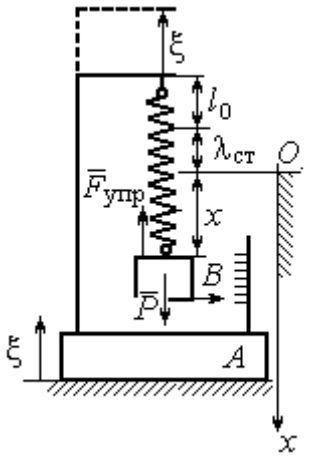


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x}=P_x+F_{упр\,x}$, где проекции $P_x=P$, $F_{упр\,x}=-c\Delta\ell=-c(x+\lambda_{ст}+\xi)$. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P-c\lambda_{ст}=0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2x=-h\sin pt,$$

где $\omega$ – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=3{,}16$ рад/с;

$h$ – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h=\dfrac{ca}{m}$ = 0,2 м/с$^2$;

$p$ – угловая частота вынужденных колебаний, $p$ = 7 рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x=x_1+x_2$, где $x_1$ является общим решением однородного уравнения $\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0$, а $x_2$ – частное решение уравнения вынужденных колебаний: $\ddot{x}_2+\omega^2x_2=-h\sin pt$.

Решив однородное уравнение, находим: $x_1=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b\sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2\sin pt + \omega^2 b\sin pt = -h\sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \dfrac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2}\sin pt,$$

где константы $C_1$ и $C_2$ подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t$ = 0, получим $C_1$= 0. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \dfrac{hp}{p^2 - \omega^2}\cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\dfrac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0{,}01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t - 0{,}02\sin 7t = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}03\sin 7t.$$

## Упражнения

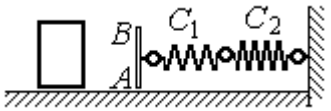



Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы $m$ = 0,5 кг, получив начальную скорость $V_0$ = 6 м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой $AB$ и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью $C_1$ = 120 и $C_2$ = 40 Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если $k$ = 0,5 Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы $m$ =1 кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости $C$ = 160 Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость $V$ = 4 м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

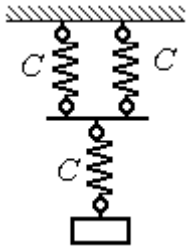



Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

### 4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

**Работой постоянной по величине и направлению силы** $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы $M$ (рис. 4.18) называется скалярная величина $A(\vec{F}) = FS\cos\alpha$, где $F$ – модуль силы; $S$ – конечное перемещение точки приложения силы; $\alpha$ – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

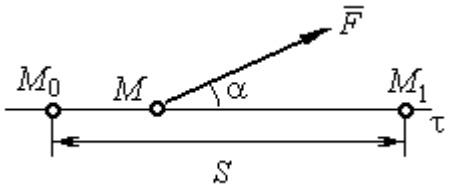



Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

**Работа силы тяжести** материальной точки при перемещении её из положения $M_0$ в положение $M_1$ равна произведению $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где $P$ – величина силы тяжести точки; $h$ – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

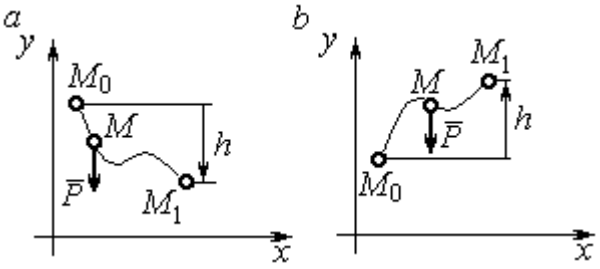



Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
*a* – перемещение точки сверху вниз;
*b* – перемещение точки снизу вверх

**Работа силы упругости пружины** при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние *h* определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где $c$ – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

**Кинетической энергией материальной точки** называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где $m$ – масса точки; $V$ – её скорость.

**Теорема об изменении кинетической энергии точки**. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где $V_0$, $V_1$ – скорость точки в начальном положении $M_0$ и в положении $M_1$; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения $M_0$ в положение $M_1$. При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, $\rho$ – радиус кривизны траектории точки.

## Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

**Задача 49.** Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью $V_0$ = 6 м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

*Решение*

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s$, где $V_0$, $V$ – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; $s$ – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть $V$ = 0. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_0^2}{2} = \left(P - F_{\text{тр}}\right)s$, откуда находим требуемую для остановки груза силу трения: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}}$ = 5,81 кН

**Задача 50.** Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов $R$ = 1 м и $r$ = 0,5 м (рис. 4.20). Линия $OO_1$, соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик весом $P$ = 10 Н. В точке $A$, положение которой на дуге радиуса $R$ определяется углом $\alpha$ = 60°, шарику сообщают начальную скорость $V_0$, после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки $B$ со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке $C$, положение которой на дуге радиуса $r$ определяется углом $\beta = 90°$ относительно линии центров.

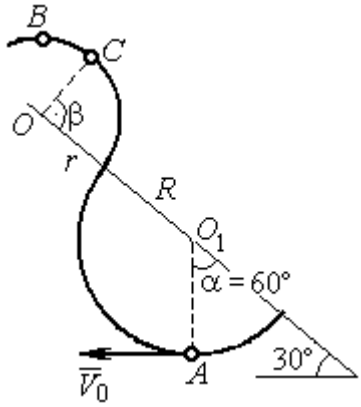


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

*Решение*

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и потому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её из начального положения $A$ в положение $B$ имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

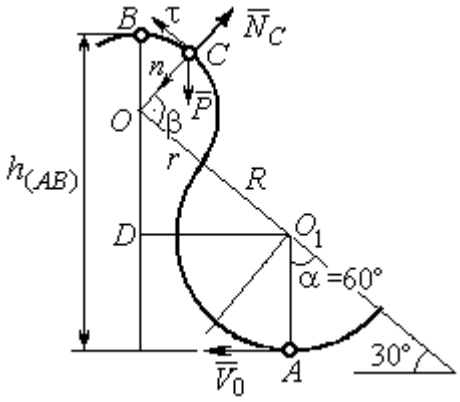


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек $B$ и $A$, $h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r)$ (см. рис. 4.21); $V_A$, $V_B$ – скорость шарика в точках $A$ и $B$, причём $V_A = V_0$, $V_B = 0{,}5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда $V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7{,}67$ м/с.

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарику, в момент, когда он находится в точке *C*. Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль $Cn$. Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию $N_C$.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *C* в положение *B*. Получим равенство $\dfrac{mV_B^2}{2} - \dfrac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения *C* в положение *B*. С учётом известных значений $V_B = 0{,}5V_0 =$ 3,84 м/с и $h_{(CB)} = r\cos 30^\circ =$ 0,43 м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} =$ 4,82 м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} =$ – 38,7 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

**Задача 51.** Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой *AB* и гладкой дуги окружности радиуса *r* = 0,8 м, сопряжённых в точке *B* так, что прямая *AB* является касательной к окружности в точке *B* (рис. 4.22). Положение точки *B* на дуге задаётся углом 30º относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой *m* = 0,5 кг начинает движение из точки *A* со скоростью $V_0 = 0{,}2$ м/с.

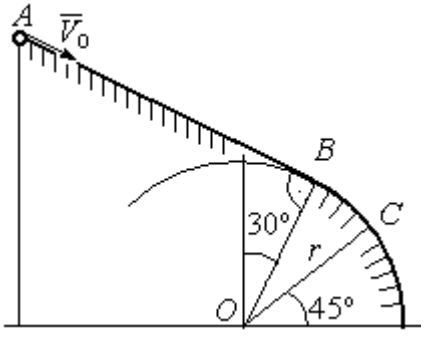


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины *S* должен быть желоб *AB*,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке $C$, определяемой углом 45º относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой $AB$ шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0{,}4$.

*Решение*

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке $C$ оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль $Cn$ (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке $C$. Уравнение движения шарика в проекции на ось $Cn$ имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 45^\circ - N_C$, где $V_C$ – скорость шарика в точке $C$. Реакция опоры $N_C = P\cos 45^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r}$.

В момент отрыва шарика в точке $C$ реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg\cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2{,}36$ м/с.

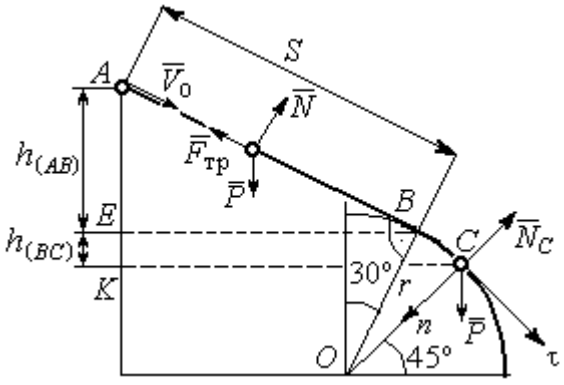



Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения $A$ в положение $C$. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой $AB$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки $\dfrac{mV_C^2}{2} - \dfrac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{\text{тр}}S$, где $S$ – длина участка $AB$; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке $AC$ (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию $N$ опоры шарика на наклонную поверхность желоба $AB$, составим проекцию уравнения движения шарика на ось $y$, перпендикулярную $AB$ (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины $S$ участка $AB$:

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

**Задача 52.** Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке $O$ (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении $A$, при котором линия $OA$ составляет с вертикалью угол $60°$. В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке $O_1$, расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

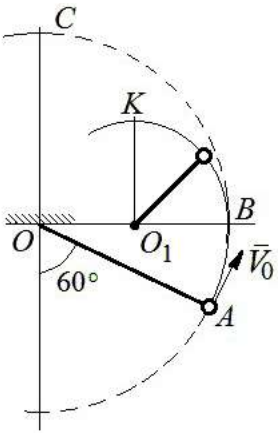


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке $A$, чтобы после встречи нити с проволокой в $O_1$ груз проскочил верхнюю точку траектории $K$. На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра $OB$) поднимется груз, двигаясь из той же точки $A$ и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке $B$ при переходе груза с одной траектории на другую.

*Решение*

Построим оси естественной системы координат $n K \tau$ в точке $K$ траектории – окружности радиуса $0{,}5l$ с центром $O_1$ (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось $Kn$ имеет вид: $m\dfrac{V_K^2}{r} = P + N_K$, где $V_K$ – скорость

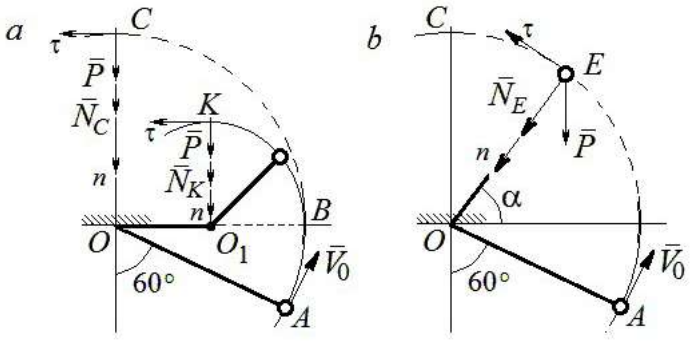


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
*a* – нить навивается на препятствие;
*b* – свободное движение

груза в точке $K$; $N_K$ – реакция нити; $r$ – радиус окружности движения груза; $r = 0{,}5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m\dfrac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки $K$ является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \dfrac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке $K$ найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения $A$ в положение $K$. Имеем равенство $\dfrac{mV_K^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек $A$ и $K$; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке $K$ от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}gl}$ .

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки *K*. Однако, натяжение нити в точке *K* обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения *A* с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, *b*). Построим в точке *E* оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке *K*. Уравнение движения груза в проекции на ось *En* имеет вид: $m\frac{V_E^2}{l} = P\sin\alpha + N_E$, где $V_E$ – скорость груза в точке *E*; $N_E$ – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке *E* составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения *A* в положение *E*. Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек *A* и *E*; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l\sin\alpha$ (см. рис. 4.25, *b*). Решая полученное уравнение относительно скорости $V_E$ при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl\sin\alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке *E* натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl\sin\alpha$. Приравнивая выражения, получим $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке $B$ с окружности радиуса $l$ на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке $B$. Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где $N_B$ и $N'_B$ – проекции реакции нити в точке $B$ при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и $l$. Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

**Задача 53.** Шарик массой $m$ = 0,5 кг движется в вертикальной плоскости из положения $A$ внутри трубки, которая состоит из полуокружности $AB$ радиуса $R$ = 0,6 м и прямолинейного участка $BD$, сопряжённого в точке $B$ с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности $AB$ составляет с горизонталью угол 60°. Начальная скорость шарика $V_0$ = 5 м/с. В конце кругового участка в точке $B$ шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью $c$ = 100 Н/м. Найти величину $S$ максимального сжатия пружины.

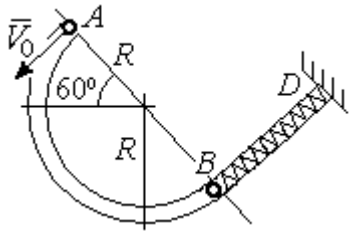


Рис. 4.26. Схема движения шарика

*Решение*

Найдём скорость шарика в точке $B$. Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения $A$ в положение $B$. Получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}$, где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек $A$ и $B$, $h_{(AB)} = 2R\sin 60^\circ = 1{,}04$ м (рис. 4.27).

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке $B$: $V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6{,}74$ м/с.

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки $BD$. На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарику (см. рис. 4.27).

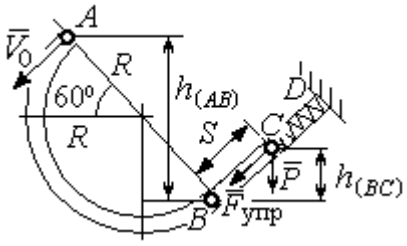


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим $S$ – максимальное сжатие пружины, равное $BC$. На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке $BC$, имеем уравнение $\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{упр}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2}$,

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек $B$ и $C$; $h_{(BC)} = S\sin 30^\circ = 0{,}5S$ (см. рис. 4.27).

В точке $C$ максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6{,}74$ м/с, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0{,}05S - 0{,}23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0{,}45$ м.

## Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки $A$ по прямой, составляющей с горизонтом угол φ, с начальной скоростью $V_0$. Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса $R$, сопряженной с прямой $AB$ в точке $B$ (рис. 4.28).

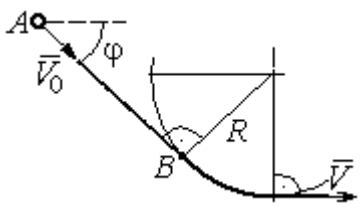


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке $C$ – выхода самолёта на горизонтальный полёт - сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью $C$ = 100 Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0{,}3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0{,}5$ кг, который отделяется от неё в точке $K$ и продолжает движение в трубке по дуге $KCB$, окружности радиуса $R$ = 1 м, затем – по горизонтальному участку $BD$. Определить давление шарика на трубку в точке $C$. Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой $BD$, если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0{,}4$.

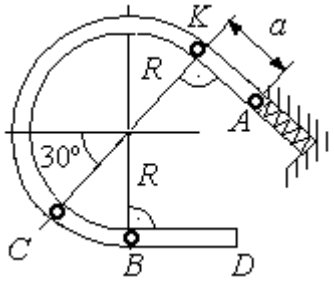


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

# 5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

## 5.1. Теорема о движении центра масс системы

**Центром масс** системы материальных точек называют точку $C$, координаты которой $x_C$, $y_C$, $z_C$ удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k \ , \quad my_C = \sum m_k y_k \ , \ mz_C = \sum m_k z_k \ ,$$

где $m$ – масса системы: $m = \sum m_k$ ; $m_k$, $x_k$, $y_k$, $z_k$ – массы и координаты материальных точек системы.

**Теорема о движении центра масс системы**. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$ , где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

**Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс**

**Задача 54.** Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды *ABCD*, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через блок $C$ (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 $m_1$ = 15 кг, груза 2 $m_2$ = 20 кг, пирамиды $m$ = 50 кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

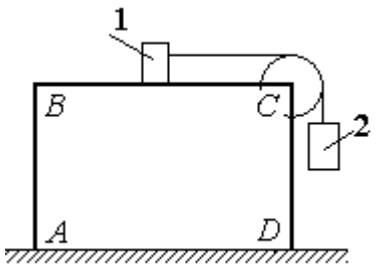


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

*Решение*

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока *C* и пирамиды *ABCD*.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат *Axy*, как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось *Ax,* имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x}_C = 0,$$

где $x_C$ – координата центра масс системы.

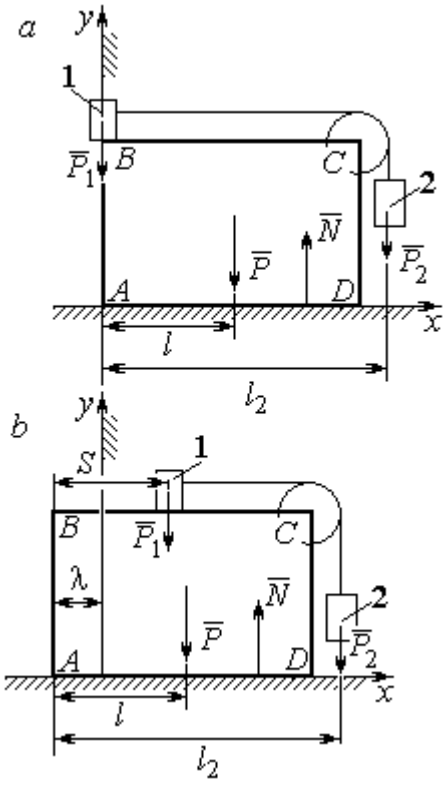



Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: *a* – начальное положение; *b* – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние *S*

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна $x_{C0}$ (на рис. 5.2, *a* не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси *Ax* остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, *a*.

Начальная координата $x_{C0}$ центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где $l_2$ – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

за 2 на оси $Ax$); $l$ – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, *a*). Тогда начальная координата центра масс системы: $x_{C0} = \dfrac{m_2 l_2 + ml}{(m_1 + m_2 + m)}$.

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние *S*, и положение призмы показано на рис. 5.2, *b*. На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние *S* призма *ABCD* сместилась влево на расстояние $\lambda$. Координата $x_{C1}$ центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату $x_{C1}$ и приравнивая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды $\lambda = \dfrac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}$. Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0{,}18$ м.

## 5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

**Момент инерции однородного диска** радиусом *R*, массой *m* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска: $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$. **Для неоднородных тел момент инерции** относительно оси *z* вычисляется по формуле: $J_z = mi_z^2$, где $i_z$ – радиус инерции тела.

**Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси *z*** называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

**Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, кинетический момент**: $L_z = J_z\omega$, где $J_z$ и $\omega$ – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси**. Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси $z$ равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

## Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

**Задача 55.** Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой $m_1$ поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой $m_2$ радиуса $R$. Противовес 3 массой $m_3$ прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_z$. На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60$ Н·м. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t$ Н·м, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 50$ кг, $m_3 = 20$ кг. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}4$ м; $i_z = 0{,}5$ м.

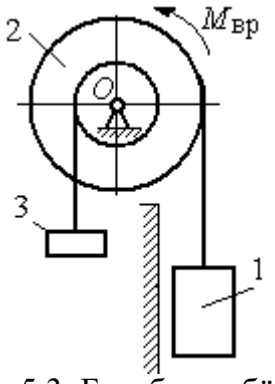


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

*Решение*

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления $M_c$. Направления векторов сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси *y*, вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

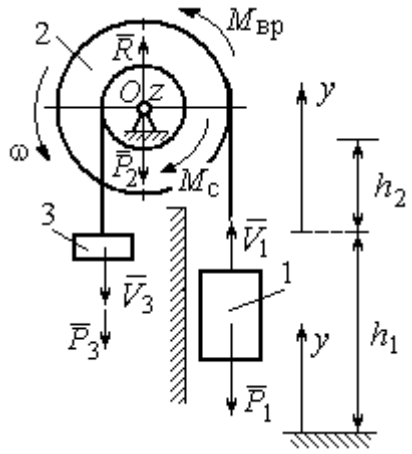



Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*, проходящей через центр *O*: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$. Кинетический момент системы относительно оси *z* равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*: $L_z^{бар} = J_z\omega$, где $J_z$ – момент инерции барабана относительно оси *z*, $J_z = m_2 i_z^2$; $\omega$ – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси *z*: $L_z^{гр} = M_z(m_1\vec{V}_1) = m_1V_1R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3\vec{V}_3) = m_3V_3r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2\omega + m_1V_1R + m_3V_3r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ - и подставим их в выражение кинетического момента. Получим $L_z = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\omega = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{V_1}{R}$.

Суммарный момент внешних сил относительно оси *z*

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r\right)R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0{,}58 + 0{,}35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза $V_1$ и проходимый им путь $y$ как функции времени:

$$V_1(t) = 0{,}58t + 0{,}175t^2;\quad y(t) = 0{,}29t^2 + 0{,}058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1{,}62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1{,}86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(-M_c - P_1 R + P_3 r\right)R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6{,}61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь уравнение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6{,}61$. Интегрируя его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути $\frac{V_1^2}{2} = -6{,}61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте $h_1$. Из начальных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1{,}86$ м/с, получим: $C_3 = 1{,}73$.

Максимальную высоту $h_2$, на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6{,}61h_2 + 1{,}73$, откуда $h_2 = 0{,}26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1{,}88$ м.

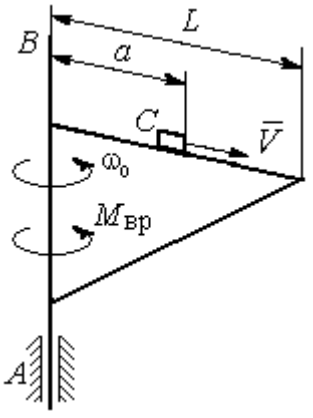


Рис. 5.5. Поворотный кран

**Задача 56.** Тележка $C$ поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Длина стрелы

$L$ = 10 м, масса тележки с грузом $m_1$ = 100 кг, момент инерции крана относительно оси вращения $AB$ без учёта тележки и груза $J$ = 1800 кг·м$^2$. Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{вр}$ = 400 Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью $\omega_0$ = 2 рад/с, а тележка находилась на расстоянии $a$ = 1 м от оси вращения.

*Решение*

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с грузом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника $A$ и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{вр}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения $z$, направленной вдоль линии $AB$.

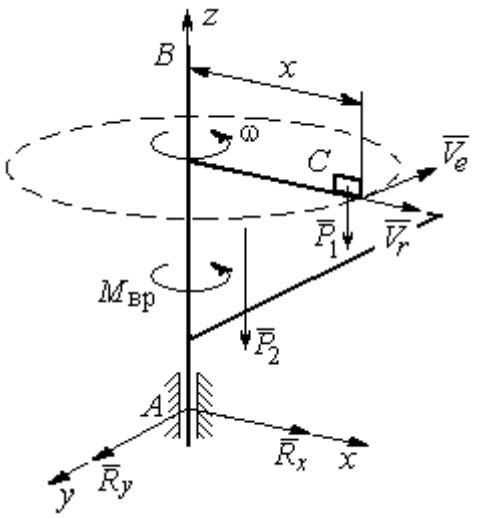


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира $A$ пересекают её, то моменты этих сил относительно оси $z$ равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{вр}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{вр}t$, где $L_z, L_{z0}$ – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы $L_z$ равен сумме: $L_z = L_z^{кран} + L_z^{груз}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси *z*. Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1\vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1\vec{V}_e + m_1\vec{V}_r) = M_z(m_1\vec{V}_e) = m_1V_ex = m_1\omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = \left(J + m_1x^2\right)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = \left(J + m_1a^2\right)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $\left(J + m_1x^2\right)\omega - \left(J + m_1a^2\right)\omega_0 = M_{\text{вр}}t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \dfrac{M_{\text{вр}}t + \left(J + m_1a^2\right)\omega_0}{\left(J + m_1x^2\right)}$. Момент времени $t_{\text{к}}$, когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $Vt_{\text{к}} = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_{\text{к}}) = 0{,}93$ рад/с.

### 5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

**Кинетическая энергия тела при поступательном движении** $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$, где $m$ – масса тела; $V_C$ – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси $z$: $T = \dfrac{1}{2}J_z\omega^2$, где $J_z$ – момент инерции тела относительно оси *z*; $\omega$ – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

**раллельном движении**: $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где $m$ – масса тела; $V_C$, $\omega$ – скорость центра масс и угловая скорость тела; $J_{zC}$ – момент инерции тела относительно оси $z$, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

**Работа постоянной силы** $F$ при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FS\cos\alpha$, где $S$ – перемещение точки; $\alpha$ – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом** $M$ при повороте тела на конечный угол $\varphi$ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где $\varphi$ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

**Мощностью силы** $F$ называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где $V$ – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где $V_O$ – скорость точки, выбранной полюсом; $\omega$ – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку $K$ – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.** Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении**. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

## Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

**Задача 57.** Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом *OA* (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega_{OA}$ и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными *m* и *r,* и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

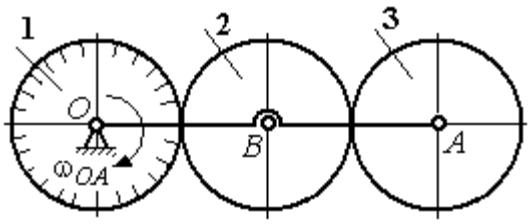


Рис. 5.7. Планетарный механизм

*Решение*

Кинетическая энергия механизма *T* равна сумме энергий колёс 2 и 3: $T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

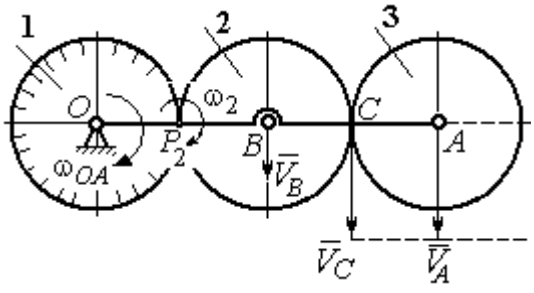


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где $V_B$ – скорость центра масс колеса 2, $J_{2B}$ – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость $\omega_{OA}$ кривошипа $OA$.

Скорость точки $B$, лежащей на кривошипе $OA$: $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка $P_2$ касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости $V_B$ и $\omega_2$ в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки $C$, считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA} r$. Скорость точки $A$ – центра колеса 3 определим, полагая, что точка $A$ лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA} r$. Скорости двух точек $A$ и $C$ колеса 3 равны и параллельны, причём линия $AC$ перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA} r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

**Задача 58.** Горизонтальный желоб $DE$ опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса $r$ (рис. 5.9). Блок 1 весом $P_1$ вращается вокруг неподвиж-

ной оси $O_1$. Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса $R$. Их общий вес равен $Q$, а общий радиус инерции относительно оси $z$, проходящей через центр масс $C$ перпендикулярно плоскости катка, равен $i_z$. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом $M$. Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: $P_1$ = 40 Н, $Q$ = 60 Н, $F$ = 50 Н, $M$ = 45 Н·м, $R$ = 0,8 м, $r$ = 0,6 м, $i_z$ = 0,4 м.

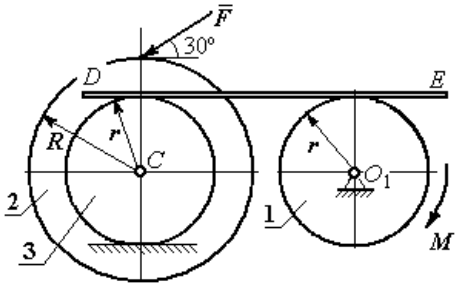


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

*Решение*

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где $T$ – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

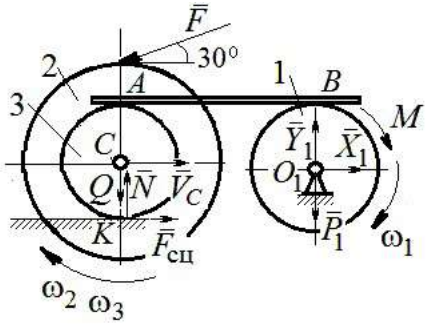


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости $\omega_1$, $\omega_2$ блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где $J_{zO_1}$ – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, двигается плоскопараллельно. Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где $m$ – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, $J_{zC}$ – момент инерции фигуры относительно оси $z$, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка $K$ на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки $A$ катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки $A$ на катке 2 к скорости точки $B$ на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g}\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом $M$ и реакция шарнира $O_1$, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника $O_1$ равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент $M$ направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M\omega_1 = M\frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки $C$ равен 90°.

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку $K$ – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F})\vec{\omega}_2 =$$

$$= -F(r+R)\omega_2 \cos 30° = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30°.$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра $K$, противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + M\frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы $\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]$ и приравниваем суммарной мощности внешних сил. Получим:

$$\frac{1}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2{,}88$ м/с$^2$. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \dfrac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \dfrac{2a_C}{r} = 9{,}6$ рад/с$^2$.

**Задача 59.** Каток радиуса *r*, весом *P* закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы *F* = 2*P*. В начальном положении центр катка имел скорость $V_0$.

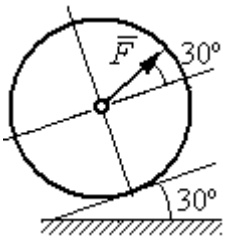


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

На какое расстояние *S* переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

*Решение*

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние *S* вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F\cos 30° S$ и сила тяжести: $A(\vec{P}) = -Ph$, где *h* – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

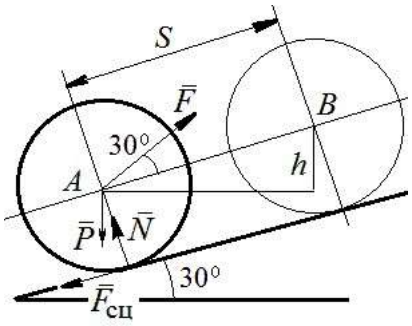


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

Кинетическая энергия катка $T = \dfrac{1}{2}mV_A^2 + \dfrac{1}{2}J_{zA}\omega^2$, где $J_{zA}$ – момент инерции фигуры относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \dfrac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \dfrac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, получим энергию катка в виде: $T = \dfrac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние $S$: $\dfrac{3}{4} m V_B^2 - \dfrac{3}{4} m V_A^2 = F\cos 30° S - Ph$, где $V_A = V_0$ $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30°$.

Найдём искомое перемещение: $S = \dfrac{9V_0^2}{4g\left(2\cos 30° - \sin 30°\right)}$.

## Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы $m_1$ может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной $l$, на другом конце которого привязан груз массы $m_2$. Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

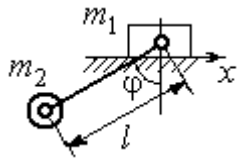


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

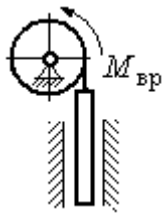


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{ВР} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы $m_1$ поднимается посредством каната, навитого на барабан массы $m_2$ и радиуса $r$. В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

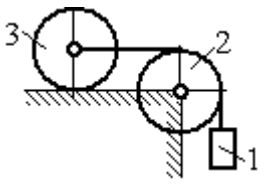


Рис. 5.15. Схема движения системы

Упражнение 5.3. Груз 1 массы $m_1$ подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы $m_2$ и $m_3$, радиуса $r$. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту $h$, если к катку 3 приложен момент $M$.

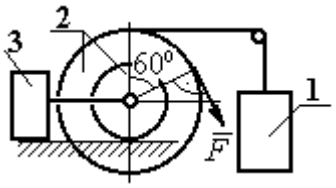



Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса $P$ и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом $r$ (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$ . Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

## 5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

**Поступательное движение твердого тела** описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F^e_{kz}$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}$, $ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}$, $ma_{Cz} = \sum F^e_{kz}$, где $m$ – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; $F^e_{kx}$, $F^e_{ky}$, $F^e_{kz}$ – проекции внешних сил.

**Вращательное движение твердого тела** относительно неподвижной оси $z$ описывается дифференциальным уравнением: $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$ или алгебраическим уравнением: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где $\omega$, $\varepsilon$ – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси $z$; $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$.

**Плоскопараллельное движение твердого тела** описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e ;\ ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e ;\ J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где $a_{Cx}$, $a_{Cy}$ – проекции ускорения центра масс тела; $F_{kx}^e$, $F_{ky}^e$ – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; $J_{zC}$ – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; $\varepsilon$ – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

## Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

**Задача 59.** Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0{,}8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

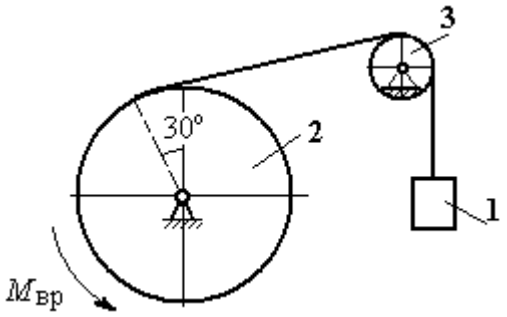


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

*Решение*

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось *x* по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось *x*: $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

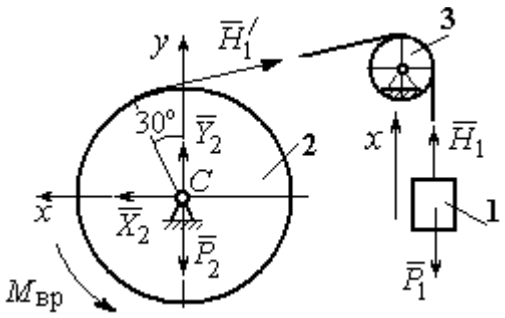


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси $z$: $J_z\varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1'r$, где момент инерции барабана $J_z = \dfrac{m_2 r^2}{2}$.

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напишем уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \;\; m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим $a_1$= 1,82 м/с$^2$, $H_1$ = 581,8 Н. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси $x$, $y$ (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1'\cos 30^\circ = 0, \; m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1'\cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503{,}84$ Н, $Y_2 = -94{,}7$ Н, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512{,}66$ Н.

**Задача 60.** Барабан весом $G$, радиусом $R$ имеет цилиндрический выступ радиусом $r$ (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30°, опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом $M$.

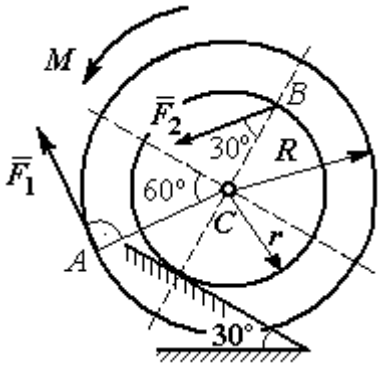


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравновешивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: $R$ = 0,6 м, $r$ = 0,2 м, $G$ = 100 Н, $F_1$ = 60 Н, $F_2$ = 25 Н, радиус инерции барабана $i_z$ = 0,4 м.

*Решение*

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом $M$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления барабана с поверхностью. Сила сцепления приложена в точке $K$ касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

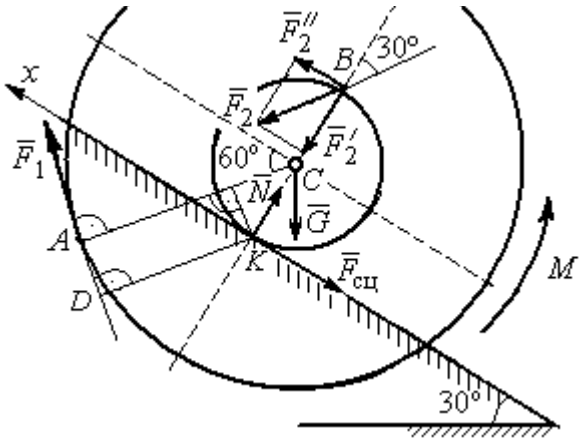


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Для определения момента $M$, приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки *K*. Точка *K* выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2\cos 30°$, $F_2'' = F_2\sin 30°$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки *K*: $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2\sin 30° \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки *K*:

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r\cos 30°).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r\cos 30°) + F_2\sin 30° \cdot 2r - Gr\sin 30° + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину уравновешивающего момента $M = 30{,}61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента *M*, удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1{,}2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось *x*, направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G\cos 60° - F_{\text{сц}},$$

где $x_C$ – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси $z$ в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1 R + F_2 r\cos 60° + F_{\text{сц}} r + M_1,$$

где $\varphi$ – угол поворота барабана; $J_{zC}$ – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; $i_z$ – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) = -F_1\left(\frac{R}{r} - \cos 30°\right) + 2F_2\cos 60° - G\cos 60° + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0{,}6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0{,}3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси $x$.

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с$^2$.

**Задача 61.** Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

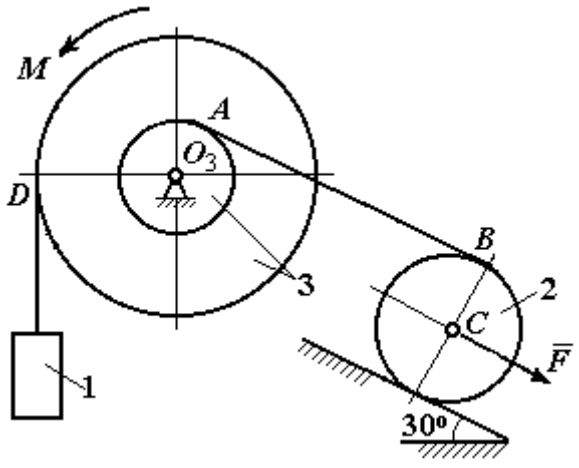


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом $M$, приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30º происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса $R_2$. Радиусы ступеней барабана 3: $R_3$, $r_3$, радиус инерции барабана $i_3$.

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

*Решение*

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

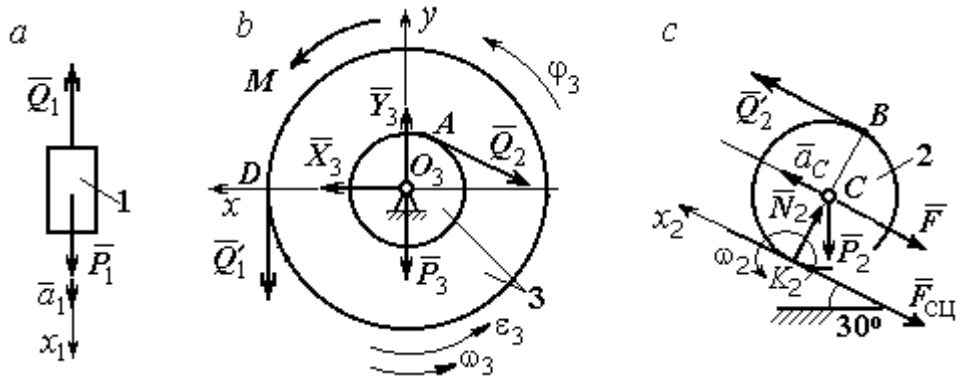



Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью $V_1$, ускорением $a_1$. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, *a*). Направим ось $x_1$ в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси $x_1$ имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1 .$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси $z$, проходящей через центр масс $O_3$. На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$), пара сил с моментом *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1'3r + Pr - Q_2r,$$

Момент инерции барабана относительно оси *z*: $J_{zO_3} = m_3i_3^2 = \dfrac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось $x_2$ по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось $x_2$ и вращения вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2' - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2'2r + F_{\text{сц}}2r,\ \ J_C = \frac{m_2R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна $V_C$ (см. рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK_2} = \dfrac{V_C}{R_2}$, где $CK_2$ – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{R_2} = \dfrac{a_C}{2r}$.

Скорость точки $B$ катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки $A$ к скорости точки $B$ (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \dfrac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ получим систему:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1; \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

откуда находим: $a_C = 0{,}09g$, $Q_1 = 0{,}92P$, $Q_2 = 2{,}14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, *b*), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси $x$, $y$ имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0{,}92P$ и $Q_2 = 2{,}14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

**Задача 62.** Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой $m_1$, радиусом $r_1$, ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1 g r_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, походящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

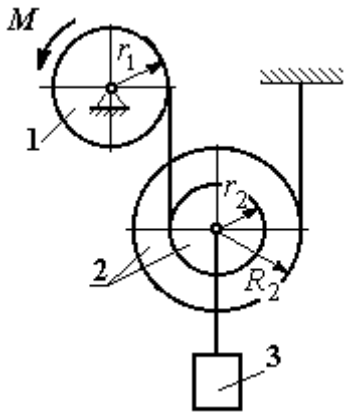


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

*Решение*

**1**. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

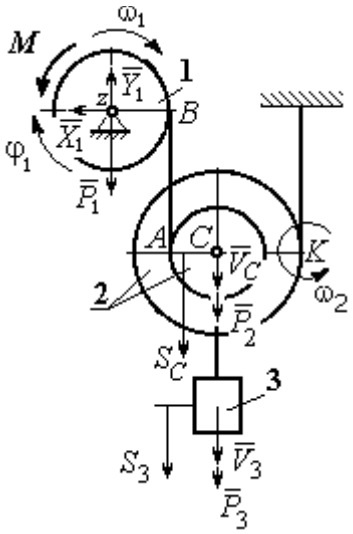


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси $z$. Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \dfrac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где $V_C$ – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где $CK$ – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки $B$ нити равна скорости точки $A$. Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2}\left[\frac{m_1}{2}\left(1 + \frac{r_2}{R_2}\right)^2 + m_2\left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2}\right) + m_3\right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M$. Перемещения $S_C$ и $S_3$ точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол $\varphi_1$ поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$ следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[ P_3 + P_2 - M\frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 .$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3 .$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3 \frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с$^2$.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией $H_3$. Выберем ось $x$ по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось $x$: $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где $H_3$ –реакция нити. При известном ускорении $a_3$ находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

**2**. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

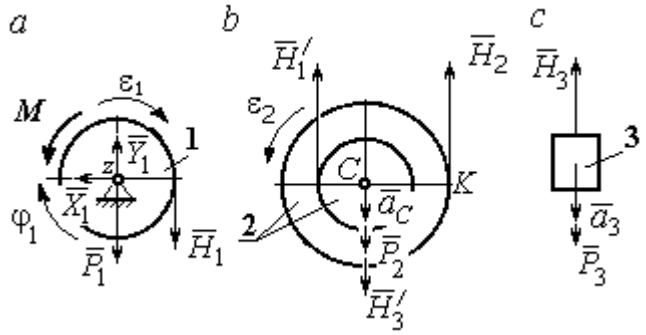


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси *z*. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом *M* и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции диска 1 относительно оси *z*, $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, *b*) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \;\; J_{2C}\varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2 .$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, *c*). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3 ,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \dfrac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}_3'$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8}m_1 a_3 = H_1 - m_1 g;\ \ 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1;\ \ 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \dfrac{120}{209}g$ м/с$^2$, $H_3 = \dfrac{178}{209}m_1 g$. Выражения ускорения $a_3$ груза 3 и натяжения нити $H_3$ совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

## Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом $P$, радиуса $r$. Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса $r$. Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

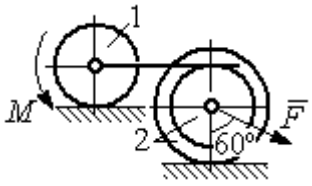


Рис. 5.26. Система катков

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса $r$, затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2{,}5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреплён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

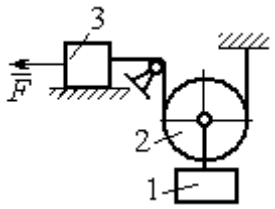


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса $r$. Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

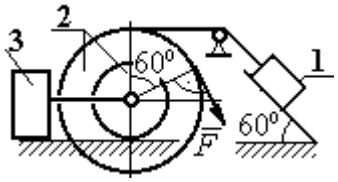


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

# 6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

## 6.1. Принцип Даламбера для системы

**Силой инерции** материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где $m$ – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

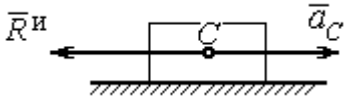


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

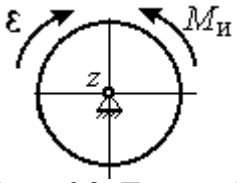


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси $z$, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$; $\varepsilon$ – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

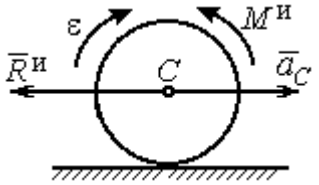


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением $\varepsilon$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где $J_C$ – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

**Принцип Даламбера** даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0,\ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ –внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{и}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра *O*.

### Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

**Задача 63**. Груз 1 массы $m_1$ = 10 кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60º с горизонтом, и посредством нити, переброшенной через блок 2, укреплённый в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы $m_3$ = 5 кг (рис. 6.4). Клин *ABC* массы $m_4$ = 15 кг стоит гранью *AC* на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ *E*.

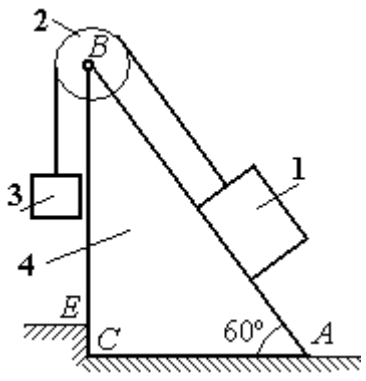


Рис. 6.4. Клин с грузами

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

*Решение*

Выберем систему, состоящую из клина *ABC*, блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира *B* блока 2 для данной системы являются внутренними.

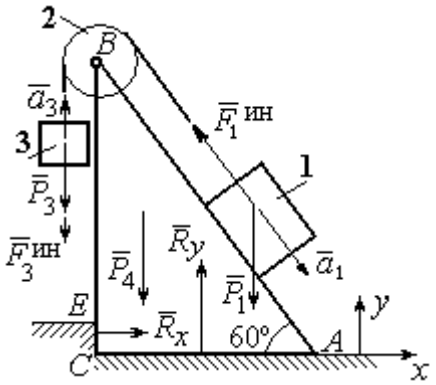


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_3^{ин} = 0$.

Выберем оси *xy,* как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось *x*. Получим: $R_x - F_1^{ин}\cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a*, *b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы: силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{ин}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось *x*, расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{ин} = 0$, где $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

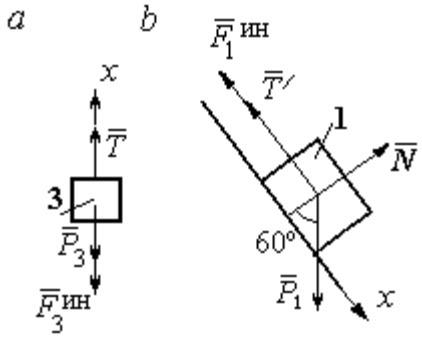


Рис. 6.6. Равновесие грузов

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{ин}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось *x*, выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим: $a_1 = a_3 = \dfrac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}$. Тогда давление клина на уступ:

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ .$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём $R_x$ = 11,97 Н.

**Задача 64.** Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $r_1$ и $r_2$, радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_3$. Лебёдка установлена на горизонтальной балке *AB*, которая закреплена в точке *A* на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке *B*. Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

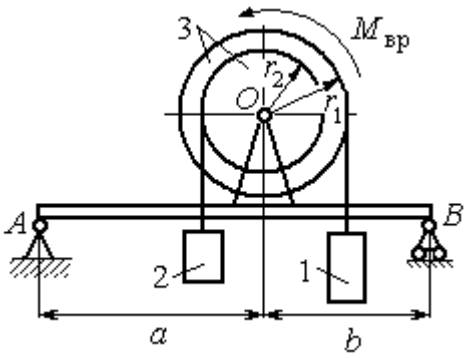


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана $r_1$ = 0,8 м, $r_2$ = 0,2 м, радиус инерции барабана относительно оси вращения $i_3$=0,6 м, масса груза 1 $m_1$ = 100 кг, противовеса 2 $m_2$ =30 кг, масса барабана $m_1$ = 50 кг, величина вращающего момента $M_{\text{вр}}$= 1050 Н·м, расстояния от крайних точек балки *A* и *B* до линии вертикального диаметра барабана *a* = 2 м, *b* = 1 м.

*Решение*

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке $O$. Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

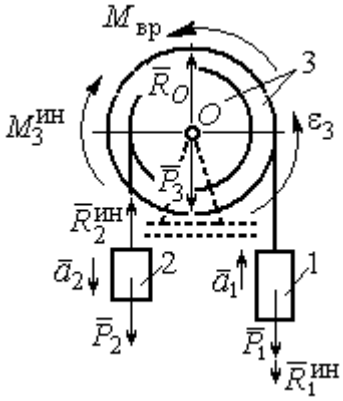



Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0;\ \ M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}} r_2 + P_2 r_2 - P_1 r_1 - R_1^{\text{ин}} r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3 i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{r_1}$ и $a_2 = \dfrac{r_2}{r_1} a_1$, найдём ускорение груза 1: $a_1 = \dfrac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2 r_2 - P_1 r_1)}{m_3 i_3^2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}$. Подставляя данные задачи, получим $a_1$ = 3,49 м/с$^2$.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$=349 Н; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$ = 26,17 Н.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир $O$:

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088{,}63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки $AB$ выберем объектом равновесия саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира $O$, реакция шарнира в точке $A$ (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке $B$. Составим уравнения равновесия балки:

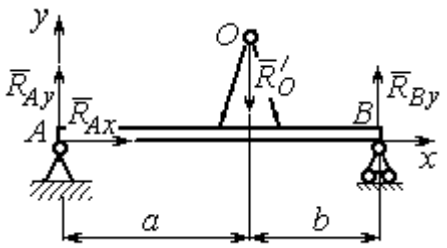


Рис. 6.9. Равновесие балки

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0,\ \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a+b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём реакции опор балки: $R_{By} = R_O \dfrac{a}{a+b} = 1392{,}42$ Н; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696{,}21$ Н.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419{,}18$ Н, $R_{Ay} = 346{,}62$ Н.

### Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны $m$. Массой нити и блока пренебречь.

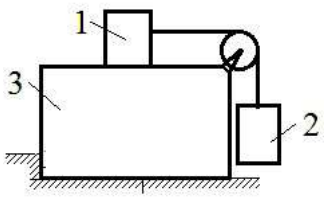


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

## 6.2. Принцип возможных перемещений

**Возможными перемещениями** механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

**Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

**Принцип возможных перемещений**.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

## Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

**Задача 65**. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса $R_1$, нижний – сматывается с вала меньшего радиуса $r_1$.

Какой вращающий момент $M$, постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом $P$, прикреплённый в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

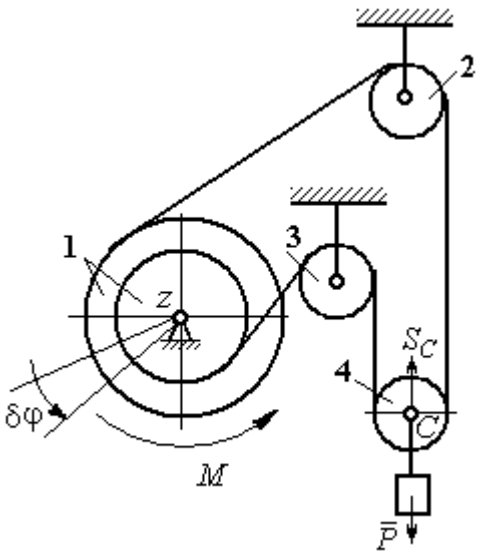



Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

*Решение*

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент $M$. По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и $\delta S_C$ – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и $\delta S_C$. Предположим, в механизме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки *K*. Здесь скорость точки *A* блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки *B* – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию $\frac{V_B}{V_A}=\frac{BK}{AK}=\frac{r_4+CK}{r_4-CK}$, где $r_4$ – радиус блока 4 (см. рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек *A* и *B* $V_A=\omega_1 r_1$, $V_B=\omega_1 R_1$, найдём расстояние: $CK=\frac{(R_1-r_1)r_4}{R_1+r_1}$.

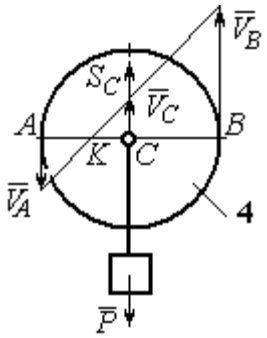


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_B}{r_4+CK}=\frac{\omega_1(R_1+r_1)}{2r_4}$. Скорость его центра: $V_C=\omega_4\cdot CK=\frac{\omega_1(R_1-r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки *C* и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме: $dS_C=d\varphi_1\frac{(R_1-r_1)}{2}$. Поскольку действительное перемещение является одним из возможных (т. е. $ds=\delta s$, $d\varphi=\delta\varphi$), получим связь между возможными перемещениями барабана 1 и груза: $\delta S_C=\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}$.

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных перемещений, представим его в окончательном виде: $M\delta\varphi_1-P\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}=0$, откуда найдём значение уравновешивающего момента: $M=\frac{P(R_1-r_1)}{2}$.

**Задача 66.** Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов $r$, и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30º к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси $z$ и к нему приложена пара сил с моментом $M = Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

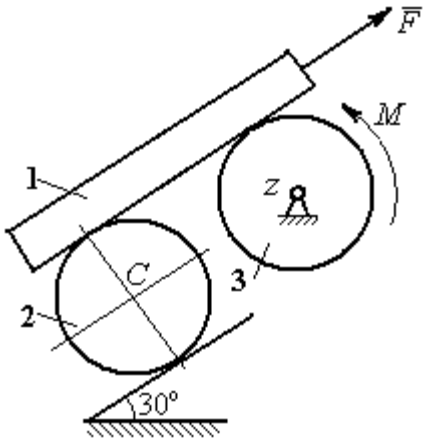


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу $F$, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

*Решение*

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом $M$, приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{сц}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

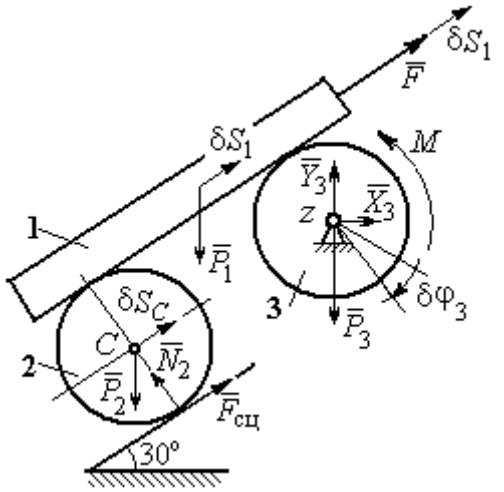


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние $\delta S_1$ вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние $\delta S_C$, а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса $\delta S_1$. Допустим, скорость бруса равна $V_1$. Тогда $V_C = \dfrac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

**Задача 67.** Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом *M*, приложенных к блоку 2. Каток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов *r* и *R* = 2*r* с общей массой 3*m*. Масса груза 1 равна *m*. При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

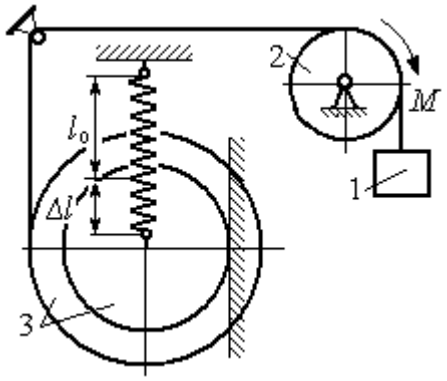


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

Какой величины уравновешивающий момент *M* приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

*Решение*

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом $M$, приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

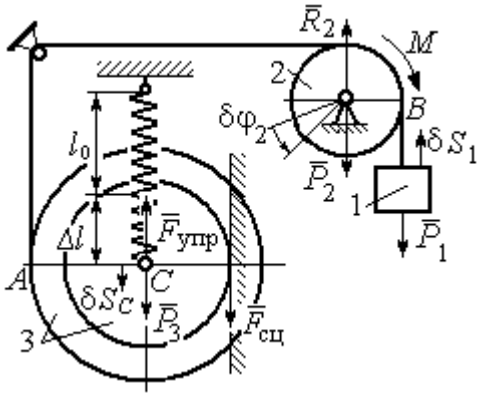


Рис. 6.16. Расчётная схема уравновешивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение $\delta S_C$, направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение $\delta S_1$. Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, $\delta S_1$ блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка $\delta S_C$. Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна $V_C$. Скорость груза 1 равна скорости точки $A$ на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \dfrac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r}\delta S_C = 3\delta S_C;\ \ \delta\varphi_2 = \frac{R+r}{r^2}\delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3\delta S_C - c\Delta l\delta S_C + M\frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравновешивающего момента $M = \frac{1}{3}mgr$.

## Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой $F$, приложенной к внешнему рычагу, и силой $Q$, сжимающей деталь $A$ вдоль центральной оси.

Длины рычагов $a$, $b$, $c$, $d$ показаны на рис. 6.17.

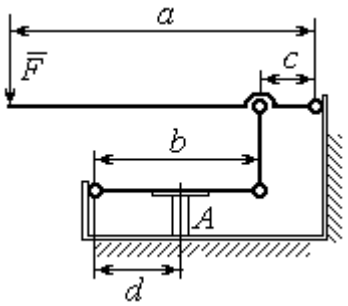


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными валы (рис. 6.18).

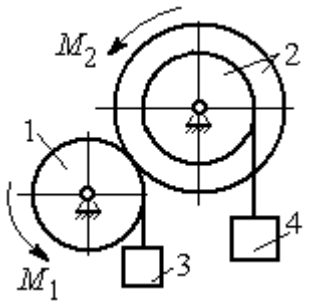


Рис. 6.18. Схема уравновешивания валов

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скреплённых на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравновешивающего момента $M_2$, приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса $P$.

### 6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

### Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

**Задача 68.** Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом $M$. Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени $t$ = 1 с, если $P_1$= 10 Н; $P_2$ = 20 Н; $P_3$ = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; $R_2$ = 0,8 м; $r_2$ = 0,2 м; $R_3$ = 0,4 м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_{2C}$ = 0,6 м.

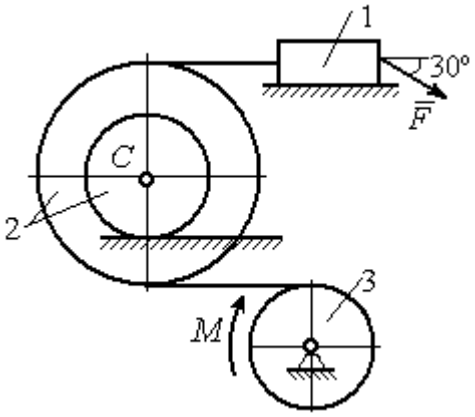


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

*Решение*

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом $M$ (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{сц}$ и реакция шарнира $O$ блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

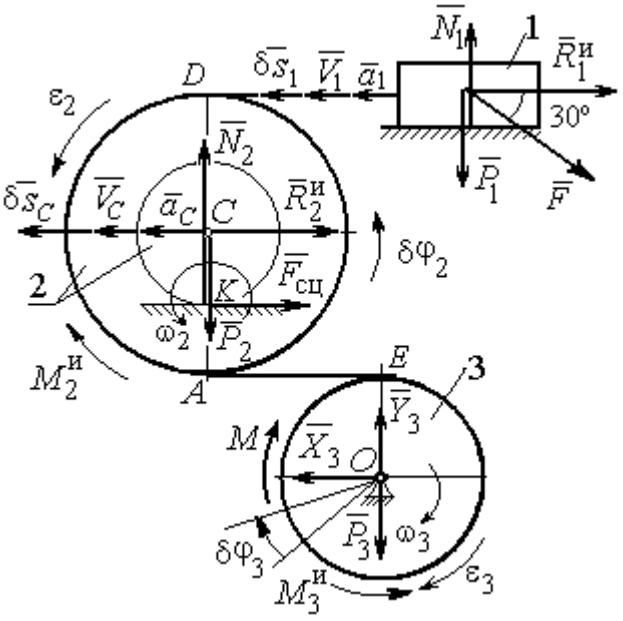



Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью $\omega_3$ и угловым ускорением $\varepsilon_3$ в направлении поворота, создаваемого моментом $M$. Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости $\omega_2$ и ускорения $\varepsilon_2$, а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{и}$, $\vec{R}_2^{и}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{и}$, $\vec{M}_3^{и}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям $\varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке $K$ находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки $E$ блока 3 равна скорости точки $A$ катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 (R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2} .$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_E}{R_3} = V_C \dfrac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки $D$ катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2 (R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} .$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0;\ \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0;\ \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом $M$ и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C,\ \ R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где $J_{2C}$ – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; $i_{2C}$ – радиус инерции катка; $J_{3O}$ – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = -R_1^{\text{и}}\delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = -R_2^{\text{и}}\delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C -$$

$$-\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C = -52{,}75\, a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0{,}02 + 0{,}45t.$$

Представляя ускорение $a_C$ в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0{,}02 + 0{,}45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0{,}01t^2 + 0{,}075t^3.$$

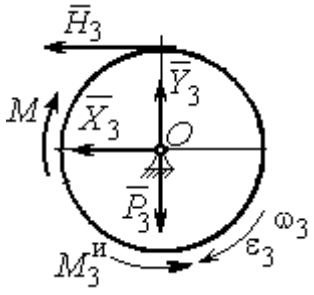


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом $M$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21). Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения: $M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \dfrac{M}{R_3} - \dfrac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0{,}7$ Н·м и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1$ с, $M(1) = 9$ Н·м найдём реакцию нити $H_3(1) = 20{,}75$ Н.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0,\ Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -20{,}75$ Н, $Y_3 = 15$ Н. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25{,}6$ Н.

**Задача 69.** Груз 2 весом $P_2$, поднимаемый лебёдкой (рис. 6 22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом $P_3$. Нерастяжимая нить одним концом прицеплена к грузу 1 весом $P_1$, лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок $B$, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса $r$ и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

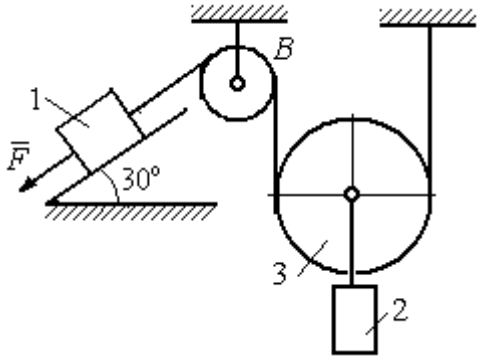


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

*Решение*

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока *B* и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением $a_1$. Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

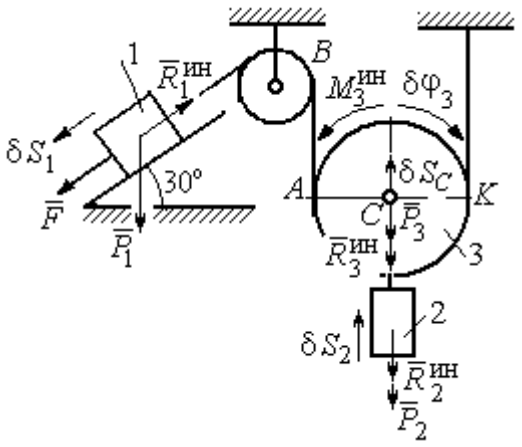


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние $\delta S_1$. В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту $\delta S_C$, а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \cos 60° - P_2 \delta S_2 - P_3 \delta S_C -$$

$$- R_1^{\text{ин}} \delta S_1 - R_2^{\text{ин}} \delta S_C - R_3^{\text{ин}} \delta S_C - M_3^{\text{ин}} \delta \varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \dfrac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение $\delta S_2$ и ускорение $a_2$ груза 2, а также поворот $\delta \varphi_3$ и угловое ускорение $\varepsilon_3$ подвижного блока 3 через перемещение $\delta S_1$ и ускорение $a_1$ груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_A}{AK} = \dfrac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка $K$ блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta \varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \dfrac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \dfrac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\dfrac{1}{2} P \delta S_1 = \dfrac{17}{8g} P a_1 \delta S_1$. Отсюда $a_1 = \dfrac{4}{17} g = 0{,}23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \dfrac{a_1}{2} = 0{,}12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0{,}12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0{,}06gt^2$.

**Задача 70**. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки $B$ и $D$ и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков $B$ и $D$ пренебречь.

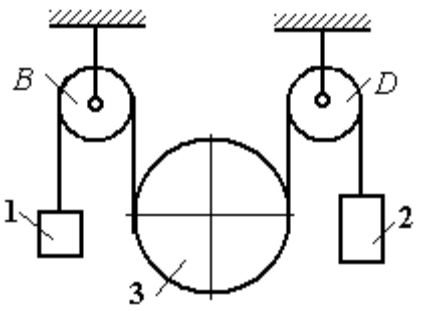


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

*Решение*

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков $B$ и $D$. Связи идеальные, так как оси вращения блоков $B$ и $D$ неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо составлять для каждого из независимых перемещений.

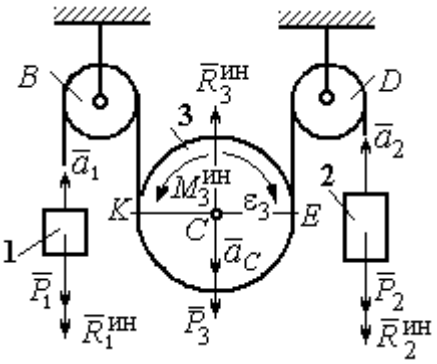


Рис.6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение $\varepsilon_3$, направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$, $R_3^{ин} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{ин} = J_{3C}\varepsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \dfrac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку $K$ за полюс. Ускорение точки $E$ определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}^{\,n}_{EK} + \vec{a}^{\,\tau}_{EK}$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса $K$; $\vec{a}^{\,n}_{EK}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{EK}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки $E$ при вращении блока 3 вокруг полюса $K$ (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$. Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a^{\tau}_{EK}$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек $E$ и $K$ на вертикальную ось.

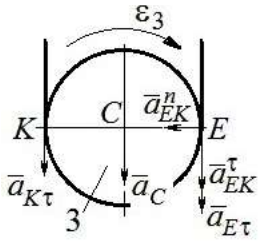


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Поскольку модуль ускорения точки $K$ нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки $E$ нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a^{\tau}_{EK} = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \dfrac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки $C$) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a^{\tau}_{CK} = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат $s_1, s_2$ – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков $B$ и $D$. Возможные перемещения грузов обозначим $\delta s_1$ и $\delta s_2$.

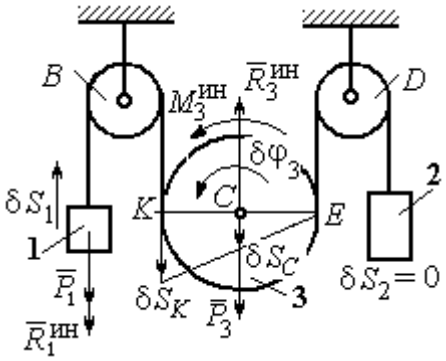


Рис.6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние $\delta s_1$, а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки $E$ (рис. 6.27).

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка $E$ является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \dfrac{V_K}{2r} = \dfrac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \dfrac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \dfrac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) + \sum \delta A\left(\vec{R}_k^{\text{ин}}\right) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C}\varepsilon_3\delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3 a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки $K$ (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка $K$ является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

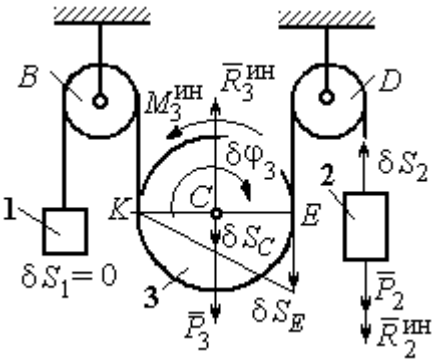


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{ин}$, $\vec{R}_3^{ин}$ и пара сил с моментом $M_3^{ин}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении $\delta s_2$ (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{ин}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{ин}\delta s_C - M_3^{ин}\delta\varphi_3 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{a_2-a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3 a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям $\delta s_1$ и $\delta s_2$, получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2. Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

## Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса $r$ и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов $r$ и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень, двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{\text{вр}} = mgr\sin\omega t$.

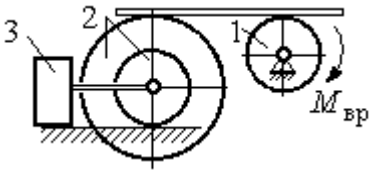


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1{,}5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t+1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны $P$, вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана $r$ и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

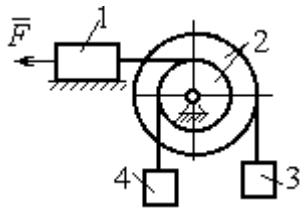


Рис. 6.30. Схема подъёмника

## 6.4. Уравнения Лагранжа II рода

**Обобщенными координатами** называется совокупность любых $s$ независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые **вариациями обобщенных координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина $Q_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, равная коэффициенту при вариации $\delta q_k$ обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1,2,...,s$, где $s$ – число степеней свободы системы; $T$ – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

### Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

**Задача 71**. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы $m_5$ = 50 кг.

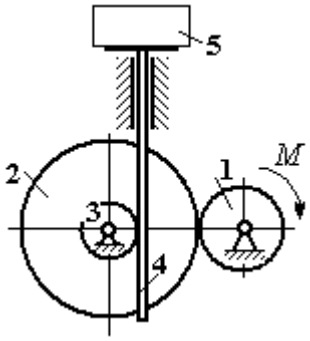


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс $r_1$ = 5 см, $r_2$ = 12 см, $r_3$ = 6 см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс $m_1$ = 0,8 кг, $m_2$ = 1,6 кг, $m_3$ = 0,6 кг, масса зубчатой рейки $m_4$ = 1 кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость $V_5$ = 1 м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

*Решение*

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату *x*, отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты *x* имеет вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где $T$ – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; $Q_x$ – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1=\frac{J_1\omega_1^2}{2}$, где $\omega_1$ – угловая скорость колеса 1; $J_1$ – момент инерции колеса, $J_1=\frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно: $T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}$, $T_3=\frac{J_3\omega_2^2}{2}$, где $\omega_2$ – угловая скорость шестерни 2; $J_2$, $J_3$ – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2=\frac{m_2 r_2^2}{2}$, $J_3=\frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5=V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5: $T_4=\frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5=\frac{m_5 V_4^2}{2}$.

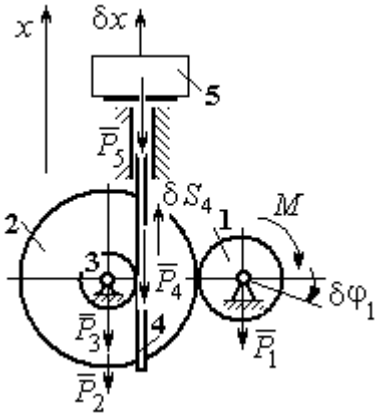


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$ следует $\omega_1 = \dfrac{\omega_2 r_2}{r_1} = \dfrac{V_4 r_2}{r_1 r_3}$.

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{4}\left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} =$$

$$= \left[\frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5\right]\frac{V_4^2}{2} = 28{,}05\, V_4^2 = 28{,}05\, \dot{x}^2 .$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение $\delta x$ грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние $\delta s_4$, а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta\varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1 r_3}\delta x$. В результате сумма работ сил на возможном перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\right)\delta x$. Отсюда обобщённая сила $Q_x$, соответствующая координате $x$:

$$Q_x = -(m_5 + m_4)g + M\frac{r_2}{r_1 r_3} = -500{,}31 + 40M.$$

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56{,}1\,\ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение движения имеет вид: $56{,}1\,\ddot{x} = -500{,}31+40M$ или $\ddot{x} = -8{,}92+0{,}71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8{,}92+0{,}71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13{,}27$ Н·м.

**Задача 72**. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью $c$. Радиусы ступеней блока $r$ и $R = 1{,}5r$, радиус катка 3 равен $r$. Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом $M$. Качение катка по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

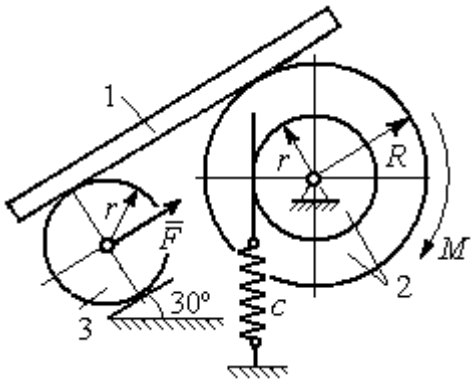


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

*Решение*

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты $q$ выберем перемещение $x$ верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где $T$ – кинетическая энергия системы; $Q_x$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $x$.

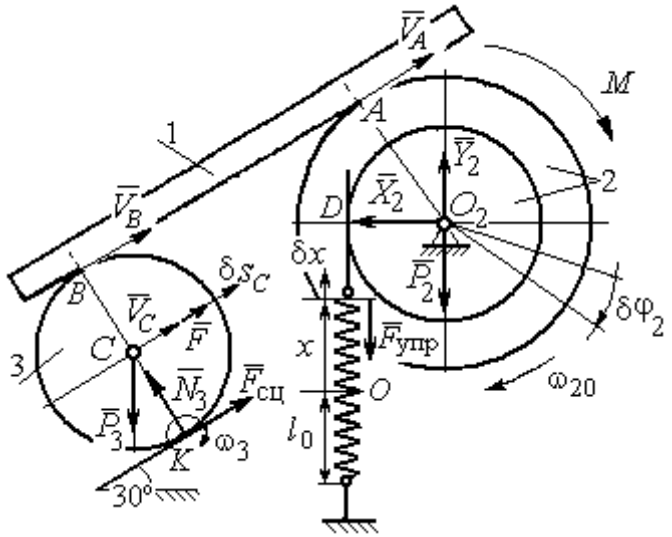



Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где $\omega_2$ – угловая скорость блока; $J_{2z}$ – момент инерции блока 2 относительно оси $z$, $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где $V_C$, $\omega_3$ – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; $J_{zC}$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; $r$ – радиус катка.

Выразим угловые скорости $\omega_2$, $\omega_3$, а также скорость $V_C$ через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки $D$ блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки $A$ блока 2: $V_A = \omega_2 R = \dfrac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек $A$ и $B$ равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка $K$ касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \dfrac{V_B}{2r} = \dfrac{V_A}{2r} = \dfrac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \dfrac{V_B}{2} = \dfrac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой $x$, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение $\delta x$ в положительном направлении оси $x$ (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta s_C = \dfrac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом $M$, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента $M$: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\dfrac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 120^\circ = -P_3\dfrac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы $F$: $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\dfrac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние $x$: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении $\delta x$ вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180° = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{2P}{g}\left(2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ и, подставляя их в общий вид уравнений Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10{,}2x = 4{,}34 \text{ (здесь } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные; $k$ – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10{,}2}$ = 3,19 рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0{,}42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3{,}19t + C_2 \cos 3{,}19t + 0{,}42$.

Произвольные постоянные $C_1$, $C_2$ находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки $D$ блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, то при $r = 0{,}2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3{,}19 C_1 \cos 3{,}19t - 3{,}19 C_2 \sin 3{,}19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}03 \sin 3{,}19t - 0{,}42 \cos 3{,}19t + 0{,}42$ м. Уравнение колебательного движения блока 2: $\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = 0{,}15 \sin 3{,}19t - 2{,}1 \cos 3{,}19t + 2{,}1$ рад.

**Задача 73**. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса $r$ и веса $P$ и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом $P$ и радиуса $r$. Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

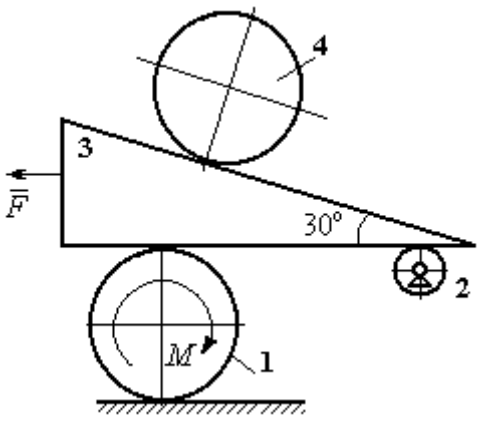


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30º. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

*Решение*

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение $x_4$ центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение $x_3$ края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

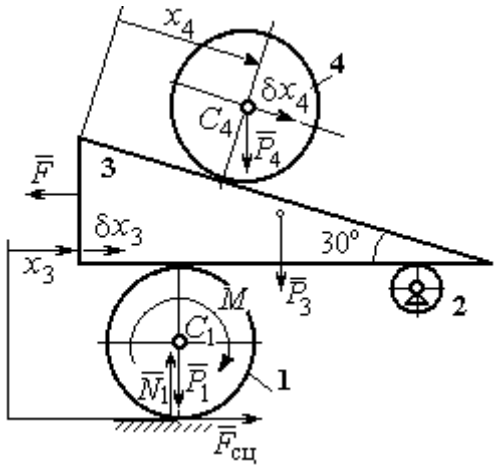



Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где $T$ – кинетическая энергия системы; $Q_{x_4}$, $Q_{x_3}$ – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где $V_{C_1}$ – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$; $J_{C_1}$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\omega_1$ – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}$.

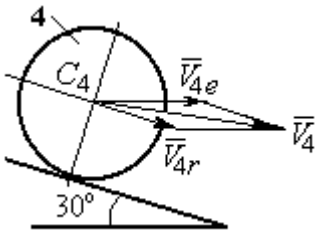


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

При расчёте кинетической энергии катка 4 по формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ .$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка $\omega_4$ равна его угловой скорости в относительном движении $\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}$.

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

$$= \frac{P}{2g}\left(\frac{27}{8}\dot{x}_3^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_4^2 + \dot{x}_3\dot{x}_4\sqrt{3}\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате $x_3$, оставляя координату $x_4$ без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом $M$, приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r}\right)\delta x_3 .$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате $x_3$: $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате $x_4$, оставляя координату $x_3$ без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4\delta x_4\cos 60^\circ = \frac{1}{2}P\delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате $x_4$: $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3;\ \ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6{,}75\ddot{x}_3 + 1{,}73\ddot{x}_4 = g\,; \quad 3\ddot{x}_4 + 1{,}73\ddot{x}_3 = g\,.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0{,}07g,\ \ddot{x}_4 = 0{,}29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0{,}035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0{,}145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

**Задача 74**. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины *c*. Груз 1 весом $P_1$ движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом $P_2$ катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен *r*. Блок 3 считать однородным диском весом $P_3$ радиуса *R*. К блоку 3 приложена пара сил с моментом *M*. Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

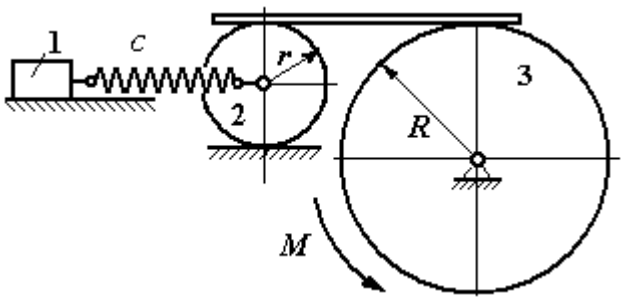


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину $\Delta l_0$.

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно $P_1$ = 10 Н, $P_2$ = 20 Н, $P_3$ = 30 Н, $M$ = 5 Н·м, $R$ = 24 см, $c$ = 207 Н/м, $\Delta l_0$ = 5 см.

*Решение*

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины $x_1$ относительно недеформированного состояния и угол $\varphi_3$ поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом $x_1$ является относительной координатой движения груза, а $\varphi_3$ – абсолютной координатой вращения блока 3.

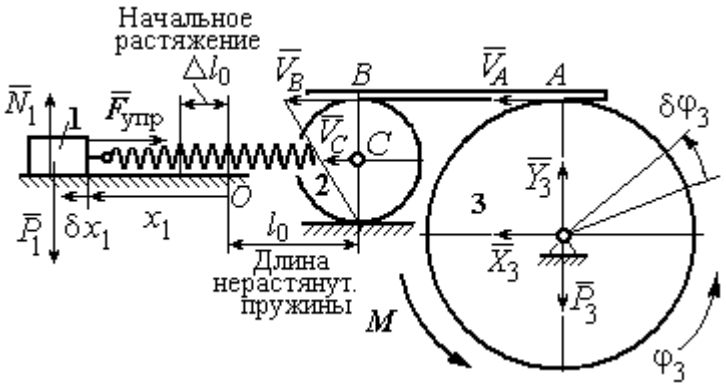



Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где $V_C$ – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2} V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_\varphi,$$

где $T$ – кинетическая энергия системы; $Q_x$, $Q_\varphi$ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам $x_1$ и $\varphi_3$.

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где $V_1$ следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4} m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3: $T_3 = \frac{1}{2} J_{3z} \omega_3^2$, где $J_{3z}$ – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Окончательно $T_3 = \frac{1}{4} m_3 \dot{\varphi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R)^2 + \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi}_3 R + \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{4} m_3\right) \dot{\varphi}_3^2 R^2.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза $x_1$ ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 $\varphi_3$ остаётся постоянной ($\delta\varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы $\delta x_1$: $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила $Q_x$, соответствующая координате $x_1$: $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta\varphi_3$: $\delta\varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка *C* движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta\varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\dot{\varphi}_3;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2}m_1R\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\dot{\varphi}_3R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\ddot{\varphi}_3;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{1}{2}m_1R\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\ddot{\varphi}_3R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\varphi}_3$:

$$1{,}02\ddot{x}_1 + 0{,}12\ddot{\varphi}_3 = -207x_1;\ \ 0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительных колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4{,}35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные; $k$ – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0{,}02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1\sin 15t + C_2\cos 15t - 0{,}02.$$

Начальная координата $x_{01}$ груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0{,}05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0{,}05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0{,}07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15\cos 15t - C_2 15\sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0{,}07\cos 15t - 0{,}02 \text{ м}.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим: $\ddot{\varphi}_3 = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\dfrac{d\omega_3}{dt} = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33{,}33t + 0{,}84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 3: $\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + C_3 t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0{,}056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + 0{,}056.$$

Абсолютное движение $s_1$ груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0{,}06\cos 15t - 0{,}01.$$

## Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса $r$, движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P / r$, прикреплённой одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

Найти закон движения груза 2 и максимальное растяжение пружины, если движение системы началось из состояния покоя при недеформированной пружине.

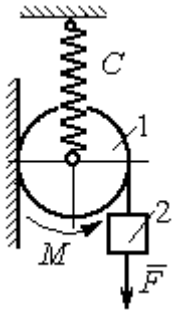


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки $B$ и $D$ и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков $B$ и $D$ пренебречь.

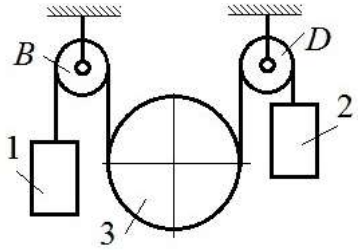


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса $r$ весом $P$ катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передаёт движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса $r$ и веса $P$, который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

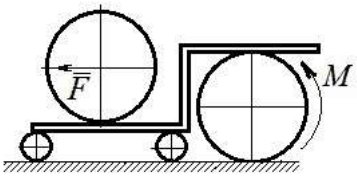


Рис. 6 42. Движение катка в кузове тележки

# 7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

## 7.1. Ответы к упражнениям главы 1

**1.1**

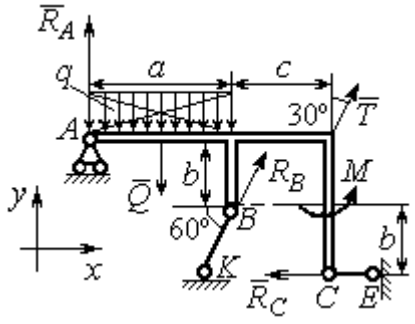



Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$T = 15$ кН, $Q = 15$ кН.

$$R_B\cos60^\circ + T\cos60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B\cos30^\circ + T\cos30^\circ = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{a}{2} + R_B\cos30^\circ\cdot a + R_B\cos60^\circ\cdot b + T\cos30^\circ\cdot(a+c) + M - R_C\cdot 2b = 0.$$

$R_B = -3{,}8$ кН, $R_C = 5{,}6$ кН, $R_A = 5{,}3$ кН.

**1.2**

$Q = 9$ кН. $T = 2$ кН.

$$X_A + T\cos30^\circ + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos60^\circ + R_B - T\cos60^\circ - F = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{c}{2} + R_B(b + c\cos60^\circ) - Fc\cos60^\circ + M - T\cos60^\circ(b + c\cos60^\circ) - T\cos30^\circ(a + c\sin60^\circ) = 0.$$

$R_B = 10{,}02$ кН, $X_A = -9{,}53$ кН, $Y_A = -0{,}52$ кН.

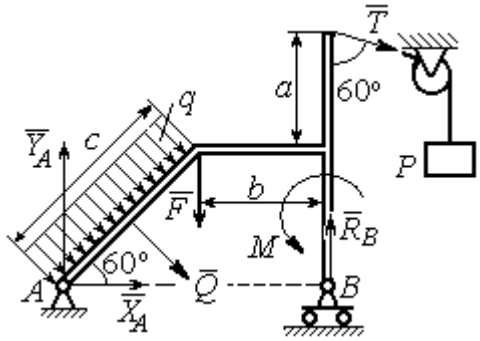



Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

**1.3**

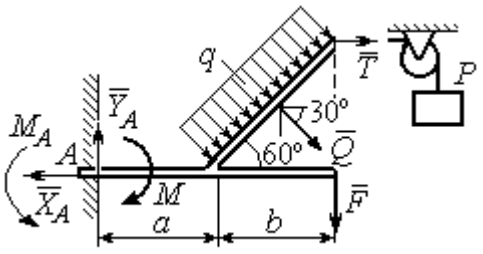



Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$Q = 8$ кН. $T = 3$ кН.

$$-X_A + T + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos60° - F = 0;$$

$$-T2b\cos30° - F(a+b) + M_A - M - Q\cos60°\left(a + \frac{b}{2}\right) - Q\cos30^\circ\left(b\cos30^\circ\right) = 0.$$

$M_A = 18{,}61$ кН·м, $X_A = 9{,}93$ кН, $Y_A = 6$ кН.

**1.4**

$Q = 6{,}93$ кН, $T = 2$ кН.

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - Fa\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

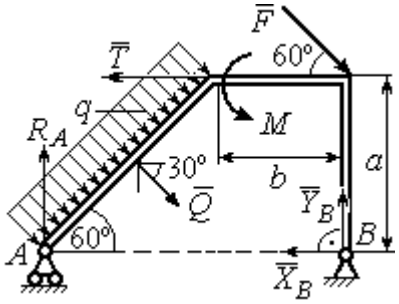



Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

$R_A = 0{,}72$ кН, $X_B = -5{,}5$ кН, $Y_B = 5{,}34$ кН.

**1.5**

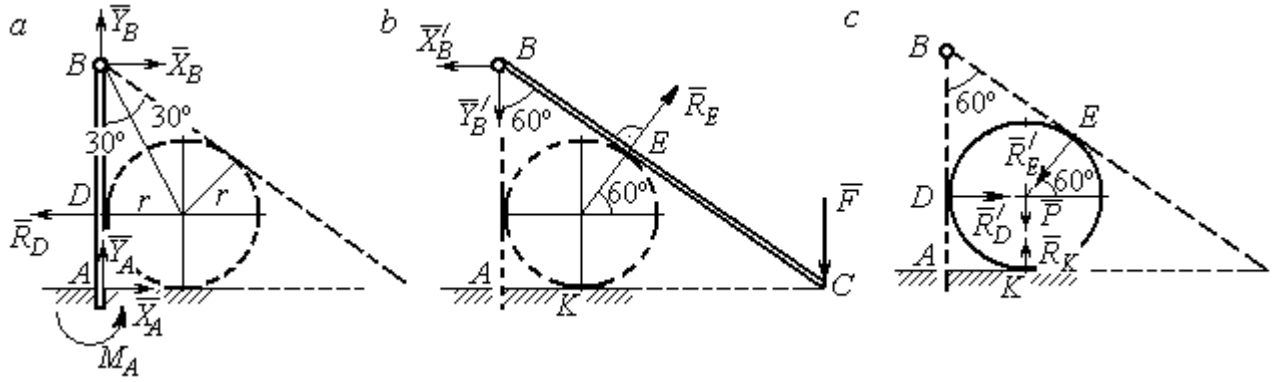



Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
*a* – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$, $R_D = R'_D$, $R_E = R'_E$.

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg}30^\circ = 2{,}73$ м.

$$X_A - R_D + X_B = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка *BC*. $BE = BD = 1{,}73$ м. $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4{,}73$ м.

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, \quad RE\sin 60\circ - Y'B - F = 0, \quad R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, \quad R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$R_E = 21{,}87$ кН, $Y_B = 10{,}94$ кН, $X_B = 10{,}94$ кН, $R_D = 10{,}94$ кН;

$R_K = 20{,}94$ кН, $X_A = 0$, $Y_A = -10{,}94$ кН, $M_A = 18{,}93$ кН·м.

**1.6**

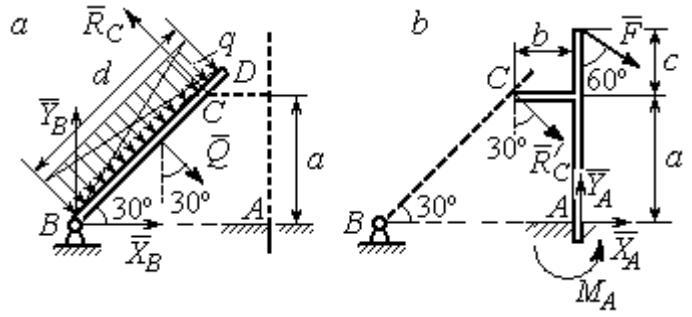



Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
*a* – равновесие балки *BD*; *b* – равновесие балки *AC*

Балка *BD*. $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q\cos 60^\circ - R_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q\cos 30^\circ + R_C\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q\frac{d}{2} + R_C\, 2a = 0.$$

Балка *AC*. $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0,\ Y_A - R'_C\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C\cos 60^\circ \cdot a + R'_C\cos 30^\circ \cdot b - F\cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0{,}61 \text{ кН},\ \ Y_B = 8{,}3 \text{ кН},\ R_C = 9{,}37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8{,}15 \text{ кН},\ \ Y_A = 10{,}11 \text{ кН},\ \ M_A = 11{,}65 \text{ кН·м}.$$

**1.7**

Балка *AB*. $Q_1 = 6$ кН.

$T = P = 3$ кН.

$$X_A + R_B - T\cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_1\frac{a}{2} +$$

$$+ T\cos 30^\circ a + T\cos 60^\circ c\cos 30^\circ -$$

$$- F\left[c + (b + c)\cos 30^\circ\right] = 0.$$

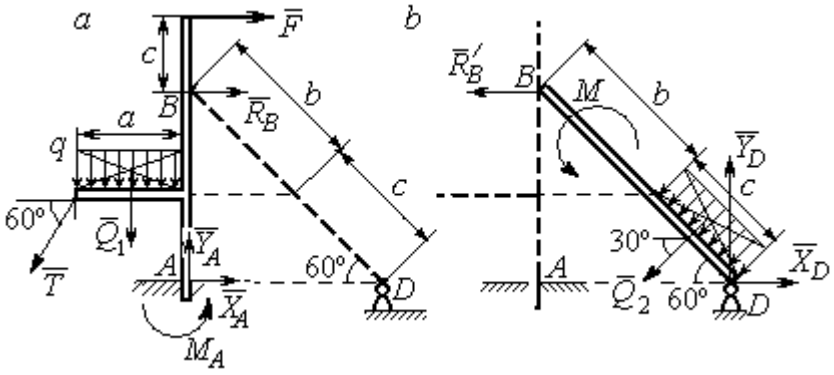



Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
*a* – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BD*

Балка *DB*. $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2\cos 30^\circ = 0,\ \ Y_D - Q_2\cos 60^\circ = 0,\ M + R'_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_2\frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1{,}49 \text{ кН},\ Y_A = 8{,}6 \text{ кН},\ M_A = 8{,}86 \text{ кН},\ R_B = -1{,}01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1{,}59 \text{ кН},\ \ Y_D = 1{,}5 \text{ кН}.$$

**1.8**

Шар.

$$R_B\cos60^\circ - R_D\cos60^\circ = 0;$$

$$R_B\cos30^\circ + R_D\cos30^\circ - P = 0.$$

Балка $AC$. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B\cos60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B\cos30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC\cos30^\circ = 0.$$

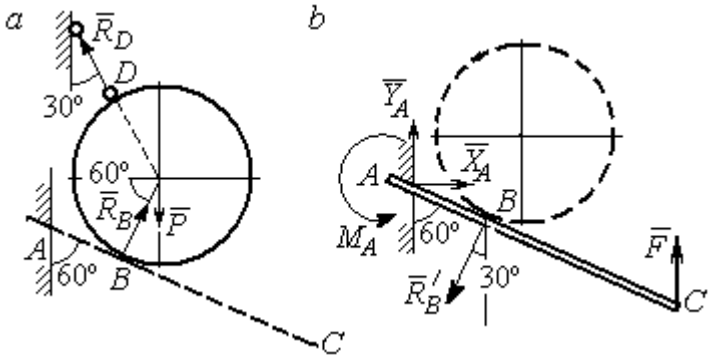



Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
*a* – равновесие шара; *b* – равновесие балки *AC*

$X_A = 2{,}89$ кН, $Y_A = 0$ кН, $M_A = -11{,}55$ кН·м, $R_B = 5{,}77$ кН, $R_D = 5{,}77$ кН.

**1.9**

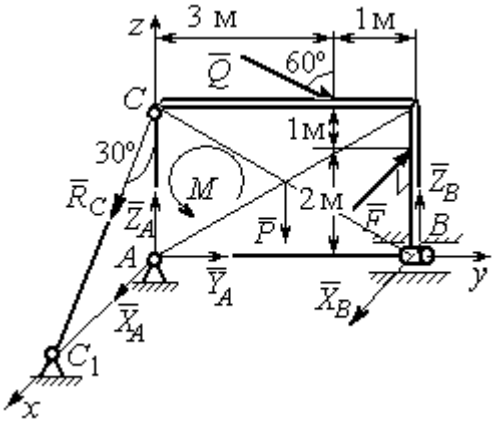



Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C\cos60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C\cos30^\circ - Q\cos60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q\cos60^\circ \cdot 3 - Q\cos30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C\cos60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0,\ -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}34$ кН, $Y_A = 2{,}6$ кН;

$Z_A = 8{,}92$ кН, $R_C = 10{,}67$ кН;

$X_B = 8$ кН, $Z_B = 3{,}82$ кН.

**1.10**

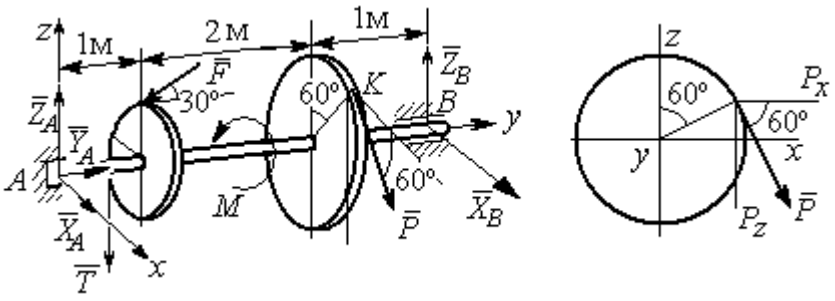



Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$T = Q = 3$ кН.

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0,\ \ Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T\cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0,\ \ -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}6$ кН, $Y_A = 3{,}46$ кН, $Z_A = 5{,}48$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 2{,}4$ кН, $Z_B = 5{,}06$ кН.

**1.11**

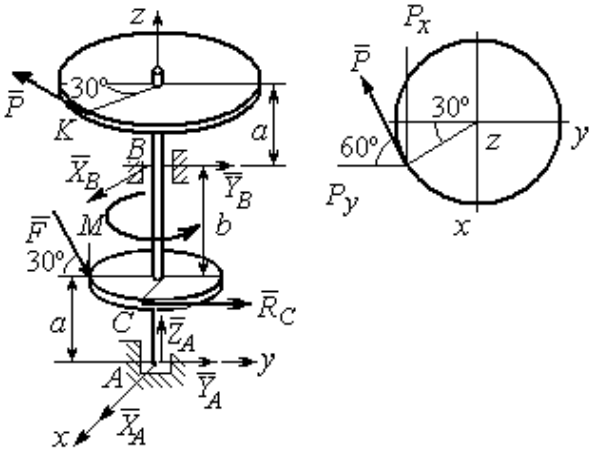



Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$R_C = Q = 3$ кН.

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a - -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$X_A = -1{,}85$ кН, $Y_A = -5{,}64$ кН, $Z_A = 2$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 7{,}39$ кН, $Y_B = 2{,}38$кН.

**1.12**

$$T = Q = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + T + X_D = 0;\ Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Fa\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$Ta\sin 30^\circ - Pa\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + Pa\cos 60^\circ + Fa\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0{,}8 \text{ кН},\quad Y_A = 2{,}56 \text{ кН},\ \ Z_A = 1{,}3 \text{ кН};$$

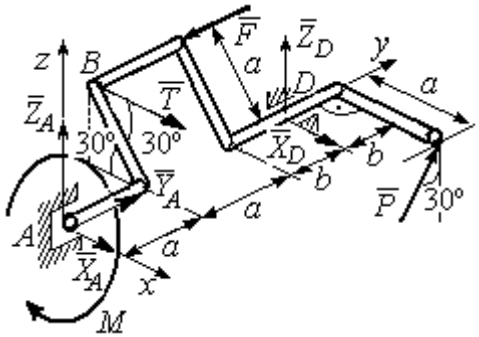



Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2{,}89 \text{ кН},\ X_D = 0{,}76 \text{ кН},\ Z_D = -3{,}80 \text{ кН}.$$

**1.13**

Минимальный вес груза $P$:

$$T_{\min} + F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0$$

Максимальный вес груза $P$:

$$T_{\max} - F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

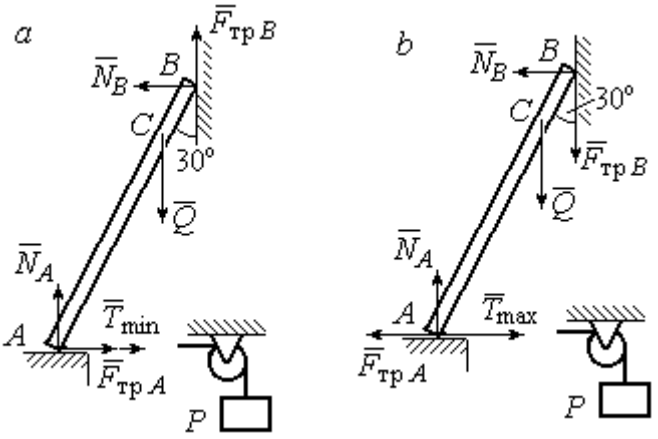



Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
*a* – расчёт минимального веса груза;
*b* – расчёт максимального веса груза

$$-F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,A} = f N_A,\ F_{\text{тр}\,B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31.77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130{,}51 \text{ Н}.$$

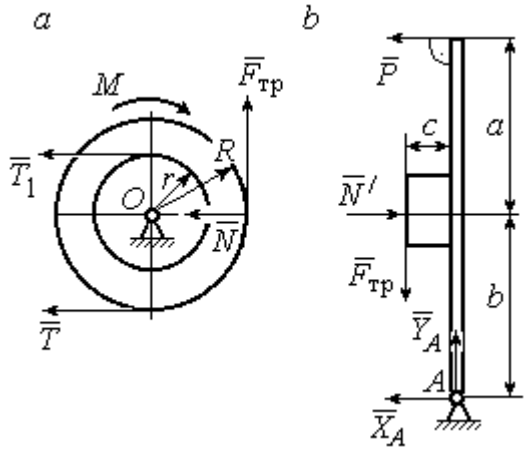



Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:
*a* – равновесие шкива; *b* – равновесие рычага

**1.14**

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266{,}67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666{,}67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a+b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346{,}67 \text{ Н},\ Y_A = 266{,}67 \text{ Н}.$$

## 7.2. Ответы к упражнениям главы 2

**2.1**

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2},\ \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с}.$$

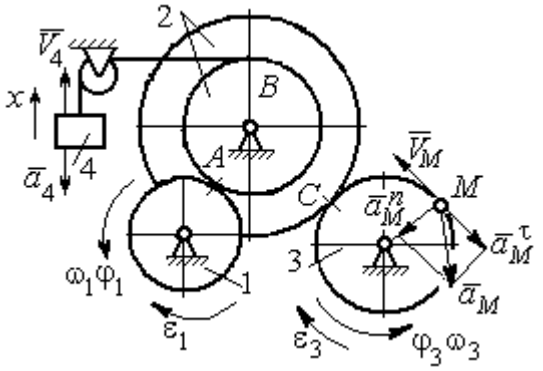



Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z}\frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)\frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с}.$$

$$V_M(1) = \omega_3(1)R_3 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\frac{\pi t}{2},\quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6{,}58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau,\ a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160 \text{ см/с}^2,\ a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z}R_1 = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)8;\ V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с}.$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2\sin\frac{\pi t}{2},\ \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2;\ a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39{,}48 \text{ см/с}^2.$$

**2.2**

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2{,}05 \text{ м/с},\ V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6{,}83 \text{ рад/с};\ \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3}\left(\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}\right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3{,}65 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

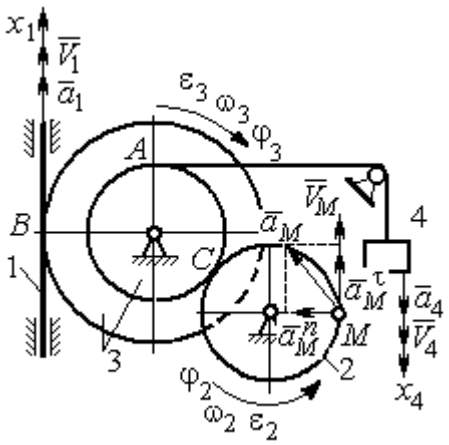



Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \omega_2=\omega_3\frac{r_3}{R_2}=10{,}25\ \text{рад/с};\ V_M=\omega_2 R_2=2{,}05\ \text{м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3\frac{r_3}{R_2}=5{,}47\ \text{рад/с}^2.$$

$$a_M^n=\omega_2^2 R_2=20{,}4\ \text{м/с}^2;\ \ a_M^\tau=\varepsilon_2 R_2=1{,}09\ \text{м/с}^2.$$

$$a_M=\sqrt{\left(a_M^n\right)^2+\left(a_M^\tau\right)^2}=20{,}43\ \text{м/с}^2.$$

$$V_1=\omega_3 R_3=2{,}73\ \text{м/с};\ a_1=\dot V_1=\dot\omega_3 R_3=\varepsilon_3 R_3=2{,}19\ \text{м/с}^2.$$

**2.3**

$$BP_2=BC\cos30^\circ=4{,}33\ \text{см};\ CP_2=2{,}5\ \text{см}.$$

$$\omega_{BC}=\frac{V_B}{BP_2}=1{,}15\ \text{рад/с};\ \ V_C=\omega_{BC}CP_2=2{,}87\ \text{см/с};$$

$$\omega_1=\frac{V_C}{CP_1}=0{,}72\ \text{рад/с};\ EP_1=2R_1\cos30^\circ=3{,}46\ \text{см};$$

$$V_E=\omega_1 EP_1=2{,}49\ \text{см/с};\ EP_3=2AE\cos30^\circ=10{,}39\ \text{см};$$

$$\omega_{AE}=\frac{V_E}{EP_3}=0{,}24\ \text{рад/с};\ EA=AP_3;$$

$$V_A=\omega_{AE}AP_3=1{,}44\ \text{см/с},\ \ \omega_{AO}=\frac{V_A}{AO}=0{,}24\ \text{рад/с}.$$

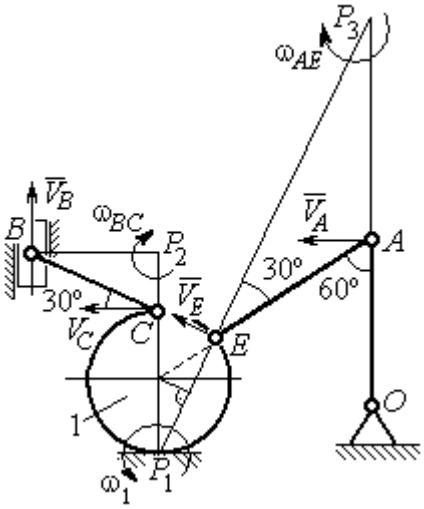



Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

**2.4**

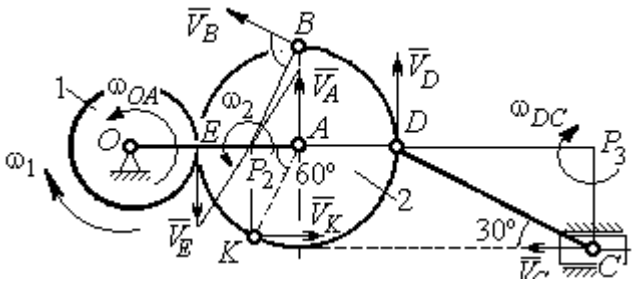



Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

$E$ – точка касания дисков.

$$V_E=\omega_1 r_1=18\ \text{см/с}.$$

$$V_A=\omega_{OA}(r_1+r_2)=18\ \text{см/с}.$$

$$EP_2=P_2A=3\ \text{см},\ \omega_2=\frac{V_E}{EP_2}=6\ \text{рад/с}.$$

$$V_K=\omega_2 P_2K=31{,}18\ \text{см/с}.$$

$$V_B=\omega_2 P_2B=40{,}25\ \text{см/с};\ V_D=\omega_2 P_2D=54\ \text{см/с}.$$

$DC = 2r_2$, $\omega_{DC} = \dfrac{V_D}{DP_3} = 5{,}197$ рад/с; $V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ$, $V_C = 31{,}18$ см/с.

**2.5**

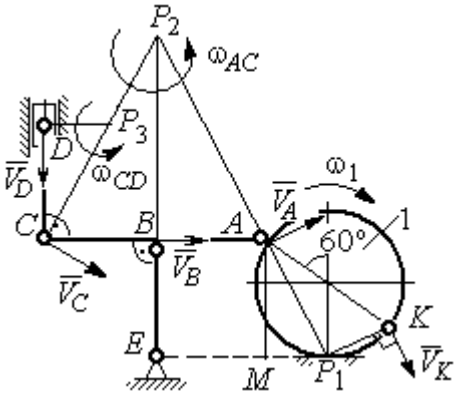



Рис. 7. 19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$BE = 1{,}5R_1$; $R_1 = 2{,}67$ см.

$KP_1 = R_1$; $\omega_1 = \dfrac{V_K}{KP_1} = 0{,}75$ рад/с.

$AP_1 = \dfrac{AM}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см; $V_A = \omega_1 P_1 A = 3{,}46$ см/с.

$AP_2 = 2AB = 8$ см; $\omega_{AC} = \dfrac{V_A}{AP_2} = 0{,}43$ рад/с.

$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ$; $V_B = 2{,}99$ см/с.

$\omega_{BE} = \dfrac{V_B}{BE} = 0{,}75$ рад/с; $V_C = V_A = 3{,}46$ см/с; $CP_3 = \dfrac{DC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см;

$\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}75$ рад/с; $V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ$; $V_D = 1{,}73$ см/с.

**2.6**

$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12$ см/с; $\omega_{AD} = 0$, $V_D = V_A$.

$\omega_{O_1C} = \dfrac{V_D}{DO_1} = 3$ рад/с;

$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48$ см/с.

$CB = CP = 16$ см; $\omega_{CB} = \omega_{CL} = \dfrac{V_C}{CP} = 3$ рад/с.

$PL = \dfrac{CP}{\cos 30^\circ} = 18{,}48$ см; $PB = 2BC \cos 30^\circ$.

$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55{,}44$ см/с;

$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83{,}13$ см/с.

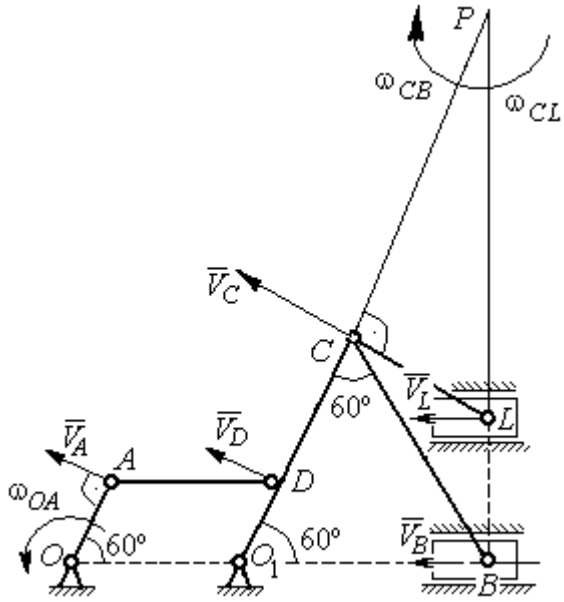



Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

**2.7**

$V_D = \omega_1 R_1 = 30$ см/с; $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15$ см/с.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21{,}21 \text{ см/с.}$$

$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ$; $V_C = 15$ см/с.

$CP_3 = CB$; $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 1{,}87$ рад/с.

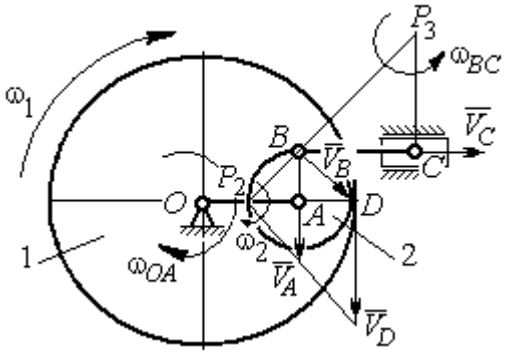



Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

**2.8**

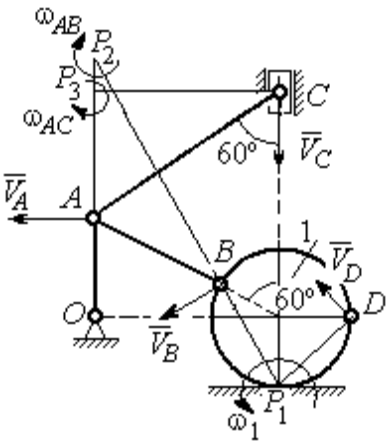



Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$AC = AB + R_1 = 12$ см; $CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10{,}39$ см.

$\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}48$ рад/с; $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2{,}89$ см/с.

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ см.}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5{,}02 \text{ см/с.}$$

$OA = (AB + R_1)\sin 30° = 6$ см; $\omega_{OA} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}48$ рад/с.

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3{,}46 \text{ см;} \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1{,}45 \text{ рад/с.}$$

$$DP_1 = R_1\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ см;} \; V_D = \omega_1 DP_1 = 4{,}09 \text{ см/с.}$$

**2.9**

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ см/с;} \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 27{,}71 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0{,}43 \text{ рад/с;} \; V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; \; V_B = 10{,}38 \text{ см/с.}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}, \; a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO},\ a_O = 0.$$

$$\bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO} + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти $a^\tau_{BC}$

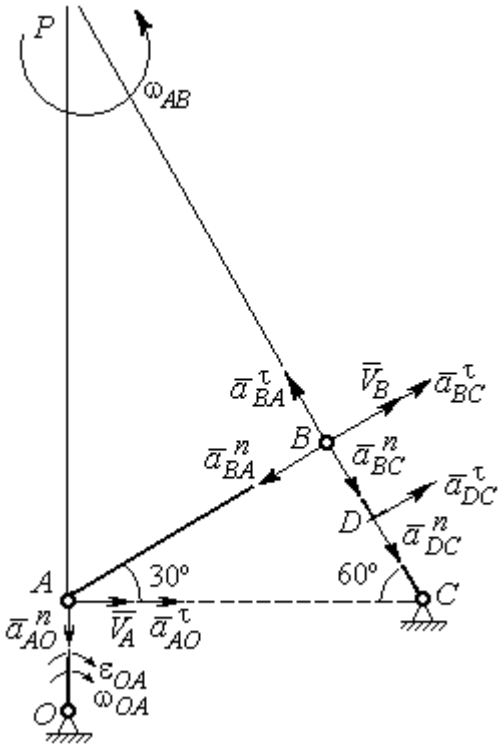



Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

$$a^n_{AO} = \omega^2_{AO} \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a^\tau_{AO} = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \text{tg}60^\circ = 13{,}86 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2{,}56 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_{BC} \cdot BC = 13{,}31 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{BC} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на $AB$:

$$a^\tau_{BC} = -a^n_{AO}\cos 60^\circ +$$

$$+ a^\tau_{AO}\cos 30^\circ - a^n_{BA} = 13{,}63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\left|a^\tau_{BC}\right|}{BC} = 1{,}7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}.$$

$$a^n_{DC} = \omega^2_{BC} \cdot DC = 6{,}65 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{DC} = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{\left(a^n_{DC}\right)^2 + \left(a^\tau_{DC}\right)^2} = 9{,}51 \text{ см/с}^2.$$

**2.10**

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с};\ P_2A = \frac{1}{2}BC = 5 \text{ см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2{,}4 \text{ рад/с}.$$

$$V_B\cos 30^\circ = V_A\cos 60^\circ;\ V_B = 6{,}93 \text{ см/с}.$$

$$P_3B = BC\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ см};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0{,}8 \text{ рад/с}.$$

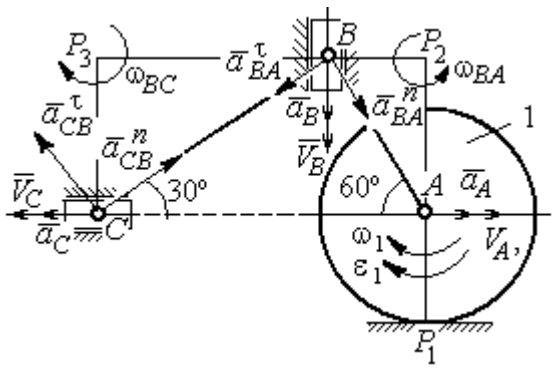



Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти $a_B$.

Проекция на $BA$: $a_B\cos30° = a_A\cos60° + a^n_{BA}$.

$$a_A = a^\tau_A = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ см/с}^2;\ AB = BC\operatorname{tg}30° = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{BA}\cdot BA = 33{,}23 \text{ см/с}^2;\ \ a_B = 43{,}03 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar a_C = \bar a_B + \bar a^n_{CB} + \bar a^\tau_{CB}.$$

Проекция на $BC$: $a_C\cos60° = a_B\cos60° - a^n_{CB}$,

$$a^n_{CB} = \omega^2_{CB}\cdot CB = 6{,}4 \text{ см/с}^2;\ \ a_C = a_B - 2a^n_{CB} = 30{,}23 \text{ см/с}^2.$$

## 7.3. Ответы к упражнениям главы 3

**3.1**

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 11{,}55 \text{ см}.$$

Так как $CM_1\cos30° = 10$ см $= R$, то точка $M_1$ лежит на вертикальном диаметре.

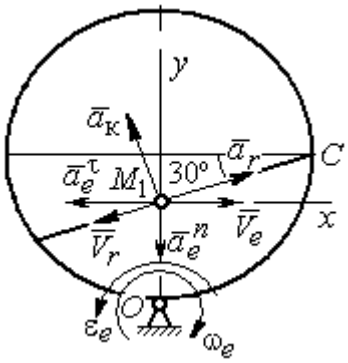



Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$V_r = \dot S_r = \frac{40\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ V_r(1) = 6{,}98 \text{ см/с}.$$

$$\omega_e(1) = 0{,}5 \text{ рад/с};\ OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4{,}23 \text{ см}.$$

$$V_e = \omega_e OM_1;\ \ V_e(1) = 2{,}12 \text{ см/с}.$$

$$\bar V_M = \bar V_e + \bar V_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r\cos30° = -3{,}93 \text{ м/с};\ V_{My} = -V_r\cos60° = -3{,}49 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5{,}26 \text{ см/с}.$$

$$\bar a_M = \bar a_e + \bar a_r + \bar a_к.$$

$$\bar a_e = \bar a^n_e + \bar a^\tau_e,\ \ a^n_e = \omega^2_e OM_1;\ \ a^n_e(1) = 1{,}06 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot\omega_e = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3},\ \ \dot\omega_e(1) = -0{,}91 \text{ рад/с}^2;\ \ \varepsilon_e = |\dot\omega_e(1)| = 0{,}91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a^\tau_e(1) = \varepsilon_e\cdot OM_1 = 3{,}85 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27}\sin\frac{\pi t}{3},\ \dot{V}_r(1) = -12{,}66;\ a_r = \left|\dot{V}_r(1)\right| = 12{,}66 \text{ см/с}^2$$

$$a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 6{,}98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r\cos 30° - a_к\cos 60° = 3{,}62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r\cos 60° + a_к\cos 30° = 11{,}31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11{,}87 \text{ см/с}^2.$$

**3.2**

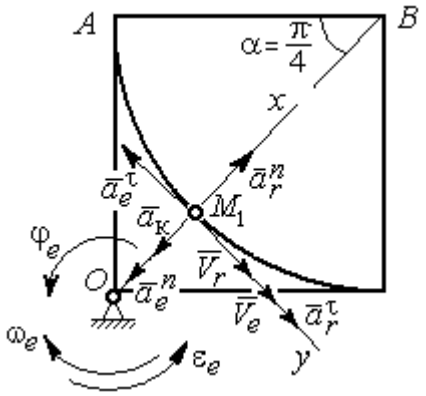



Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение $M_1$:

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4};\ \ OM_1 = 8{,}28 \text{ см}.$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t;\ \ V_r = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 31{,}42 \text{ см/с}.$$

$$\dot{\varphi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\varphi}_e(1) = -3 \text{ рад/с},\ \ \omega_e = \left|\dot{\varphi}_e(1)\right| = 3 \text{ рад/с}.$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24{,}6 \text{ см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot\ V_{Mx} = V_e + V_r = 56{,}02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0;\ V_M = 56{,}02 \text{ см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau\ \cdot\ a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74{,}52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|;\ \ a_e^\tau(1) = \varepsilon_e OM_1 = 16{,}56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi;\ a_r^\tau = \left|\dot{V}_r\right| = 10\pi = 31{,}42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49{,}36 \text{ см/с}^2;\ \ a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 62{,}84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_к = -88 \text{ см/с}^2;\ a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14{,}86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89{,}24 \text{ см/с}^2.$$

## 7.4. Ответы к упражнениям главы 4

**4.1**

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60° - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30° = 0.$$

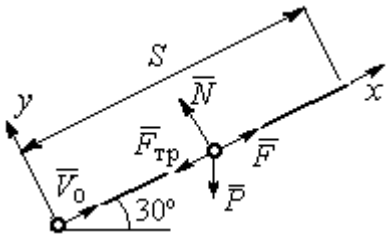



Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30°;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3{,}4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3{,}4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1{,}7t^2 + V_0 t.$$

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6{,}8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3{,}4 + V_0.$$

$$k = 8{,}4; \; V_0 = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

**4.2**

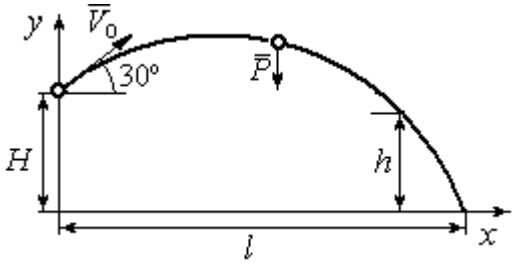



Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \; \dot{x} = V_0\cos 30°; \; x = V_0 t\cos 30°.$$

$$m\ddot{y} = -P; \dot{y} = -gt + V_0\cos 60°;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\cos 60° + H.$$

Краевое условие пролёта высоты $h$:

$t = 1$ с; $y = h = 7$ м.

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3{,}81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \; x = l; \; y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0 t_{\text{пад}}\cos 30°; \; 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0 t_{\text{пад}}\cos 60° + H.$$

Находим: $t_{\text{пад}} = 1{,}64$ с; $l = 5{,}41$ м.

**4.3**

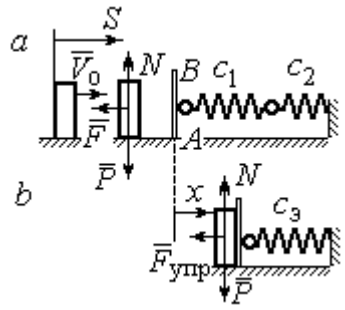



Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3: *a* – движение груза до начала колебаний; *b* – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, *a*):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0;\ S = 0;\ \dot{S} = V_0$.

Решение: $S = \dfrac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 6\left(1 - e^{-t}\right)$ м.

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой $AB$: $V_1 = \dot{S}(1) = 0{,}21$ м/с.

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, *b*):

$$m\ddot{x} = -F_{упр} = -c_э x;\ c_э = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м}.$$

Начальные условия движения: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 7{,}75$ рад/с,

где константы: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_1}{\omega} = 0{,}28$ м. Закон движения груза $x = 0{,}28\sin 7{,}75t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

**4.4**

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_э = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э(\lambda_{ст} + x) = -c_э x.$$

Общее решение:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 10{,}33 \text{ рад/с}.$$

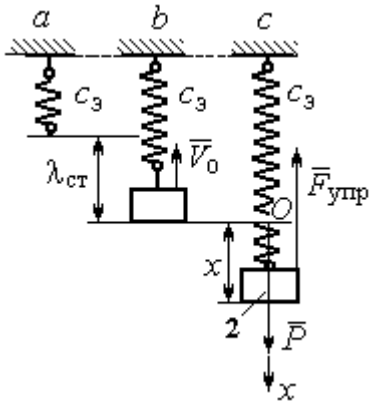



Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4: *a* – нерастянутая пружина; *b* – положение статического равновесия; *c* – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_0}{\omega} = 0{,}39$ м.

Закон движения груза: $x = 0{,}39\sin 10{,}33t$.

Амплитуда $A = 0{,}39$ м, частота $\omega = 10{,}33$ рад/с.

**4.5**

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка $C$):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right]$.

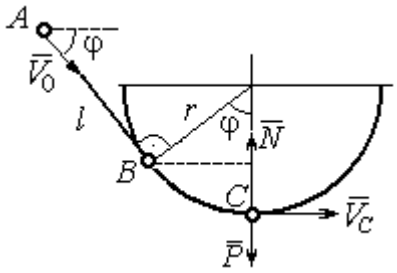


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

Уравнение движения человека, двигающегося вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке $C$: $\dfrac{mV_C^2}{r} = N - P$, где $N$ – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \le 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \le 2gr$, или

$$V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right] \le 2gr.$$ Откуда $r \ge \dfrac{V_0^2 + 2gl\sin\varphi}{2g\cos\varphi}$.

**4.6**

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке $B$ с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg\left[R + R\cos 60° - a\cos 30°\right].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке $BD$:

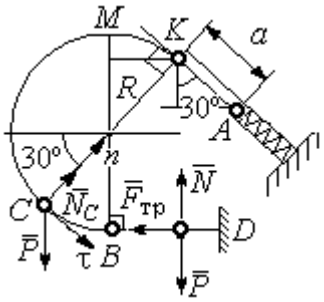


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где $s$ – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: $s$ = 5,39 м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке $C$

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60°.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство $N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60° = \frac{1}{R}\left[mV_B^2 - 2mgR(1-\cos 60°)\right] + mg\cos 60°$, где кинетическая энергия шарика в точке $B$: $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR\left[(1+\cos 60°) - \frac{a}{R}\cos 30°\right]$. Получим: $N_C = 18{,}71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

## 7.5. Ответы к упражнениям главы 5

**5.1**

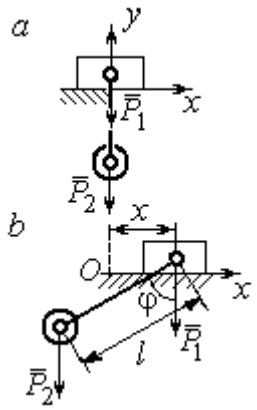



Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:
*a* – начальное положение системы;
*b* – произвольное положение

$x_0$ – координата центра тяжести системы в начальном положении, $x_0$ = 0 (см. рис.7.33); $x$ – текущая координата центра тележки; $x_1$ – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения груза 2: $x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi$.

**5.2**

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси $z$: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

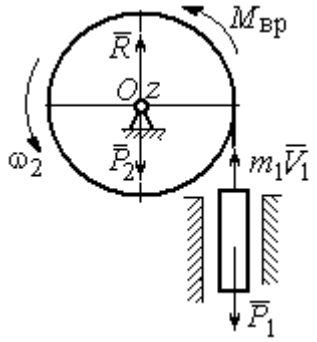


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2}\omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси $z$: $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 g r$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 g r.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \dfrac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

**5.3**

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

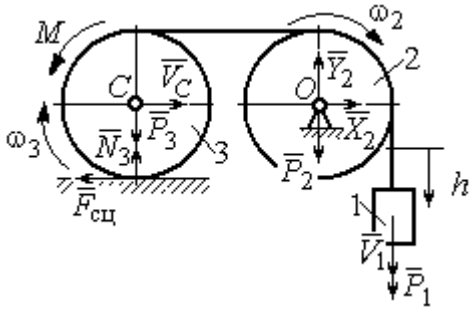


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \dfrac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока: $J_O = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3: $T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_C^2 + \dfrac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходя-

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа вешних сил на перемещении $h$: $\sum A(F_k) = P_1 h - M\frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h.$$

Скорость груза на высоте $h$: $V_1 = 4\sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

**5.4**

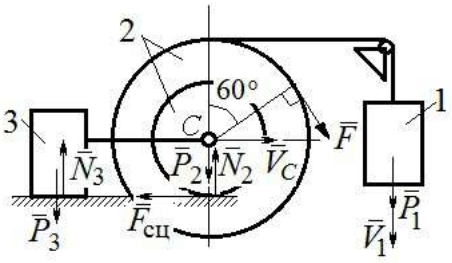



Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где $T$ – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью $V_1$. Скорость центра масс катка $V_C$.

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$, $J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{9P}{2g}V_C^2$.

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы): $T = T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{17P}{2g}V_C^2$. Производная $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{17P}{g}V_C\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{17}{g}V_C a_C$.

Мощности сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{сц}}$, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле: $N(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F})\cdot\vec{\omega}_2 = FV_C\cos 60° + FR\omega_2$. Мощность силы $\vec{P}_1$ $N(\vec{P}_1) = P_1V_1$. Суммарная мощность внешних сил: $\sum N(F^e) = 7PV_C$.

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\dfrac{17P}{g}V_C a_C = 7PV_C$, откуда $a_C = \dfrac{7}{17}g$ м/с$^2$.

**5.5**

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

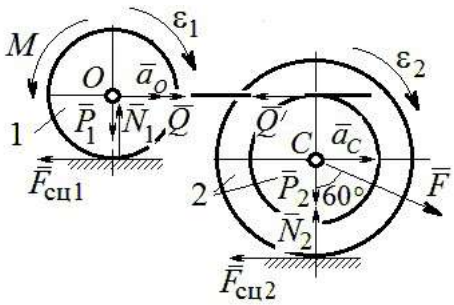


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц1}},\ J_{1O}\varepsilon_1 = F_{\text{сц1}}r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц2}} + F\cos 30°;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = F_{\text{сц2}}3r - Q'r.$$

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц1}}$, $\vec{F}_{\text{сц2}}$ – силы сцепления катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$, $J_{2C} = m_2 i_2^2$. Подставляя кинематические соотношения $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{3r}$; $a_O = \dfrac{4}{3}a_C$; $\varepsilon_1 = \dfrac{4a_C}{3r}$, с учётом данных задачи, получим систему уравнений:

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц}1};\ \ \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц}1} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц}2} + P\sqrt{3};\ \ \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц}2} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \dfrac{3\left(3\sqrt{3}-16\right)g}{46} \approx -\,0{,}7g$. Каток движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2{,}6P$.

**5.6**

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. Допустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

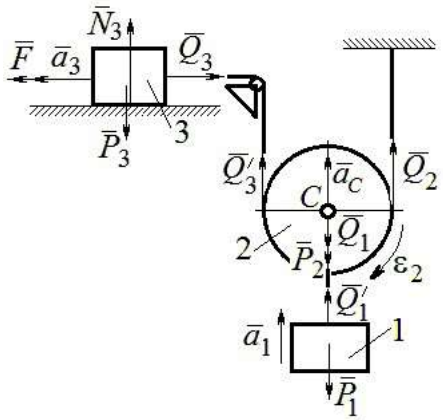



Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

Уравнения движения тел:

$$m_3a_3 = F - Q_3,\ m_2a_C = Q_3' + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = Q_3'r - Q_2r,\ m_1a_1 = Q_1' - P_1.$$

С учётом, что $\left|\vec{Q}_3\right| = \left|\vec{Q}_3'\right|$, $\left|\vec{Q}_1\right| = \left|\vec{Q}_1'\right|$ и $a_C = a_1$, $a_3 = 2a_1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$, $J_{2C} = \dfrac{m_2r^2}{2}$, подставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2{,}5mg - Q_3;\ \ ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2;\ m_1a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \dfrac{2}{17}g \approx 0{,}12g$; $Q_3 = 2{,}26mg$; $Q_2 = 2{,}15mg$.

**5.7**

Заменяем действия нитей реакциями. Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1a_1 = P_1\cos 30° - Q_1;\ \ m_3a_3 = Q_3;$$

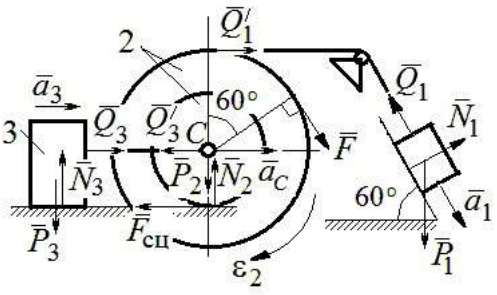



Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q_1' - Q_3' - F_{\text{сц}} + F\cos 60^\circ;\ J_{2C}\varepsilon_2 = Q_1' R + FR + F_{\text{сц}} r,\ J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R+r}$, $a_C = \dfrac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q_1' = Q_1$ и $Q_3' = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1;\ \frac{2}{3}ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2}mg;\ 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \dfrac{3}{46}\left(5+3\sqrt{3}\right)g \approx 0{,}44g;\ Q_1 = 0{,}21mg;\ Q_3 = 0{,}44mg$.

## 7.6. Ответы к упражнениям главы 6

**6.1**

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$ Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, *a*). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

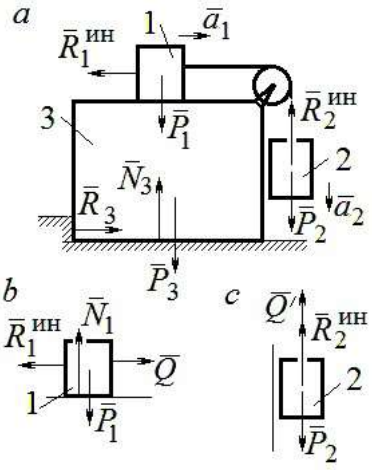


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0,\ N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, *b*, *c*). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил - для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – на вертикальную:

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0;\ P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0{,}5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2{,}5mg$.

**6.2**

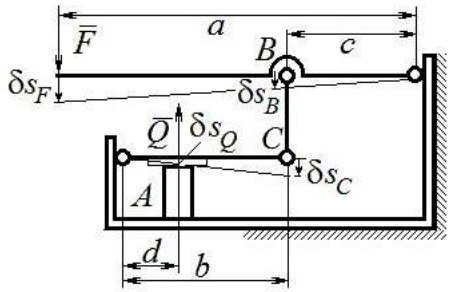


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A\left(\vec{F}\right) + \delta A\left(\vec{Q}\right) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где $\delta s_F$ и $\delta s_Q$ – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\dfrac{\delta s_F}{\delta s_B} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \dfrac{b}{d}$, где $\delta s_B$ и $\delta s_C$ – возможные перемещения точек $B$ и $C$, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \dfrac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь $A$ под прессом, равна $Q = \dfrac{ab}{cd}F$.

**6.3**

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами $M_1$ и $M_2$. Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A\left(\vec{P}_3\right) + \delta A\left(\vec{P}_4\right) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

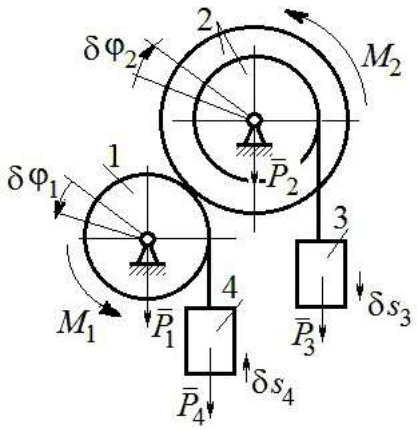


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4 + M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta\varphi_2 r$, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$, $\delta s_4 = 3r\delta\varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

**6.4**

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{\text{вр}}$ (рис. 7.43).

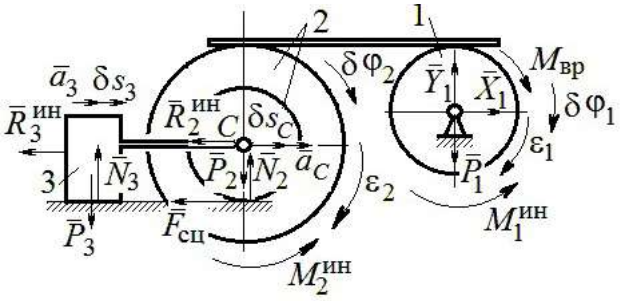



Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta\varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta\varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3,\ a_C = a_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r},\ \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r},\ \delta\varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r},\ \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = ma_3$;

$$R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2ma_3;\ M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4{,}5mra_3;\ M_1^{\text{ин}} = \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = 1{,}5mra_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{\text{вр}}\delta\varphi_1 = (mg\sin\omega t)3\delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_2^{\text{ин}}\delta s_C - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - M_1^{\text{ин}}\delta\varphi_1 =$$

$$= -ma_3\delta s_3 - 2ma_3\delta s_3 - 4{,}5ma_3\delta s_3 - 1{,}5ma_3 3\delta s_3 = -12ma_3\delta s_3.$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g\sin\omega t - 12a_3)\delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0{,}25g\sin\omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0{,}25g\sin\omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \dfrac{0{,}25g}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

**6.5**

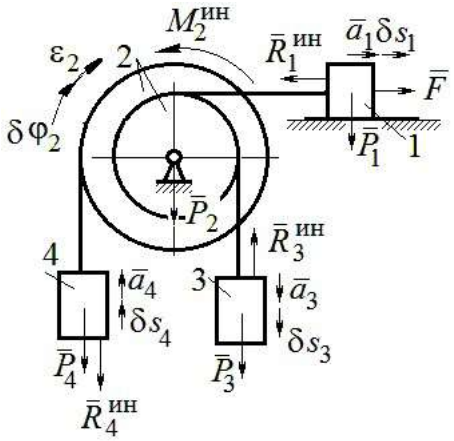



Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F\delta s_1 + P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4$ и сил инерции $\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_4^{\text{ин}}\delta s_4 - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2$, где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \dfrac{P_3}{g}a_3$, $R_4^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_4$, $M_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2$.

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = P(t+1)\delta s_1 + P\delta s_1 - 2P\delta s_1 -$$

$$-\left(\frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{2P}{g}2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g}2r^2\frac{a_1}{r}\frac{\delta s_1}{r}\right) = P\left(t - \frac{14a_1}{g}\right)\delta s_1 = 0.$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \dfrac{1}{14}gt$, или $\ddot{x}_3 = \dfrac{1}{14}gt$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \dfrac{1}{84}gt^3 \approx 0{,}012gt^3$.

**6.6**

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где $T$ – кинетическая энергия системы: $Q_x$ – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты $x$ выберем положение точки $C$ относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной $l_0$. Обобщённая скорость $\dot{x}$.

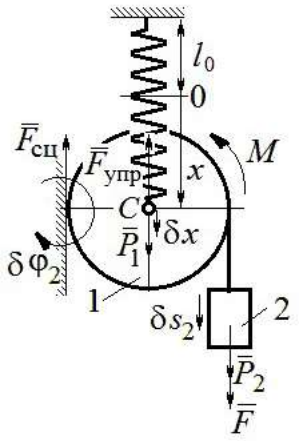


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Кинетическая энергия катка: $T_1=\frac{1}{2}m_1V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2$, где $\omega_1$, $V_C$ – угловая скорость катка и скорость его центра масс, $V_C=\dot{x}$, $\omega_1=\frac{V_C}{r}=\frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC}=\frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2=\frac{1}{2}m_2V_2^2$, где $V_2$ – скорость груза 2, $V_2=2V_C=2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T=T_1+T_2=\frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой $x$, дадим центру масс катка возможное перемещение $\delta x$ (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum\delta A(F_{\text{к}})=P_1\delta x-F_{\text{упр}}\delta x+(P_2+F)\delta s_2-M\delta\varphi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2=2\delta x$, $\delta\varphi_1=\frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}}=cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum\delta A(F_{\text{к}})=(3P-cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x=3P-cx$.

Уравнение Лагранжа $\frac{7P}{g}\ddot{x}=3P-cx$, или $\ddot{x}+\frac{4g}{7r}x=\frac{3g}{7}$.

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями): $x = \frac{3}{4} r\left(1 - \cos\omega t\right)$. Закон движения груза: $s_2 = 2x = \frac{3}{2} r\left(1 - \cos\omega t\right)$.

**6.7**

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния $x_1$, $x_2$ соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных центров блоков *B* и *D* (рис. 7.46, *a*). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

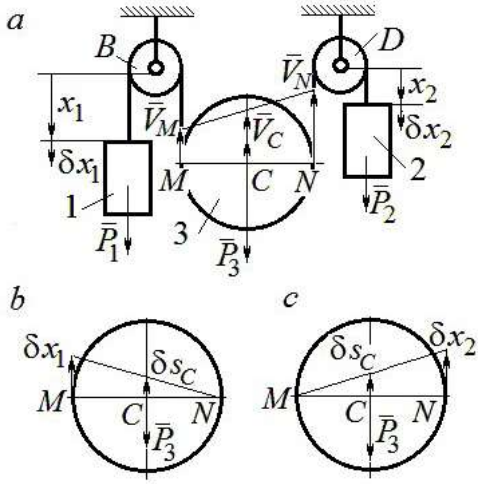



Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7:
*a* – кинематика механизма;
*b*, *c* – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g},\ T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}\right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, *a*): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате $x_1$, оставляя координату $x_2$ постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *b*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3$.

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате $x_2$, так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *c*):

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left( P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left( P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3 , \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left( P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \text{ или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 , \; \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g .$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31} g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31} g$. Ускорение центра масс блока $\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31} g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

**6.8**

Система с двумя степенями свободы. Обобщённые координаты: $x_1$ – положение центра масс катка 1 (точки $C_1$) относительно неподвижной вертикальной стены; $x_2$ – положение центра масс катка 2 (точки $C_2$) относительно подвижного края платформы.

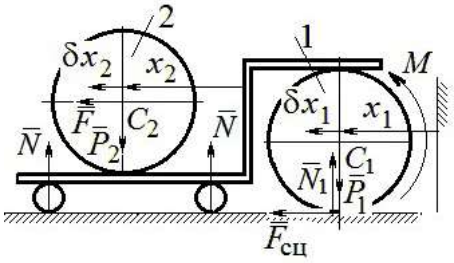


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 \left( \dot{x}_2 + 2\dot{x}_1 \right)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left( \frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left( \frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате $x_1$ $\left( \delta x_1 \neq 0 \right)$, оставляя другую координату $x_2$ неизменной $\left( \delta x_2 = 0 \right)$. Работу совершают момент $M$ и сила $\overline{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4 P \delta x_1 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_к) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате $x_2$, равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g}\left(\frac{11}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2\right) = 4P,\ \frac{P}{g}\left(2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1\right) = P, \text{ или}$$

$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g,\ 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси $x_1$. Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

*Бать М. И.*, *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

*Бутенин Н. В.*, *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: В 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

*Вебер Г. Э.*, *Ляпцев*, *С. А*. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

*Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

*Компьютерная версия*

Подписано в печать 26.10.2018 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №
Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

**Министерство образования и науки РФ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный**
**горный университет»**

**Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков**

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие*
*для самостоятельной работы студентов*

**Екатеринбург**
**2017**

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие*
*для самостоятельной работы студентов*

Издание УГГУ Екатеринбург, 2017

В 67

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

**Волков Е. Б., Казаков Ю. М.**

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017
©Уральский государственный горный университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА ..... 4
1.1. Основные виды связей и их реакции ..... 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары ..... 5
1.3. Условия равновесия систем сил ..... 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел ..... 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил ..... 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА ..... 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки ..... 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси ..... 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела ..... 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях ..... 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении ..... 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении ..... 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ..... 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки ..... 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ ..... 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. ..... 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ... 73
4.3. Колебания материальной точки ..... 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки ..... 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. ..... 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии ..... 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ..... 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы. 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы ..... 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. ..... 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии ..... 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ..... 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики ..... 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики ..... 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода ..... 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа ..... 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ..... 155

# 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Статика** представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

## 1.1. Основные виды связей и их реакции

**Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения**. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

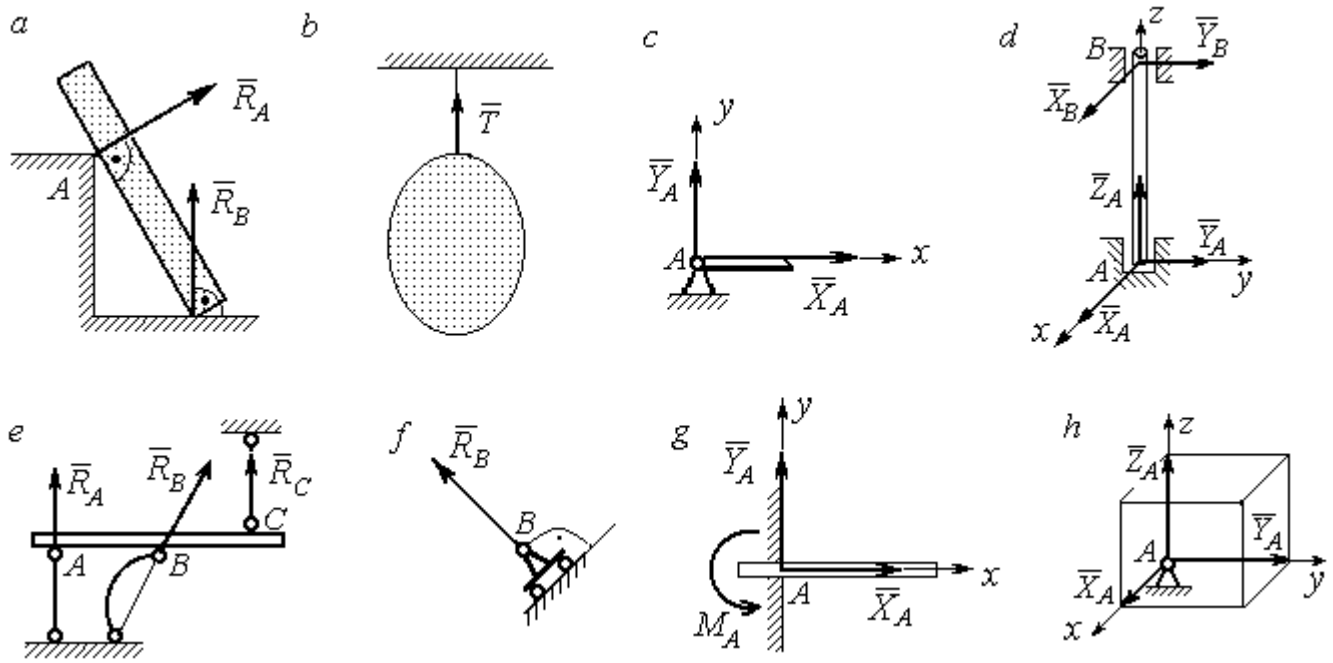



Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
*a* – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

**Цилиндрический шарнир (подшипник)** создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом $M_A$. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

## 1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы *F* относительно центра *O* $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра *O*, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние *h* от центра *O* до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину $h$ называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

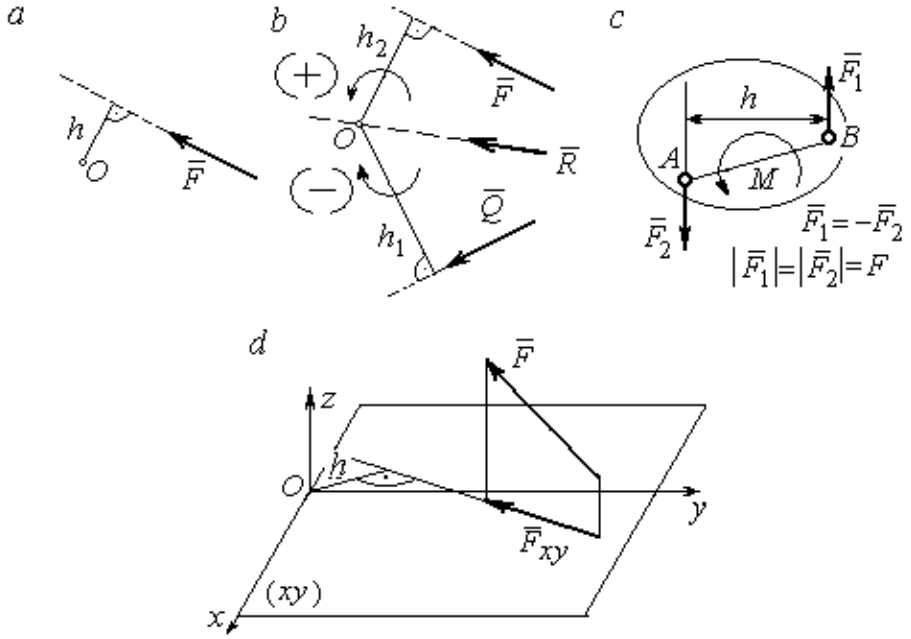



Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
*a*, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
*d* – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра $O$ положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра $O$ равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр $O$ и плечо силы равно нулю.

**Парой сил,** или просто парой (рис.1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. $M$ на рис. 1.2, *c*).

**Моментом силы относительно оси** называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы $F$ относительно оси *z*: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где $F_{xy}$ – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость *xy*, перпендикулярную оси *z*, *h* – плечо проекции $F_{xy}$ относительно центра *O* – точки пересечения оси *z* и плоскости *xOy*.

## 1.3. Условия равновесия систем сил

**Плоской системой сил** называется система сил, расположенных в одной плоскости.

**Основная форма условий равновесия плоской системы сил.** Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где $F_{kx}, F_{ky}$ – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра $A$.

**Пространственной системой сил** называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$ – проекции всех сил на координатные оси $x$, $y$, $z$; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

### Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

## 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

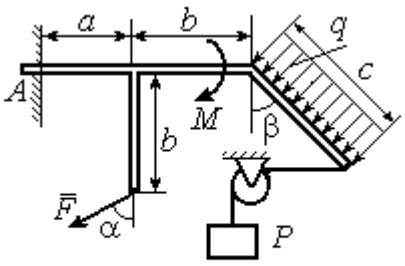
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

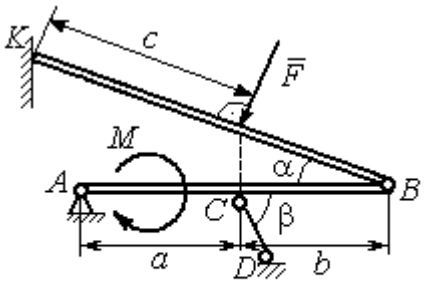
**Варианты № 1, 11, 21**

Задача 1




Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$

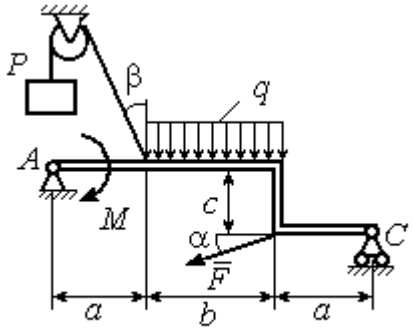
Задача 2




Найти реакции шарниров $A$, $B$, реакцию стержня $CD$ и реакцию опоры в точке $K$

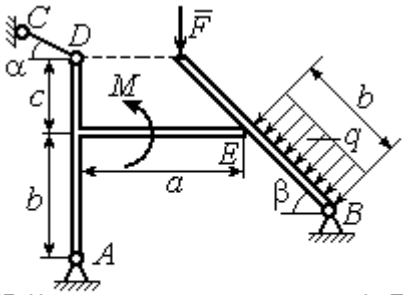
**Варианты № 2, 12, 22**

Задача 1




Найти реакции шарниров $A$ и $C$

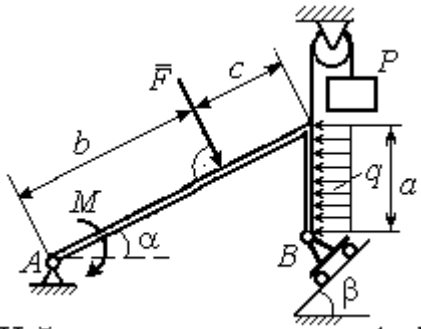
Задача 2




Найти реакции шарниров $A$, $B$, реакцию опоры в точке $E$ и реакцию стержня $CD$

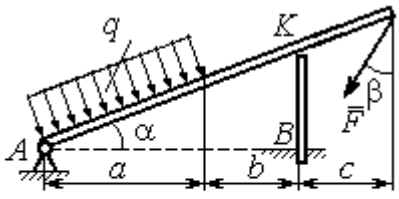
**Варианты № 3, 13, 23**

Задача 1




Найти реакцию шарниров $A$ и $B$

Задача 2

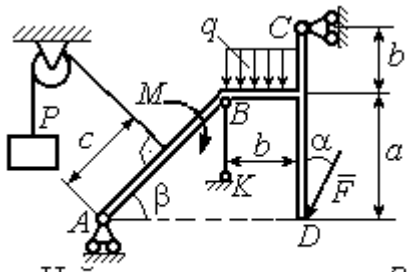



Найти реакцию шарнира $A$, реакцию опоры в точке $K$ и реакцию жесткой заделки в точке $B$

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

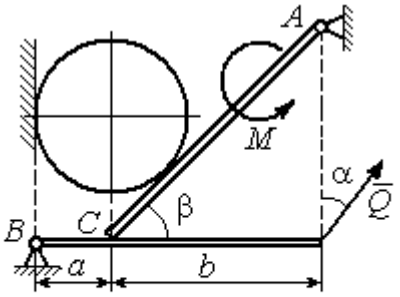
**Варианты № 4, 14, 24**

Задача 1




Найти усилие в стержне $BK$ и реакцию шарниров $A, C$

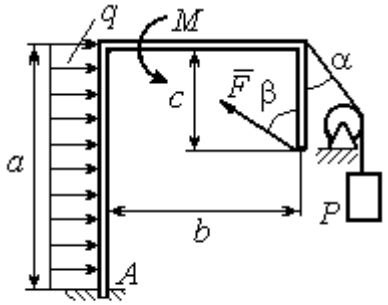
Задача 2




Вес шара $P$. Найти реакцию шарниров $A, B$, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке $C$ и уравновешивающую силу $Q$

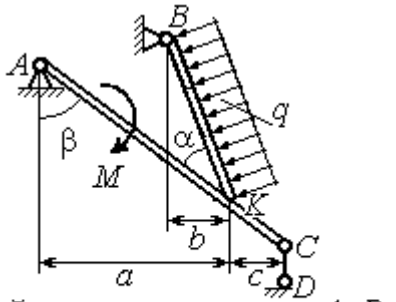
**Варианты № 5, 15, 25**

Задача 1




Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$

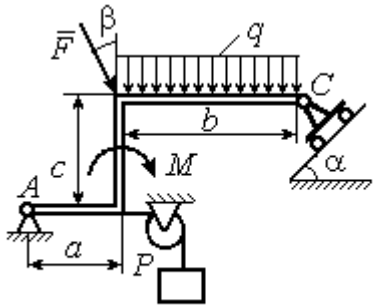
Задача 2




Найти реакцию шарнирв $A, B$, реакцию стержня $CD$ и реакцию опоры в точке $K$

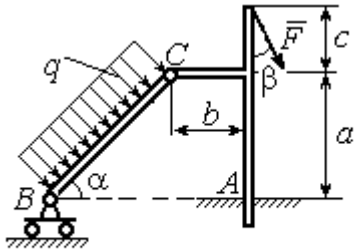
**Варианты № 6, 16, 26**

Задача 1




Найти реакции шарниров $A$ и $C$

Задача 2

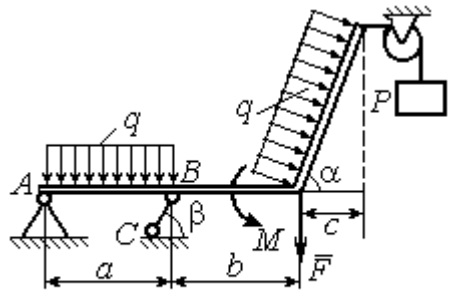



Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$ и реакции шарниров $B$ и $C$

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

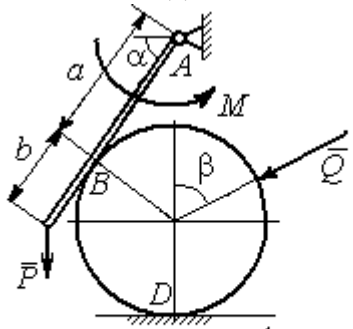
**Варианты № 7, 17, 27**

Задача 1




Найти реакцию стержня $BC$ и реакцию шарнира $A$

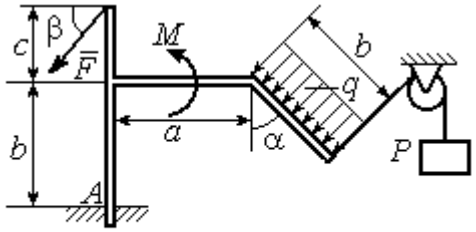
Задача 2




Найти реакцию шарнира $A$, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке $D$ и уравновешивающую силу $Q$

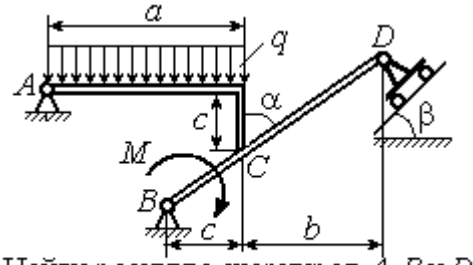
**Варианты № 8, 18, 28**

Задача 1




Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$

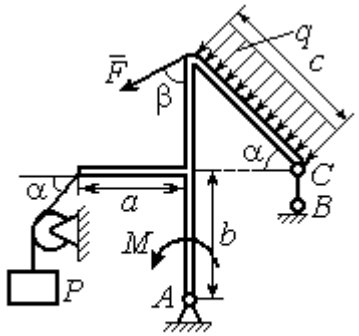
Задача 2




Найти реакцию шарниров $A$, $B$ и $D$ и реакцию опоры в точке $C$

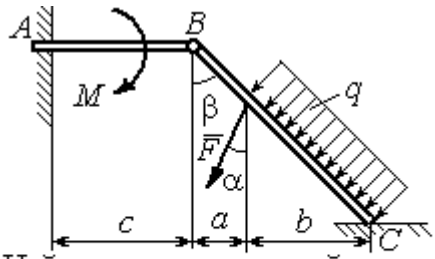
**Варианты № 9, 19, 29**

Задача 1




Найти реакцию стержня $BC$ и реакцию шарнира $A$

Задача 2



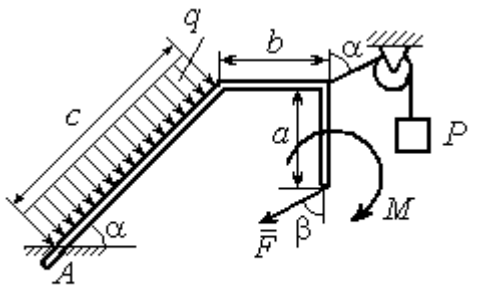

Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$, реакцию шарнира $B$ и реакцию опоры в точке $C$

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

*Окончание вариантов задания С1*

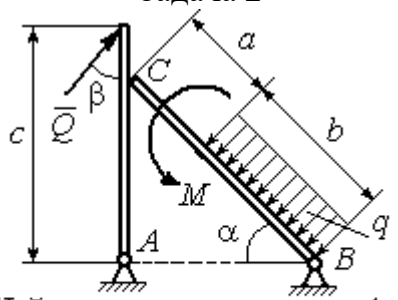
**Варианты № 10, 20, 30**

Задача 1




Найти реакцию жесткой заделки в точке $A$

Задача 2




Найти реакцию шарниров $A$, $B$, реакцию опоры в точке $C$ и уравновешивающую силу $Q$

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

**Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.**

| Номер варианта задания | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$, кН | 6 | 5 | 6 | 12 | 6 | 6 | 10 | 3 | 8 | 5 | 10 | 4 | 8 | 10 | 8 |
| $F$, кН | 12 | 6 | 10 | 5 | 12 | 8 | 6 | 5 | 6 | 2 | 12 | 8 | 12 | 6 | 10 |
| $q$, кН/м | 5 | 4 | 2 | 3 | 6 | 3 | 5 | 2 | 2 | 4 | 6 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $M$, кН·м | 12 | 8 | 6 | 8 | 12 | 5 | 12 | 8 | 4 | 6 | 8 | 12 | 10 | 6 | 10 |
| $\alpha$, град | 45 | 60 | 30 | 60 | 30 | 30 | 45 | 60 | 30 | 30 | 45 | 30 | 60 | 45 | 60 |
| $\beta$, град | 60 | 30 | 45 | 30 | 60 | 90 | 60 | 60 | 30 | 45 | 30 | 45 | 30 | 60 | 30 |
| $a$, м | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| $b$, м | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| $c$, м | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| Номер варианта задания | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$, кН | 10 | 8 | 10 | 6 | 4 | 6 | 12 | 10 | 5 | 6 | 8 | 6 | 8 | 4 | 6 |
| $F$, кН | 6 | 12 | 12 | 8 | 3 | 14 | 10 | 8 | 15 | 10 | 12 | 8 | 10 | 10 | 2 |
| $q$, кН/м | 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 |
| $M$, кН·м | 10 | 6 | 8 | 6 | 5 | 12 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 10 | 6 | 4 | 8 |
| $\alpha$, град | 60 | 60 | 30 | 45 | 60 | 30 | 60 | 45 | 30 | 60 | 45 | 30 | 30 | 30 | 45 |
| $\beta$, град | 45 | 30 | 30 | 60 | 60 | 45 | 30 | 60 | 30 | 45 | 90 | 30 | 60 | 45 | 30 |
| $a$, м | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| $b$, м | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $c$, м | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 5 |

**Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.**

**Задача** 1**.** Рама *ACE* (рис. 1.7) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке *AB*. В точке *E* под прямым углом к участку балки *CE* прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

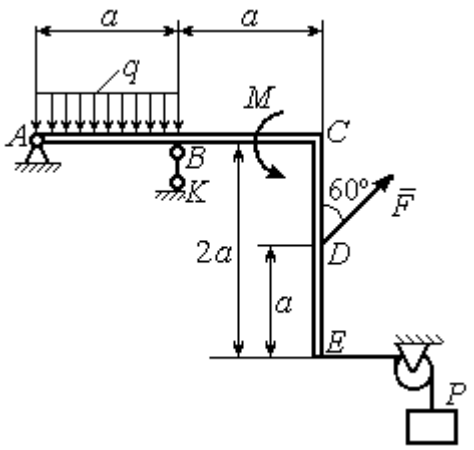



Рис. 1.7. Конструкция рамы

*Решение*

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза *P* на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

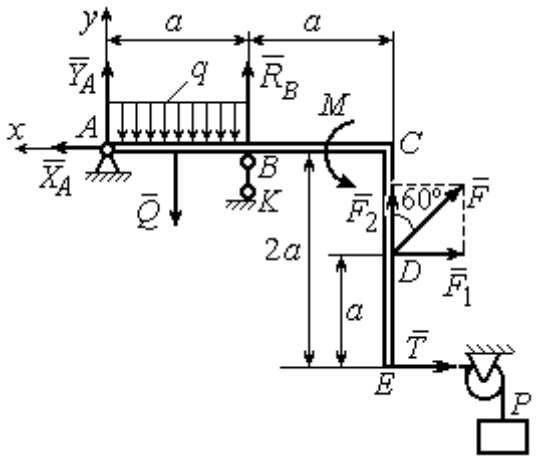



Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *x*, *y*, и моменты сил относительно центра *A*, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра *A* использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных $X_A, Y_A, R_B$:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем $X_A$ = 28,66 Н, $Y_A$ = 59,66 Н, $R_B$ = – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины $R_B$ означает, что фактическое направление реакции $R_B$ стержневой опоры *BK* противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

**Задача 2.** Балка *ABLC* с вертикальной частью *AB* и горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° в точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *CL*, а в точке *E* закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине *F* = 10 кН, и пара сил

с моментом $M$ = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки $A$ и реакции шарниров $C$ и $E$, если $a$ = 2 м.

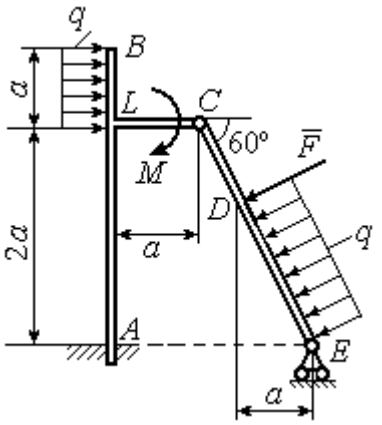



Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

*Решение*

Разделяем систему на две части по шарниру $C$ и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и $EC$ отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, приложенной в середине отрезка $BL$, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a =$ 4 кН. Кроме силы $\vec{Q}_1$ и пары сил с моментом $M$ на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке $A$, имеющая своими составляющими силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и пару сил с моментом $M_A$, а также реакция шарнира $C$, разложенная на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ (см. рис. 1.10, *a*). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат $xAy$, как показано на рис. 1.10, *a*, и составим уравнения равновесия:

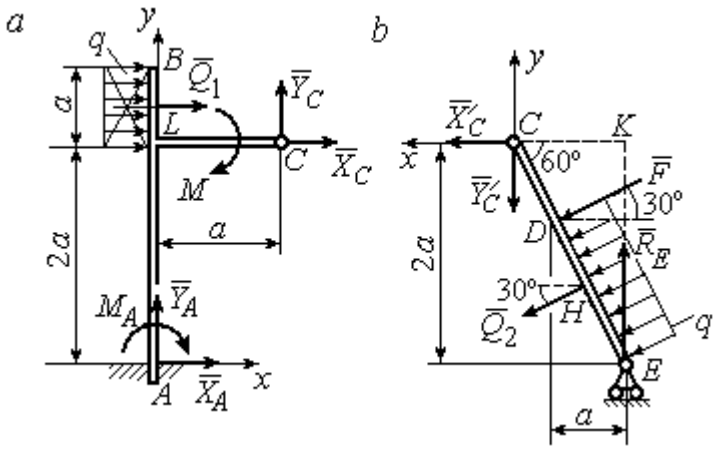



Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
*a* - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
*b* - силы и реакции связей, действующие на балку $CE$

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки *EC*. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED*, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке *E* и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира *C*. Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку *EC* силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат *xCy,* как показано на рис. 1.10, *b,* и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\,\text{tg}30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины $X'_C$ на $X_C$, а $Y'_C$ на $Y_C$ и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59\ \text{кН},\ Y_A = -2{,}76\ \text{кН},\ M_A = 42{,}87\ \text{кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59\ \text{кН},\ Y_C = 2{,}76\ \text{кН},\ R_E = 11{,}76\ \text{кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки *A* и шарнира *C*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91\ \text{кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83\ \text{кН}.$$

## 1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом $M$ и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом $Q$. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы $Q$ (или момента $M$).

Плита весом $P$ закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом $M$. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

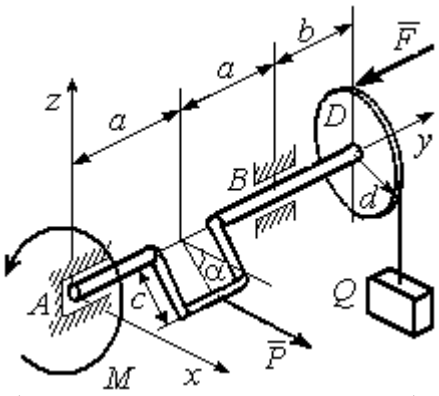
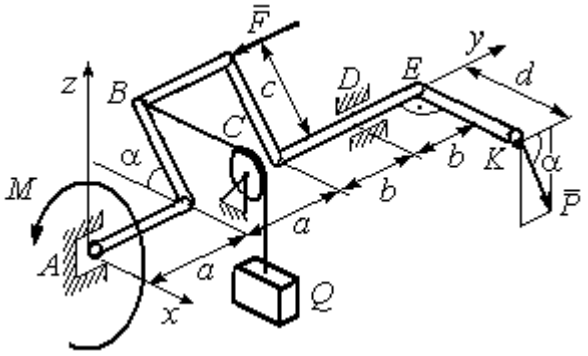
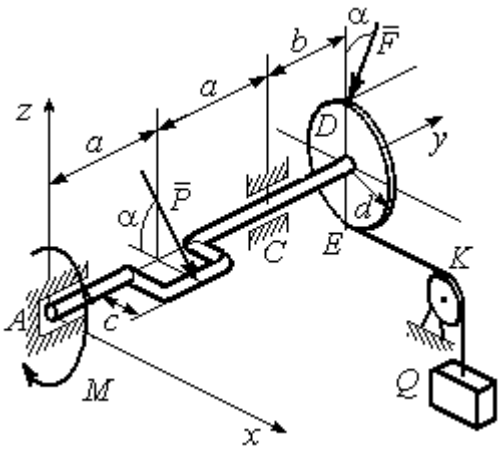
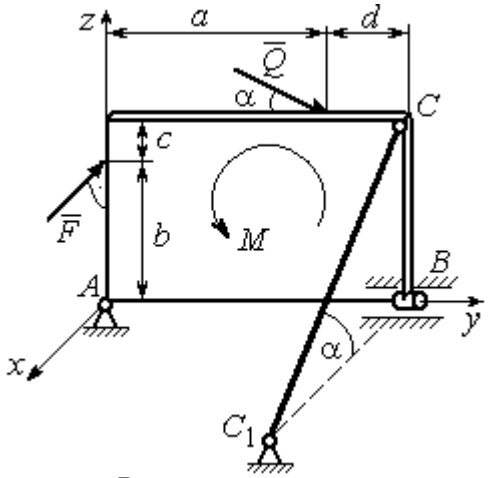
| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** |
|---|---|
|  |  |
| Сила $\vec{F}$ параллельна оси $Ay$; сила $\vec{P}$ параллельна оси $Ax$; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках $A$ и $B$ и величину уравновешивающего груза $Q$ | Сила $\vec{F}$ параллельна оси $Ay$; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной $zAy$; отрезок нити $BC$ параллелен оси $Ax$; рукоять вала $EK$ параллельна оси A$x$. Найти реакции подпятника и подшипника в точках $A$ и $D$ и величину уравновешивающего момента $M$ |

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

| **Варианты № 3, 13, 23** | **Варианты № 4, 14, 24** |
|---|---|
|  |  |
| Сила $\vec{F}$ , лежит в плоскости *zAy*; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной *zAx*, отрезок нити *EK* параллелен оси *Ax*.<br>Найти реакции подпятника и подшипника в точках *A* и *C*, а также величину уравновешивающего груза *Q* | Плита весом *P* расположена в плоскости *zAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; стержень $CC_1$ расположен в плоскости, параллельной *zAx*; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты.<br>Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня $CC_1$ |

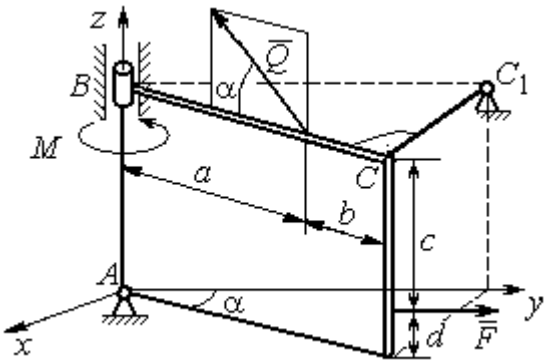
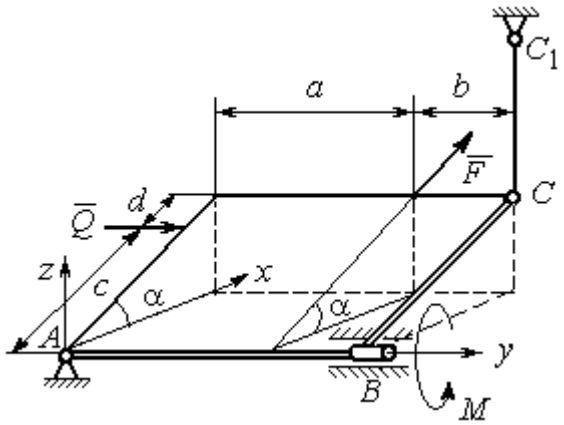
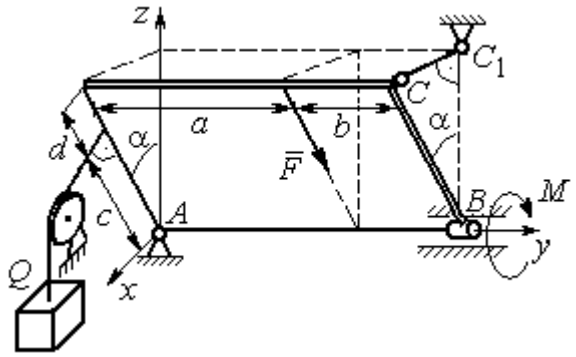
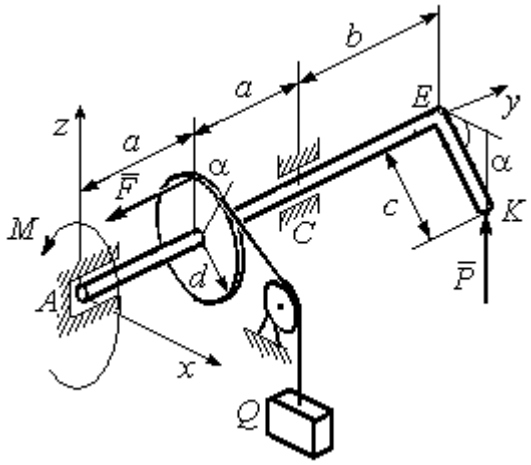
| **Варианты № 5, 15, 25** | **Варианты № 6, 16, 26** |
|---|---|
|  |  |
| Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси *Ay*; стержень $CC_1$ перпендикулярен плоскости плиты.<br>Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня $CC_1$ | Плита весом *P* отклонена на угол α от горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси *Ay*; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень $CC_1$ параллелен оси *Az*.<br>Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня $CC_1$ |

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |
| Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; нить, удерживающая груз *Q*, находится плоскости *zAx*, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень $CC_1$ перпендикулярен плоскости *zAy*.<br>Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня $CC_1$ | Рукоять *EK* перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{P}$ параллельна оси *Az*; сила $\vec{F}$ параллельна оси A*y*; нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива по касательной.<br>Найти реакции подпятника *A*, подшипника *C*, и величину уравновешивающего груза *Q* |

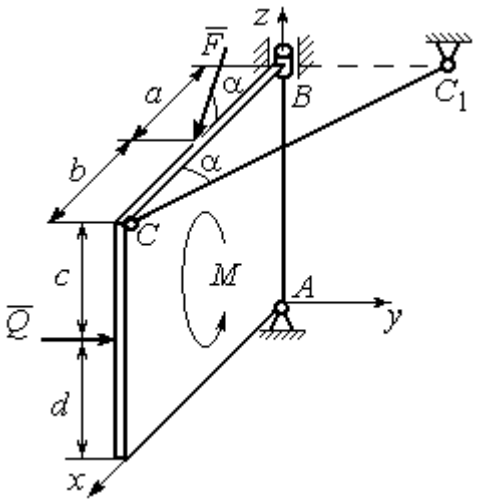
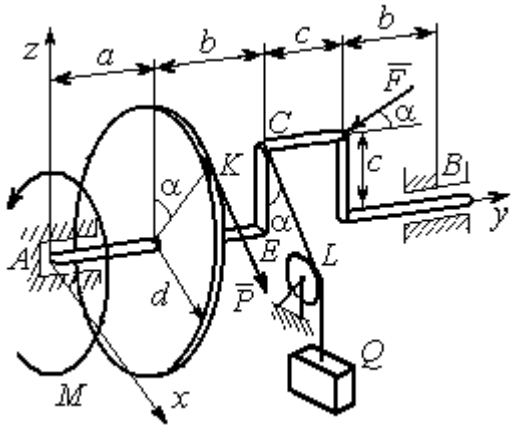
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |
| Плита весом *P* находится в вертикальной плоскости *zAx*; стержень $CC_1$ расположен в плоскости, параллельной *xAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты.<br>Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня $CC_1$ | Сила $\vec{F}$ находится в плоскости *zAy*; стойка *CE* находится в плоскости *zAy*; отрезок *CL* нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной *xAz*; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке *K*.<br>Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и величину уравновешивающего момента *M* |

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 1.2

**Исходные данные для задания С2.**
**Равновесие пространственной системы сил**

| Номер варианта задания | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P*, кН | 5 | 4 | 6 | 10 | 16 | 15 | 12 | 10 | 15 | 14 |
| *F*, кН | 8 | 6 | 12 | 6 | 10 | 10 | 8 | 12 | 12 | 10 |
| *Q*, кН | – | 12 | – | 12 | 8 | 12 | 10 | – | 10 | 12 |
| *M*, кН·м | 12 | – | 10 | 8 | 12 | 6 | 8 | 6 | 8 | – |
| α, град | 60 | 30 | 30 | 30 | 60 | 60 | 60 | 30 | 30 | 60 |
| *a*, м | 1,2 | 0,8 | 1,4 | 0,6 | 1,2 | 0,9 | 1,4 | 0,4 | 0,8 | 0,8 |
| *b*, м | 1,0 | 0,6 | 1,1 | 0,4 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 1,2 | 0,2 | 0,6 |
| *c*, м | 0,8 | 0,5 | 0,8 | 0,3 | 1,4 | 0,8 | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 0,4 |
| *d*, м | 0,4 | 0,4 | 0,6 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,6 | 0,6 |

| Номер варианта задания | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P*, кН | 8 | 10 | 10 | 15 | 14 | 10 | 16 | 9 | 10 | 12 |
| *F*, кН | 6 | 12 | 16 | 8 | 12 | 14 | 10 | 15 | 8 | 10 |
| *Q*, кН | – | 14 | – | 10 | 10 | 12 | 14 | – | 12 | 14 |
| *M*, кН·м | 10 | – | 12 | 12 | 12 | 8 | 10 | 10 | 10 | – |
| α, град | 30 | 60 | 60 | 60 | 30 | 30 | 30 | 60 | 60 | 30 |
| *a*, м | 0,8 | 1,3 | 0,9 | 0,5 | 1,3 | 1,2 | 1,6 | 0,6 | 0,9 | 1,2 |
| *b*, м | 0,6 | 1,1 | 0,6 | 0,4 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 1,2 | 0,3 | 0,8 |
| *c*, м | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 0,2 | 1,5 | 0,9 | 1,2 | 0,4 | 0,6 | 0,6 |
| *d*, м | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,5 | 0,4 | 0,6 | 0,2 | 0,2 | 0,8 |

| Номер варианта задания | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P*, кН | 10 | 12 | 5 | 8 | 10 | 14 | 18 | 12 | 14 | 10 |
| *F*, кН | 12 | 8 | 15 | 10 | 12 | 8 | 10 | 15 | 9 | 8 |
| *Q*, кН | – | 10 | – | 12 | 14 | 10 | 16 | – | 12 | 6 |
| *M*, кН·м | 12 | – | 16 | 14 | 8 | 10 | 8 | 12 | 10 | – |
| α, град | 90 | 30 | 60 | 30 | 45 | 30 | 30 | 60 | 60 | 30 |
| *a*, м | 0,6 | 0,8 | 1,1 | 1,2 | 1,5 | 0,8 | 1,0 | 0,8 | 1,2 | 0,9 |
| *b*, м | 0,8 | 0,6 | 0,9 | 1,0 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 1,4 | 0,6 | 0,4 |
| *c*, м | 0,4 | 1,2 | 0,8 | 0,6 | 1,5 | 0,9 | 1,1 | 0,5 | 0,8 | 0,6 |
| *d*, м | 0,4 | 1,5 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,6 | 0,5 |

## Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

**Задача 1**. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив I радиуса *R* и шкив II радиуса *r*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*. Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*, закручивающая вал вокруг оси *Cy*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в точке *B* шкива II, определяемой центральным углом 30º, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента *M* и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0{,}6$ м, $r = 0{,}3$ м, $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}4$ м.

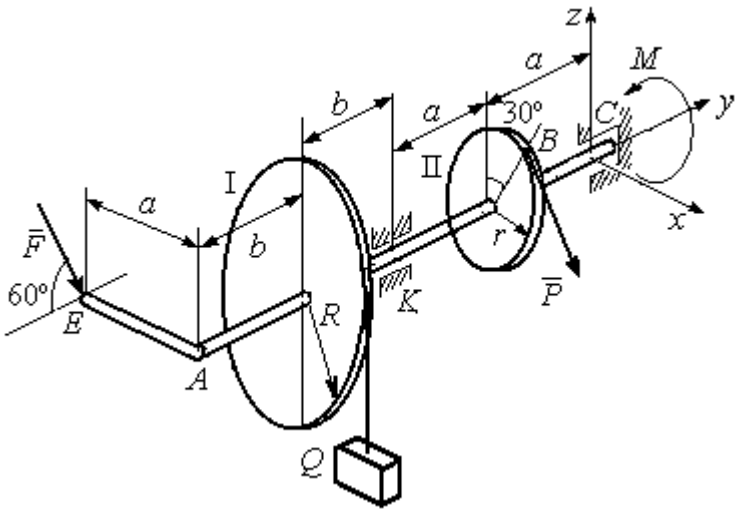


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

*Решение*

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом *Q*, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника *C* раскладываем на три со-

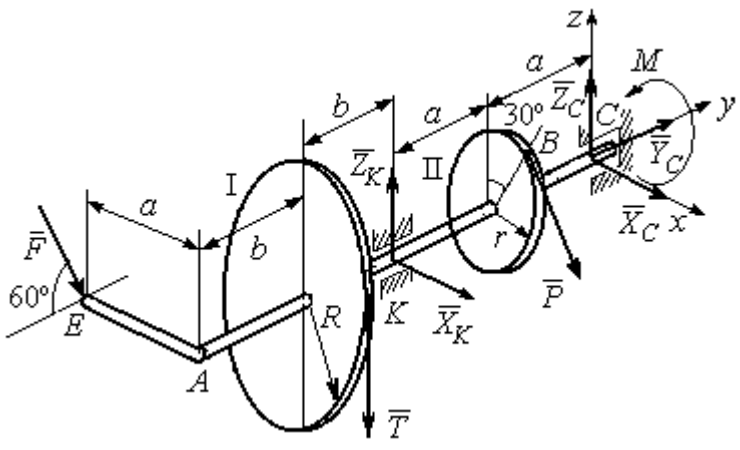


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *K* и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M$) $\infty$ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0\,,\ \sum F_{ky} = 0\,,\ \sum F_{kz} = 0\,,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0\,,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0\,,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0\,.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

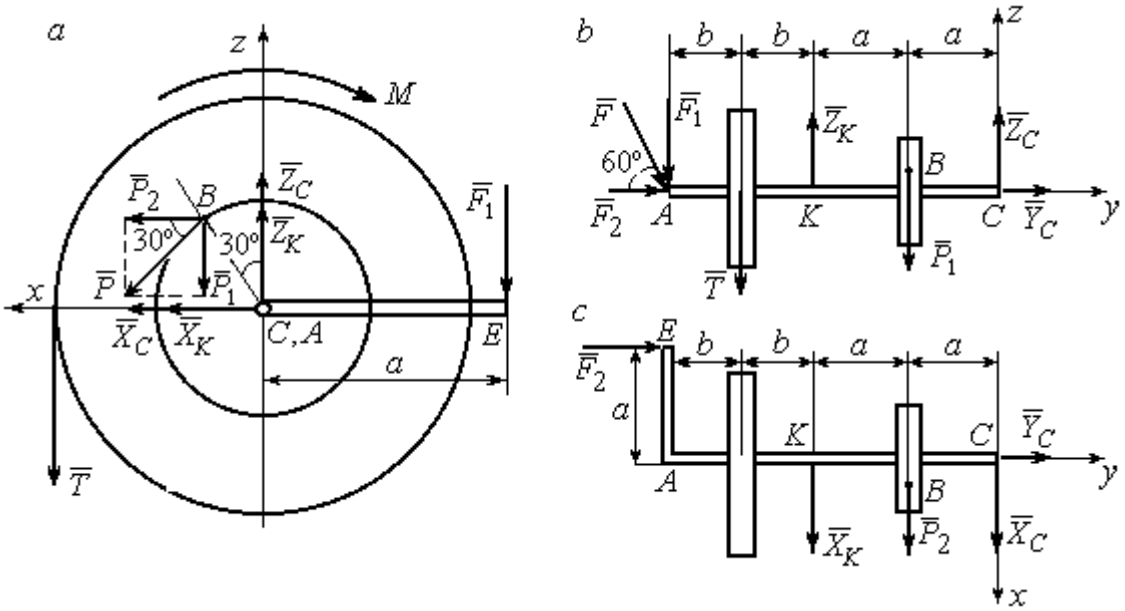



Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
*a* – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
*b* – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
*c* – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси $z$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН, реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

**Задача 2**. Плита весом *P* расположена в вертикальной плоскости *zAy*. В точке А плита закреплена пространственным шарниром, а в точке *B* на оси *y* опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня $CC_1$, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу, в точке *C* перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

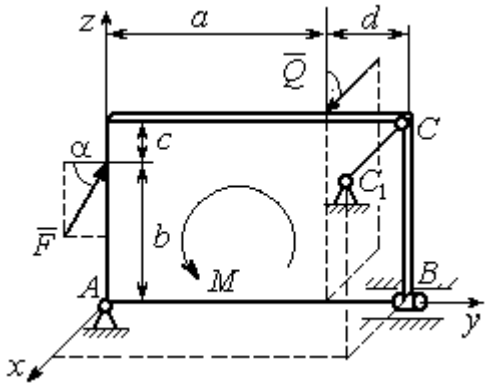


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\vec{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом $\alpha$ к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом *M*. Найти реакции шарниров *A* и *B* и усилие в стержневой подпорке $CC_1$ при равновесии плиты, если параметры нагрузки: *P* = 1 кН, *Q* = 500 Н, *F* = 400 Н, *M* = 300 Н·м, $\alpha = 35^\circ$, *a* = 2 м, *b* = 1,5 м, *c* = 0,2 м, *d* = 0,4 м.

*Решение*

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира *A* раскладывается на три составляющие: $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника *B* лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция стержня $\vec{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

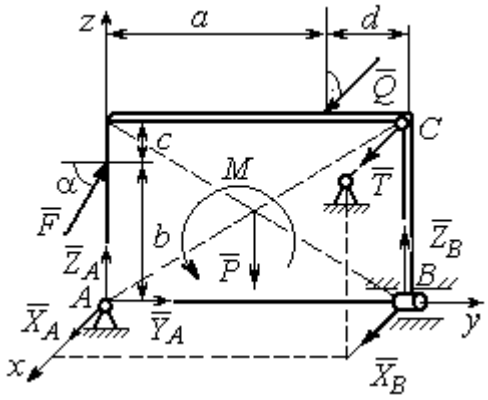


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + F\cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ Z_A + F\sin\alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -F\cos\alpha \cdot b - P \cdot 0{,}5(a+d) + Z_B(a+d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ Q \cdot (b+c) + T \cdot (b+c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0,\ -Q \cdot a - T \cdot (a+d) - X_B \cdot (a+d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0,\ Y_A + 400 \cdot 0{,}82 = 0,\ Z_A + 400 \cdot 0{,}57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0{,}82 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}4 + Z_B \cdot 2{,}4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1{,}7 + T \cdot 1{,}7 = 0,\quad -500 \cdot 2 - T \cdot 2{,}4 - X_B \cdot 2{,}4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500\ \text{Н},\ X_B = 83{,}33\ \text{Н},\ Z_B = 580\ \text{Н},$$

$$X_A = -83{,}33\ \text{Н},\ Y_A = -328\ \text{Н},\ Z_A = 192\ \text{Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира $A$:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389{,}09\ \text{Н},$$

цилиндрического шарнира $B$: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585{,}95\ \text{Н}$.

# 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Кинематикой** называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

## 2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

**Векторный способ** основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета.

**Мгновенная скорость,** или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

**Мгновенное ускорение,** или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины $a_x$, $a_y$, $a_z$ – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям $n$ и $\tau$ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина $a_n$ называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где $\rho$ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина $a_\tau$ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

## 2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

$\varphi$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где $\omega$ – величина угловой скорости тела; $h$ – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

**Ускорение точки вращающегося твердого тела** рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где $\omega$, $\varepsilon$ – угловая скорость и угловое ускорение тела; $h$ – расстояние от точки до оси вращения.

## 2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

**Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела**, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

**Скорость** любой точки $M$ плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки $M$ при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки $M$; $\vec{V}_A$ – скорость полюса $A$; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки $M$ при вращении тела вокруг полюса $A$, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где $\omega$ – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; $MA$ – расстояние между полюсом $A$ и точкой $M$.

**Мгновенным центром скоростей** называется такая точка $P$ плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

### Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек $A$ и $B$ плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек $A$ и $B$ плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия $AB$ перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек $A$ и $B$ параллельны друг другу, но линия $AB$, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

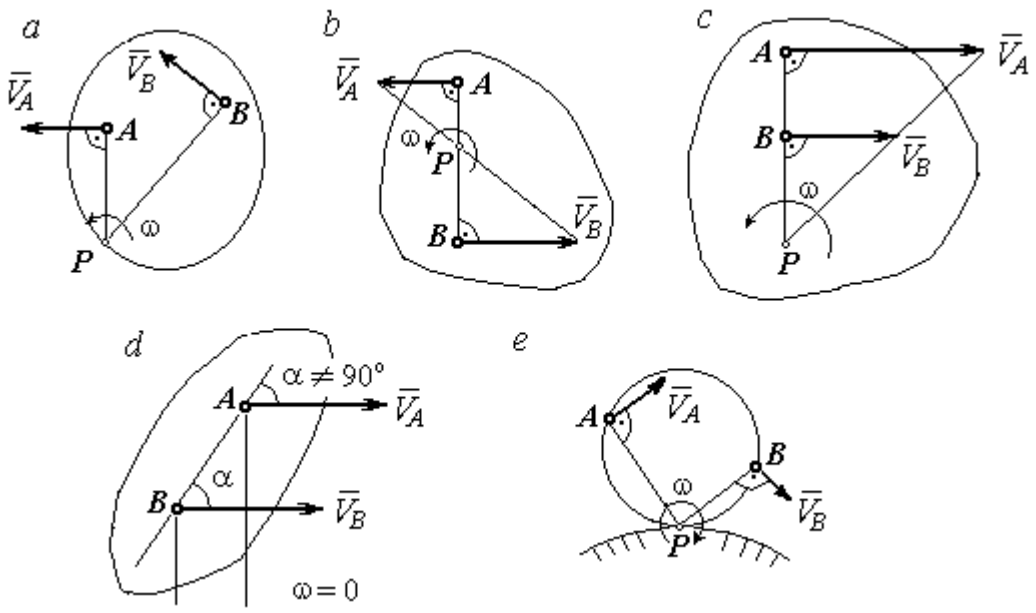



Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

**Ускорение любой точки *M* плоской фигуры** при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса $A$; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки $M$ при вращении фигуры вокруг полюса $A$.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки $M$ к полюсу $A$. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку $AM$ в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки $M$ определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\,,\quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\,,$$

где $\omega$, $\varepsilon$ – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); $AM$ – расстояние от точки $M$ до полюса $A$ (см. рис. 2.2).

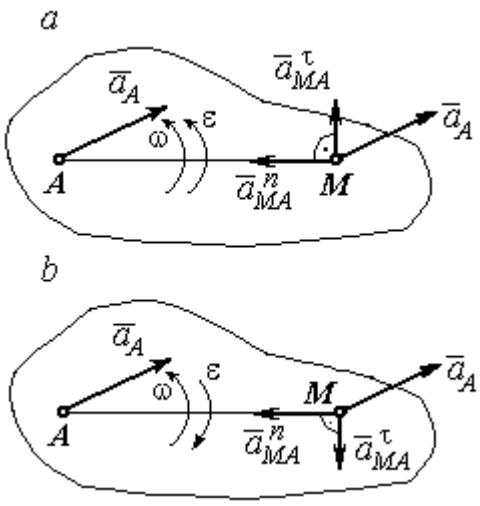



Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
*a* – ускоренное движение;
*b* – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса $A$ и точки $M$, то для определения ускорения точки $M$ используется векторное равенство

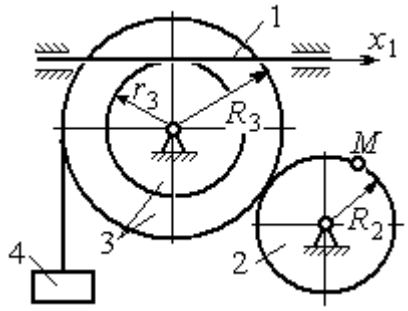
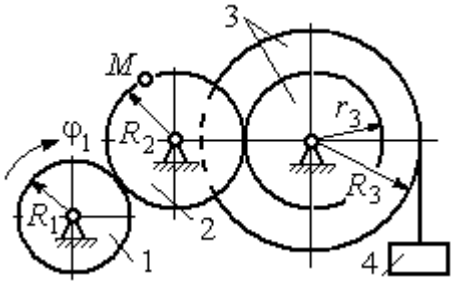
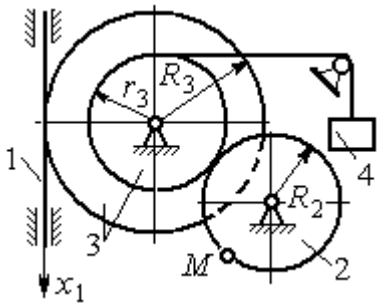
$$\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA},$$

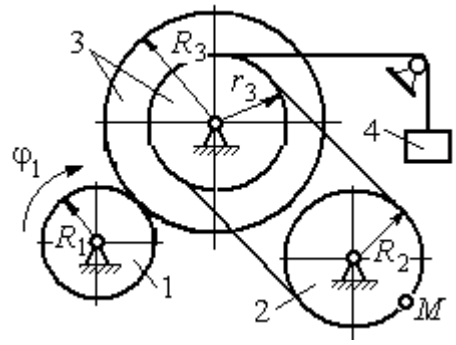
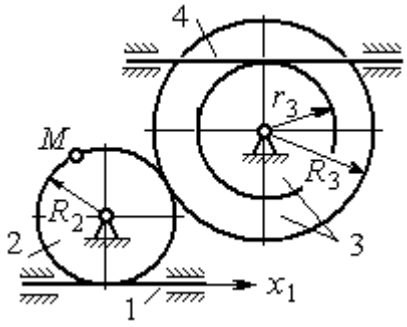
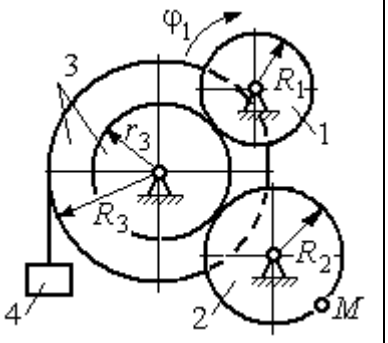
где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки $M$ и полюса $A$ при движении их по заданным траекториям.

## 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени $t_1$ скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки $M$ звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

| Варианты № 1, 11, 21 | Варианты № 2, 12, 22 | Варианты № 3, 13, 23 |
|---|---|---|
|  |  |  |

| Варианты № 4, 14, 24 | Варианты № 5, 15, 25 | Варианты № 6, 16, 26 |
|---|---|---|
|  |  |  |

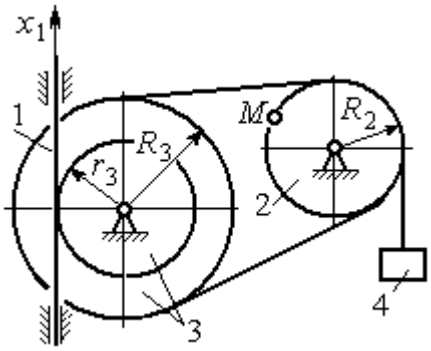
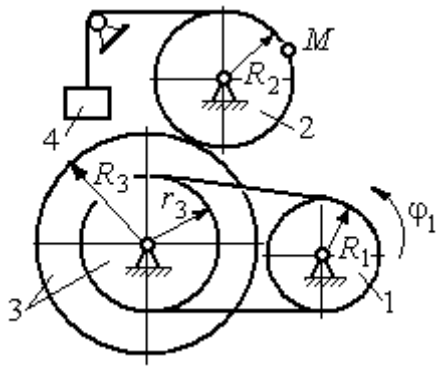
| Варианты № 7, 17, 27 | Варианты № 8, 18, 28 |
|---|---|
|  |  |

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

*Окончание вариантов задания К1*

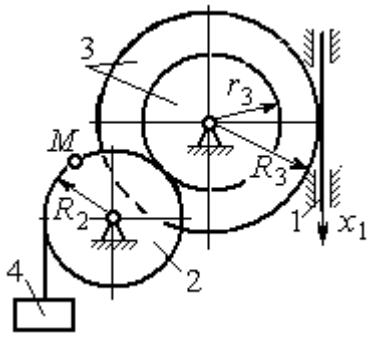
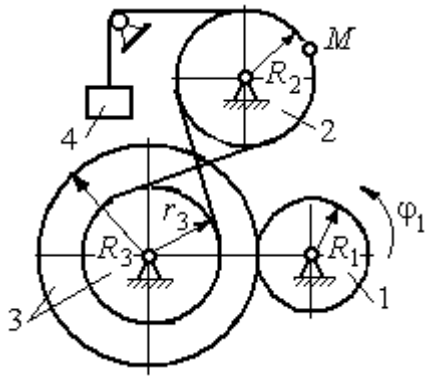
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |



Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

**Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела**

| Номер варианта задания | $R_1$,см | $R_2$, см | $R_3$, см | $r_3$, см | $x_1(t)$, см<br>$\varphi_1(t)$, рад | $t_1$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | – | 40 | 45 | 35 | $x_1(t) = (3t-1)^2$ | 2 |
| **2** | 10 | 20 | 38 | 18 | $\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$ | 3 |
| **3** | – | 30 | 42 | 18 | $x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **4** | 15 | 30 | 45 | 20 | $\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$ | 2 |
| **5** | – | 30 | 40 | 20 | $x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$ | 3 |
| **6** | 10 | 20 | 30 | 10 | $\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **7** | – | 30 | 40 | 30 | $x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$ | 2 |
| **8** | 8 | 10 | 30 | 25 | $\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$ | 2 |
| **9** | – | 18 | 30 | 18 | $x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$ | 3 |
| **10** | 15 | 30 | 50 | 20 | $\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$ | 2 |
| **11** | – | 30 | 40 | 25 | $x_1(t) = (t^2 - 3t)$ | 2 |
| **12** | 12 | 20 | 40 | 28 | $\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$ | 3 |
| **13** | – | 25 | 60 | 42 | $x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **14** | 10 | 30 | 45 | 30 | $\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$ | 2 |

*Окончание табл. 2.1*

| Номер варианта задания | $R_1$,см | $R_2$, см | $R_3$, см | $r_3$, см | $x_1(t)$, см<br>$\varphi_1(t)$, рад | $t_1$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | – | 20 | 30 | 20 | $x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$ | 3 |
| **16** | 12 | 18 | 40 | 20 | $\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **17** | – | 20 | 35 | 15 | $x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$ | 2 |
| **18** | 15 | 18 | 40 | 25 | $\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **19** | – | 22 | 50 | 18 | $x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$ | 3 |
| **20** | 10 | 20 | 45 | 10 | $\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$ | 4 |
| **21** | – | 20 | 40 | 20 | $x_1(t)=t+(3t-4)^2$ | 2 |
| **22** | 8 | 18 | 42 | 18 | $\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$ | 3 |
| **23** | – | 45 | 60 | 40 | $x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$ | 1 |
| **24** | 5 | 15 | 30 | 20 | $\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$ | 2 |
| **25** | – | 15 | 35 | 25 | $x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$ | 3 |
| **26** | 18 | 20 | 35 | 20 | $\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$ | 1 |
| **27** | – | 15 | 35 | 15 | $x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **28** | 10 | 12 | 40 | 25 | $\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **29** | – | 35 | 50 | 10 | $x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$ | 1 |
| **30** | 10 | 20 | 40 | 10 | $\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$ | 4 |

## Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на момент времени $t_1$, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2$= 20 см, $r_2$= 5 см, $R_3$= 8 см, $r_3$ = 4 см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, $t_1$=1 с.

*Решение*

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками $\varphi_2$, $\varphi_3$, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси $x_4$.

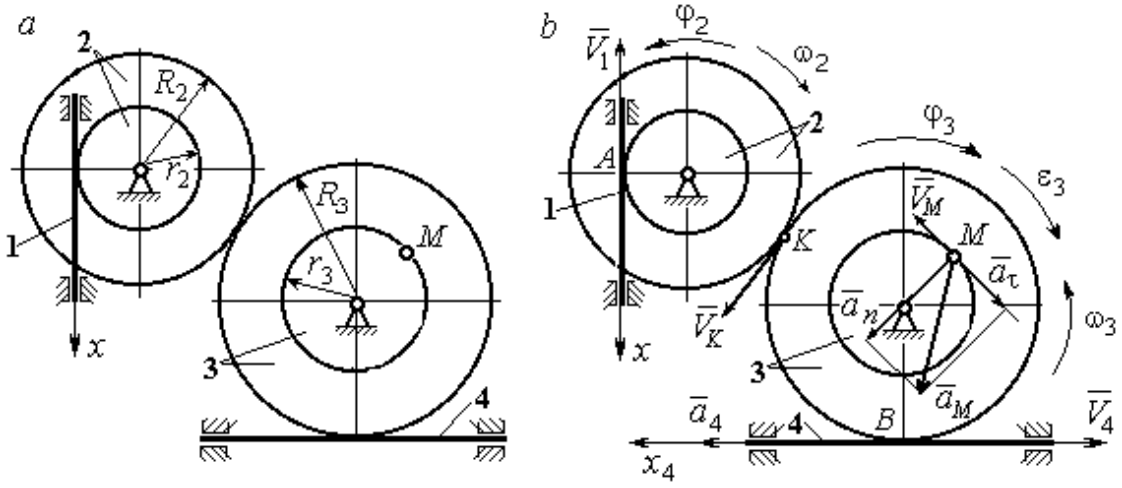



Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
*a* – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты $x$. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Эту же скорость будет иметь точка *A* – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии $r_2$ от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где $\omega_2$ – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0{,}2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0{,}2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой $\omega_2$ в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла $\varphi_2$. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2{,}5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0{,}5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла $\varphi_3$, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2{,}5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси $x_4$ в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с$^2$. Из того, что угловая скорость $\omega_3$ и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота $\varphi_3$, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение $a_\tau$ точки $M$ рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с$^2$. Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки $M$ $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение $a_n$ точки $M$ рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с$^2$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки $M$ в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8{,}06$ см/с$^2$. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

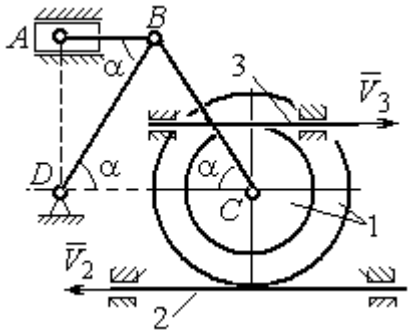
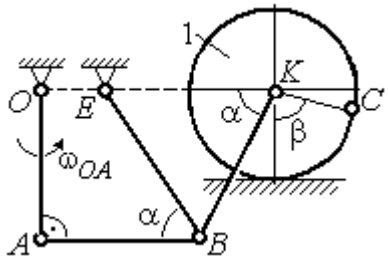
Ускорение $a_4$ звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение $a_4$ не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси $x_4$ в сторону положительных значений.

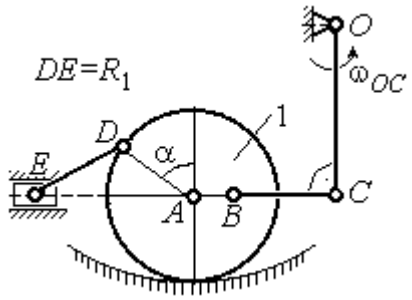
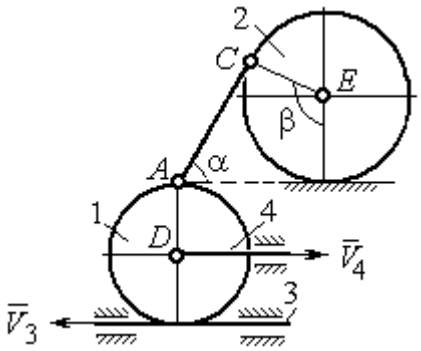
## 2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** |
|---|---|
|  <br>Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$ |  <br>Найти: $V_A, V_B, V_K$, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, $\omega_{BE}, \omega_{BK}$ |

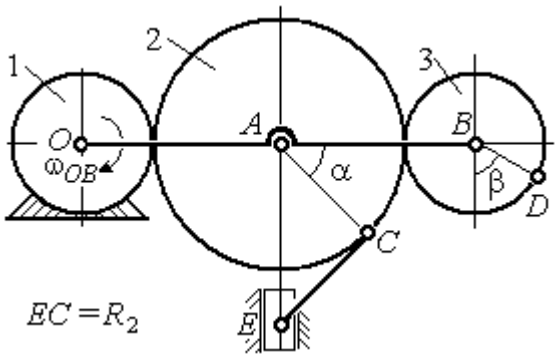
| Номер варианта задания | $R_1$, см | $r_1$, см | $AD$, см | α, град | $V_2$, см/с | $V_3$, см/с | Номер варианта задания | $R_1$, см | $OA$, см | $OE$, см | α, град | β, град | $V_C$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 5 | 20 | 30 | 8 | 10 | **2** | 3 | 5 | 4 | 30 | 60 | 10 |
| **11** | 12 | 8 | 25 | 45 | 10 | 4 | **12** | 4 | 8 | 6 | 45 | 90 | 8 |
| **21** | 10 | 6 | 15 | 60 | 5 | 5 | **22** | 5 | 12 | 2 | 60 | 120 | 12 |

| **Варианты № 3, 13, 23** | **Варианты № 4, 14, 24** |
|---|---|
|  <br>Найти: $V_A, V_B, V_C$, $V_D, V_E$, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$ |  <br>Найти: $V_A, V_C, V_E$, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$ |

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $OC$, см | $AB$, см | $BC$, см | α, град | $\omega_{OC}$, рад/с | Номер варианта задания | $R_1$, см | $R_2$, см | α, град | β, град | $V_3$, см/с | $V_4$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 12 | 18 | 10 | 35 | 60 | 4 | **4** | 10 | 15 | 30 | 60 | 8 | 4 |
| **13** | 10 | 15 | 10 | 25 | 90 | 8 | **14** | 6 | 10 | 45 | 90 | 4 | 6 |
| **23** | 15 | 20 | 5 | 20 | 120 | 6 | **24** | 10 | 12 | 60 | 120 | 3 | 3 |

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

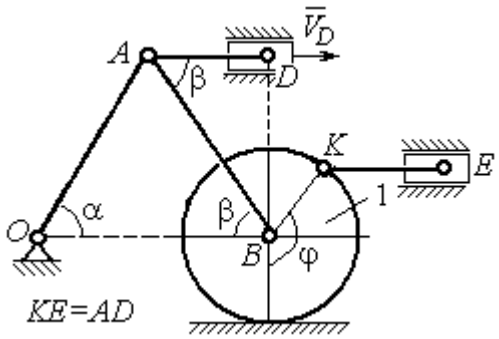
**Варианты № 5, 15, 25**




Найти: $V_A$, $V_B$, $V_C$, $V_D$, $V_E$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_{EC}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $R_2$, см | $R_3$, см | α, град | β, град | $\omega_{OB}$, рад/с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 10 | 20 | 12 | 60 | 0 | 6 |
| **15** | 6 | 18 | 10 | 90 | 90 | 8 |
| **25** | 20 | 25 | 15 | 120 | 180 | 4 |

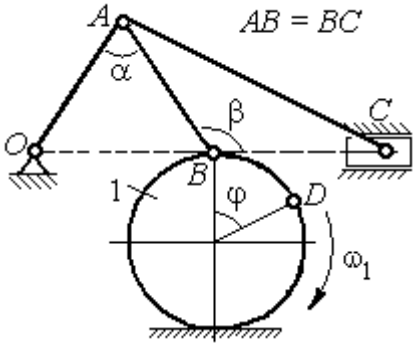
**Варианты № 6, 16, 26**




Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$ $\omega_1$, $\omega_{OA}$, $\omega_{AB}$, $\omega_{AD}$, $\omega_{KE}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $OA$, см | α, град | β, град | φ, град | $V_D$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | 10 | 20 | 30 | 60 | 60 | 12 |
| **16** | 12 | 26 | 30 | 30 | 90 | 8 |
| **26** | 15 | 30 | 60 | 60 | 120 | 15 |

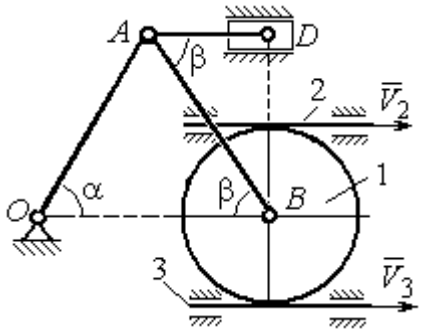
**Варианты № 7, 17, 27**




Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $AB$, см | α, град | β, град | φ, град | $V_D$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | 10 | 20 | 30 | 60 | 60 | 12 |
| **17** | 12 | 25 | 60 | 120 | 90 | 16 |
| **27** | 8 | 16 | 30 | 60 | 120 | 10 |

**Варианты № 8, 18, 29**

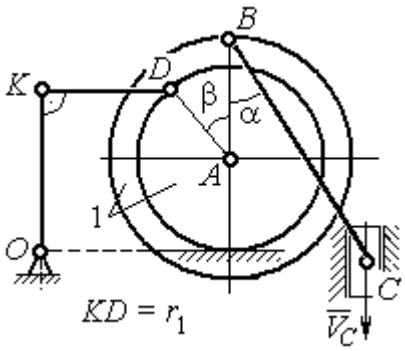
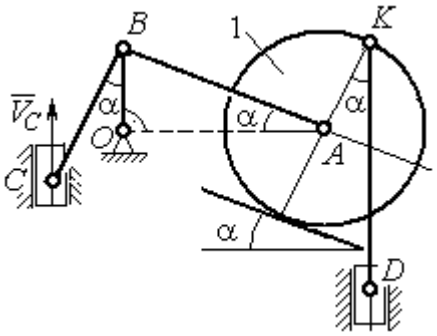



Найти: $V_A, V_B, V_D$, $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $OA$, см | α, град | β, град | $V_2$, см/с | $V_3$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **8** | 10 | 20 | 30 | 60 | 12 | 4 |
| **18** | 12 | 26 | 30 | 30 | 8 | 2 |
| **28** | 15 | 30 | 60 | 60 | 6 | 3 |

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

*Окончание вариантов задания К2*

| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  <br>Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1,$ $V_A, V_B, V_K, V_D$ |  <br>Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K,$ $\omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$ |

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $r_1$, см | α, град | β, град | $BC$, см | $V_C$, см/с | Номер варианта задания | $R_1$, см | $CB$, см | $OB$, см | $KD$, см | α, град | $V_C$, см/с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9** | 20 | 12 | 45 | 60 | 60 | 8 | **10** | 10 | 20 | 30 | 60 | 30 | 4 |
| **19** | 24 | 16 | 60 | 90 | 50 | 4 | **20** | 12 | 26 | 30 | 50 | 45 | 2 |
| **29** | 16 | 10 | 30 | 120 | 40 | 6 | **30** | 15 | 30 | 60 | 60 | 60 | 3 |

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

## Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

**Задача 1.** Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня $OC$ и подвижных дисков 2 и 3 радиусами $r_2$, $r_3$, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках $A$ и $C$. Стержень $OC$ вращается вокруг неподвижного центра $O$ с угловой скоростью $\omega_{OC}$. Диск 2, увлекаемый стержнем $OC$, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом $r_1$. Диск 3, также увлекаемый стержнем $OC$, катится без проскальзыва-

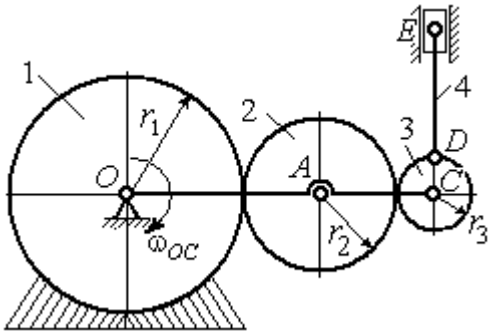


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке *D*, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке *E* шарнирно прикреплен поршень *E*, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень *OC* горизонтален, стержень *DE* направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек *A*, *C*, *D*, *E*, угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: $r_1$ = 6 см, $r_2$ = 4 см, $r_3$ = 2 см, *DE* = 10 см, $\omega_{OC}$ = 1 рад/с.

*Решение*

Определим скорость точки *A*, общей для стержня *OC* и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

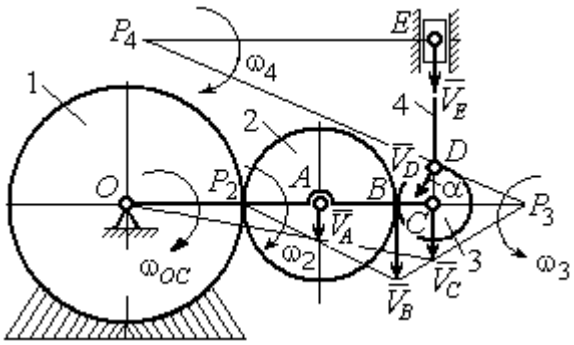



Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой $P_2$. В этом случае скорость точки *A* может быть определена через угловую скорость диска $\omega_2$ следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как $V_A$ = 10 см/с, получим $\omega_2$ = 2,5 рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек *B* и *C*. Скорость точки *B* может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку $BP_2$ и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей $P_2$.

Скорость точки $C$ определяется через угловую скорость стержня $OC$: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню $OC$ и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей $P_3$ диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины $CP_3$, получим: $CP_3$= 8 см. Скорость точки $C$ выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3}$= 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек $C$ и $B$, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки $D$ $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$ = $=2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку $DP_3$ и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра $P_3$.

Для определения скорости поршня $E$ воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки $D$ и $E$. По построению, угол $\alpha$ между вектором $\vec{V}_D$ и осью $DE$ равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки $E$: $V_E$=16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка $P_4$ – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек $D$ и $E$ (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \dfrac{V_E}{EP_4}$, где $EP_4$ – расстояние от точки $E$ до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, $\omega_4 = 0{,}4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки $D$.

**Задача 2**. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы $OA$ и $ED$ вращаются вокруг неподвижных центров $O$ и $E$. В крайней точке $D$ кривошипа $ED$ к нему прикреплён шатун $DB$, второй конец которого в точке $B$ прикреплён к кривошипу $OA$. Шатун $AC$ прикреплён в точке $A$ к кривошипу $AO$, а другим своим концом – к ползуну $C$, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип $OA$ вертикален, шатун $DB$ расположен горизонтально, кривошип $ED$ наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун $AC$ отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа $AO$. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма $AC$ = 6 см, $AB$ = 2 см, $BO$ = 8 см, $DB$ = 10 см и скорость ползуна в данный момент $V_C$ = 4 см/с.

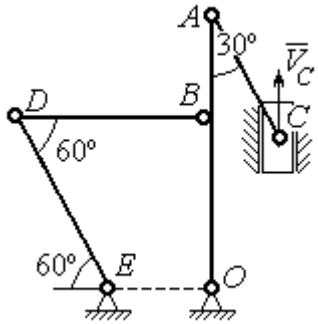


Рис. 2.11. Стержневой механизм

*Решение*

Кривошипы $OA$ и $ED$ совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек $A$ и $B$ перпендикулярны кривоши-

пу $OA$, а скорость $\vec{V}_D$ точки $D$ перпендикулярна кривошипу $ED$. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

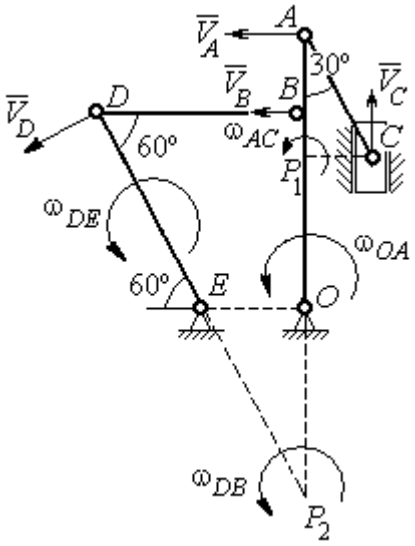



Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун $AC$ совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей $P_1$ находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена $AC$ равна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{P_1C} = \dfrac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка $A$ принадлежит шатуну $AC$, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

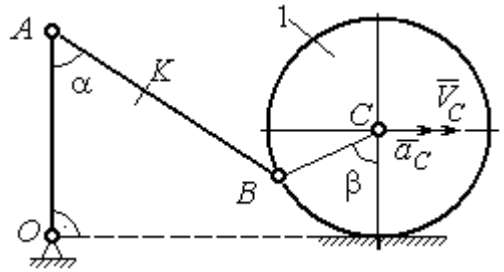
Теперь, исходя из того, что точка $A$ принадлежит как шатуну $AC$, так и кривошипу $OA$, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки $B$ кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

Шатун $DB$ совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек $B$ и $D$, построим мгновенный центр скоростей $P_2$ звена $DB$ как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна $DB$ $\omega_{DB} = \dfrac{V_B}{P_2B} = \dfrac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки $D$ $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \dfrac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа $DE$ $\omega_{DE} = \dfrac{V_D}{DE} = \dfrac{6{,}4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

## 2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

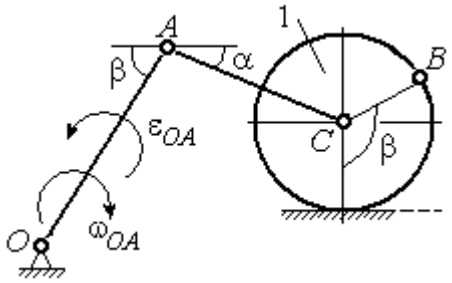
**Варианты № 1, 11, 21**




Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

| Номер варианта задания | $AB$, см | $AK$, см | α, град | β, град | $R_1$, см | $V_C$, см/с | $a_C$, см/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 10 | 60 | 120 | 10 | 12 | 6 |
| **11** | 20 | 16 | 30 | 60 | 8 | 10 | 8 |
| **21** | 18 | 10 | 60 | 180 | 6 | 8 | 4 |

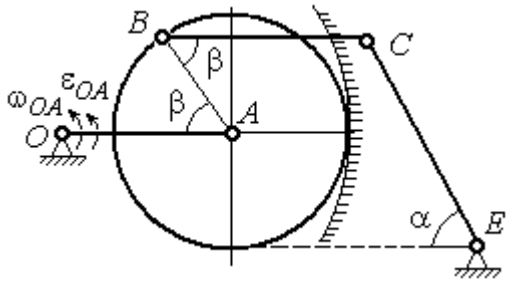
**Варианты № 2, 12, 22**




Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $OA$, см | $AC$, см | α, град | β, град | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 5 | 10 | 12 | 30 | 60 | 2 | 4 |
| **12** | 8 | 24 | 20 | 30 | 120 | 1 | 2 |
| **22** | 6 | 12 | 15 | 60 | 90 | 2 | 3 |

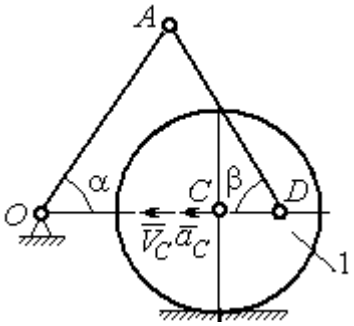
**Варианты № 3, 13, 23**




Найти: $a_C$, $a_B$, $\varepsilon_{BC}$

| Номер варианта задания | $BC$, см | $AO$, см | α, град | β, град | $R_1$, см | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 16 | 15 | 60 | 90 | 10 | 2 | 3 |
| **13** | 18 | 12 | 90 | 60 | 8 | 3 | 2 |
| **23** | 14 | 12 | 30 | 120 | 10 | 2 | 4 |

**Варианты № 4, 14, 24**

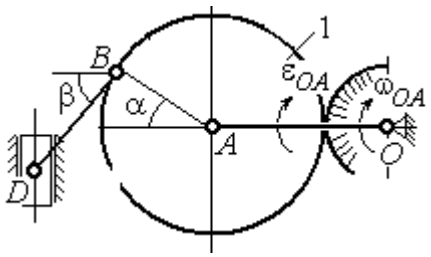



Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $OA$, см | $DC$, см | α, град | β, град | $V_C$, см/с | $a_C$, см/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 10 | 28 | 5,78 | 60 | 30 | 10 | 2 |
| **14** | 8 | 24 | 4,62 | 30 | 90 | 8 | 3 |
| **24** | 6 | 20 | 6 | 45 | 45 | 12 | 2 |

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

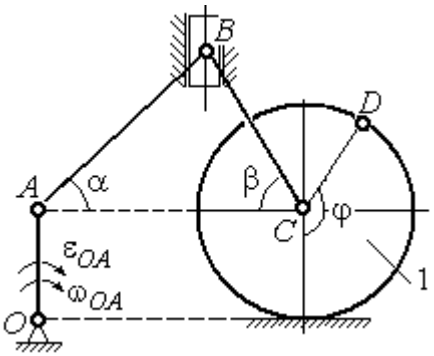
**Варианты № 5, 15, 25**




Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

| Номер варианта задания | $OA$, см | $BD$, см | α, град | β, град | $R_1$, см | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 16 | 10 | 60 | 30 | 10 | 4 | 3 |
| **15** | 18 | 8 | 90 | 45 | 12 | 2 | 4 |
| **25** | 14 | 12 | 30 | 60 | 8 | 3 | 2 |

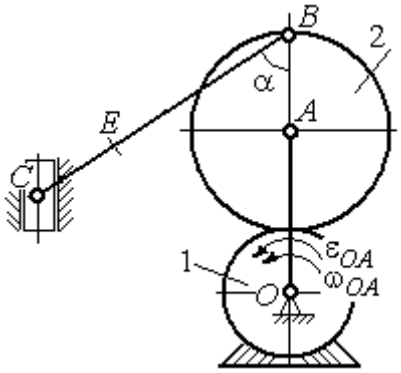
**Варианты № 6, 16, 26**




Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $AB$, см | φ, град | α, град | β, град | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | 6 | 18 | 60 | 30 | 30 | 2 | 3 |
| **16** | 8 | 20 | 90 | 60 | 30 | 2 | 4 |
| **26** | 5 | 16 | 120 | 30 | 60 | 3 | 4 |

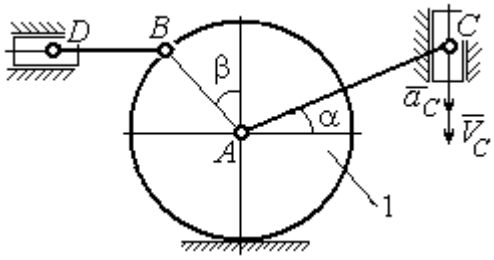
**Варианты № 7, 17, 27**




Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$

| Номер варианта задания | $BC$, см | $BE$, см | α, град | $R_1$, см | $R_2$, см | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | 22 | 10 | 60 | 2 | 10 | 2 | 3 |
| **17** | 28 | 15 | 30 | 3 | 6 | 3 | 4 |
| **27** | 20 | 8 | 45 | 4 | 8 | 2 | 2 |

**Варианты № 8, 18, 28**

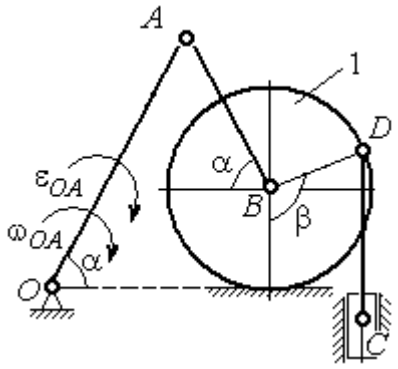
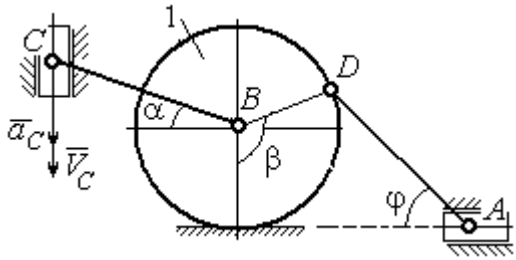



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

| Номер варианта задания | $R_1$, см | $BD$, см | $AC$, см | α, град | β, град | $V_C$, см/с | $a_C$, см/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8** | 4 | 5 | 12 | 60 | 60 | 12 | 5 |
| **18** | 6 | 10 | 16 | 45 | 90 | 10 | 8 |
| **28** | 8 | 8 | 16 | 30 | 120 | 8 | 6 |

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

*Окончание вариантов задания К3*

| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$ |  Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$ |

| Номер варианта задания | $OA$, см | $DC$, см | α, град | β, град | $R_1$, см | $\omega_{OA}$, рад/с | $\varepsilon_{OA}$, рад/с$^2$ | Номер варианта задания | $R_1$, см | $BC$, см | φ, град | α, град | β, град | $V_C$, см/с | $a_C$, см/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9** | 18 | 10 | 30 | 120 | 4 | 2 | 3 | **10** | 6 | 14 | 60 | 30 | 120 | 15 | 3 |
| **19** | 20 | 12 | 60 | 60 | 6 | 3 | 4 | **20** | 5 | 18 | 45 | 60 | 90 | 10 | 5 |
| **29** | 18 | 8 | 60 | 90 | 4 | 2 | 3 | **30** | 4 | 16 | 30 | 45 | 60 | 12 | 4 |

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

## Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

**Задача 1**. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R$ = 0,5 м и $r$ = 0,3 м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном $AC$, один конец которого соединён с центром барабана в точке $A$, а другой – с ползуном $C$, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун $AC$ отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки $B$ барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна $C$: $V_C$ = 9м/с, $a_C$ = 4 м/с$^2$.

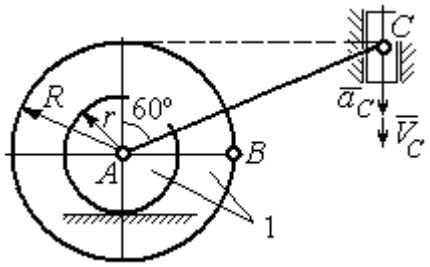



Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

*Решение*

Найдём угловые скорости $\omega_{AC}$, $\omega_1$ шатуна $AC$ и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей $P_2$ находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки $C$ направлена вертикально вниз. Точка $A$ принадлежит как шатуну $AC$, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки $A$ параллельна поверхности качения барабана.

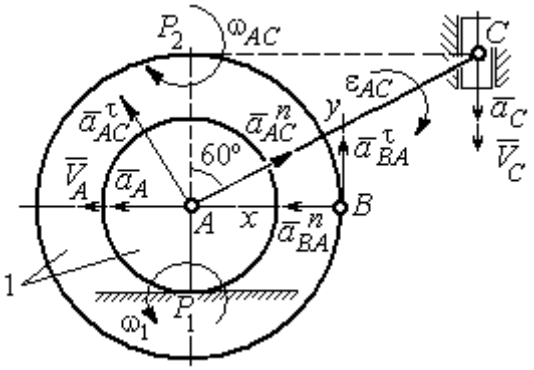


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\text{tg}60^\circ} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки $A$ шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке $P_1$ на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки $A$ через полюс $C$ на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{AC} + \vec{a}^{\,n}_{AC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки $C$, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,\tau}_{AC}$, $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки $A$ при вращении шатуна $AC$ вокруг полюса $C$. Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ направлен вдоль шатуна $AC$ от точки $A$ к полюсу $C$ и равен по величине $a^n_{AC} = \omega^2_{AC} \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с$^2$. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку $AC$.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна $AC$ $\varepsilon_{AC}$ неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки $A$ определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

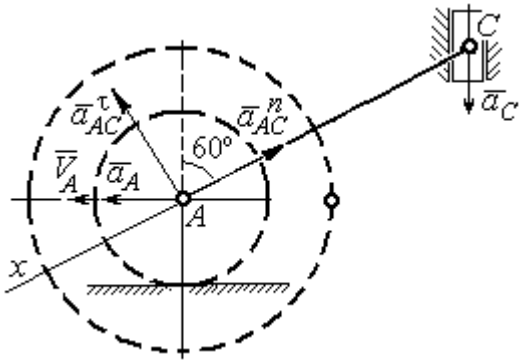


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось $x$ вдоль линии $AC$ (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\,\tau} + \vec{a}_{AC}^{\,n}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}\right) = -\,122{,}4$ м/с$^2$. Отрицательное значение ускорения точки $A$ означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки $B$, выразим его через полюс $A$ на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки $A$, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$, $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки $B$ при вращении барабана вокруг полюса $A$.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ равен по величине $a_{BA}^{n} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с$^2$. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки $B$ к полюсу $A$ (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ вычисляется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где $\varepsilon_1$ – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения $\varepsilon_{AC}$ шатуна $AC$) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние $AP_1$ от точки $A$ до центра скоростей барабана $P_1$ остаётся постоянным, равным $r$. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки $A$ можно продифференцировать. Получим $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка $A$ движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с$^2$, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с$^2$.

Заметим, что для вычисления углового ускорения $\varepsilon_{AC}$ шатуна $AC$ подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние $AP_2$ от точки $A$ до центра скоростей $P_2$ шатуна $AC$ является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат $xBy$ как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки $B$:

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с$^2$, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с$^2$. Вектор полного ускорения точки $B$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки $B$: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34{,}32$ м/с$^2$.

**Задача 2**. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип $OA$ вращается вокруг оси $O$ с угловой скоростью $\omega_{OA}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{OA}$. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке $A$, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков $R_1$ и $R_2$. На краю диска 2 в точке $B$ шарнирно прикреплен стержень $BC$, соединенный с центром $C$ диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки $D$ и угловое ускорение стержня $BC$, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с$^2$, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

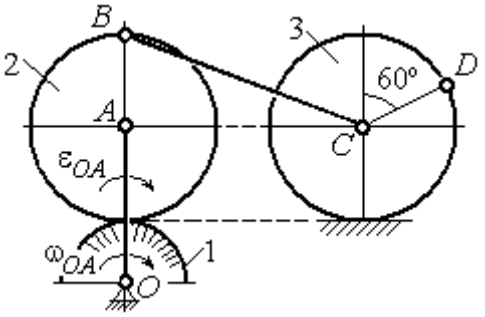


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

*Решение*

**Определение угловых скоростей звеньев механизма**.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа $OA$. Скорость точки $A$: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу $OA$ в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка $P_2$ соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки $B$ диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня $BC$ заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки $B$ и $C$ не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня $BC$ отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

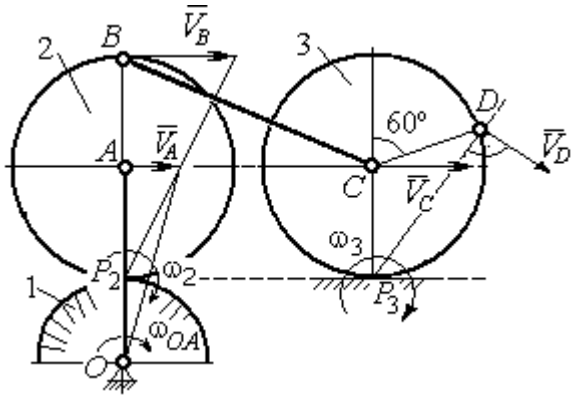



Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка $P_3$ касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки $D$ диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину $DP_3$ находим из треугольника $P_3DC$. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30^\circ = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии $DP_3$ и (см. рис. 2.20).

**Определение ускорений точек механизма**.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки $C$ векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки $B$, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки $C$ при вращении стержня $BC$ вокруг полюса $B$, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^{\tau}_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки $C$ $a^n_{CB} = 0$, так как стержень $CB$ совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня $\varepsilon_{CB}$. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня $BC$ в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой $\varepsilon_{CB}$.

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня $BC$ в сторону углового ускорения $\varepsilon_{CB}$ (см. рис. 2.21).

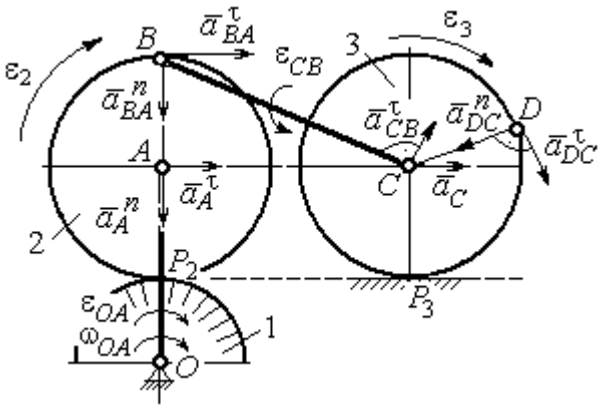



Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Выразим ускорение точки $B$ через полюс $A$: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса $A$; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки $B$ при вращении диска 2 вокруг полюса $A$. Величина нормальной составляющей ускорения точки $B$ $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA = 288$ см/с$^2$. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса $BA$ от точки $B$ к полюсу $A$ (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки $B$ при вращении диска 2 вокруг полюса $A$ вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения $\varepsilon_2$ диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние $AP_2$ остается постоянным, равным $R_2$. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_{A} = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{A}}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину $a^{\tau}_{A}$, рассмотрим вращательное движение кривошипа $OA$ вокруг неподвижной оси $O$. Ускорение точки $A$ представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – известные

нормальная и касательная составляющие ускорения точки $A$ кривошипа $OA$: $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192$ см/с$^2$, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24$ см/с$^2$. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения $a_{BA}^\tau$ точки $B$ при вращении диска 2 вокруг полюса $A$: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ $= 3$ рад/с$^2$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24$ см/с$^2$.

Для определения ускорения точки $C$ имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси $Cx$, $Cy$, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка $BC$ и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

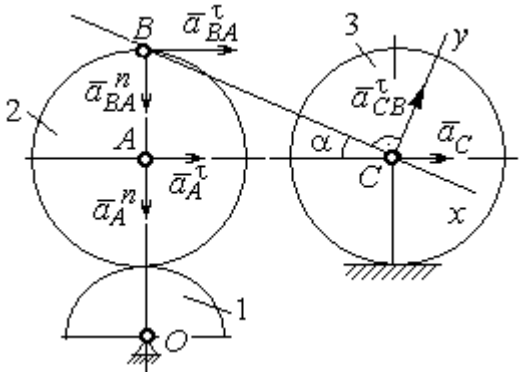


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha;$$

$$a_C \sin\alpha = a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha + a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где $\alpha$ – угол между стержнем $BC$ и линией центров $AC$; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256{,}7$ см/с$^2$, $a_{CB}^\tau = -358{,}12$ см/с$^2$.

Модуль углового ускорения стержня $BC$: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 17{,}9$ рад/с$^2$.

Знак «минус» величины $a_{CB}^\tau$ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня $BC$, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой $\varepsilon_{CB}$, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки $D$ через полюс $C$: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{DC} + \vec{a}^{\,\tau}_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки $C$; $\vec{a}^{\,n}_{DC}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки $D$ при вращении диска 3 вокруг полюса $C$. Величина нормального ускорения точки $D$: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC$ = 1152 см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}^{\,n}_{DC}$ направлен по радиусу от точки $D$ к полюсу $C$ (рис. 2.23).

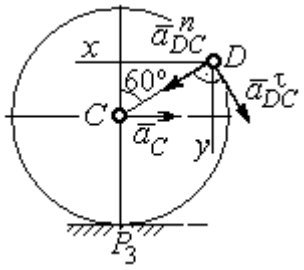



Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки $D$

Для расчёта касательной составляющей $a^{\tau}_{DC}$ ускорения точки $D$ найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3}$ = 32,09 рад/с$^2$. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки $D$: $a^{\tau}_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC$ = 256,7 см/с$^2$. Направление вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси $Dx$ и $Dy$, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки $D$ на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^{\tau}_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^{\tau}_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx}$ = 612,5 см/с$^2$, $a_{Dy}$ = 798,3 см/с$^2$. Величина ускорения точки $D$:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

# 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

## 3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где $\omega_e$ – величина угловой скорости вращения тела; $h_e$ – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

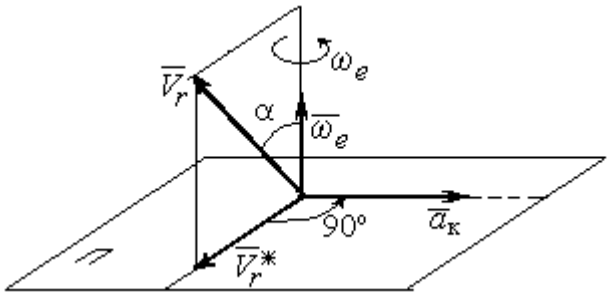



Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где $\rho$ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где $\varepsilon_e$ – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; $h_e$ – расстояние от точки до оси вращения тела; $\omega_e$ – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0,\ a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$.

### 3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

**Задача 1.** Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке $C$ и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

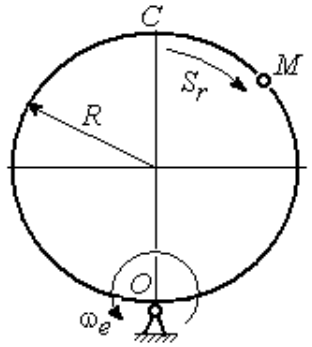
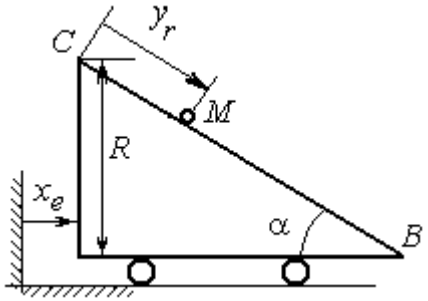
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени $t_1$.

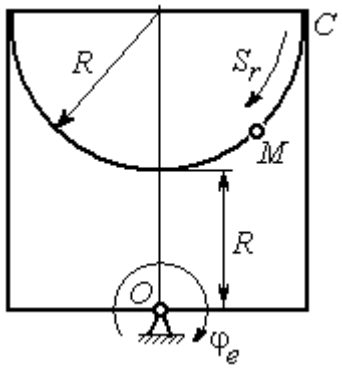
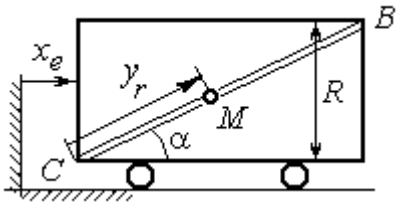
**Задача 2.** Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке $C$ и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени $t_2$, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

| **Варианты № 1, 11, 21** | |
|---|---|
| Задача 1 | Задача 2 |
|  |  <br>В момент $t = t_2$ точка $M$ прошла половину пути $CB$ |

| **Варианты № 2, 12, 22** | |
|---|---|
| Задача 1 | Задача 2 |
|  |  <br>В момент $t = t_2$ точка $M$ прошла 2/3 пути $CB$ |

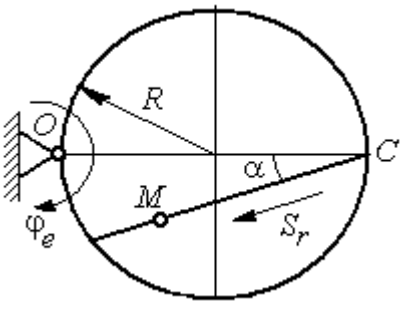
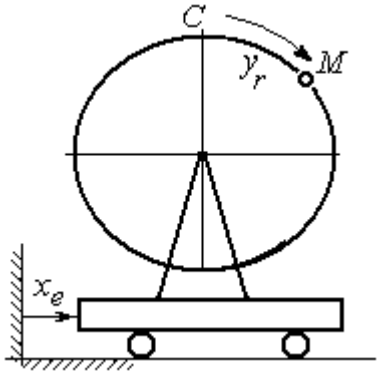
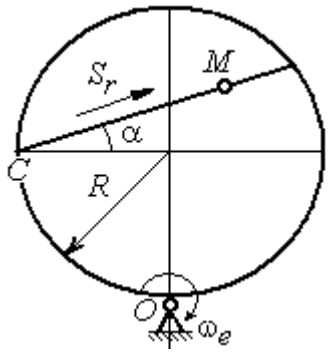
| **Варианты № 3, 13, 23** | |
|---|---|
| Задача 1 | Задача 2 |
|  |  |

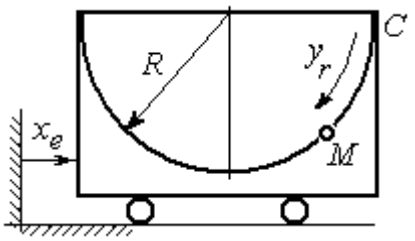
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

**Варианты № 4, 14, 24**

Задача 1

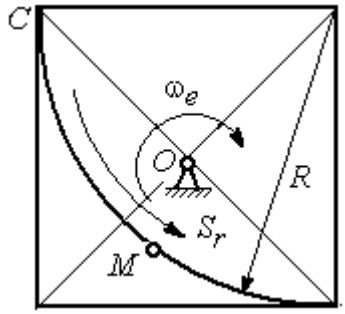



Задача 2

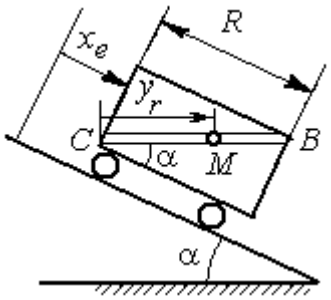



**Варианты № 5, 15, 25**

Задача 1



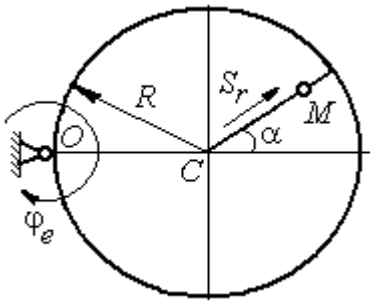

Задача 2




В момент $t = t_2$ точка *M* прошла путь *CB*

**Варианты № 6, 16, 26**

Задача 1




Задача 2

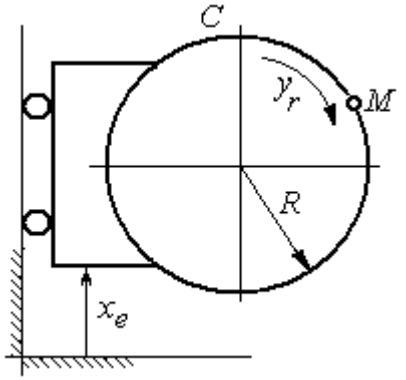
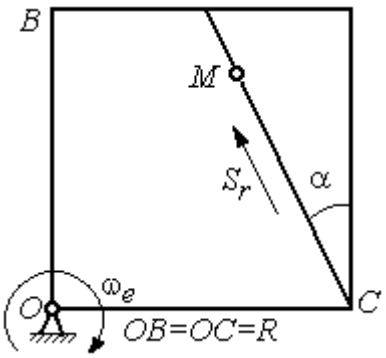


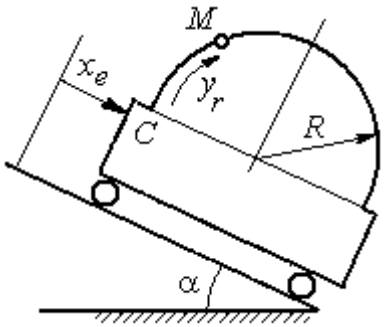

Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

**Варианты № 7, 17, 27**

Задача 1

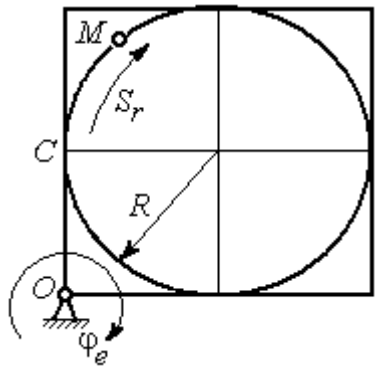



Задача 2

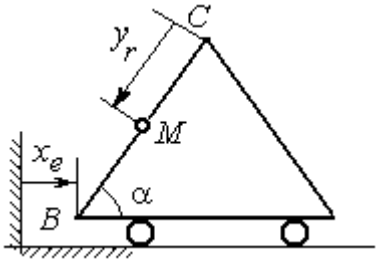



**Варианты № 8, 18, 28**

Задача 1



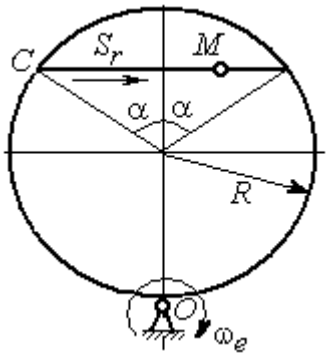

Задача 2




В момент $t = t_2$ точка $M$ прошла половину пути $CB = R$

**Варианты № 9, 19, 29**

Задача 1




Задача 2

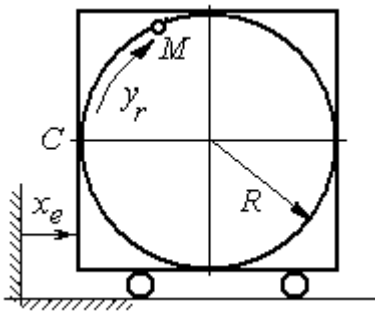
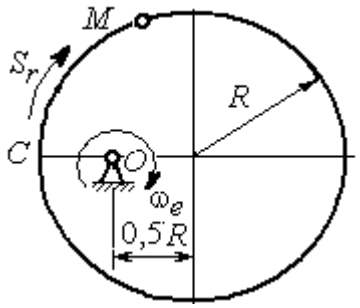



Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

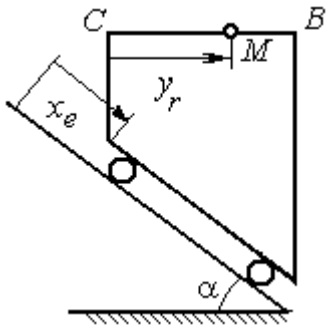
*Окончание вариантов задания К4*

**Варианты № 10, 20, 30**

Задача 1




Задача 2




В момент $t = t_2$ точка $M$ прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

**Исходные данные для заданий по сложному движению точки**

| Номер варианта задания | Номер задачи | $R$, см | α, град | $C\breve{M} = S_r(t)$, см<br>$C\breve{M} = y_r(t)$, см | $\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с<br>$x_e(t)$, см | $t_1$, с<br>$t_2$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 3 | – | $S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$ | $\omega_e = 4t^2$ | 1 |
| | 2 | 4 | 30 | $y_r = 4t^2$ | $x_e = 2\cos(\pi t/6)$ | – |
| **2** | 1 | 2 | – | $S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$ | $\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$ | 1 |
| | 2 | 3 | 60 | $y_r = t^2 + t$ | $x_e = 1 + \cos(\pi t)$ | – |
| **3** | 1 | 4 | 30 | $S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$ | $\varphi_e = 4t - t^2$ | 1 |
| | 2 | 6 | – | $y_r = \pi\left[2t + \sin\pi t\right]$ | $x_e = 5t - t^2$ | 1 |
| **4** | 1 | 4 | 60 | $S_r = 2(t^3 + t)$ | $\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 1 |
| | 2 | 3 | – | $y_r = \pi\left[2t + \cos(\pi t/2)\right]$ | $x_e = t^3 - 4t$ | 1 |
| **5** | 1 | 6 | – | $S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$ | $\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$ | 1 |
| | 2 | 2 | 30 | $y_r = t^2 + 2t$ | $x_e = t^2 - 4t$ | – |
| **6** | 1 | 6 | 60 | $S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$ | $\varphi_e = 2t^2 - 5t$ | 1 |
| | 2 | 3 | – | $y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$ | $x_e = \left[1 - \cos(\pi t/4)\right]$ | 1 |
| **7** | 1 | 8 | 30 | $S_r = 2(t^3 + 3t)$ | $\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 1 |
| | 2 | 4 | 30 | $y_r = 2\pi t^2$ | $x_e = t^3 - 5t$ | 1 |

*Продолжение табл. 3.1*

| Номер варианта задания | Номер задачи | $R$, см | $\alpha$, град | $C\breve{M} = S_r(t)$, см<br>$C\breve{M} = y_r(t)$, см | $\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с<br>$x_e(t)$, см | $t_1$, с<br>$t_2$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **8** | 1 | 8 | – | $S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$ | $\varphi_e = t^2 - 5t$ | 2 |
| | 2 | 6 | 30 | $y_r = t(t+1)$ | $x_e = \cos\pi t$ | – |
| **9** | 1 | 8 | 30 | $S_r = 2t^2$ | $\omega_e = \cos(\pi t/8)$ | 2 |
| | 2 | 3 | – | $y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$ | $x_e = (3-2t)^2$ | 1 |
| **10** | 1 | 6 | – | $S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$ | $\omega_e = 5t - 2t^3$ | 1 |
| | 2 | 4 | 30 | $y_r = t^2 + 2t$ | $x_e = 1 + \cos\pi t$ | – |
| **11** | 1 | 6 | – | $S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$ | $\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$ | 2 |
| | 2 | 6 | 60 | $y_r = 4\sin\pi t$ | $x_e = t^2 - 2t$ | – |
| **12** | 1 | 18 | – | $S_r = \pi(2t^2 + 2t)$ | $\varphi_e(t) = 3t - t^2$ | 2 |
| | 2 | 6 | 30 | $y_r = 2t^2 + t$ | $x_e = 1 + \cos(\pi t)$ | – |
| **13** | 1 | 10 | 60 | $S_r = t^3 + t$ | $\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 2 |
| | 2 | 6 | – | $y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$ | $x_e = t(t+1)$ | 1 |
| **14** | 1 | 4 | 30 | $S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$ | $\omega_e = (3-2t)^2$ | 2 |
| | 2 | 3 | – | $y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$ | $x_e = 2t^2 - 5t$ | 1 |
| **15** | 1 | 8 | – | $S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$ | $\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$ | 1 |
| | 2 | 5 | 60 | $y_r = 5t + t^2$ | $x_e = \cos(\pi t/6)$ | – |
| **16** | 1 | 12 | 90 | $S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$ | $\varphi_e = 2t - 3t^2$ | 1 |
| | 2 | 15 | – | $y_r = \pi(4t + t^2)$ | $x_e = 6\sin(\pi t/3)$ | 1 |
| **17** | 1 | 6 | 45 | $S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$ | $\omega_e(t) = 4t^2 - 6$ | 1 |
| | 2 | 6 | 60 | $y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$ | $x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$ | 2 |
| **18** | 1 | 8 | – | $S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$ | $\varphi_e = 18t - 4t^2$ | 2 |
| | 2 | 8 | 60 | $y_r = 3t + 2t^2$ | $x_e = \sin\pi t$ | – |
| **19** | 1 | 8 | 60 | $S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$ | $\omega_e = 5t - t^2$ | 1 |
| | 2 | 9 | – | $y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$ | $x_e = \cos(\pi t/6)$ | 1 |
| **20** | 1 | 4 | – | $S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$ | $\omega_e = 3t - 5$ | 1 |
| | 2 | 6 | 60 | $y_r = 3t + 2t^2$ | $x_e = \pi\sin\pi t$ | – |
| **21** | 1 | 3 | – | $S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$ | $\omega_e = 6t - 14$ | 2 |
| | 2 | 8 | 45 | $y_r = (t^2 + 3t)$ | $x_e = t + 2\sin\pi t$ | – |

*Окончание табл. 3.1*

| Номер варианта задания | Номер задачи | $R$, см | $\alpha$, град | $C\breve{M} = S_r(t)$, см<br>$C\breve{M} = y_r(t)$, см | $\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с<br>$x_e(t)$, см | $t_1$, с<br>$t_2$, с |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **22** | 1 | 4 | – | $S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$ | $\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 1 |
| | 2 | 9 | 60 | $y_r = 8\sin\pi t$ | $x_e = 5t - t^2$ | – |
| **23** | 1 | 6 | 45 | $S_r = 12\sin(\pi t/8)$ | $\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$ | 2 |
| | 2 | 6 | – | $y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$ | $x_e = 5t - t^2$ | 1 |
| **24** | 1 | 6 | 45 | $S_r = 12\sin(\pi t/8)$ | $\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$ | 2 |
| | 2 | 6 | – | $y_r = \pi(t^2 + 2t)$ | $x_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 1 |
| **25** | 1 | 6 | – | $S_r = 2\pi t^2$ | $\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$ | 1 |
| | 2 | 4 | 45 | $y_r = 2t(t + 3t)$ | $x_e = 2(t^3 - 3t)$ | – |
| **26** | 1 | 6 | 120 | $S_r = t^2 + t$ | $\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$ | 2 |
| | 2 | 9 | – | $y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$ | $x_e = 2(t^2 - 3t)$ | 1 |
| **27** | 1 | 10 | 60 | $S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$ | $\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$ | 2 |
| | 2 | 9 | 30 | $y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$ | $x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$ | 1 |
| **28** | 1 | 2 | – | $S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$ | $\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$ | 1 |
| | 2 | 6 | | $y_r = 2t + 3t^2$ | $x_e = t + \sin\pi t$ | – |
| **29** | 1 | 8 | 30 | $S_r = (t^2 + 2t)$ | $\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$ | 2 |
| | 2 | 3 | – | $y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$ | $x_e = 5t - t^2$ | 1 |
| **30** | 1 | 2 | – | $\pi(t^2 + 2t)$ | $\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$ | 1 |
| | 2 | 3 | 60 | $y_r = t + t^2$ | $x_e = t + \sin\pi t$ | – |

## Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

**Задача 1**. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину $A$ треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

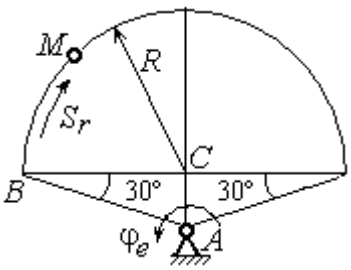



Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой $\varphi_e$. По ободу диска от точки *B* движется точка *M*. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки *M* на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой $S_r$. Радиус диска $R = 9$ см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ с.

*Решение*

Вращение фигуры будет для точки *M* переносным движением. Относительное движение точки *M* – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки** *M* на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки *M* определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.7 точкой $M_1$.

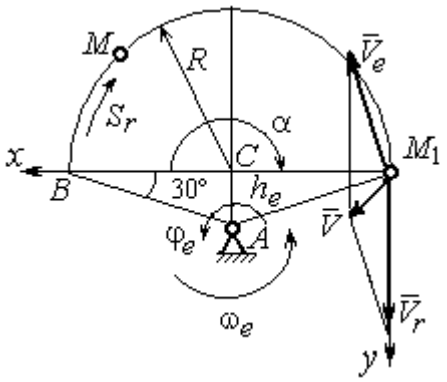


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При $t_1 = 1$ с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает, что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой $\omega_e$ на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка *M* находится в положении $M_1$. Скорость $V_e$ переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где

расстояние от точки $M_1$ до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии $AM_1$ и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги *BM*. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|18\pi t\right|$. При $t_1$ = 1 с $V_r(1) = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 18\pi$ = 56,5 см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении $M_1$ происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой $S_r$. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении $M_1$ направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

**Абсолютную скорость точки** находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат $M_1xy$ (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2} = 29{,}95$ см/с.

**Абсолютное ускорение точки** определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

**Относительное касательное ускорение** $a_r^\tau$ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi$ = 56,5 см/с$^2$ – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке $M_1$ в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой $S_r$.

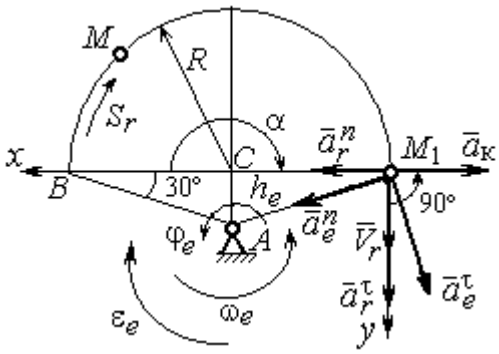


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

**Относительное нормальное ускорение** точки вычисляется по формуле $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^n(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9} = 355{,}3$ см/с$^2$. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру $C$ (см. рис. 3.8).

**Переносное касательное ускорение** вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с$^2$. Угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right| = 4$ рад/с$^2$ постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение $\varepsilon_e$ направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении $M_1$ перпендикулярен линии $AM_1$ и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41{,}6$ см/с$^2$.

**Переносное нормальное ускорение** $a_e^n$ рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1)h_e = 6\sqrt{3} = 10{,}4$ см/с$^2$. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии $AM_1$ к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113{,}1$ см/с$^2$.

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку $M_1$ (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси $xM_1y$ (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^{\tau}\cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^{\tau} = 97{,}9$ см/с$^2$, $a_x = -a_e^{\tau}\cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 228{,}4$ см/с$^2$. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248{,}5$ см/с$^2$.

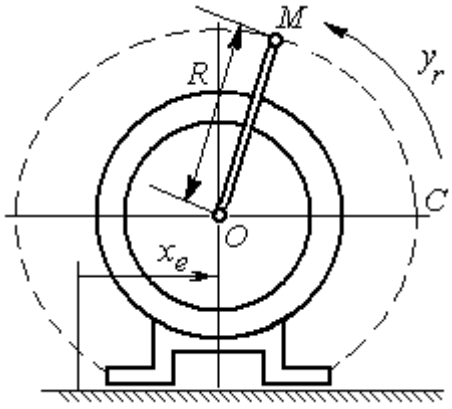



Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

**Задача 2.** К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень $OM$ длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка $M$ стержня из начального положения $C$ перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки $M$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

*Решение*

Точка $M$ совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса $R$, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол $\alpha$, отсчитываемый стержнем $OM$ от начального положения $OC$, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой $M_1$.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r$= 6,28 см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню $OM_1$.

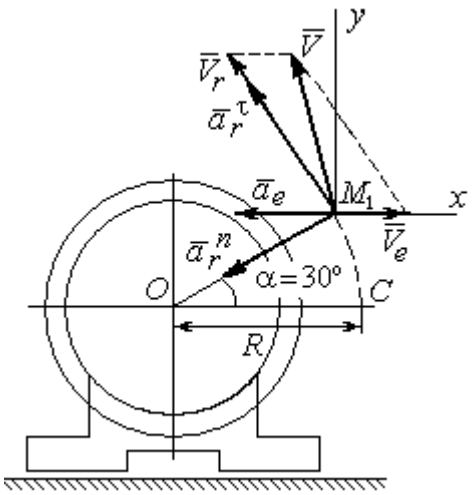



Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60° = 2{,}62$ см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки $M$ направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси $xM_1y$, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ = -0{,}52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси $x$), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ = 5{,}44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5{,}46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_к = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня $OM$ и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^{\tau} = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^{\tau} = \dot{V}_e = -\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$с равны $a_r^{\tau} = 6{,}28$ см/с$^2$, $a_r^n = 6{,}57$ см/с$^2$, $a_e = -4{,}75$ см/с$^2$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат $xM_1y$. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^{\tau}\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^{\tau}\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4{,}61$ см/с$^2$.

# 4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

## 4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$, где $m$ – масса точки; $x$, $y$, $z$ – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

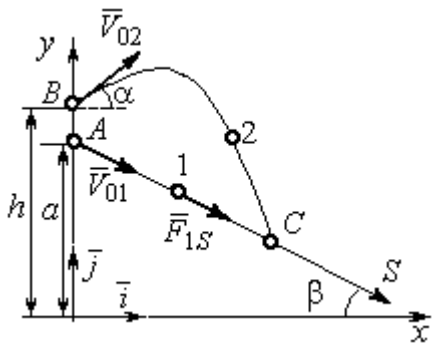
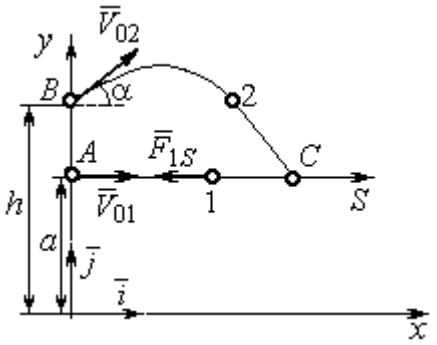
## 4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1$, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01}$, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом $\beta$ к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой $m_2$ из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол $\alpha$) начальной скорости $V_{02}$ точки 2, чтобы в момент времени $t_1$ точки 1 и 2 встретились на оси $AS$ в точке $C$. Момент времени $t_1$ задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** |
|---|---|
|  <br>Встреча в точке $C$ в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной |  <br>Встреча в точке $C$ в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта |

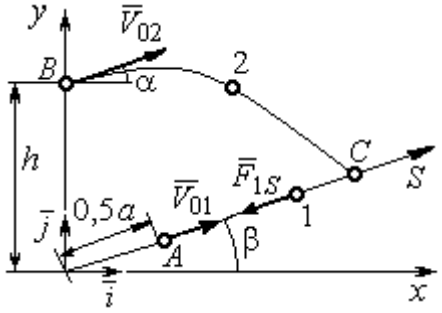
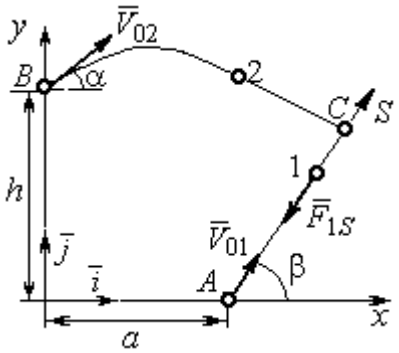
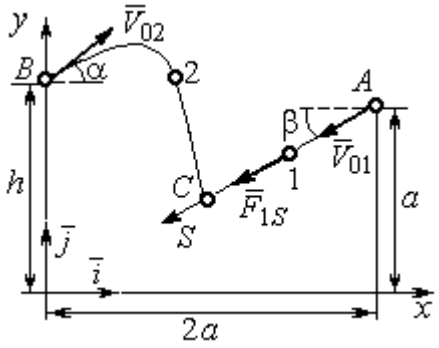
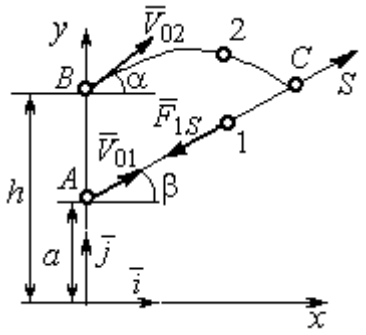
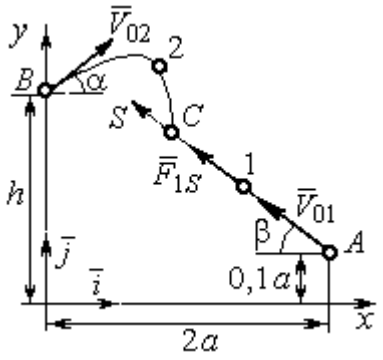
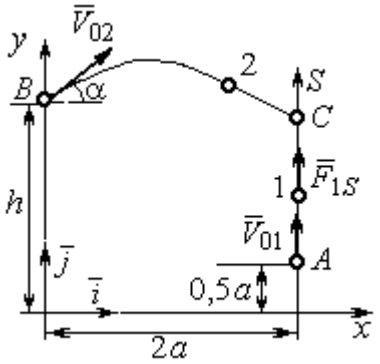
| **Варианты № 3, 13, 23** | **Варианты № 4, 14, 24** |
|---|---|
|  <br>Встреча в точке $C$ в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной |  <br>Встреча в точке $C$ в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с |

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

| **Варианты № 5, 15, 25** | **Варианты № 6, 16, 26** |
|---|---|
|  |  |
| Встреча в точке *C* в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной | Встреча в точке *C*, когда точка 1 максимально удалилась от места старта |

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |
| Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с | Встреча в точке *C* в момент максимального подъёма точки 1 |

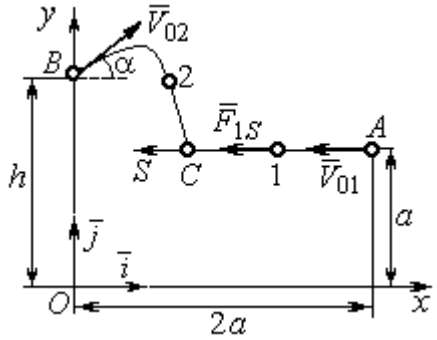
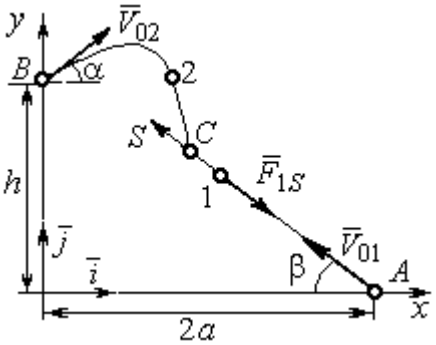
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |
| Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с | Встреча в точке *C* в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма |

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

**Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки**

| Номер варианта задания | $m_1$, кг | $F_{1S}$, Н | $V_{01}$, м/с | β, град | $m_2$, кг | $\vec{F}_2$, Н | $a$, м | $h$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 3 | 3 | 30 | 2 | $7\vec{i}$ | 2 | 4 |
| **2** | 3 | 6 | 2 | 0 | 2 | $4\vec{i}+12\vec{j}$ | 1,5 | 1 |
| **3** | 2 | 5 | 4 | 35 | 1,5 | $10\vec{i}+4\vec{j}$ | 2 | 2,5 |
| **4** | 1 | 10 | 2 | 60 | 2 | $4\vec{i}+8\vec{j}$ | 2,2 | 2 |
| **5** | 1 | 3 | 3 | 30 | 2 | $5\vec{i}$ | 3 | 4,5 |
| **6** | 0,8 | 6 | 6 | 50 | 3 | $3\vec{i}+12\vec{j}$ | 1,5 | 4 |
| **7** | 2 | 5 | 4,5 | 40 | 1 | $10\vec{i}+2\vec{j}$ | 3 | 2,5 |
| **8** | 1 | 2 | 3,5 | 90 | 2 | $6\vec{i}+8\vec{j}$ | 1,2 | 2 |
| **9** | 2 | 4 | 4 | 0 | 1 | $3\vec{i}+2\vec{j}$ | 2 | 2,5 |
| **10** | 1 | 3 | 3 | 55 | 1,5 | $4\vec{i}$ | 1 | 1,5 |
| **11** | 0,5 | 2 | 3 | 60 | 2 | $3\vec{i}+8\vec{j}$ | 1,5 | 2,5 |
| **12** | 0,2 | 3 | 4 | 0 | 1 | $5\vec{i}-2\vec{j}$ | 1 | 2,5 |
| **13** | 1 | 2 | 6 | 50 | 1,5 | $6\vec{i}-4\vec{j}$ | 0,8 | 2 |
| **14** | 0,5 | 6 | 4 | 35 | 1 | $3\vec{i}-2\vec{j}$ | 2,5 | 2 |
| **15** | 0,2 | 3 | 3 | 50 | 2 | $2\vec{i}-2\vec{j}$ | 3 | 4 |
| **16** | 2 | 4 | 6 | 40 | 2 | $3\vec{i}+12\vec{j}$ | 1 | 1,5 |
| **17** | 1 | 6 | 5 | 60 | 1,5 | $5\vec{i}+4\vec{j}$ | 3 | 2,5 |
| **18** | 1 | 2 | 2 | 90 | 2 | $4\vec{i}+4\vec{j}$ | 2 | 2 |
| **19** | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | $2\vec{i}+10\vec{j}$ | 1 | 1,5 |
| **20** | 5 | 4 | 2 | 30 | 1 | $3\vec{i}-2\vec{j}$ | 1,5 | 1,5 |
| **21** | 0,2 | 4 | 4 | 45 | 1 | $6\vec{i}-2\vec{j}$ | 1 | 3 |
| **22** | 0,4 | 3 | 2 | 0 | 2 | $4\vec{i}+6\vec{j}$ | 1,5 | 2,5 |
| **23** | 1 | 3 | 8 | 60 | 2 | $4\vec{i}+2\vec{j}$ | 1,2 | 1,5 |
| **24** | 0,5 | 8 | 3 | 30 | 2 | $6\vec{i}+7\vec{j}$ | 2 | 1,5 |
| **25** | 2 | 4 | 4 | 60 | 1 | $2\vec{i}-2\vec{j}$ | 3,5 | 4 |
| **26** | 1 | 3 | 5 | 50 | 2 | $4\vec{i}+6\vec{j}$ | 0,5 | 1,5 |
| **27** | 1,5 | 3 | 6 | 30 | 2 | $4\vec{i}+4\vec{j}$ | 2 | 2,5 |
| **28** | 2 | 5 | 3 | 90 | 2 | $6\vec{i}+7\vec{j}$ | 2 | 1,5 |
| **29** | 2 | 4 | 4 | 0 | 1 | $5\vec{i}-2\vec{j}$ | 1,5 | 2 |
| **30** | 1 | 3 | 2,5 | 70 | 2 | $4\vec{i}+6\vec{j}$ | 1 | 1 |

## Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^{\circ}$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

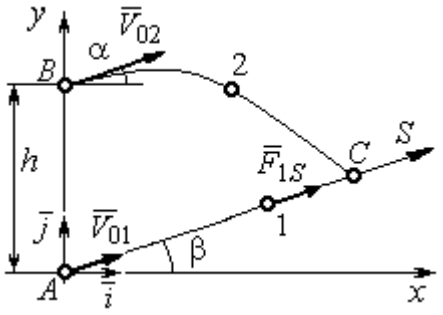


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x*, *y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол $\alpha$) начальной скорости $V_{02}$ точки 2, чтобы в момент времени $t_1$, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

*Решение*

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна $F_{1S}$ (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с$^2$, дифференциальное уравнение движения точки 1

приводится к виду: $\frac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \frac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования $C_1$, $C_2$ находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси $AS$ описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

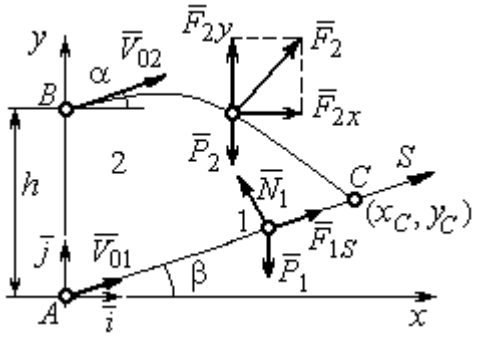


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени $t_1$, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \frac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние $AC$, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи $x_C$, $y_C$ определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат $F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат *x*, *y* имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4\,, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5\,,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось *x* как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \dfrac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось *x* на производную от координаты $V_{2x} = \dfrac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси *x*, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные $C_3$ и $C_4$, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси *x*: $x = t^2 + 1{,}85t$.

Закон движения точки 2 вдоль оси *y* находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\dfrac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось *y* от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось *y* производной от координаты $V_{2y} = \dfrac{dy}{dt}$, вто-

рично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси $y$ описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант $C_5$ и $C_6$ используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C = 1{,}12$ м. Получим $C_6 = 1$, $C_5 = 2{,}43$. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси $y$ по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{{V_{02x}}^2 + {V_{02y}}^2} = 3{,}05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64^\circ$.

### 4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где $c$ – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой $m$ вдоль оси О$x$ под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где $x$ – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало

координат; $\omega$ – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где $\mu$ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где $n$ – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; $\omega$ – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где $C_1$ и $C_2$ – постоянные интегрирования; $\omega_1$ – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$;

$A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\alpha$ – начальная фаза колебаний, $\text{tg}\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где $H$, $p$ – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где $\omega$ – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; $h$ – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \dfrac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$

определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}$. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \dfrac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где $a$, $p$ – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где $\omega$ – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; $h$ – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \dfrac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

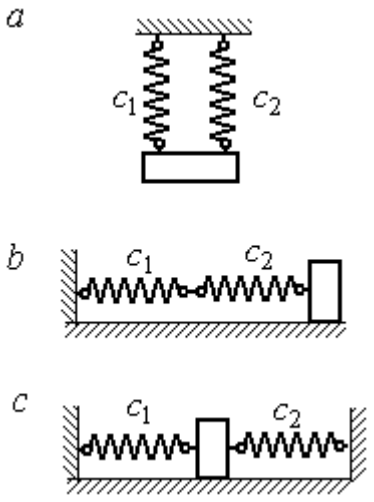



Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
*a* – две параллельные пружины;
*b* – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости $c_1$ и $c_2$ (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалент-

ной жесткости $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{экв} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

### 4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

**Задача 1.** Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой $m_1$ (или одновременно двух грузов массой $m_1$ и $m_2$) на пружине жесткостью $c_1$ (или на двух пружинах жесткостью $c_1$ и $c_2$). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

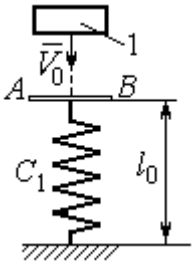
**Задача 2.** Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин $c_1$ и $c_2$. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu \vec{V}$ Н, где $\mu$ – коэффициент сопротивления; $V$ – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

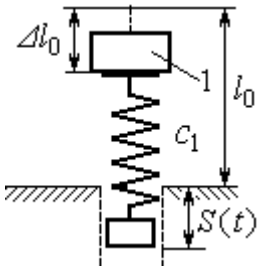
**Варианты № 1, 11, 21**

Задача 1




Невесомая пластина $AB$ укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость $V_0$, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

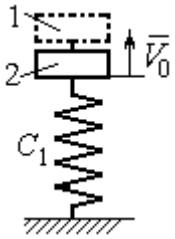
Задача 2




К верхнему концу пружины, сжатой на величину $\Delta\ell_0$, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

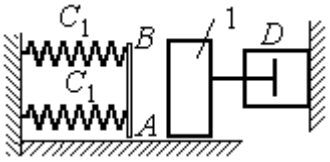
**Варианты № 2, 12, 22**

Задача 1




В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость $V_0$, направленную вверх

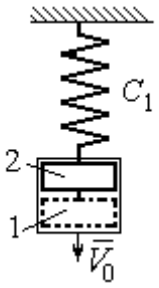
Задача 2




Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью $V_0$. Через 1 с груз упирается в площадку $AB$, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку $AB$ и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером $D$

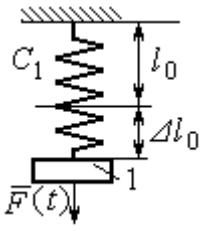
**Варианты № 3, 13, 23**

Задача 1




В положении статического равновесия груза 2, укреплённого на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью $V_0$

Задача 2

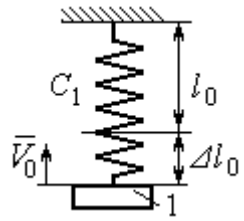



Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

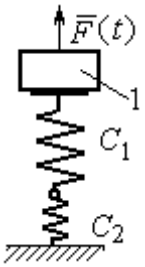
**Варианты № 4, 14, 24**

Задача 1




К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость $V_0$, направленную вверх

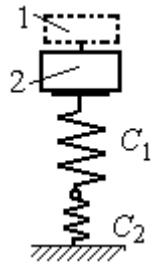
Задача 2




Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость $V_0$, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

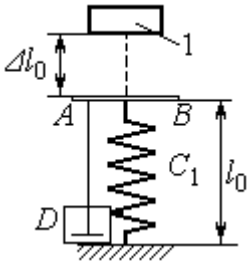
**Варианты № 5, 15, 25**

Задача 1




В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укреплённых на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

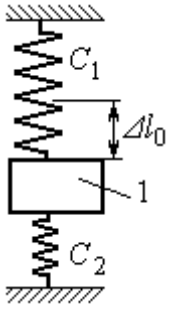
Задача 2




Груз 1 падает с высоты $\Delta\ell_0$ на площадку $AB$, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер $D$ создаёт сопротивление движению груза на пружине

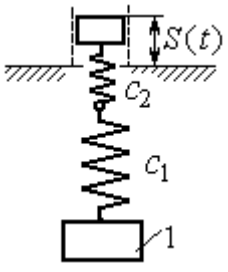
**Варианты № 6, 16, 26**

Задача 1




Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости

Задача 2

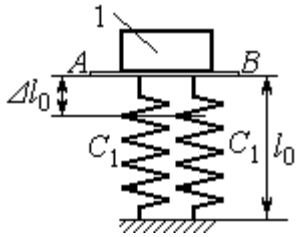



К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью $V_0$. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

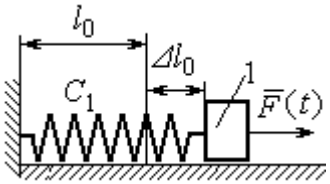
**Варианты № 7, 17, 27**

Задача 1




К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость $V_0$, направленную вниз

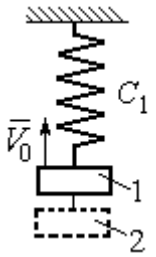
Задача 2




К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

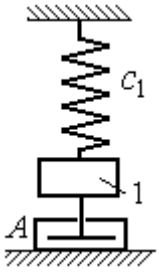
**Варианты № 8, 18, 28**

Задача 1




Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость $V_0$, направленную вверх

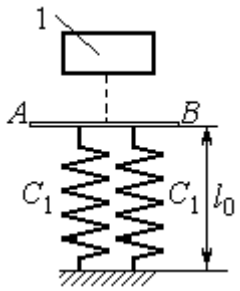
Задача 2




В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость $V_0$, направленную вниз. Демпфер $A$ создаёт сопротивление движению груза

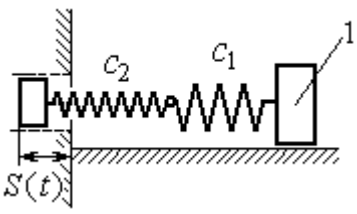
**Варианты № 9, 19, 29**

Задача 1




Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины $AB$, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2



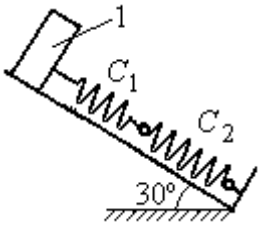

К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость $V_0$, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

*Окончание вариантов задания Д2*

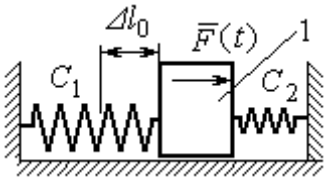
**Варианты № 10, 20, 30**

Задача 1




В положении статического равновесия груза 1, укреплённого на двух последовательно соединённых пружинах, сообщили скорость $V_0$, направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2




Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

**Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки**

| Номер варианта задания | Номер задачи | $m_1$, кг | $m_2$, кг | $V_0$, м/с | $c_1$, Н/м | $c_2$, Н/м | $\Delta\ell_0$, м | μ, Н·с/м | $F(t)$, Н | $S(t)$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2,5 | – | 2,0 | 200 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | – | 210 | – | 0,1 | – | – | 0,02sin12$t$ |
| **2** | 1 | 1,5 | 2,0 | 4 | 250 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | 4 | 220 | – | – | 1,0 | – | – |
| **3** | 1 | 2,0 | 1,5 | 3 | 250 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,2 | – | – | 200 | – | 0,14 | – | 12sin5$t$ | – |
| **4** | 1 | 2,0 | – | 3 | 180 | – | 0,1 | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | 2 | 150 | 120 | – | – | 8sin12$t$ | – |
| **5** | 1 | 1,0 | 2,0 | – | 120 | 100 | – | – | – | – |
| | 2 | 1,0 | – | – | 50 | – | 0,5 | 18 | – | – |
| **6** | 1 | 1,2 | – | – | 120 | 180 | 0,12 | – | – | – |
| | 2 | 1,4 | – | 2,4 | 120 | 180 | – | – | – | 0,03sin14$t$ |
| **7** | 1 | 1,6 | – | 3,2 | 140 | – | 0,15 | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | – | 120 | – | 0,12 | – | 12sin6$t$ | – |
| **8** | 1 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 150 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | 3,5 | 120 | – | – | 15 | – | – |

*Продолжение табл. 4.2*

| Номер варианта задания | Номер задачи | $m_1$, кг | $m_2$, кг | $V_0$, м/с | $c_1$, Н/м | $c_2$, Н/м | $\Delta\ell_0$, м | μ, Н·с/м | $F(t)$, Н | $S(t)$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9** | 1 | 1,5 | – | – | 100 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,4 | – | 2,0 | 100 | 110 | – | – | – | 0,015sin8$t$ |
| **10** | 1 | 2,5 | – | 2,5 | 110 | 100 | – | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | – | 110 | 52 | 0,08 | – | 5sin9$t$ | – |
| **11** | 1 | 2,0 | – | 4,0 | 300 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,0 | – | – | 200 | – | 0,12 | – | – | 0,01sin4$t$ |
| **12** | 1 | 1,8 | 2,4 | 4 | 220 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,0 | – | 5 | 240 | – | – | 0,6 | – | – |
| **13** | 1 | 1,5 | 1,5 | 2 | 200 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,8 | – | – | 180 | – | 0,08 | – | 10sin10$t$ | – |
| **14** | 1 | 2,0 | – | 2 | 200 | – | 0,12 | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | 2 | 150 | 120 | – | – | 10sin8$t$ | – |
| **15** | 1 | 1,5 | 2,0 | – | 120 | 250 | – | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | – | 120 | – | 0,4 | 4 | – | – |
| **16** | 1 | 2,0 | – | – | 150 | 75 | 0,1 | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | 2,5 | 150 | 75 | – | – | – | 0,01sin5$t$ |
| **17** | 1 | 1,5 | – | 2,1 | 160 | – | 0,11 | – | – | – |
| | 2 | 1,8 | – | – | 150 | – | 0,1 | – | 8sin12$t$ | – |
| **18** | 1 | 2,0 | 1,0 | 2,5 | 80 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | 2,5 | 50 | – | – | 21 | – | – |
| **19** | 1 | 1,6 | – | – | 120 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,2 | – | 2,0 | 85 | 120 | – | – | – | 0,015sin7$t$ |
| **20** | 1 | 2,0 | – | 2,0 | 90 | 100 | – | – | – | – |
| | 2 | 2,5 | – | – | 100 | 90 | 0,12 | – | 6sin10$t$ | – |
| **21** | 1 | 2,0 | – | 1,6 | 220 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 2,5 | – | – | 250 | – | 0,14 | – | – | 0,01sin10$t$ |
| **22** | 1 | 2,2 | 1,5 | 3 | 180 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | 4 | 280 | – | – | 0,8 | – | – |
| **23** | 1 | 2,2 | 1,2 | 2 | 220 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,6 | – | – | 200 | – | 0,12 | – | 5sin7$t$ | – |

*Окончание табл. 4.2*

| Номер варианта задания | Номер задачи | $m_1$, кг | $m_2$, кг | $V_0$, м/с | $c_1$, Н/м | $c_2$, Н/м | $\Delta\ell_0$, м | μ, Н·с/м | $F(t)$, Н | $S(t)$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **24** | 1 | 1,6 | – | 2,4 | 160 | – | 0,13 | – | – | – |
| | 2 | 1,0 | – | 3 | 150 | 300 | – | – | 6sin10$t$ | – |
| **25** | 1 | 0,8 | 1,2 | – | 120 | 80 | – | – | – | – |
| | 2 | 0,8 | – | – | 180 | – | 0,4 | 12 | – | – |
| **26** | 1 | 1,4 | – | – | 100 | 120 | 0,15 | – | – | – |
| | 2 | 1,8 | – | 2,2 | 150 | 120 | – | – | – | 0,015sin8$t$ |
| **27** | 1 | 2 | – | 4,0 | 150 | – | 0,12 | – | – | – |
| | 2 | 2 | – | – | 162 | – | 0,13 | – | 5sin9$t$ | – |
| **28** | 1 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 140 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | 3,1 | 180 | – | – | 12 | – | – |
| **29** | 1 | 1,0 | – | – | 140 | – | – | – | – | – |
| | 2 | 2,0 | – | 2,4 | 75 | 150 | – | – | – | 0,08sin5$t$ |
| **30** | 1 | 1,6 | – | 3 | 75 | 150 | – | – | – | – |
| | 2 | 1,5 | – | 3 | 80 | 70 | 0,15 | – | 8sin10$t$ | – |

## Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

**Задача 1.** Груз 1 весом $P$ = 20 Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30º, коэффициент жесткости пружины $c$ = 400 Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0$ = 0,1 м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

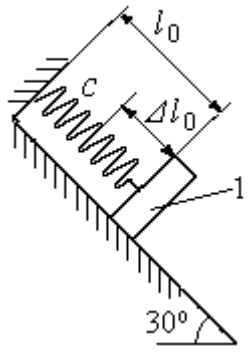


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

*Решение*

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение *x* относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

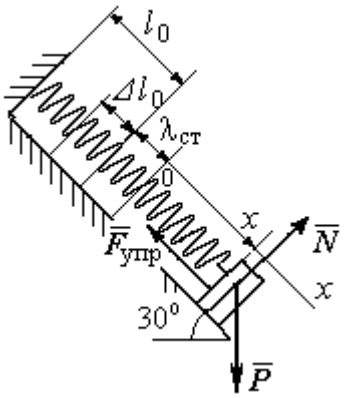


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось *x*: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где $\omega$ – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}01$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ вычислим координату $x_0$ начального положения груза на оси *Ox*.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c} = 0{,}025$ м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты $x$ выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

**Задача 2.** Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

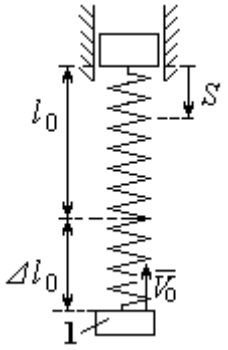


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

*Решение*

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

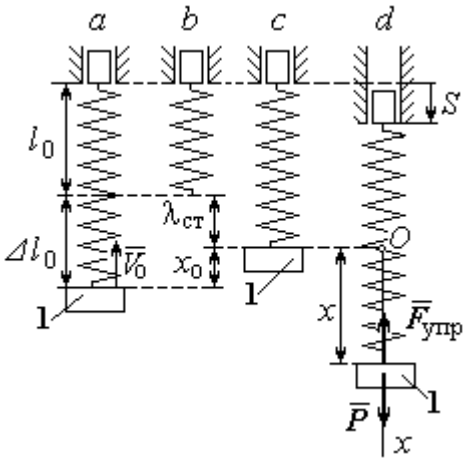



Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*

$$F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение *x* относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где $\omega$ – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $\omega$ = 19,81 рад/с; $h$ – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с$^2$; $p$ – угловая частота вынужденных колебаний, $p$ = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$.

Для определения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ вычислим координату $x_0$ начального положения груза на оси $Ox$. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда $x_0$ = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при $t$ = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2}\cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось $Ox$ $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при $t$ = 0 $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)}$ = – 0,11 м. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

## 4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

**Работой** $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении $S_1$ точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол $\alpha$ острый, работа силы положительна. Если угол $\alpha$ тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

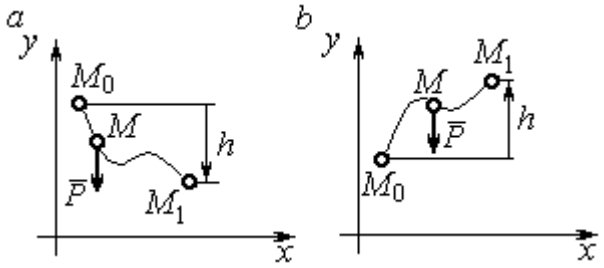



Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
*a* – перемещение точки сверху вниз;
*b* – перемещение точки снизу вверх

**Работа силы тяжести** материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения $M_0$ в положение $M_1$ равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где $P$ – величина силы тяжести точки; $h$ – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

**Работа силы упругости пружины** на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние $h$ определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где $c$ – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

**Кинетической энергией материальной точки** называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где $m$ – масса точки; $V$ – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где $V_0$,

$V_1$ – скорость точки в начальном положении $M_0$ и в положении $M_1$; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения $M_0$ в положение $M_1$.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; $\rho$ – радиус кривизны траектории точки.

### 4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

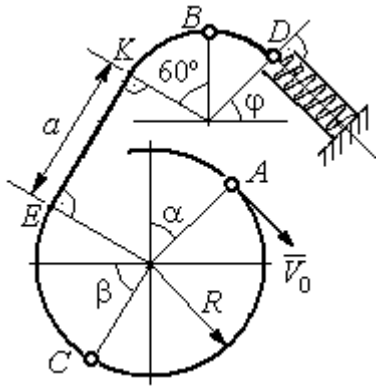
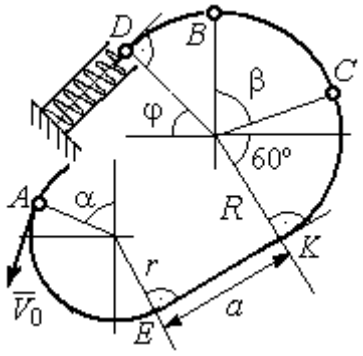
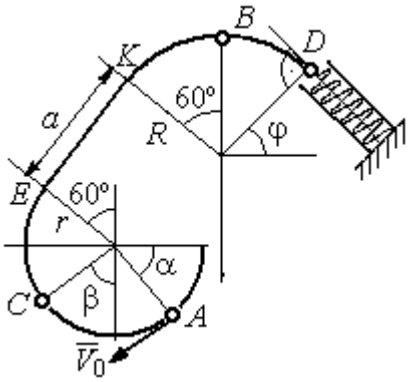
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой *m* расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами *r* и *R* = 2*r*, соединённых прямолинейным отрезком *EK*, сопряжённым с дугами окружностей в точках *E* и *K*. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка *EK* = *a*.

В точке *A*, положение которой на дуге окружности определяется углом $\alpha$, шарику сообщают начальную скорость $V_0$. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f*. На участках с вертикальным отрезком *EK* считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки *D*, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью *c* и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки *D* определяется углом $\varphi$.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку *B* со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом $\beta$.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** | **Варианты № 3, 13, 23** |
|---|---|---|
|  |  |  |

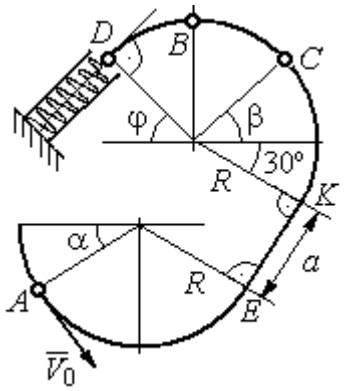
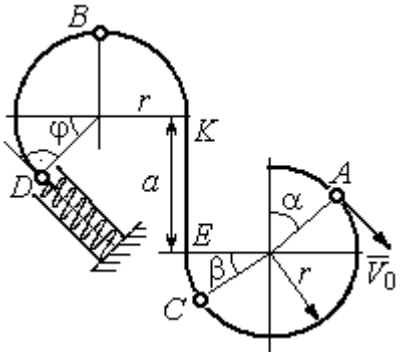
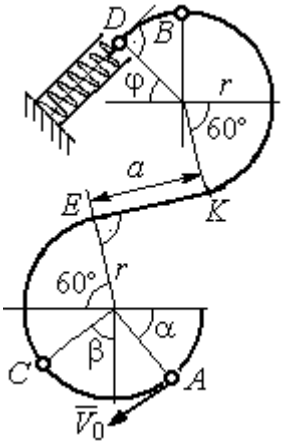
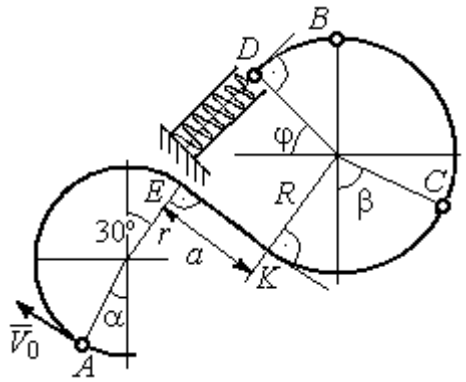
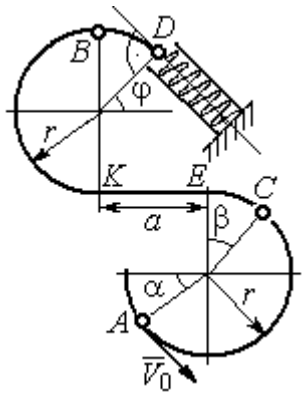
| **Варианты № 4, 14, 24** | **Варианты № 5, 15, 25** | **Варианты № 6, 16, 26** |
|---|---|---|
|  |  |  |

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

*Окончание вариантов задания Д3*

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

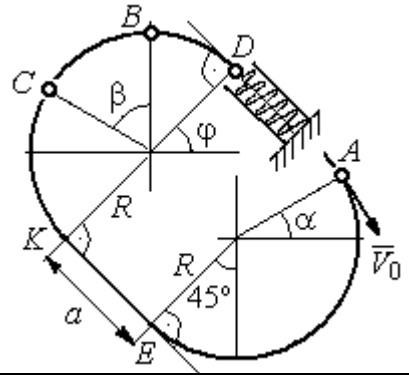
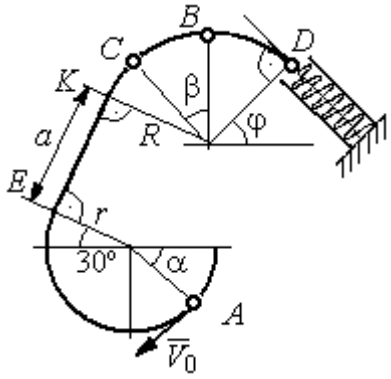
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

**Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии**

| Номер варианта задания | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$, кг | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 1,0 | 0,6 | 0,9 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 0,3 | 1,0 |
| $\alpha$, град | 30 | 45 | 0 | 30 | 30 | 0 | 0 | 45 | 30 | 0 | 60 | 30 | 30 | 45 | 60 |
| $\beta$ , град | 60 | 30 | 60 | 0 | 60 | 30 | 60 | 60 | 30 | 45 | 30 | 60 | 60 | 30 | 30 |
| $\varphi$, град | 0 | 60 | 30 | 0 | 0 | 30 | 45 | 0 | 30 | 45 | 30 | 30 | 0 | 30 | 45 |
| $r$, м | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,6 | 0,5 | 0,3 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 0,4 | 0,5 | 0,8 |
| $a$, м | 0,5 | 0,6 | 0,9 | 1,4 | 0,8 | 1,2 | 0,5 | 0,5 | 1,4 | 0,5 | 0,8 | 0,5 | 0,8 | 0,6 | 0,6 |
| $f$ | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 0,3 |
| $k$ | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 |
| $c$, Н/м | 100 | 80 | 90 | 80 | 120 | 100 | 90 | 80 | 60 | 80 | 90 | 60 | 80 | 60 | 110 |

*Окончание табл. 4.3*

| Номер варианта задания | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$, кг | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 1,0 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
| $\alpha$, град | 60 | 30 | 0 | 45 | 60 | 90 | 90 | 60 | 60 | 90 | 30 | 60 | 60 | 45 | 90 |
| $\beta$ , град | 60 | 30 | 45 | 90 | 60 | 45 | 90 | 60 | 60 | 30 | 30 | 60 | 60 | 0 | 60 |
| $\varphi$, град | 45 | 60 | 60 | 60 | 30 | 90 | 0 | 90 | 45 | 60 | 60 | 90 | 30 | 60 | 0 |
| $r$, м | 0,6 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 0,4 | 0,8 | 0,6 | 0,4 |
| $a$, м | 0,4 | 1,2 | 0,9 | 1,2 | 1,2 | 0,9 | 0,6 | 1,5 | 1,4 | 0,8 | 1,2 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 0,5 |
| $f$ | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 |
| $k$ | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 0,3 |
| $c$, Н/м | 80 | 60 | 90 | 60 | 100 | 90 | 80 | 110 | 80 | 60 | 60 | 80 | 60 | 80 | 100 |

## Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках $E$ и $K$ с прямолинейным отрезком $EK$ длиной $a$ = 0,6 м (рис. 4.17). Радиусы окружностей $R$ = 1 м и $r$ = 0,5 м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках $E$ и $K$, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой $m$ = 0,5 кг. В точке $A$, положение которой на дуге радиуса $R$ определяется углом $\alpha$ = 60° (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость $V_0$, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой $EK$ на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения $f$ = 0,2. Достигнув точки $D$ на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью $c$ = 100 Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку $B$) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при $k$ = 0,3. При

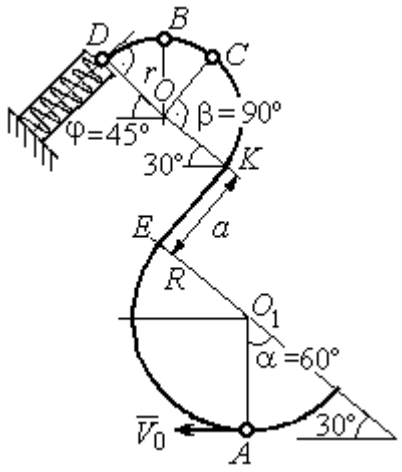


Рис. 4.17. Схема движения шарика

найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

*Решение*

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения *A* в наивысшее положение – точку *B*.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой *EK* на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.18, *b*). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

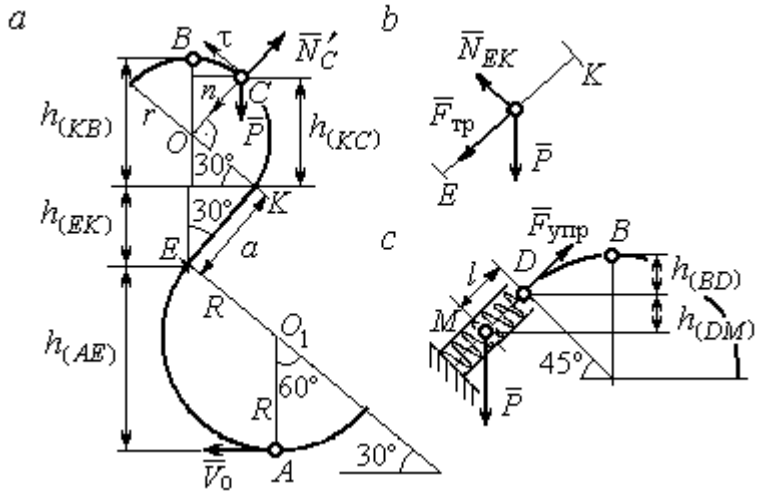



Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек *A* и *B* на траектории; $V_A$ – начальная скорость шарика в точке *A*, $V_A = V_0$; $V_B$ – его скорость в точке *B*, $V_B = 0{,}3V_0$.

Для вычисления перепада высот точек *A* и *B* имеем выражение (рис. 4.18, *a*):

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} = R(1+\sin 30^\circ) + a\cos 30^\circ + r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *A* в положение *B*, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{тр}})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$,

$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения *AB* и силы трения на отрезке *EK*. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, *a*, *b*).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения *A* в конечное положение *B* принимает вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f \cdot \cos 60^\circ)\right]$. После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: $V_0 = 7{,}81$ м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке *C*.

Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль $Cn$ (рис. 4.18, *a*). Уравнение движения шарика в точке *C* в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где $V_C$ – скорость шарика в точке *C*, $N'_C$ – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *a* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся тем, что скорость шарика в точке *B* уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения *C* в конечное положение *B*. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $V_C$, $V_B$ – значения скорости шарика в точках *C* и *B*; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек *C* и *B*; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ) = 0{,}5r$ (см. рис. 4.18, *a*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0{,}3V_0 = 2{,}34$ м/с, найдём $V_C = 3{,}22$ м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} = -6{,}12$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке $C$ (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке $C$ равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки *B* до положения максимально сжатой пружины – точки *M*. Движение на этом участке происходит по дуге окружности *BD* и по прямой *DM*. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *B* в *M* получим: $\dfrac{mV_M^2}{2} - \dfrac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где $V_M$, $V_B$ – скорость шарика в точках *M* и *B*. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} =$ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке *DM* длиной *l*: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\dfrac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке *M* скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\dfrac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \dfrac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке *B* найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

# 5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

## 5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

**Поступательное движение твердого тела** описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где $m$ – масса тела; $x_C, y_C, z_C$ – координаты центра масс тела; $F^e_{kx}$, $F^e_{ky}$, $F^e_{kz}$ – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

**Вращательное движение твердого тела** относительно неподвижной оси $z$ описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где $\omega$ – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; $\varphi$ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси $z$; $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где $\varepsilon$ – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

**Плоскопараллельное движение твердого тела** описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где $a_{Cx}$, $a_{Cy}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; $F^e_{kx}$,

$F_{ky}^{e}$ – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; $J_{zC}$ – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{\,e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

### 5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

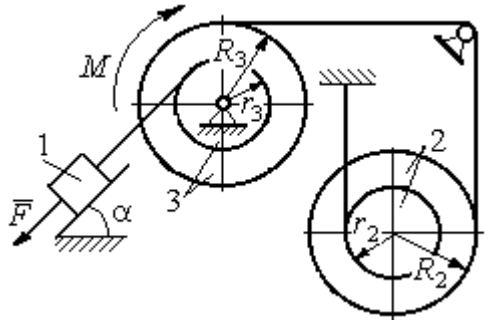
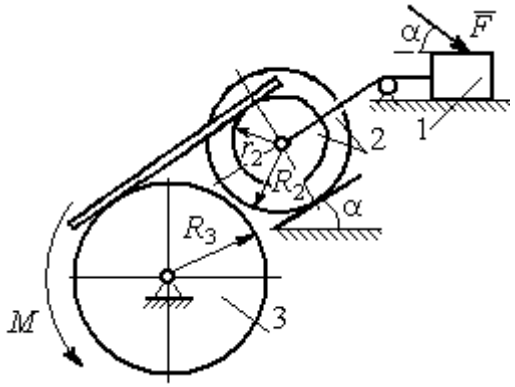
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

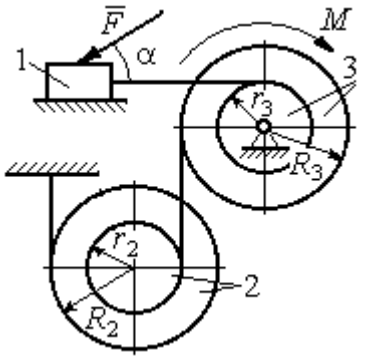
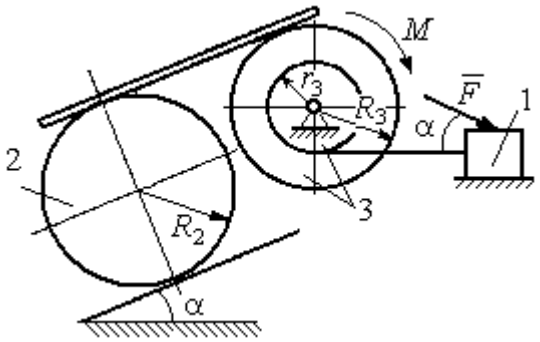
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены $R_2$, $r_2$ и $R_3$, $r_3$.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны $i_{z2}$, $i_{z3}$.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

| Варианты № 1, 11, 21 | Варианты № 2, 12, 22 |
|---|---|
|  |  |

| Варианты № 3, 13, 23 | Варианты № 4, 14, 24 |
|---|---|
|  |  |

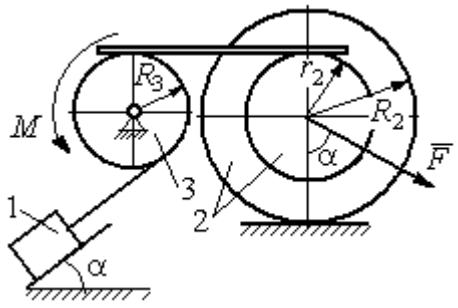
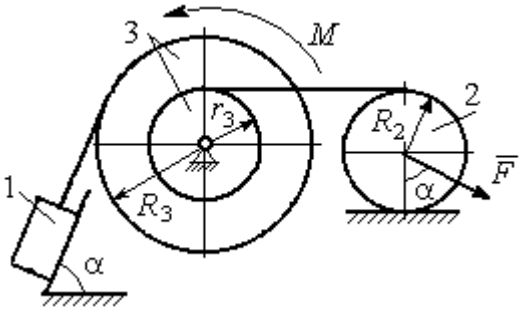
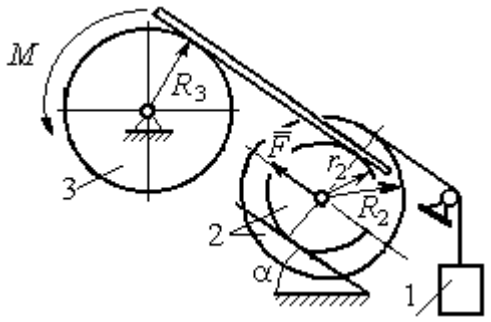
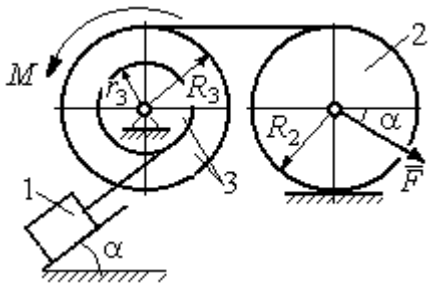
| Варианты № 5, 15, 25 | Варианты № 6, 16, 26 |
|---|---|
|  |  |

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

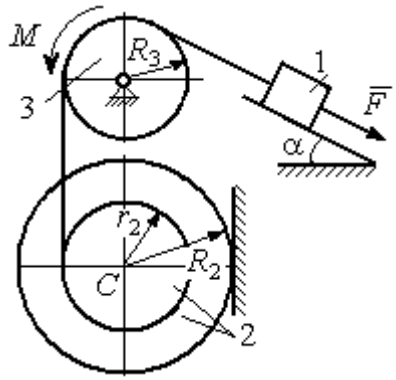
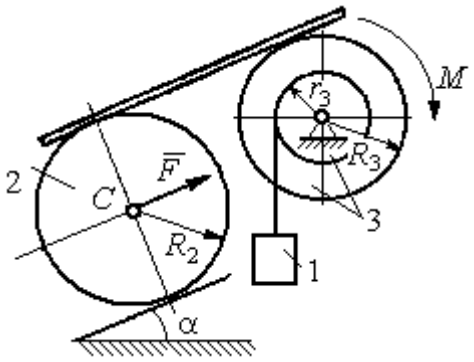
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

**Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы**

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $P_3$, Н | $F$, Н | $M$, Н·м | $\alpha$, град | $R_2$, м | $r_2$, м | $R_3$, м | $r_3$, м | $i_{z2}$, м | $i_{z3}$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $2Pr$ | 60 | $3r$ | $r$ | $2r$ | $r$ | $2r$ | $r\sqrt{2}$ |
| **2** | $3P$ | $P$ | $3P$ | $3P$ | $Pr$ | 30 | $2r$ | $r$ | $2r$ | – | $2r$ | – |
| **3** | $4P$ | $3P$ | $4P$ | $2P$ | $2Pr$ | 60 | $2r$ | $r$ | $2r$ | $r$ | $2r$ | $2r$ |
| **4** | $2P$ | $2P$ | $4P$ | $P$ | $4Pr$ | 45 | $3r$ | – | $3r$ | $r$ | – | $r\sqrt{2}$ |
| **5** | $P$ | $3P$ | $3P$ | $2P$ | $3Pr$ | 30 | $3r$ | $r$ | $r$ | – | $2r$ | – |
| **6** | $P$ | $2P$ | $4P$ | $4P$ | $6Pr$ | 60 | $3r$ | – | $3r$ | $r$ | – | $r\sqrt{2}$ |
| **7** | $P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $3Pr$ | 45 | $3r$ | $r$ | $r$ | - | $r\sqrt{3}$ | – |

*Окончание табл. 5.1*

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $P_3$, Н | $F$, Н | $M$, Н·м | $\alpha$, град | $R_2$, м | $r_2$, м | $R_3$, м | $r_3$, м | $i_{z2}$, м | $i_{z3}$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8** | $2P$ | $3P$ | $3P$ | $P$ | $3Pr$ | 30 | $2r$ | – | $2r$ | $r$ | – | $r\sqrt{3}$ |
| **9** | $3P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $2Pr$ | 30 | $2r$ | $r$ | $2r$ | – | $r\sqrt{2}$ | – |
| **10** | $P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $2Pr$ | 60 | $3r$ | – | $3r$ | $r$ | – | $r\sqrt{3}$ |
| **11** | $P$ | $P$ | $3P$ | $2P$ | $3Pr$ | 30 | $3r$ | $2r$ | $2r$ | $r$ | $r\sqrt{2}$ | $r\sqrt{2}$ |
| **12** | $2P$ | $P$ | $2P$ | $4P$ | $Pr$ | 60 | $3r$ | $r$ | $3r$ | – | $r\sqrt{3}$ | – |
| **13** | $3P$ | $P$ | $3P$ | $3P$ | $2Pr$ | 30 | $3r$ | $2r$ | $2r$ | $r$ | $2r$ | $r\sqrt{2}$ |
| **14** | $2P$ | $P$ | $3P$ | $2P$ | $4Pr$ | 60 | $2r$ | – | $3r$ | $2r$ | – | $2r$ |
| **15** | $P$ | $2P$ | $4P$ | $P$ | $4Pr$ | 45 | $3r$ | $2r$ | $2r$ | – | $r\sqrt{3}$ | – |
| **16** | $P$ | $3P$ | $4P$ | $2P$ | $3Pr$ | 30 | $2r$ | – | $2r$ | $r$ | – | $r\sqrt{2}$ |
| **17** | $P$ | $P$ | $3P$ | $2P$ | $6Pr$ | 60 | $3r$ | $r$ | $3r$ | - | $r\sqrt{3}$ | |
| **18** | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $3Pr$ | 60 | $2r$ | – | $3r$ | $r$ | – | $r\sqrt{2}$ |
| **19** | $2P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $4Pr$ | 30 | $3r$ | $r$ | $3r$ | – | $2r$ | – |
| **20** | $P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $2Pr$ | 45 | $2r$ | – | $2r$ | $r$ | – | $r\sqrt{3}$ |
| **21** | $2P$ | $P$ | $4P$ | $2P$ | $4Pr$ | 60 | $2r$ | $r$ | $3r$ | $r$ | $r\sqrt{2}$ | $2r$ |
| **22** | $P$ | $P$ | $2P$ | $5P$ | $2Pr$ | 45 | $3r$ | $2r$ | $2r$ | – | $2r$ | – |
| **23** | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $3P$ | $2Pr$ | 60 | $3r$ | $r$ | $2r$ | $r$ | $2r$ | $r\sqrt{2}$ |
| **24** | $4P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $3Pr$ | 30 | $2r$ | – | $3r$ | $r$ | – | $r\sqrt{3}$ |
| **25** | $P$ | $3P$ | $2P$ | $P$ | $2Pr$ | 60 | $3r$ | $r$ | $r$ | – | $r\sqrt{3}$ | – |
| **26** | $P$ | $3P$ | $4P$ | $3P$ | $3Pr$ | 45 | $2r$ | – | $3r$ | $2r$ | – | $r\sqrt{3}$ |
| **27** | $P$ | $P$ | $4P$ | $2P$ | $4Pr$ | 30 | $2r$ | $r$ | $2r$ | - | $r\sqrt{3}$ | |
| **28** | $2P$ | $3P$ | $3P$ | $P$ | $6Pr$ | 30 | $2r$ | – | $3r$ | $2r$ | – | $r\sqrt{2}$ |
| **29** | $2P$ | $P$ | $2P$ | $2P$ | $2Pr$ | 45 | $2r$ | $r$ | $r$ | – | $2r$ | – |
| **30** | $P$ | $P$ | $4P$ | $P$ | $4Pr$ | 60 | $3r$ | – | $3r$ | $2r$ | – | $2r$ |

## Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$,

приложенных к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

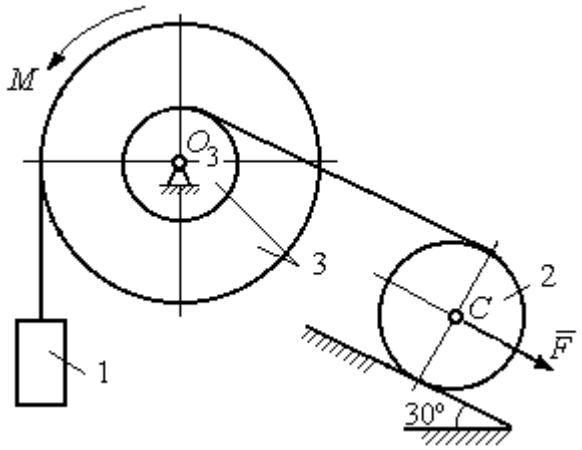



Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

*Решение*

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

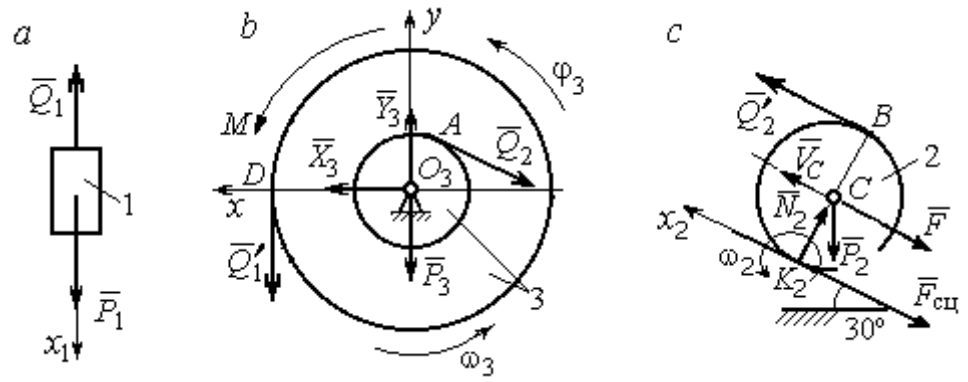



Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
*a* – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
*c* – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось $x_1$ в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось $x_1$ в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где $m_1$, $a_1$ – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через его центр масс $O_3$, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой $\omega_3$.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1' R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

где $J_{zO_3}$ – момент инерции блока 3 относительно оси *z*; $\varepsilon_3$ – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси $x_2$. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости $\omega_2$ (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через

центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q_2' R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r,$$

где $m_2$ – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; $a_C$, $\varepsilon_2$ – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; $J_C$ – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P R_2^2}{g} = \frac{4 P r^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна $V_C$, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где $CK_2$ – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки *B* катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$.

Точка *B* катка 2 и точка *A* блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек *A* и *B*, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g} a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g} \varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g} \varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину $Q_1$, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g} a_C = 7P - Q_2, \; \frac{3P}{g} a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \dfrac{10}{111} g$, $Q_2 = \dfrac{79}{37} P$. Величину натяжения нити $Q_1$ находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \dfrac{34}{37} P$.

Для вычисления динамической реакции $R_3$ оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси $x, y$ имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0,\ m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где $X_3$, $Y_3$, – проекции реакции $R_3$ оси вращающегося блока 3 на оси $x$, $y$ (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0{,}919P$ и $Q_2 = 2{,}135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

### 5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

**Кинетическая энергия тела при поступательном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где $m$ – масса тела; $V_C$ – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси $z$: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$; $\omega$ – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси $z$, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где $R$ – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где $i_z$ – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где $m$ – масса тела; $V_C$, $\omega$ – скорость центра масс и угловая скорость тела; $J_{zC}$ – момент инерции тела относительно оси $z$, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

**Работа постоянной по модулю и направлению силы** $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении $S$ точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между вектором силы и перемещением. Если угол $\alpha$ острый, работа

положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

**Работа пары сил с постоянным моментом** $M$ при повороте тела на конечный угол $\varphi$: $A = \pm M\varphi$, где $\varphi$ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

**Мощностью силы** $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V\cos\alpha$, где $V$ – скорость точки приложения силы; $\alpha$ – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm F h_O \omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; $h_O$ – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса *O*.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.** Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где $T$ – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении**. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где $T$, $T_0$ – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сум-

ма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

## 5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

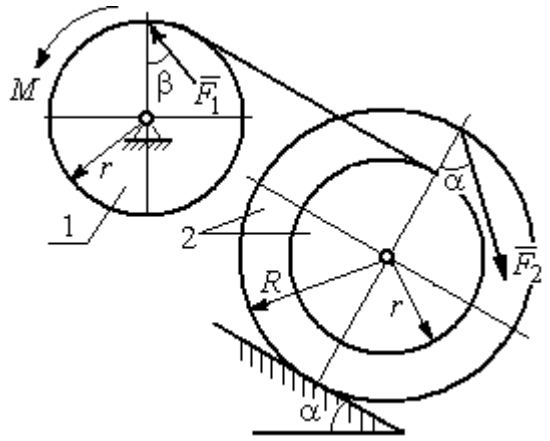
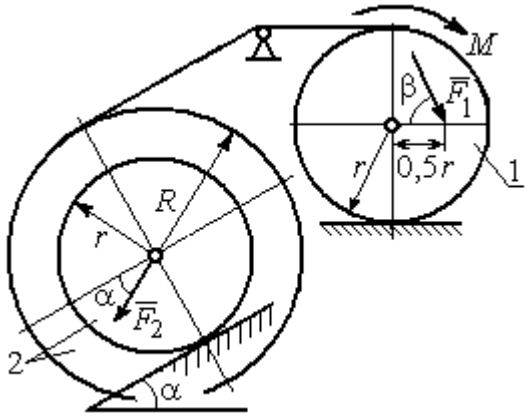
Вес дисков $P_1$ и $P_2$. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом *M*. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами $\alpha$ или $\beta$, показанными на схемах механизмов.

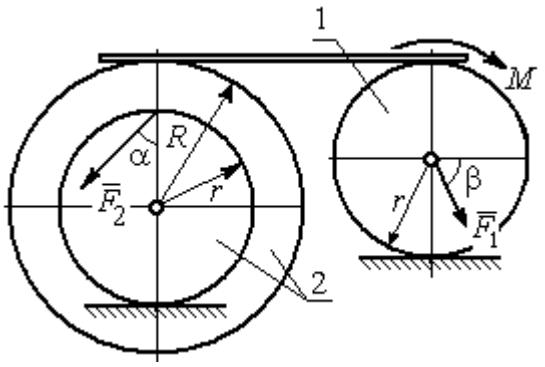
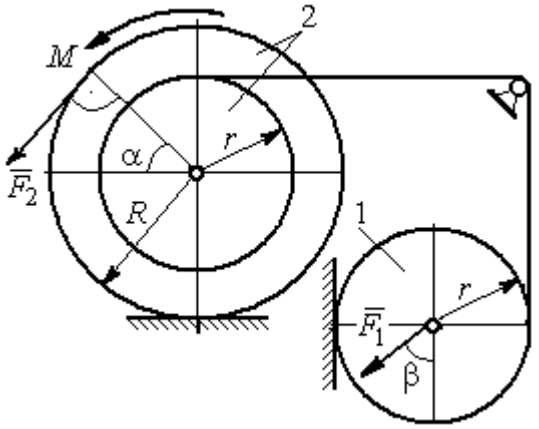
Радиус однородного диска *r*. Радиусы ступеней ступенчатого диска *R* и *r*. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен $i_z$.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

| Варианты № 1, 11, 21 | Варианты № 2, 12, 22 |
|---|---|
|  |  |

| Варианты № 3, 13, 23 | Варианты № 4, 14, 24 |
|---|---|
|  |  |

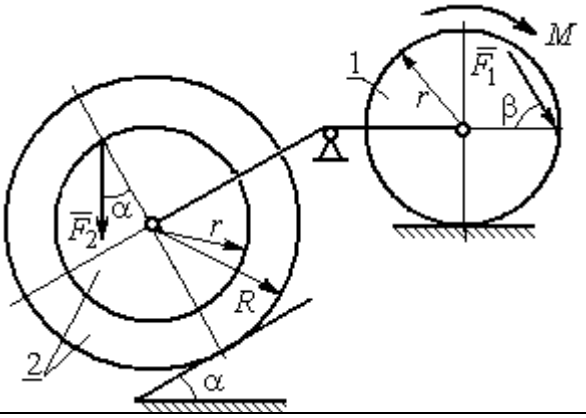
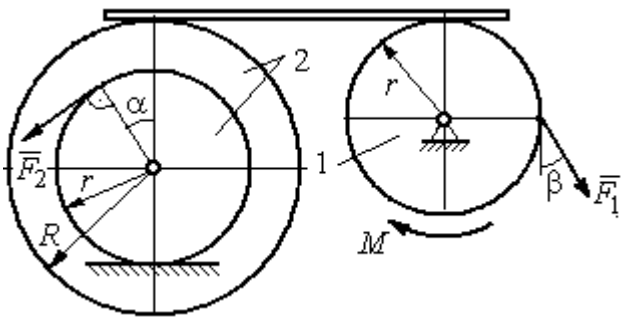
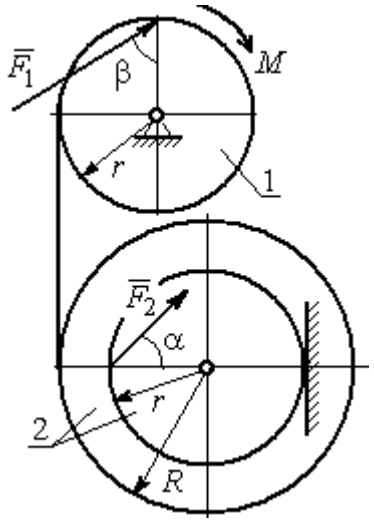
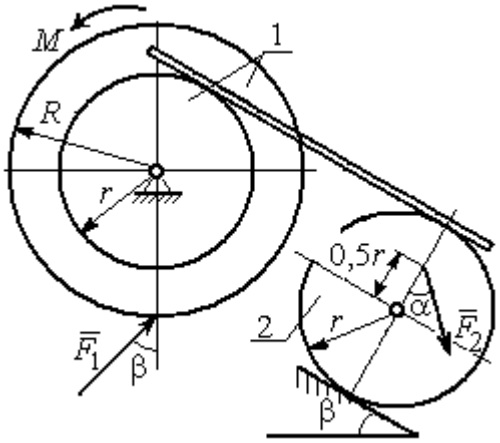
| Вариант № 5, 15, 25 | Варианты № 6, 16, 26 |
|---|---|
|  |  |

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

*Окончание вариантов задания Д5*

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

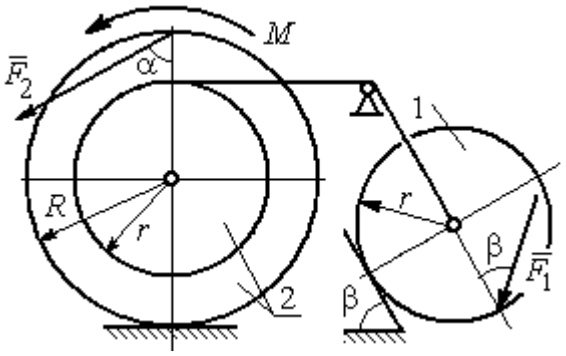
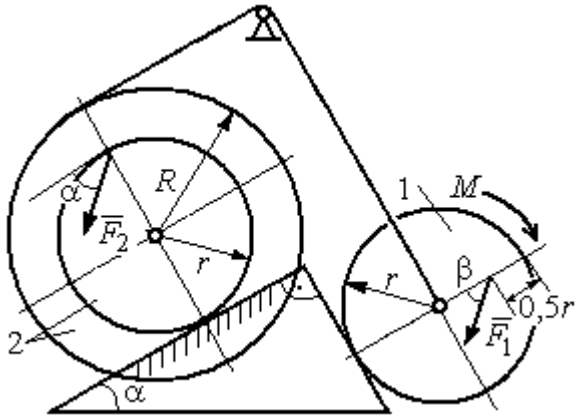
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

**Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии**

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $F_1$, Н | $F_2$, Н | $M$, Н·м | $\alpha$, град | $\beta$, град | $R$, м | $r$, м | $i_z$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 20 | 15 | 20 | 25 | 30 | 60 | 0,4 | 0,3 | 0,3 |
| **2** | 20 | 30 | 10 | 20 | 20 | 60 | 30 | 0,6 | 0,3 | 0,4 |
| **3** | 10 | 15 | 12 | 20 | 25 | 60 | 60 | 1,2 | 0,6 | 0,8 |
| **4** | 12 | 25 | 20 | 25 | 35 | 30 | 30 | 1,5 | 0,5 | 1,2 |

*Окончание табл. 5.2*

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $F_1$, Н | $F_2$, Н | $M$, Н·м | $\alpha$, град | $\beta$, град | $R$, м | $r$, м | $i_z$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 15 | 20 | 10 | 20 | 30 | 60 | 30 | 0,8 | 0,4 | 0,7 |
| **6** | 18 | 20 | 18 | 22 | 22 | 45 | 60 | 1,2 | 0,4 | 0,9 |
| **7** | 15 | 25 | 10 | 8 | 20 | 45 | 45 | 0,9 | 0,6 | 0,7 |
| **8** | 25 | 22 | 10 | 12 | 30 | 45 | 60 | 1,0 | 0,8 | 0,9 |
| **9** | 12 | 25 | 18 | 10 | 32 | 30 | 30 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **10** | 10 | 15 | 8 | 10 | 28 | 60 | 30 | 1,4 | 0,7 | 1,2 |
| **11** | 15 | 22 | 20 | 25 | 30 | 60 | 45 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| **12** | 20 | 25 | 15 | 40 | 30 | 30 | 60 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **13** | 10 | 20 | 10 | 25 | 30 | 45 | 30 | 1,0 | 0,5 | 0,9 |
| **14** | 12 | 15 | 18 | 15 | 25 | 30 | 30 | 0,9 | 0,3 | 0,8 |
| **15** | 20 | 25 | 20 | 20 | 30 | 45 | 60 | 1,0 | 0,5 | 0,8 |
| **16** | 10 | 15 | 10 | 15 | 16 | 60 | 45 | 1,2 | 0,4 | 1,1 |
| **17** | 18 | 25 | 12 | 10 | 30 | 30 | 30 | 1,5 | 0,9 | 1,3 |
| **18** | 25 | 20 | 10 | 15 | 20 | 60 | 60 | 0,8 | 0,5 | 0,7 |
| **19** | 12 | 25 | 10 | 10 | 32 | 60 | 60 | 1,2 | 0,9 | 1,1 |
| **20** | 15 | 20 | 8 | 20 | 25 | 30 | 45 | 0,8 | 0,4 | 0,7 |
| **21** | 10 | 25 | 25 | 15 | 30 | 45 | 30 | 0,7 | 0,5 | 0,6 |
| **22** | 18 | 20 | 20 | 20 | 35 | 60 | 45 | 1,4 | 0,7 | 0,9 |
| **23** | 10 | 15 | 10 | 30 | 30 | 30 | 30 | 1,4 | 0,7 | 0,8 |
| **24** | 10 | 15 | 12 | 20 | 20 | 30 | 30 | 1,2 | 0,4 | 0,8 |
| **25** | 12 | 18 | 20 | 18 | 30 | 60 | 30 | 1,2 | 0,6 | 1,1 |
| **26** | 10 | 12 | 12 | 15 | 15 | 30 | 30 | 0,9 | 0,3 | 0,8 |
| **27** | 15 | 22 | 10 | 12 | 20 | 45 | 60 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **28** | 22 | 20 | 8 | 16 | 8 | 30 | 45 | 0,6 | 0,2 | 0,4 |
| **29** | 18 | 25 | 10 | 8 | 32 | 60 | 60 | 1,2 | 0,8 | 1,1 |
| **30** | 20 | 25 | 8 | 20 | 28 | 30 | 30 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |

## Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом $M$. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами $\alpha$ и $\beta$.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси $O_1$. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания.

Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

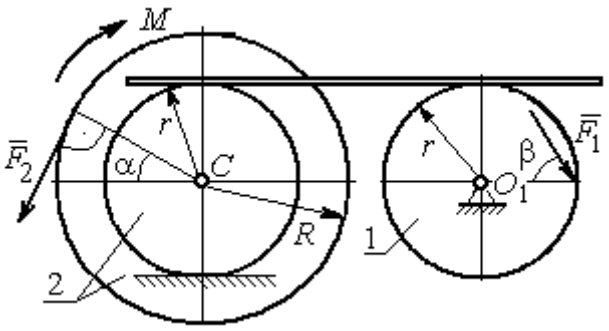



Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира $O_1$, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н, $P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, радиусы дисков $R = 0{,}8$ м, $r = 0{,}6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0{,}4$ м.

*Решение*

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости $\omega_1$ и $\omega_2$ дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира $O_1$, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом $M$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{сц}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

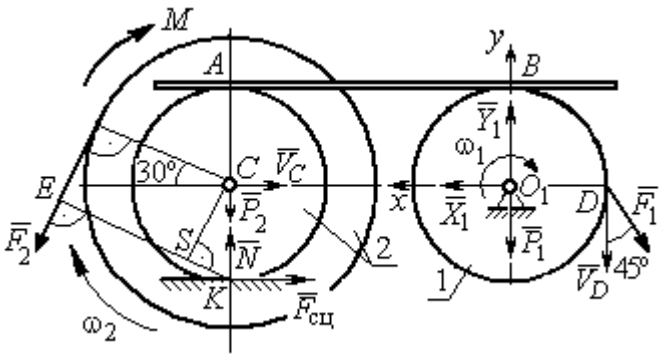



Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где $T$ – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где $\omega_1$ – угловая скорость диска 1; $J_{zO_1}$ – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где $V_C$, $\omega_2$ – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; $J_{zC}$ – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка *K* на рис. 5.8). Тогда скорость точки *C* определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки *A* $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки *A* на диске 2 равна скорости точки *B* на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left( \frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left( \frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left( 1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2.$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[ \frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left( 1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника $O_1$ равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки $C$ – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку $K$ – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра $K$; $\vec{\omega}_2$, $\omega_2$ – вектор и модуль угловой скорости диска 2; $h_K$ – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра $K$. Мощ-

ность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки $K$ противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы $F_2$ можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку $C$. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент $M$ направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке $D$, $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2}.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + \frac{M}{r} + F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1 + P_2\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с$^2$.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки *C* до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки *K* – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{r} = \frac{a_C}{r}$ = 11,42 рад/с$^2$. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с$^2$.

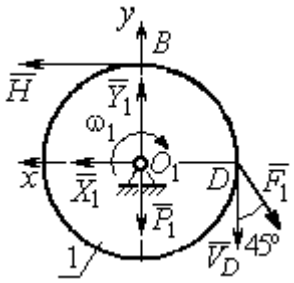



Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где $\varepsilon_1$ – угловое ускорение диска; $J_{zO_1}$ – момент инерции диска 1 относительно оси *z*, проходящей через точку $O_1$ перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси *z*.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси *z*: $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 $\varepsilon_1$ = 22,84 рад/с$^2$, найдем реакцию стержня *H* = 28,63 Н.

Для определения динамической реакции шарнира $O_1$ диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат $O_1x$ и $O_1y$, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0, \quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28{,}63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27{,}94$ Н, $Y_1 = 96{,}57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100{,}53$ Н.

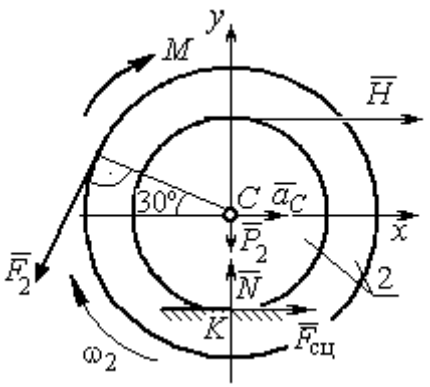


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат $xCy$ показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси $x, y$ имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2\cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2\cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с$^2$, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90{,}51$ Н.

# 6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## 6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

**Силой инерции** материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где $m$ – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

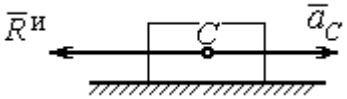


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$, равному по величине $R^{\text{и}} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси $z$, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$; $\varepsilon$ – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

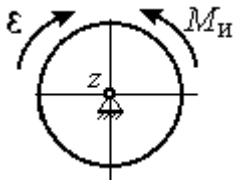


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением $\varepsilon$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{\text{и}}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси,

проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где $J_C$ – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

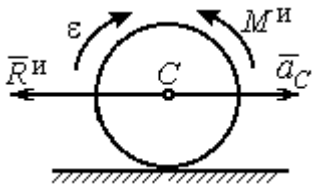


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

**Принцип Даламбера для системы**. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

**Принцип возможных перемещений.** Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма

элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

**Общее уравнение динамики.** При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

## 6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом $R$ или $r$ и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом $R$ и $r$. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом $M$. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами $\alpha$ и $\beta$. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен $i_z$.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

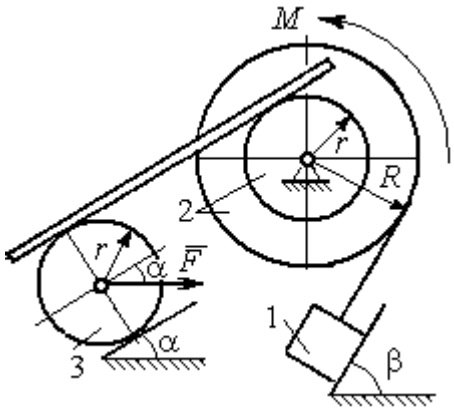
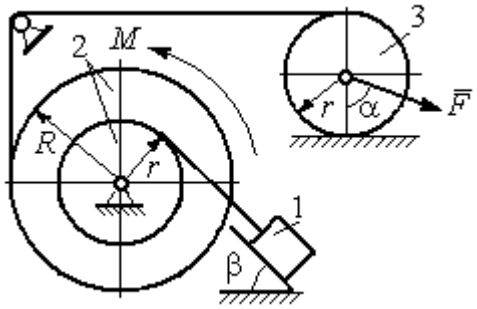
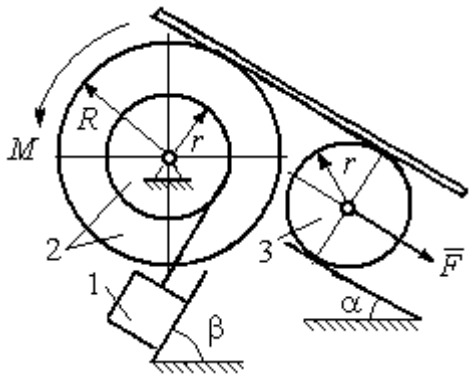
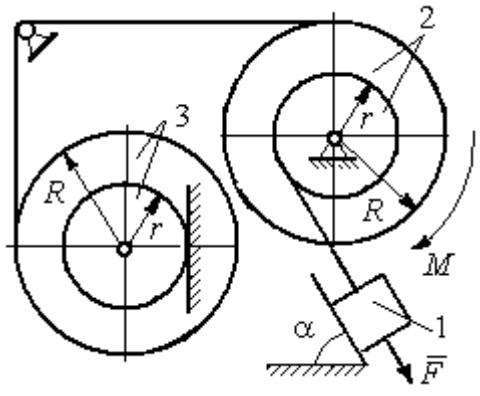
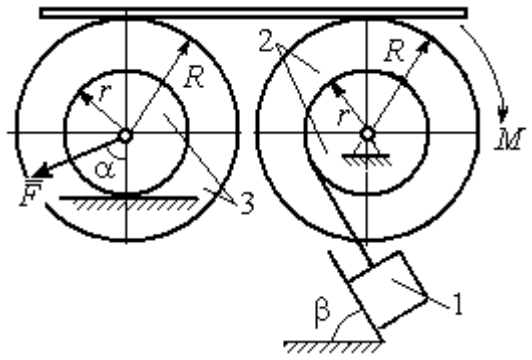
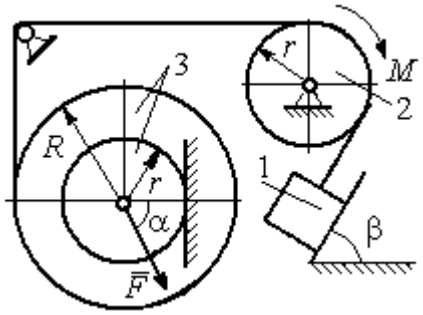
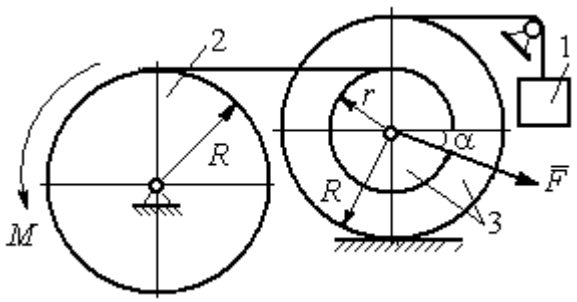
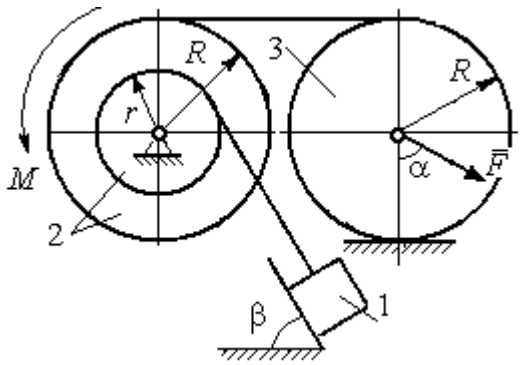
| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** |
|---|---|
|  |  |
| **Варианты 3, 13, 23** | **Варианты № 4, 14, 24** |
|  |  |

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

| **Варианты № 5, 15, 25** | **Варианты № 6, 16, 26** |
|---|---|
|  |  |

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

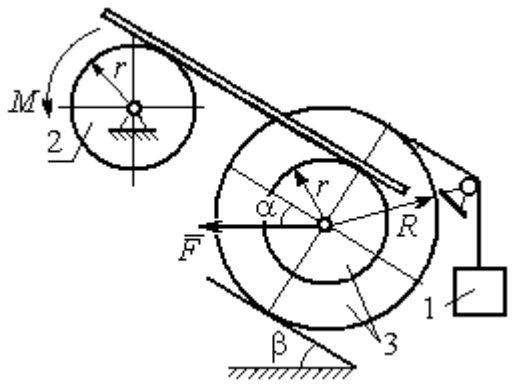
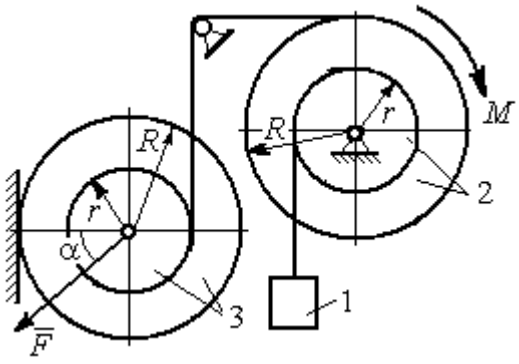
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

**Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики**

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $P_3$, Н | $F$, Н | $M$, Н·м | $\alpha$, град | $\beta$, град | $R$, м | $r$, м | $i_z$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 20 | 8 | 20 | $3(2+t^2)$ | 30 | 60 | 0,6 | 0,3 | 0,4 |
| **2** | 10 | 22 | 15 | 15 | $4(t+3)$ | 30 | 30 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **3** | 5 | 18 | 10 | 6 | $8(t^2+1)$ | 90 | 30 | 0,4 | 0,3 | 0,3 |
| **4** | 5 | 22 | 10 | 5 | $14(t^2+t+1)$ | 30 | – | 0,6 | 0,5 | 0,6 |
| **5** | 5 | 20 | 16 | 9 | $3(t^2+4)$ | 45 | 60 | 0,6 | 0,3 | 0,5 |
| **6** | 10 | 16 | 14 | 15 | $4(5+t)$ | 60 | 30 | 1,0 | 0,6 | 0,8 |
| **7** | 6 | 20 | 20 | 8 | $9(3t^2+2)$ | 45 | – | 0,8 | 0,6 | 0,8 |
| **8** | 16 | 25 | 15 | 12 | $5(t^2+4)$ | 30 | 60 | 1,2 | 0,6 | 0,8 |
| **9** | 5 | 20 | 12 | 8 | $4(3+5t)$ | 60 | 30 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| **10** | 6 | 25 | 8 | 10 | $5(3t+6)$ | 30 | – | 1,0 | 0,8 | 0,9 |
| **11** | 4 | 22 | 8 | 15 | $2+ t^2$ | 45 | 45 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **12** | 15 | 18 | 15 | 10 | $5(t+3)$ | 30 | 60 | 1,0 | 0,5 | 0,7 |
| **13** | 6 | 20 | 10 | 4 | $5(t^2+2)$ | 30 | 60 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| **14** | 10 | 25 | 15 | 8 | $16(t+2)$ | 60 | – | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **15** | 8 | 18 | 20 | 10 | $6(t+2)$ | 30 | 90 | 1,2 | 0,6 | 1,0 |
| **16** | 8 | 18 | 12 | 12 | $5(3+t^2)$ | 90 | 60 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **17** | 5 | 20 | 10 | 10 | $2t^2+20$ | 60 | – | 0,9 | 0,6 | 0,8 |
| **18** | 20 | 15 | 20 | 15 | $3(t+4)$ | 60 | 30 | 0,8 | 0,4 | 0,7 |
| **19** | 8 | 20 | 12 | 10 | $4(3+t)$ | 45 | 45 | 1,2 | 0,4 | 0,8 |
| **20** | 12 | 20 | 10 | 6 | $6(3t+4)$ | 45 | – | 1,0 | 0,6 | 0,9 |
| **21** | 15 | 25 | 12 | 12 | $6+t^2$ | 60 | 60 | 0,6 | 0,3 | 0,5 |
| **22** | 20 | 22 | 18 | 15 | $2(2t+9)$ | 45 | 45 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **23** | 8 | 24 | 12 | 8 | $7(3t^2+2)$ | 30 | 45 | 0,8 | 0,5 | 0,6 |
| **24** | 12 | 20 | 18 | 10 | $6(t+4)$ | 90 | – | 0,5 | 0,3 | 0,4 |
| **25** | 5 | 20 | 12 | 12 | $9(2+t^2)$ | 60 | 30 | 1,4 | 0,7 | 1,2 |
| **26** | 10 | 12 | 10 | 8 | $6(2+t)$ | 30 | 45 | 1,2 | 0,8 | 0,9 |
| **27** | 6 | 18 | 16 | 14 | $8(2t^2+3)$ | 30 | – | 0,8 | 0,2 | 0,6 |
| **28** | 10 | 20 | 20 | 20 | $3(t^2+3)$ | 45 | 30 | 0,6 | 0,3 | 0,5 |
| **29** | 10 | 18 | 8 | 12 | $5(4+t+ t^2)$ | 30 | 60 | 1,2 | 0,8 | 0,9 |
| **30** | 8 | 18 | 10 | 15 | $8(t^2+5)$ | 60 | – | 1,0 | 0,8 | 0,9 |

## Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилин-

дрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом $M$, приложенной к диску 3.

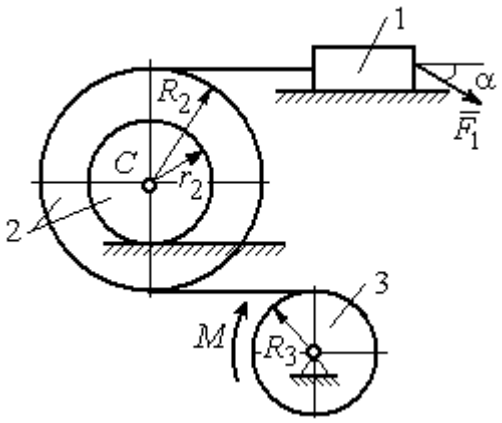


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент $t$ = 1 с, если: $P_1$ = 10 Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 =$ 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; $R_2$ = 0,8 м; $r_2$ = 0,2 м; $R_3$ = 0,4 м; $i_{2C}$ = 0,6 м.

*Решение*

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом $M$ (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом $M$, приложенная к блоку 3. Обозначим $\omega_3$, $\varepsilon_3$ – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, $V_C$, $a_C$ – скорость и ускорение центра масс катка 2, $V_1$, $a_1$ – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где $m_1$ – масса груза 1; $a_1$ – величина ускорения груза 1.

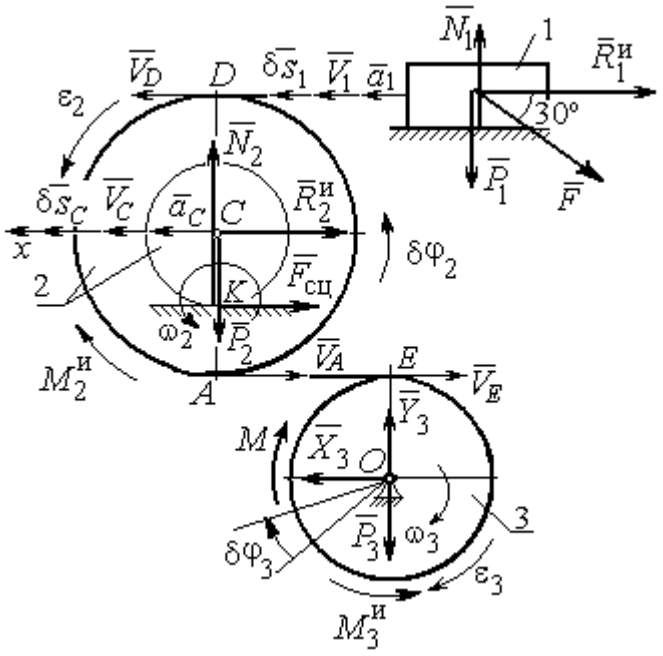



Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^{\text{и}}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^{\text{и}} = m_2 a_C$, где $m_2$ – масса катка 2; $a_C$ – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2$, где $J_{2C}$ – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; $\varepsilon_2$ – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{\text{и}}$ в сторону, противоположную угловому ускорению $\varepsilon_2$.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой ра-

вен главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где $J_{3O}$ – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; $\varepsilon_3$ – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению $\varepsilon_3$. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость $V_C$ центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке *K* касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки *A* катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки *E* блока 3 равна скорости точки *A* катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки *D* катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0, \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом $M$, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ =$$

$$= \left[ 6(1 + 2t)\left( \frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2} \right) - 5(t + 1)\left( \frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2} \right) 0{,}866 \right] \delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения $a_C$ центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2g r_2}a_C,$$

где $J_{2C}$ – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; $i_{2C}$ – радиус инерции катка 2; $J_{3O}$ – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения $\delta s_C$ центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}}\delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}}\delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g}\left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2}\right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с$^2$.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось $x$ по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки $C$ на ось $x$, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\dfrac{t^2}{2} + 1{,}29\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом $M$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

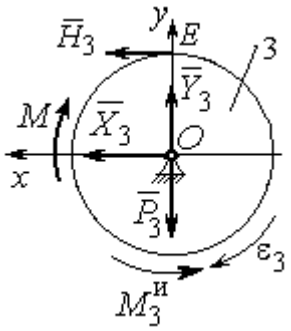



Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3 R_3 - M_3^{и} = 0$, где $M_3^{и} = J_{3O}\varepsilon_3 = \dfrac{P_3 R_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2}$. Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2} = \frac{6(1+2t)}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)}{2gr_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t$ = 1 с: $X_3 = -H_3$= – 41,04 Н, $Y_3 = P_3$= 15 Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира $X_3$ означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 43,69 Н.

## 6.3. Уравнения Лагранжа II рода

**Обобщенными координатами** механической системы называется совокупность любых $s$ независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$. Величина $Q_k$, равная коэффициенту при вариации $\delta q_k$ обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где $T$ – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; $s$ – число степеней свободы системы.

### 6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью *c*. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

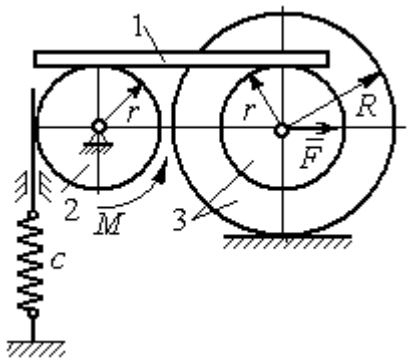
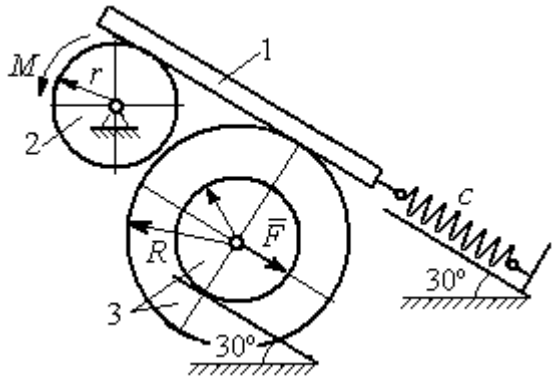
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

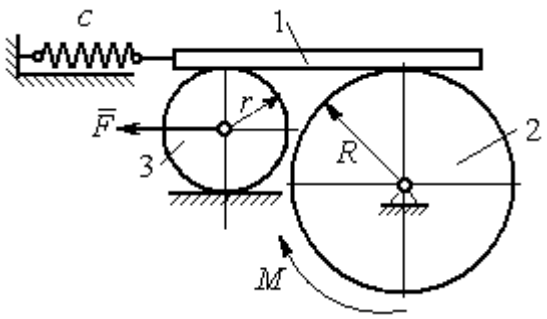
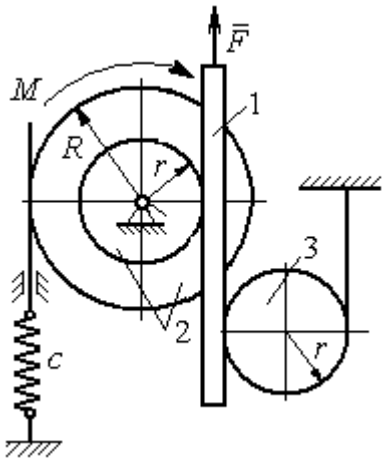
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен $i_z$.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом $M$.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_{20}$, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин *F* или *M* в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента *M* на схеме следует изменить на противоположные.

| Варианты № 1, 11, 21 | Варианты № 2, 12, 22 |
|---|---|
|  |  |

| Варианты № 3, 13, 23 | Варианты № 4, 14, 24 |
|---|---|
|  |  |

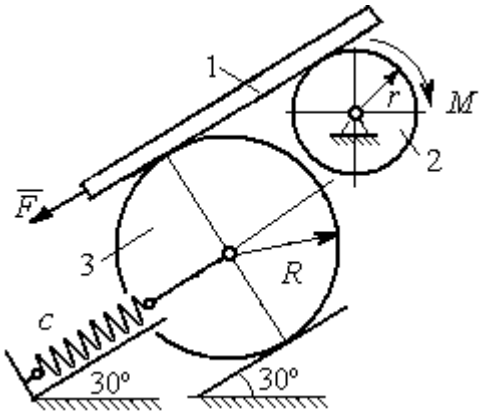
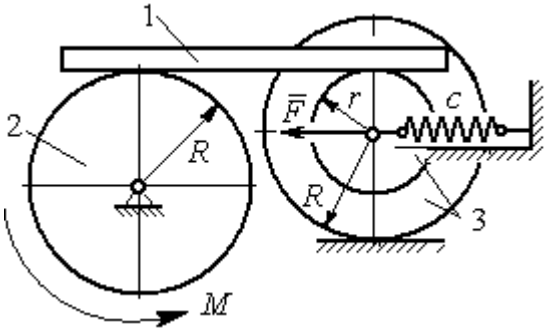
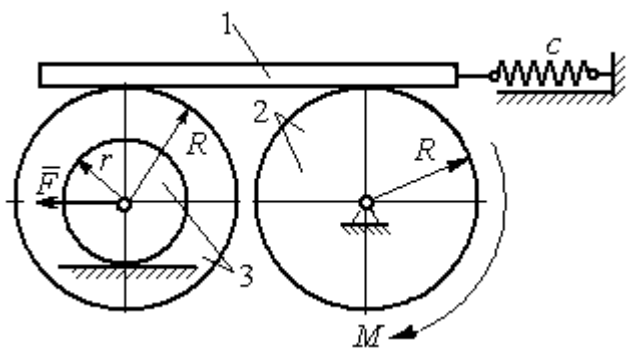
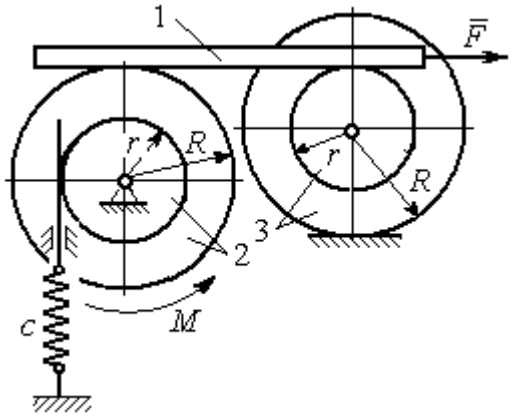
| Варианты № 5, 15, 25 | Варианты № 6, 16, 26 |
|---|---|
|  |  |

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

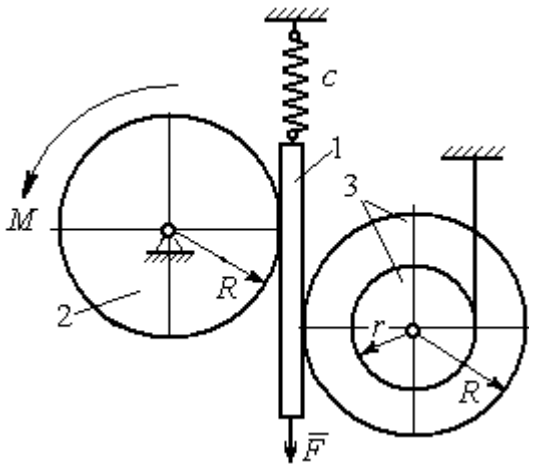
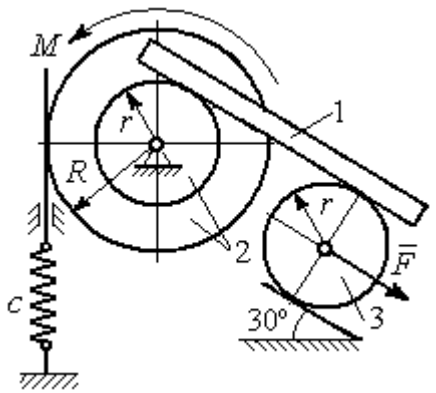
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

**Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа**

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $P_3$, Н | $F$, Н | $M$, Н·м | $c$, Н/м | $\omega_{20}$, рад/с | $R$, м | $r$, м | $i_z$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 12 | 18 | 15 | 3 | 50 | 0,3 | 0,6 | 0,3 | 0,4 |
| **2** | 10 | 8 | 15 | 12 | 5 | 55 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 0,6 |
| **3** | 5 | 18 | 10 | 8 | 4 | 60 | 0,2 | 0,5 | 0,3 | – |
| **4** | 5 | 20 | 12 | 10 | 6 | 70 | 0,5 | 0,6 | 0,5 | 0,6 |
| **5** | 5 | 8 | 16 | 8 | 8 | 65 | 0,2 | 0,6 | 0,3 | – |

*Окончание табл. 6.2*

| Номер варианта задания | $P_1$, Н | $P_2$, Н | $P_3$, Н | $F$, Н | $M$, Н·м | $c$, Н/м | $\omega_{20}$, рад/с | $R$, м | $r$, м | $i_z$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | 8 | 10 | 14 | 6 | 2 | 50 | 0,1 | 1,0 | 0,6 | 0,8 |
| **7** | 10 | 12 | 15 | 12 | 3 | 65 | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **8** | 12 | 15 | 15 | 6 | 2 | 50 | 0,3 | 1,2 | 0,6 | 0,8 |
| **9** | 5 | 20 | 12 | 8 | 4 | 75 | 0,1 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| **10** | 6 | 25 | 8 | 5 | 12 | 60 | 0,4 | 1,0 | 0,8 | 0,9 |
| **11** | 4 | 10 | 12 | –10 | –2 | 60 | 0,2 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **12** | 5 | 8 | 15 | –8 | 3 | 50 | 0,5 | 1,0 | 0,5 | 0,7 |
| **13** | 6 | 15 | 8 | –12 | –4 | 65 | 0,4 | 0,6 | 0,5 | – |
| **14** | 10 | 25 | 10 | 6 | 10 | 55 | 0,1 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **15** | 8 | 6 | 20 | –10 | 2 | 70 | 0,2 | 1,2 | 0,6 | – |
| **16** | 10 | 12 | 12 | –5 | 6 | 60 | 0,3 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| **17** | 12 | 16 | 12 | –6 | –2 | 55 | 0,4 | 0,9 | 0,6 | 0,8 |
| **18** | 10 | 20 | 20 | 10 | 4 | 60 | 0,1 | 0,8 | 0,4 | 0,7 |
| **19** | 8 | 20 | 12 | –10 | 6 | 65 | 0,2 | 1,2 | 0,4 | 0,8 |
| **20** | 12 | 20 | 10 | –3 | 6 | 50 | 0,24 | 1,0 | 0,6 | 0,9 |
| **21** | 5 | 12 | 15 | 12 | –3 | 55 | 0,3 | 0,6 | 0,5 | 0,55 |
| **22** | 10 | 15 | 18 | 6 | –2 | 65 | 0,1 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| **23** | 8 | 20 | 12 | –8 | 2 | 45 | 0,2 | 0,8 | 0,6 | – |
| **24** | 12 | 20 | 18 | –4 | –8 | 70 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,4 |
| **25** | 6 | 10 | 15 | –6 | –2 | 60 | 0,1 | 1,4 | 0,7 | – |
| **26** | 8 | 12 | 10 | 10 | –3 | 65 | 0,2 | 1,2 | 0,8 | 0,9 |
| **27** | 6 | 18 | 16 | 5 | –3 | 70 | 0,2 | 0,8 | 0,2 | 0,6 |
| **28** | 8 | 12 | 12 | –6 | 2 | 65 | 0,3 | 0,6 | 0,3 | 0,5 |
| **29** | 10 | 18 | 20 | –10 | 4 | 60 | 0,2 | 1,2 | 0,8 | 0,9 |
| **30** | 8 | 18 | 10 | 8 | 6 | 75 | 0,1 | 1,0 | 0,8 | 0,9 |

## Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью $c$. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска $R$ и $r$, радиус однородного диска $r$. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом $M$. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует.

Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_z$.

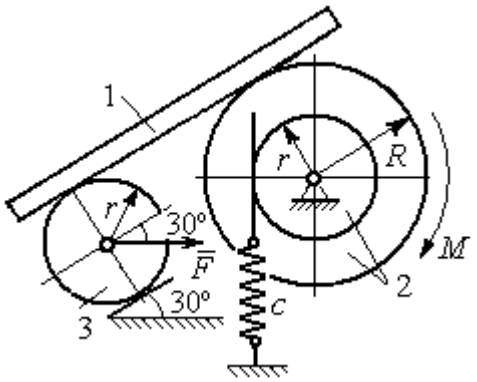


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

*Решение*

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты $q$ выберем перемещение $x$ верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной $l_0$ находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

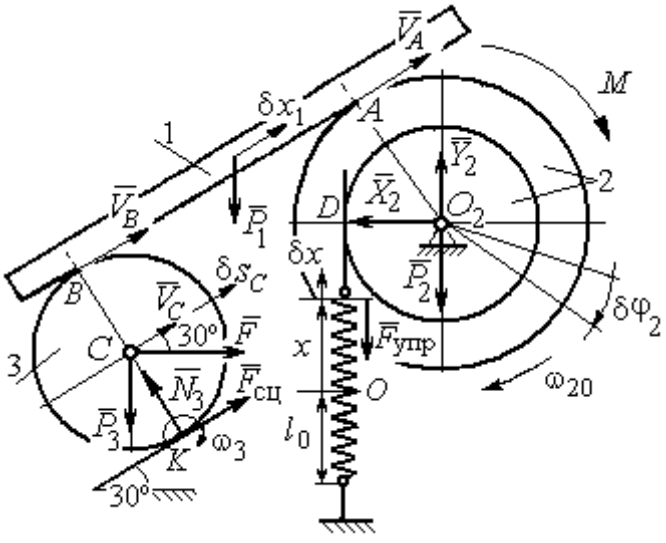


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где $T$ –

кинетическая энергия системы, $Q_x$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате *x*.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где $m_1$, $V_1$ – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где $\omega_2$ – угловая скорость блока, $J_{2z}$ – момент инерции блока 2 относительно оси *z*, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где $V_C$ – скорость центра масс катка 3; $J_{zC}$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; *r* – радиус катка; $\omega_3$ – угловая скорость катка.

Выразим скорость $V_1$ бруса 1, угловые скорости $\omega_2$, $\omega_3$ блока 2 и катка 3, а также скорость $V_C$ центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки *A* блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_1^2=\frac{P}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{r}\right)^2=1{,}125\frac{P}{g}\dot{x}^2,\ \ T_2=\frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2=\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(r\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=2\frac{P}{g}\dot{x}^2,$$

$$T_3=\frac{1}{2}m_3V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2=0{,}422\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T=T_1+T_2+T_3=3{,}547\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой $x$, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение $\delta x$ в положительном направлении оси $x$ (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2=\frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние $\delta x_1$: $\delta x_1=\frac{\delta xR}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta S_C$: $\delta S_C=\frac{\delta xR}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом $M$, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента $M$, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M)=M\delta\varphi_2=M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1)=P_1\delta x_1\cos120^\circ=-P_1\delta x_1\cos60^\circ=-\frac{P_1\delta xR}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы $F$: $\delta A(P_3)=P_3\delta s_C\cos120^\circ=-P_3\frac{\delta xR}{4r}$, $\delta A(F)=F\frac{\delta xR}{2r}\cos30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из неде-

формированного положения на расстояние $x$: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние $\delta x$ вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1\delta xR}{2r} - P_3\frac{\delta xR}{4r} + F\frac{\delta xR}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате $x$: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные; $k$ – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1\sin 2{,}63t + C_2\cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные $C_1$, $C_2$ находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки *D* блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20}$, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1 \cos 2{,}63t - 2{,}63C_2 \sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038 \sin 2{,}63t - 0{,}23 \cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\, x(t) = 0{,}057 \sin 2{,}63t - 0{,}34 \cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\, x(t) = 0{,}19 \sin 2{,}63t - 1{,}15 \cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

## 6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны *R*. Найти уравнения движения системы в обоб-

щённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

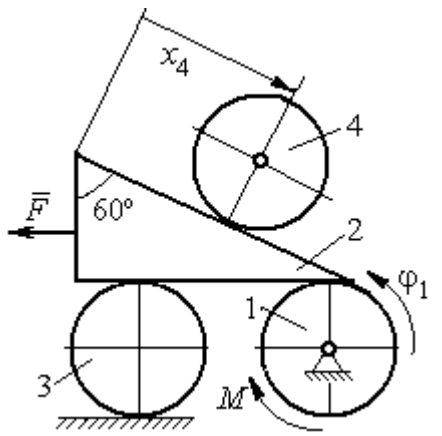
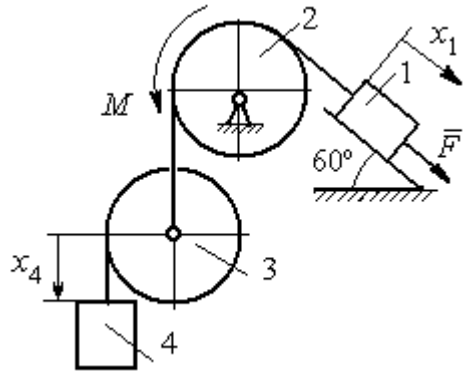
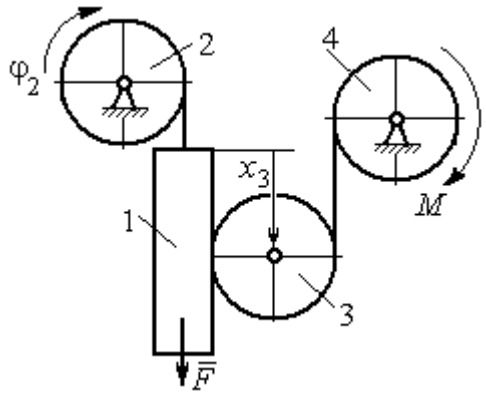
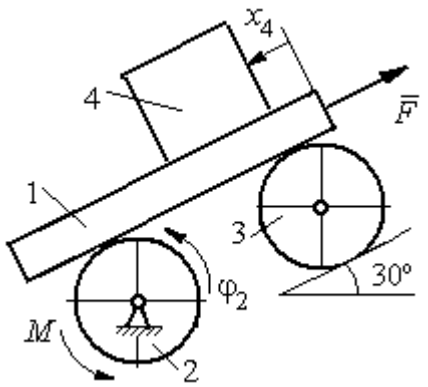
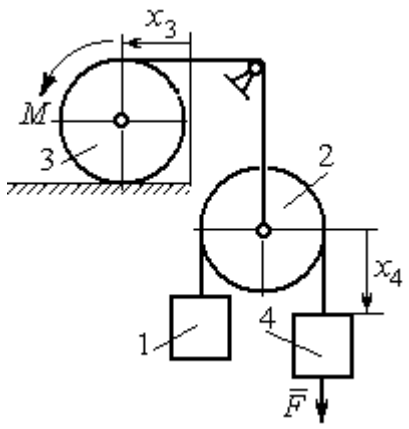
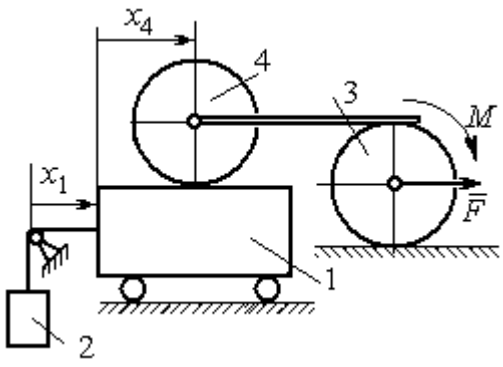
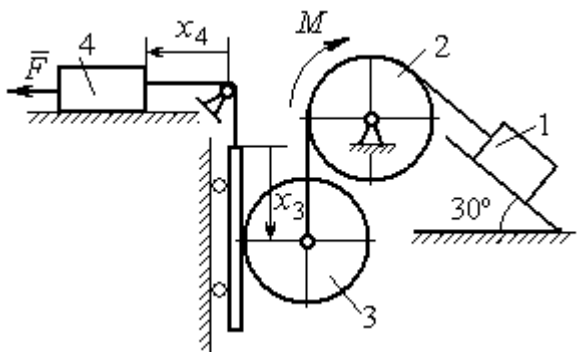
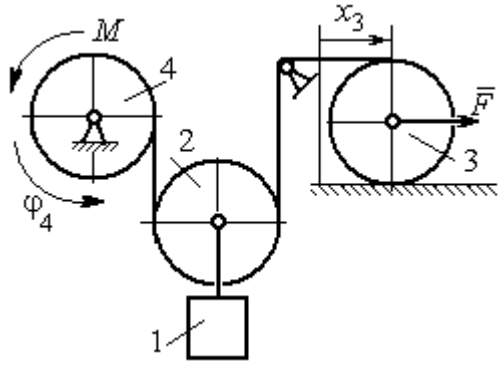
| **Варианты № 1, 11, 21** | **Варианты № 2, 12, 22** |
|---|---|
|  |  |
| **Варианты № 3, 13, 23** | **Варианты № 4, 14, 24** |
|  |  |
| **Варианты № 5, 15, 25** | **Варианты № 6, 16, 26** |
|  |  |

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

*Окончание вариантов задания Д8*

| **Варианты № 7, 17, 27** | **Варианты № 8, 18, 28** |
|---|---|
|  |  |

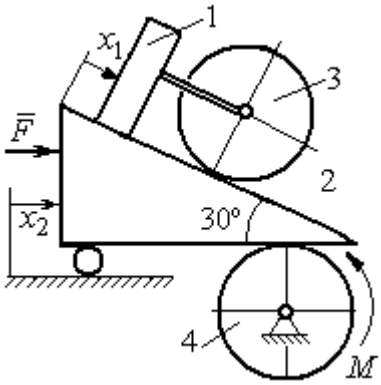
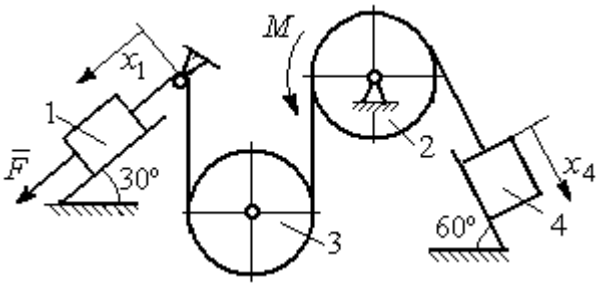
| **Варианты № 9, 19, 29** | **Варианты № 10, 20, 30** |
|---|---|
|  |  |

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

**Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы**

| Номер варианта задания | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$, Н | $P$ | $2P$ | $P$ | $1{,}5P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $1{,}2P$ | $3P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $P$ |
| $P_2$, Н | $3P$ | $3P$ | $4P$ | $3P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $3P$ | $4P$ | $3P$ |
| $P_3$, Н | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $2P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ |
| $P_4$, Н | $2P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $3P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $2P$ | $2P$ |
| $R$, м | $2r$ | $1{,}5r$ | $2{,}5r$ | $1{,}2r$ | $2r$ | $r$ | $1{,}5r$ | $r$ | $2r$ | $r$ | $1{,}5r$ | $1{,}2r$ | $2r$ | $2r$ | $2r$ |
| $F$, Н | $P$ | $2P$ | $P$ | $3P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $4P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ | $1{,}5P$ | $4P$ | $2P$ |
| $M$, Н·м | $2Pr$ | $3Pr$ | $4Pr$ | $3Pr$ | $3Pr$ | $4Pr$ | $2Pr$ | $2Pr$ | $3Pr$ | $2Pr$ | $3Pr$ | $4Pr$ | $3Pr$ | $3Pr$ | $2Pr$ |

*Окончание табл. 6.3*

| Номер варианта задания | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$, Н | $4P$ | $1{,}5P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $P$ | $1{,}5P$ | $1{,}5P$ | $2P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $1{,}2P$ | $3P$ | $1{,}2P$ |
| $P_2$, Н | $2P$ | $2P$ | $2P$ | $4P$ | $3P$ | $4P$ | $3P$ | $4P$ | $3P$ | $2P$ | $2P$ | $1{,}2P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ |
| $P_3$, Н | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $P$ | $P$ | $3P$ |
| $P_4$, Н | $1{,}5P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $2P$ | $2P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $P$ | $2P$ | $P$ | $2P$ |
| $R$, м | $1{,}5r$ | $r$ | $1{,}5r$ | $2r$ | $r$ | $1{,}2r$ | $2r$ | $1{,}5r$ | $2r$ | $r$ | $1{,}5r$ | $2r$ | $r$ | $1{,}2r$ | $2r$ |
| $F$, Н | $2P$ | $2P$ | $P$ | $3P$ | $4P$ | $2P$ | $3P$ | $2P$ | $3P$ | $P$ | $3P$ | $1{,}5P$ | $4P$ | $2P$ | $3P$ |
| $M$, Н·м | $3Pr$ | $2Pr$ | $4Pr$ | $Pr$ | $4Pr$ | $4Pr$ | $2Pr$ | $Pr$ | $4Pr$ | $2Pr$ | $4Pr$ | $2Pr$ | $2Pr$ | $3Pr$ | $2Pr$ |

## Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса $R$ (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом $M$. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, перекинутому через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса $R$. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

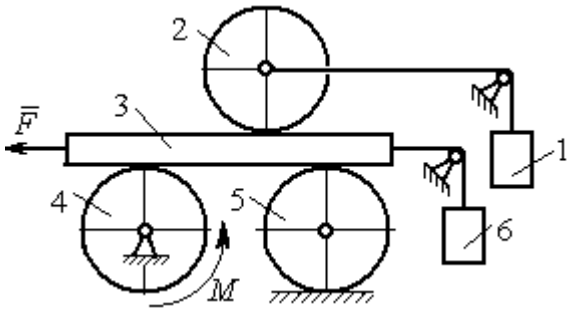


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

*Решение*

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение

катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение $x_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и перемещение $x_3$ платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где $T$ – кинетическая энергия системы; $Q_{x_2}$, $Q_{x_3}$ – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

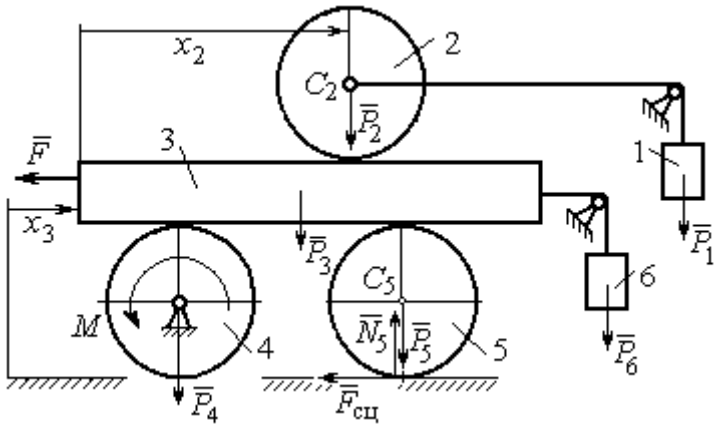


Рис. 6.16. Действующие силы
и обобщённые координаты механической системы

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где $V_3$ – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где $J_4$, $\omega_4$ – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5 = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где $J_5$ – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; $\omega_5$, $V_{C_5}$ – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка *K* касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

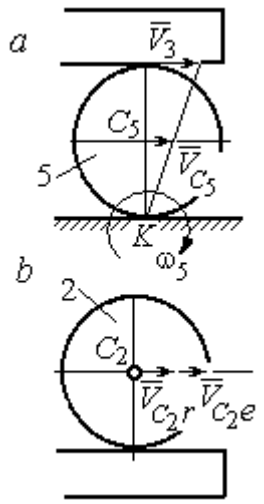


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость $V_{C_2}$ центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном

движении: $\omega_2 = \dfrac{V_{C_2 r}}{R_2} = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \dfrac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где $J_2$ – осевой момент инерции катка 2; $\omega_2$ – угловая скорость катка; $V_{C_2}$ – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \dfrac{P_1}{2g}V_1^2$, $T_6 = \dfrac{P_6}{2g}V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{P_3}{2g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2 + \frac{P_6}{2g}V_6^2,$$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \dfrac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \dfrac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \dfrac{P_2 R_2^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \dfrac{P_4 R_4^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \dfrac{P_5 R_5^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате $x_3$, оставляя координату $x_2$ без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2 стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_3$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\vec{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

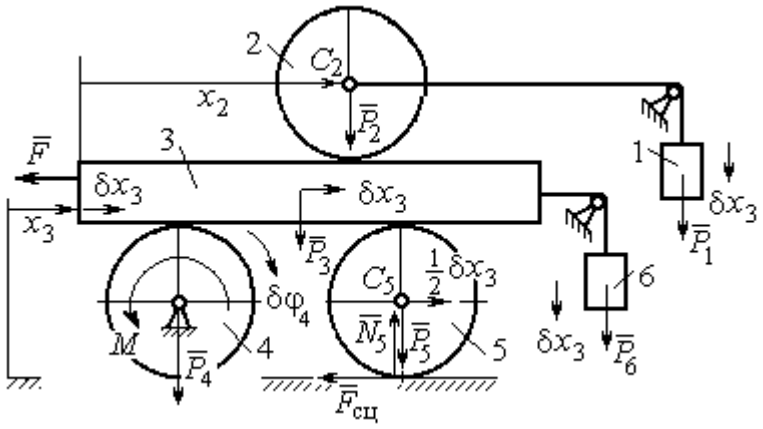



Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом $M$ и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении $\delta x_3$: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \dfrac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении $\delta x_3$ с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате $x_3$: $Q_{x_3} = -\dfrac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате $x_2$, оставляя координату $x_3$ без изменения: $\delta x_2 > 0, \delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате $x_2$: $Q_{x_2} = P$.

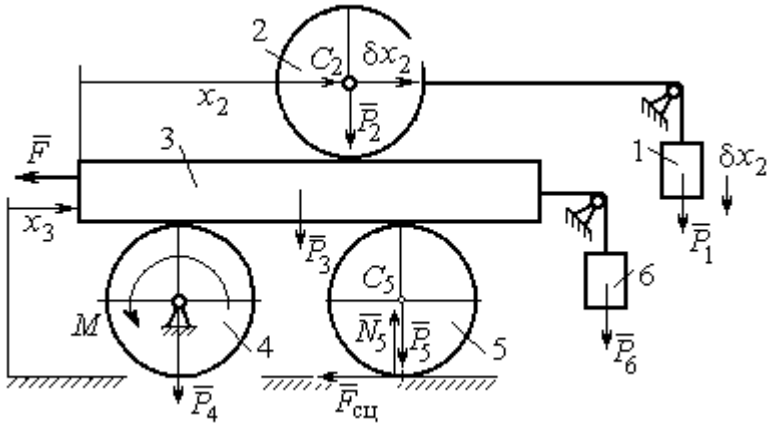



Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты $x_3$ означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси $x_3$ (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}x_2 = \frac{1}{2r}x_2 = 0{,}097\frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4}x_3 = \frac{1}{2r}x_3 = -0{,}047\frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2}x_3 = -0{,}047gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024\frac{gt^2}{r}$.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

*Бать М. И.*, *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

*Бутенин Н. В.*, *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

*Вебер Г. Э.*, *Ляпцев С. А*. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

*Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*сборник заданий для расчетно-графических работ*

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 9,75 Уч. изд. л. 6,5 Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет.
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ ..... 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. ..... 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки .... 73
4.3. Колебания материальной точки ..... 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки ..... 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. ..... 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии ..... 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ..... 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы ..... 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. ..... 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы
с применением теоремы об изменении кинетической энергии ..... 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ..... 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики ..... 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы
с применением общего уравнения динамики ..... 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода ..... 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы
с применением уравнений Лагранжа ..... 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ..... 155

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»




А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине*
*«Разрушение горных пород»*
*для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

*Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС* УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

*Разрушение горных пород:* Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 42 с.

Пособие предназначено для выполнения контрольной работы студентов всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Разрушение горных пород».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Лещуков Н.Н.,

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ..... 5
1. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ ..... 6
1.1. Общие положения ..... 6
1.2. Определение параметров буровзрывных работ ..... 6
1.2.1. Выбор взрывчатых материалов ..... 6
1.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров ..... 11
1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов ..... 12
1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб ..... 12
1.2.3.2. Прямые врубы ..... 14
1.2.4. Определение удельного заряда ВВ ..... 18
1.2.5. Выбор диаметра шпура ..... 20
1.2.6. Определение количества шпуров ..... 20
1.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов ..... 22
2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ ..... 24
3. ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ ..... 27
4. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ ..... 30
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ..... 31
ПРИЛОЖЕНИЯ ..... 32
Приложение 1. Образец оформления обложки отчёта ..... 31
Приложение 2. Пример паспорта БВР на прроведение выработки ..... 32
Приложение 3. Задания по расчёту параметров и составлению паспорта БВР на проведение выработки ..... 35
Приложение 4. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок ..... 39

# ВВЕДЕНИЕ

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип врубa, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

Отчёт по контрольной работе оформляется на листах стандартного формата А4 (210 мм х 297 мм). Обложка отчёта выполняется в соответствии с образцом, приведённым в Приложении 1.

На первой странице отчёта приводится его содержание с указанием страниц, далее – содержание задания по следующей форме (для примера взято задание № 1 настоящего пособия – Приложение 3):

## Задание № 1

Выполнить расчёт и составить паспорт буровзрывных работ для проведения выработки при следующих данных:

– наименование выработки: квершлаг однопутный;
– форма поперечного сечения выработки – сводчатая;
– размеры выработки (высота и ширина) – 3,4х3,3 м;
– площадь сечения вчерне – 10,5 м$^2$;
– коэффициент крепости пород по шкале проф. М. М. Протодьяконова $f = 15$;
– категория пород – I;
– обводнённость – с;
– категория шахты по газу или пыли и наличие метана в выработке – не опасная.

После выполнения и оформления расчётной части отчёта приводится паспорт БВР, в котором указываются: характеристика выработки; характеристика пород; исходные данные; схема расположения шпуров в трёх проекциях; кон-

струкция вруба; конструкции зарядов во врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих шпурах; основные показатели взрывных работ; меры безопасности. Пример заполнения паспорта приведён в Приложении 2.

Студенты, обучающиеся по заочной форме и работающие на горном предприятии, в качестве исходных данных для выполнения настоящей работы (характеристики выработки и пород) могут по согласованию с преподавателем взять фактические исходные данные предприятия. Выполнив расчёты и составив паспорт в соответствии с рекомендациями пособия, студент приводит в отчёте также фактически действующий паспорт по принятой выработке и даёт краткий анализ расчётного и фактически действующего паспортов БВР.

# 1. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

## 1.1. Общие положения

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

## 1.2. Определение параметров буровзрывных работ

### 1.2.1. Выбор взрывчатых материалов

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Едиными правилами безопасности при взрывных работах» (ЕПБ) [1] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [2] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 1.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 1.1

**Рекомендуемые ВВ**

| Условия взрывных работ | Условия размещения зарядов | Коэффициент крепости пород $f$ | Тип ВВ | Способ заряжания |
|---|---|---|---|---|
| Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли | Сухие шпуры | до 12 | Гранулит М<br>Граммонит 79/21<br>Гранулит АС-4В<br>Гранулит-игданит | Механизированный |
| | | | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Гранулит АС-8В | Механизированный |
| | | | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | Ручной |
| | Обводнённые шпуры | до 12 | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | |
| Выработки, опасные по взрыву газа и пыли | Сухие и обводнённые шпуры | Для взрывания по породе | Аммонит АП–5ЖВ | Ручной |
| | | Для взрывания по углю с учетом степени опасности | IV кл. Аммонит Т-19<br>Аммонит ПЖВ-20<br>V кл. Угленит Э-6<br>VI кл. Угленит 12ЦБ | |
| | Для водораспыления | Открытый заряд | Ионит | |

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

**Характеристики ВВ**

| Наименование ВВ | Идеальная работа взрыва, кДж/кг | Плотность в патронах или насыпная, кг/м$^3$ | Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг | Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м$^3$ | Расстояние передачи детонации между патронами, см | | Диаметр патронов, мм | Масса патрона, кг | Длина патрона, мм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Сухие | После выдержки в воде | | | |
| Аммонит № 6ЖВ | 3561 | 1000-1100 | 3917 | 1,0 | 5-9 | 3-6 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал М-10 | 4410 | 950-1100 | 4520 | 1,15 | 4 | 3 | 32 | 0,2 | 250 |
| Детонит М | 4316 | 1000-1200 | 4963 | 1,27 | 8-18 | 5-15 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал скальный № 1 | 4420 | 1000-1100 | 4641 | 1,18 | 8-14 | 5-10 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонит АП-5ЖВ | 2991 | 1000-1150 | 3215 | 0,82 | 5-10 | 2-7 | 36 | 0,3 | 250 |
| Аммонит Т-19 | 2564 | 1000-1200 | 2820 | 0,72 | 7-12 | 4-8 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит Э-6 | 1946 | 1100-1250 | 2289 | 0,58 | 5-12 | 3-10 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит 12 ЦБ | 1770 | 1200-1350 | 2256 | 0,58 | 4 | 2 | 36 | 0,3 | 240 |
| Ионит | 1482 | 1000-1200 | 1704 | 0,44 | – | – | 36 | 0,3 | 240 |
| Гранулит М | 3163 | 780-820 (1000-1150)* | 3384 | 0,86 | | | | | |
| Гранулит АС-4В | 3645 | 800-850 (1100-1200)* | 4192 | 1,07 | | | | | |
| Гранулит АС-8В | 3997 | 800-850 (1100-1200)* | 4597 | 1,17 | | | | | |
| Гранулит-игданит | 3150 | 800-850 (1100-1200)* | 3760 | 0,85 | | | | | |

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 1.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 1.3

**Электродетонаторы для шахт и рудников**

| Тип электродетонаторов | Кол-во серий | Интервалы замедления, мс (с) | Безопасный ток, А | Гарантийный ток, А | Сопротивление, Ом | Примечание |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ЭД-8Ж(Э) | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности |
| ЭД-3-Н | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭД-1-8-Т | 1 | 0 | 1,0 | 5,0 | 0,5-0,75 | Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам |
| ЭД-3-Т | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭДКЗ-ОП | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности |
| ЭДКЗ-П | 5 | 25, 50, 75, 100, 125 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭДКЗ-ПМ | 7 | 15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭД-КЗ-ПКМ | 9 | 4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 1.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 1.4

**Характеристики систем неэлектрического инициирования**

| Устройство | Интервал замедления, мс | Назначение |
|---|---|---|
| СИНВ-Ш | 0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | Изготовление патронов-боевиков |
| ДБИ3 | 0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | |

*Примечание.* Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

### 1.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 1.5.

Таблица 1.5

**Тип вруба и глубина шпуров**

| Тип буровой техники | Сечение выработки, м$^2$ | |
|---|---|---|
| | менее 6 | более 6 |
| Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла | Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м | Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м |
| Установки механизированного бурения | – | Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины |

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки ($B$) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 $B$, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м$^2$) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 1.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

### 1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

#### 1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 1.6.

Таблица 1.6

**Параметры вертикального клинового вруба**

| Группа крепости пород по СНиП | Коэффициент крепости пород $f$ | Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм | Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$) | | Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | до 12 | более 12 | |
| IV-V | 1-6 | 500 | 4 | 4-6 | 75-70 |
| VI | 6-8 | 450 | 4-6 | 6-8 | 68 |
| VII | 8-10 | 400 | 6-8 | 8-10 | 65 |
| VIII | 10-13 | 350 | 8-10 | 10-12 | 63 |
| IX | 13-16 | 300 | 10-12 | 12-14 | 60 |
| X | 16-18 | 300 | 10-12 | 12-14 | 58 |
| XI | 20 | 250 | 10-12 | 12-14 | 55 |

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (1.1)$$

где $e$ – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 1.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

$d$ – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 1.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 1.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 1.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (1.2)$$

где $B$ – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 1.1).

Таблица 1.7

**Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м**

| Ширина выработки, м | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 2,0 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 |
| 2,5 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 |
| 3,0 | 2,1 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |
| 3,5 | 2,4 | 2,2 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 4,0 | 2,8 | 2,6 | 2,2 | 2,1 | 1,9 | 1,8 | 1,7 |
| 4,5 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,0 | 1,9 |
| 5,0 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,1 |

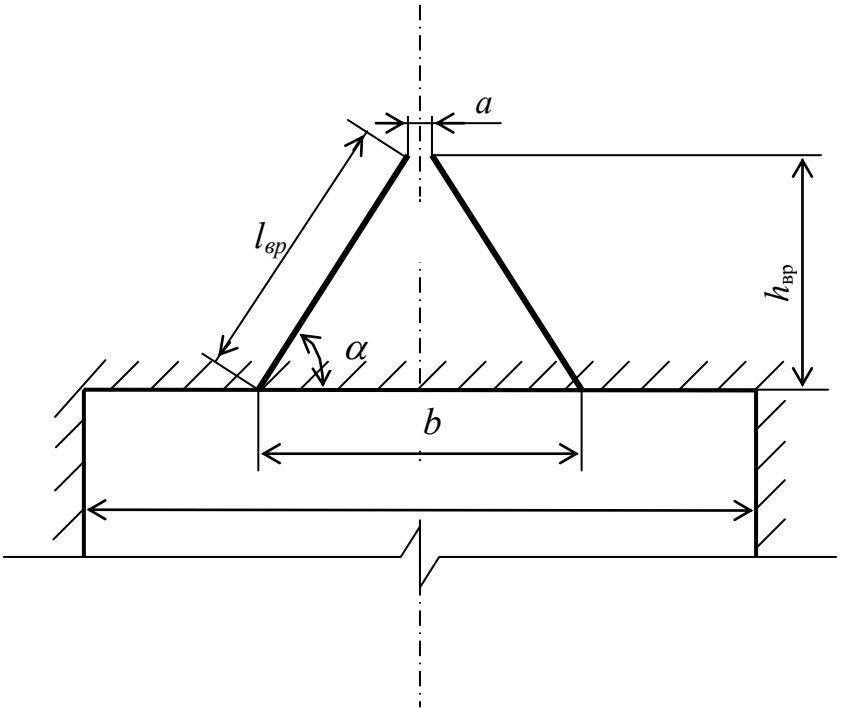



Рис. 1.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0{,}1 \div 0{,}2), \tag{1.3}$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \tag{1.4}$$

где $\alpha$ – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \tag{1.5}$$

где *а* – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород *а* = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров $\alpha$.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 1.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

### 1.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 1.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический  симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние $W_1$) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 1.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние $W_1$, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (1.1).

Пробивные расстояния $W_1$ учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе ($W_1$, $W_2$, $W_3$ и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

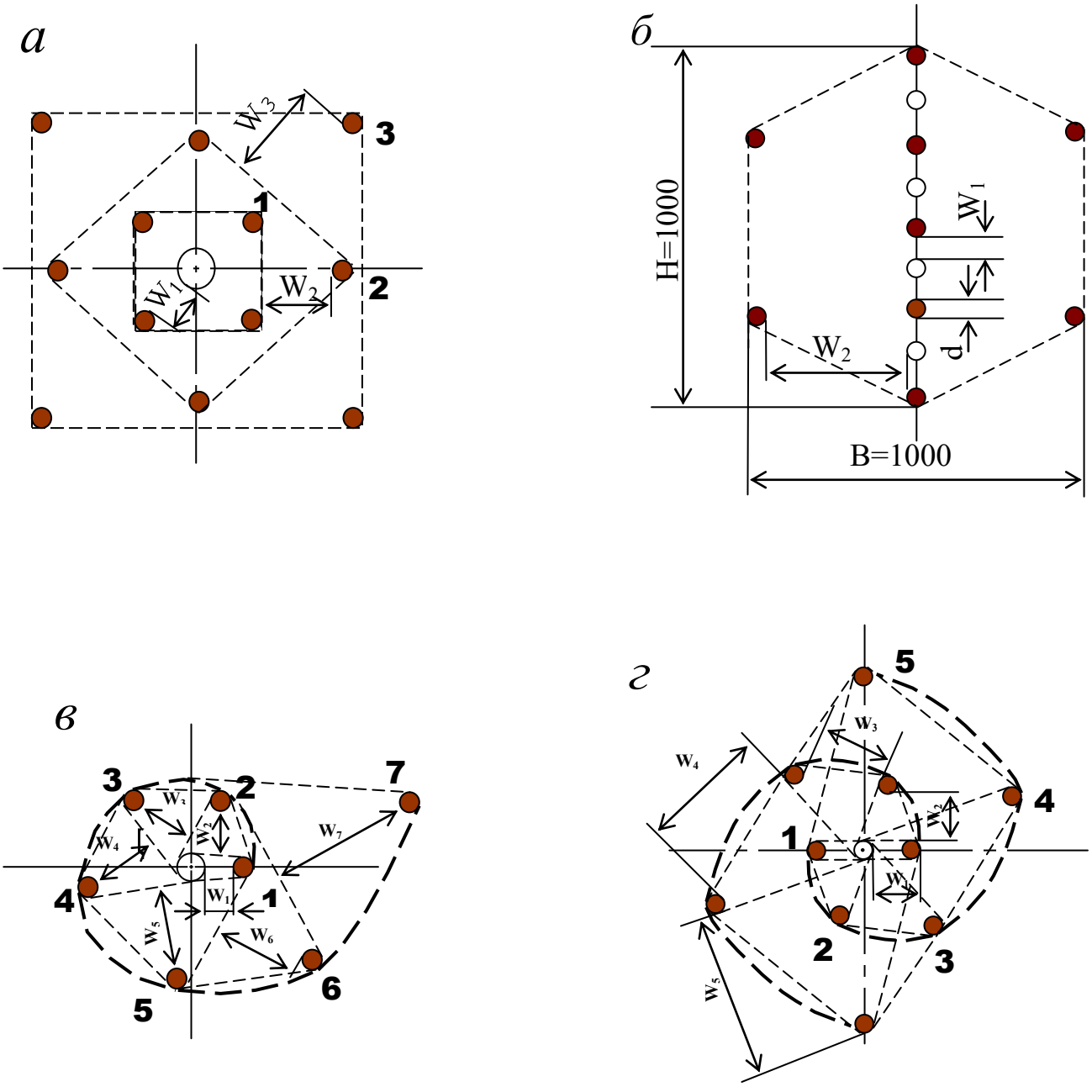



Рис. 1.2. Конструкции прямых врубов:
*а* – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
*г* – двойной спиральный

Таблица 1.8

**Пробивные расстояния $W_1$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 115 | 100 | 90 | 80 | 60 | 60 | 55 |
| 51 | 125 | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | 65 |
| 56 | 150 | 130 | 110 | 95 | 90 | 85 | 75 |
| 75 | 170 | 150 | 130 | 105 | 100 | 95 | 85 |
| 105 | 190 | 170 | 150 | 120 | 110 | 105 | 95 |
| 125 | 230 | 200 | 170 | 140 | 120 | 110 | 100 |

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 1.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (1.6)$$

где $W_1$ – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 1.7);

$D_x$ – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

$d$ – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния ($W_2$, $W_3$ и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 1.2) в масштабе 1:5.

Таблица 1.9

**Пробивные расстояния $W_2$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 170 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 | 110 |
| 51 | 180 | 160 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 |
| 56 | 210 | 180 | 170 | 160 | 150 | 140 | 130 |
| 75 | 260 | 210 | 200 | 185 | 170 | 150 | 140 |
| 105 | 300 | 260 | 240 | 215 | 200 | 185 | 175 |
| 125 | 340 | 300 | 270 | 250 | 230 | 220 | 215 |

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

**Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм**

| Диаметр шпуров, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 1000-900 | 800 | 700 | 650 | 600 | 550 | 500 |

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м$^2$ необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 1.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{1.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{1.8}$$

где $H$ – высота вруба, мм;

$W_1$ – пробивное расстояние, мм;

$d$ – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 1.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние $W_2$ для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 1.11.

В породах с $f$ >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 1.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 1.11

**Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами**

| Условия взрывания | Класса ВВ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | II | III-IV | V | VI |
| По углю | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| По породе: | | | | |
| при $f$ <7 | 0,5 | 0,45 | 0,3 | 0,25 |
| при $f$ >10 | 0,4 | 0,3 | – | – |

В породах с коэффициентом крепости $f$ < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 1.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

### 1.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (1.9)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, кг/м$^3$;

$f$ – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (1.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

$f_1$ – коэффициент структуры породы;

$v$ – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

$e$ – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (1.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

$\rho$, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м$^3$.

Необходимые данные для расчета величины $e$ принимают из табл. 1.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (1.10) и в табл. 1.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы $f_1$ принимается из табл. 1.12.

Таблица 1.12

**Коэффициент структуры породы $f_1$**

| Характеристика пород | Категория пород | Коэффициент структуры породы $f_1$ |
|---|---|---|
| Монолитные, крепкие, вязкие, упругие | I | 1,6 |
| Трещиноватые, крепкие | II | 1,2-1,4 |
| Массивно-хрупкие | III | 1,1 |
| Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов | IV | 0,8-0,9 |

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (1.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м$^2$.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах $v$ = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

**При щелевом врубе на полную высоту выработки** для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (1.9) следует принимать коэффициент зажима породы $v$ = 1,4.

**Прямые (дробящие) врубы** требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (1.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы $v$ = 1,1–1,4.

### 1.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 1.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм (см. раздел 3). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

### 1.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (1.12)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м$^3$;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$\gamma$ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (1.13)$$

где $d$ – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 1.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м$^3$.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с $f$ = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (1.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 1.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт (раздел 1.2.7).

Таблица 1.13

**Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок**

| Коэффициент крепости пород $f$ | Сечение выработки вчерне, м$^2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 2-4 | 8-11 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 35-42 |
| 5-7 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 39-42 | 43-46 |
| 8-10 | 16-20 | 21-26 | 27-32 | 33-37 | 38-42 | 42-46 | 47-50 |
| 12-14 | 20-24 | 26-30 | 32-36 | 37-42 | 42-46 | 46-50 | 50-54 |
| более 14 | 26-28 | 32-36 | 36-40 | 44-48 | 48-52 | 52-54 | 56-60 |

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{\text{вч}} - S_{\text{вр}}}{N - N_{\text{вр}}}}, \qquad (1.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м$^2$;

$N$, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87$^o$ к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

**При применении прямых врубов** количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \quad (1.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м$^2$.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

### 1.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \quad (1.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \quad (1.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot (S_{вч} – S_{вр}) \cdot l_{шп}, \quad (1.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \quad (1.19)$$

где $d$ – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

$\rho$ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

$\alpha$ – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (1.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (1.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (1.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (1.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (1.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\ , \quad (1.25)$$

где $\eta$ – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (1.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м$^2$, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 1.14 [4].

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м$^3$ взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (1.27)$$

Таблица 1.14

**Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом**

| Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м$^2$ | Коэффициент крепости пород $f$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1–2 | 2–9 | 10–20 |
| до 8 | 5* | 10 | 12 |
| от 8 до 15 | 4 | 8 | 10 |
| более 15 | 3 | 5 | 7 |

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\ \eta). \quad (1.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м$^3$ взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\ l_{шп}\ \eta). \quad (1.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (1.30)$$

где $B$ – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

# 2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взрывание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 2.1).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (2.1)$$

где $R$ – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

$l$ – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

$S$ – сечение проводов, м$^2$.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 1.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 2.1

**Взрывные приборы и машинки**

| Наименование прибора (исполнение) | Напряжение, В | Масса, кг | Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом | Назначение и область применения |
|---|---|---|---|---|
| Конденсаторный взрывной прибор<br>КВП-1/100М (РВ)<br>КВП-2/200М (РН) | <br>600<br>1700 | <br>2<br>2,5 | <br>320<br>1700 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли |
| Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ) | 610 | 2,7 | 320 | |
| Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН) | 1600 | 3,0 | 200 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли |

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{гар}, \qquad (2.2)$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.3}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.4}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.5}$$

где $I$ – сила тока в электровзрывной сети, А;

$E$ – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

$R$ – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

$n$ – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

$m$ – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

$i$ – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

$r$ – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{2.6}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 2.2 или рассчитывается по формуле (2.1));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 2.2

**Характеристики проводов для электровзрывания**

| Обозначение | Назначение | Диаметр жилы, мм | Площадь сечения, мм$^2$ | Сопротивление 1 м провода, Ом/м |
|---|---|---|---|---|
| ВП-05 | соединительные | 0,5 | 0,196 | 0,090 |
| ВП-08 | магистральные | 0,8 | 0,502 | 0,034 |
| ВП-07х2 | магистральные | 0,7х2 | 0,769 | 0,024 |

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{\text{гар}}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + R}, \tag{2.7}$$

$$m = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + r}. \tag{2.8}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

# 3. ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 3.1

**Область применения бурильных машин и установочных приспособлений**

| Коэффициент крепости пород | Тип бурильных машин и установочных приспособлений |
|---|---|
| 1,5–3 | Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках |
| 4–6 | Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 7–9 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 10–20 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах |

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с $f<8$.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переуста-

новку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с $f < 8$; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с $f$ = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с $f$ = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с $f$ = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 3.2 – 3.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м$^2$ площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м$^2$ площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 3.2

**Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | | Тип бурильной установки | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | УБШ-204 (БУЭ-1М) | УБШ-214А | УБШ-308У (1СБУ-2) | УБШ-303 (1БУР-2) | УБШ-254 | УБШ-332Д |
| Коэффициент крепости пород $f$ | | 4-8 | 4-16 | 8-14 | 4-16 | 8-14 | 8-14 |
| Диаметр шпуров, мм | | 42 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 |
| Длина шпуров, м | | 2,75 | 2,75 | 2,8 | 2,8 | 2,4 | 3,0 |
| Зона бурения, м$^2$ | | 6-12 | 4,2-12 | до 20 | до 20 | до 12 | 8-22 |
| Бурильная машина | тип | БУЭ | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | «Норит-1» (гидравл.) | М2 (БГА-2М) |
| | кол-во | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | рельс. | рельс. | гусен. | рельс. | гусен. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: | длина | 8,2 | 6,0 | 7,8 | 7,1 | 7,2 | 11,0 |
| | ширина | 1,3 | 1,0 | 1,6 | 1,15 | 1,4 | 1,75 |
| | высота | 0,9 | 1,5 | 1,7 | 1,65 | 1,8 | 2,3 |
| Масса, т | | 5,4 | 4 | 8,6 | 5 | 7,2 | 12 |

Таблица 3.3

**Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | | Тип бурильной установки | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Minimatic 205-40 | Mini 206-60 | Paramatic 305-60 | Rocket Bomer 104S | Rocket Bomer 282S |
| Коэффициент крепости пород $f$ | | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 |
| Диаметр шпуров, мм | | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 |
| Длина шпуров, м | | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4,0 | 4,0 |
| Высота обуривания, м | | 6,0 | 6,4 | 7,1 | 4,7 | 6,3 |
| Ширина обуривания, м | | 8,8 | 9,8 | 10,4 | 4,7 | 8,7 |
| Зона бурения, м$^2$ | | 8-49 | 8-60 | 12-68 | до 20 | до 45 |
| Бурильная машина | тип | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | COP 1838 ME пневмат. | COP 1838 ME пневмат. |
| | кол-во | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: | | | | | | |
| | длина | 12,3 | 12,7 | 5,3 | 9,8 | 12,1 |
| | ширина | 1,98 | 2,24 | 2,5 | 2,0 | 2,0 |
| | высота | 2,35 | 2,35 | 2,8 | 2,6 | 3,1 |
| Масса, т | | 19 | 20 | 36 | 14 | 18 |

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 м$^2$.

# 4. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя [1]: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

Образец заполнения паспорта буровзрывных работ приведён в Приложении 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Единые правила безопасности при взрывных работах (ПБ 13-407-01). М., 2001.

2. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

3. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

4. СНиП 3.02.03-84. Подземные горные выработки.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

**Образец оформления обложки отчёта**

**Министерство образования и науки РФ**
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра шахтного строительства

**ОТЧЁТ**
по контрольной работе «Расчёт параметров и составление паспорта БВР на проведение горизонтальной горной выработки»

Зав. кафедрой проф. М. В. Корнилков
Руководитель _____
Студент гр. _____ _____

Екатеринбург 2010

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

## Пример паспорта БВР на проведение выработки

Утверждаю:
Главный инженер

_____

**Паспорт**
**буровзрывных работ на проведение**

_____
(*наименование выработки*)

### 1. Характеристика выработки

1.1. Форма сечения выработки _____
1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м$^2$ _____
1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____
- ширина, м _____
1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

### 2. Характеристика пород

2.1. Наименование пород _____
2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____
2.3. Трещиноватость пород _____
2.4. Обводнённость пород _____

### 3. Исходные данные

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____
3.2. Способ взрывания _____
3.3. Диаметры - шпуров, мм _____
- патронов, мм _____
3.4. Тип вруба _____
3.5. Материал забойки _____
3.6. Схема соединения электродетонаторов _____
3.7. Источник электрического тока _____

### 4. Расчётные данные по шпурам

| №№ шпуров | Наименование шпуров по назначению | Глубина шпуров, м | Угол наклона шпуров, град. | Расстояние между шпурами, м | Величина заряда в шпуре, кг | Длина заряда, м | Длина забойки в шпуре, м | Очередность взрывания, интервал замедления, мс | Примечания |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | |

**5. Схема расположения шпуров**

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

**6. Конструкции зарядов**

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

**7. Основные показатели буровзрывных работ**

| № п/п | Показатели | Единица измерения | Количество |
|---|---|---|---|
| 1 | Коэффициент использования шпуров | - | |
| 2 | Подвигание забоя за взрыв | - | |
| 3 | Объём горной массы за взрыв | $м^3$ | |
| 4 | Количество шпуров на цикл | шт. | |
| 5 | Количество шпурометров на цикл | м | |
| 6 | Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки | м шп./м | |
| 7 | Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы | м шп./$м^3$ | |
| 8 | Расход ВВ на цикл | кг | |
| 9 | Расход ВВ на 1 метр выработки | кг/м | |
| 10 | Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы | кг/$м^3$ | |
| 11 | Расход средств инициирования на цикл:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |
| 12 | Расход средств инициирования на 1 метр выработки:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |

**8. Меры безопасности**

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

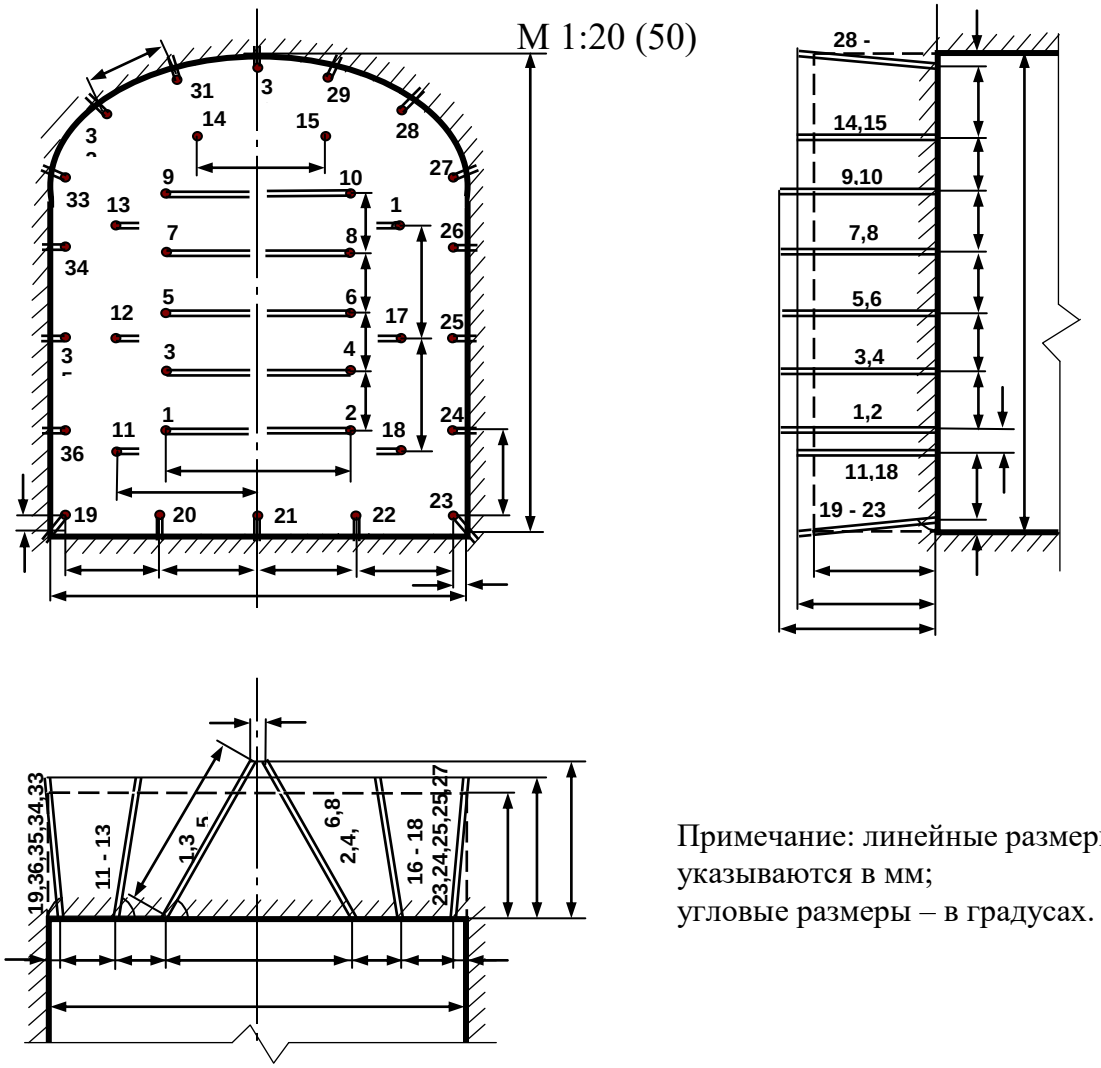
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

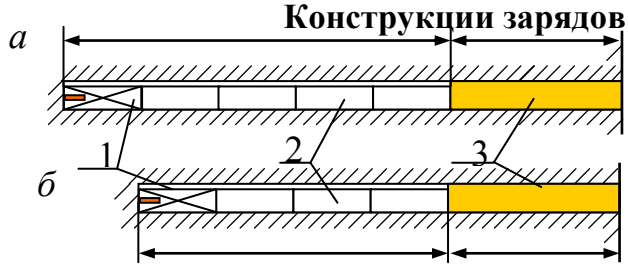
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

**Схема расположения шпуров**




Примечание: линейные размеры
указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

**Конструкции зарядов**




*а* – врубовые шпуры;
*б* – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

*Примечание*. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3**

Таблица П3.1

## Задания по расчету параметров и составлению паспорта бвр на проведение выработки

| №№ заданий | Наименование выработки | Форма сечения выработки* | Размеры выработки $H \times B$, м | Площадь сечения вчерне, м$^2$ | Характеристика пород | | | Категория шахты по газу или пыли и наличие метана в выработке |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Коэффициент крепости $f$ | Категория пород по табл. 1.12 | Обводнённость** | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | Квершлаг | Сводчатая | 3,4 × 3,3 | 10,5 | 15 | I | с | Не опасная |
| 2 | | | 3,4 × 4,0 | 12,0 | 12 | I | у | |
| 3 | | | 3,4 × 3,6 | 11,3 | 14 | I | о | |
| 4 | | | 3,4 × 3,2 | 10,2 | 10 | I | у | |
| 5 | | | 3,3 × 3,5 | 10,7 | 12 | I | о | |
| 6 | | | 3,1 × 3,2 | 9,2 | 10 | I | о | |
| 7 | | | 3,3 × 3,7 | 11,3 | 6 | II | о | |
| 8 | | | 3,5 × 3,2 | 10,5 | 8 | II | с | |
| 9 | | | 3,6 × 3,8 | 12,7 | 8 | IV | у | |
| 10 | | | 3,5 × 3,9 | 12,6 | 10 | II | с | |
| 11 | | | 3,4 × 3,4 | 10,8 | 6 | III | о | |
| 12 | | | 3,2 × 3,0 | 9,0 | 12 | IV | у | |
| 13 | | | 3,5 × 3,9 | 12,6 | 18 | IV | о | |
| 14 | | | 3,1 × 3,2 | 9,2 | 5 | III | о | |
| 15 | | | 3,4 × 3,6 | 11,3 | 8 | III | с | |
| 16 | | | 3,3 × 3,5 | 10,7 | 18 | II | с | |
| 17 | | | 3,5 × 3,2 | 10,5 | 14 | I | о | |
| 18 | | | 3,1 × 3,2 | 9,2 | 20 | II | у | |
| 19 | | | 3,4 × 4,0 | 12,5 | 16 | I | о | |
| 20 | | | 3,4 × 4,0 | 12,5 | 4 | III | о | |

Продолжение табл. П3.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | Квершлаг | Трапецевид. | 3,5 × 3,7 / 3,3 | 12,3 | 8 | II | с | |
| 22 | | | 3,5 × 3,9 / 3,1 | 12,3 | 10 | I | о | |
| 23 | | | 3,5 × 3,7 / 3,0 | 11,7 | 12 | III | с | |
| 24 | | | 3,6 × 3,9 / 3,1 | 12,6 | 14 | III | у | |
| 25 | | | 3,0 × 3,6 / 2,9 | 9,8 | 16 | I | о | |
| 26 | | | 3,8 × 3,4 / 2,8 | 11,8 | 18 | I | с | |
| 27 | | | 3,6 × 4,0 / 3,3 | 13,1 | 6 | VI | с | |
| 28 | | | 3,6 × 4,2 / 3,5 | 13,9 | 8 | III | о | |
| 29 | | | 3,6 × 4,0 / 3,3 | 13,1 | 10 | III | у | |
| 30 | | | 3,6 × 4,2 / 3,5 | 13,9 | 15 | I | с | |
| 31 | | | 3,6 × 4,0 / 3,3 | 13,1 | 18 | II | у | |
| 32 | | | 3,5 × 3,9 / 3,1 | 12,3 | 6 | IV | о | |
| 33 | | | 3,2 × 3,9 / 3,1 | 11,2 | 8 | III | о | |
| 34 | | | 3,5 × 3,9 / 3,1 | 12,3 | 9 | III | о | |
| 35 | | | 3,2 × 3,9 / 3,1 | 11,2 | 14 | III | у | |
| 36 | | | 3,6 × 3,8 / 3,0 | 12,2 | 18 | I | с | |
| 37 | | | 3,6 × 3,8 / 3,0 | 12,2 | 8 | III | о | |
| 38 | | | 3,4 × 3,8 / 3,0 | 11,6 | 12 | II | у | |
| 39 | | Сводчатая | 3,7 × 5,0 | 16,8 | 6 | IV | с | |
| 40 | | | 3,7 × 5,0 | 16,8 | 9 | III | у | |
| 41 | | | 3,7 × 4,5 | 15,2 | 11 | IV | с | |
| 42 | | | 3,7 × 5,0 | 16,8 | 13 | II | с | |
| 43 | | | 3,7 × 4,4 | 14,9 | 14 | I | о | |

Продолжение табл. П3.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | Квершлаг | Сводчатая | 3,5 × 4,6 | 15,5 | 16 | II | о | Не опасная |
| 45 | | | 3,6 × 4,9 | 16,0 | 4 | IV | о | |
| 46 | | | 3,6 × 4,7 | 15,4 | 8 | III | у | |
| 47 | | | 3,6 × 4,9 | 16,0 | 10 | II | с | |
| 48 | | | 3,6 × 4,2 | 13,9 | 12 | II | о | |
| 49 | | | 3,6 × 4,9 | 16,0 | 14 | II | о | |
| 50 | | | 3,6 × 4,9 | 16,0 | 6 | II | с | |
| 51 | | | 3,6 × 4,3 | 14,2 | 8 | III | о | |
| 52 | | | 3,7 × 4,3 | 14,2 | 4 | IV | о | |
| 53 | | | 3,7 × 4,0 | 13,7 | 6 | IV | с | |
| 54 | | | 3,7 × 4,3 | 14,2 | 9 | III | о | |
| 55 | | | 3,7 × 3,9 | 13,4 | 10 | II | о | |
| 56 | | | 3,7 × 4,9 | 16,5 | 10 | II | о | |
| 57 | | | 3,7 × 4,1 | 14,0 | 14 | II | с | |
| 58 | | | 3,9 × 4,0 | 14,5 | 16 | I | у | |
| 59 | Штрек | Арочная | 3,0 × 3,2 | 8,5 | 4 | IV | о | I |
| 60 | | | 3,0 × 3,4 | 8,9 | 6 | IV | о | II |
| 61 | | | 3,3 × 3,3 | 9,7 | 8 | III | с | III |
| 62 | | | 3,3 × 3,4 | 10,0 | 4 | III | у | II |
| 63 | | | 3,2 × 3,2 | 9,1 | 6 | II | с | III – выделения метана отсутствуют |
| 64 | | | 2,8 × 3,4 | 8,3 | 4 | IV | о | II |
| 65 | | | 3,0 × 3,2 | 8,5 | 10 | II | о | III – выделения метана отсутствуют |
| 66 | | | 3,0 × 2,8 | 7,5 | 2 (уголь) | IV | с | II |
| 67 | | | 3,2 × 4,0 | 11,0 | 2 (уголь) | IV | о | II |
| 68 | | | 3,6 × 3,8 | 12,1 | 2 | IV | о | III |

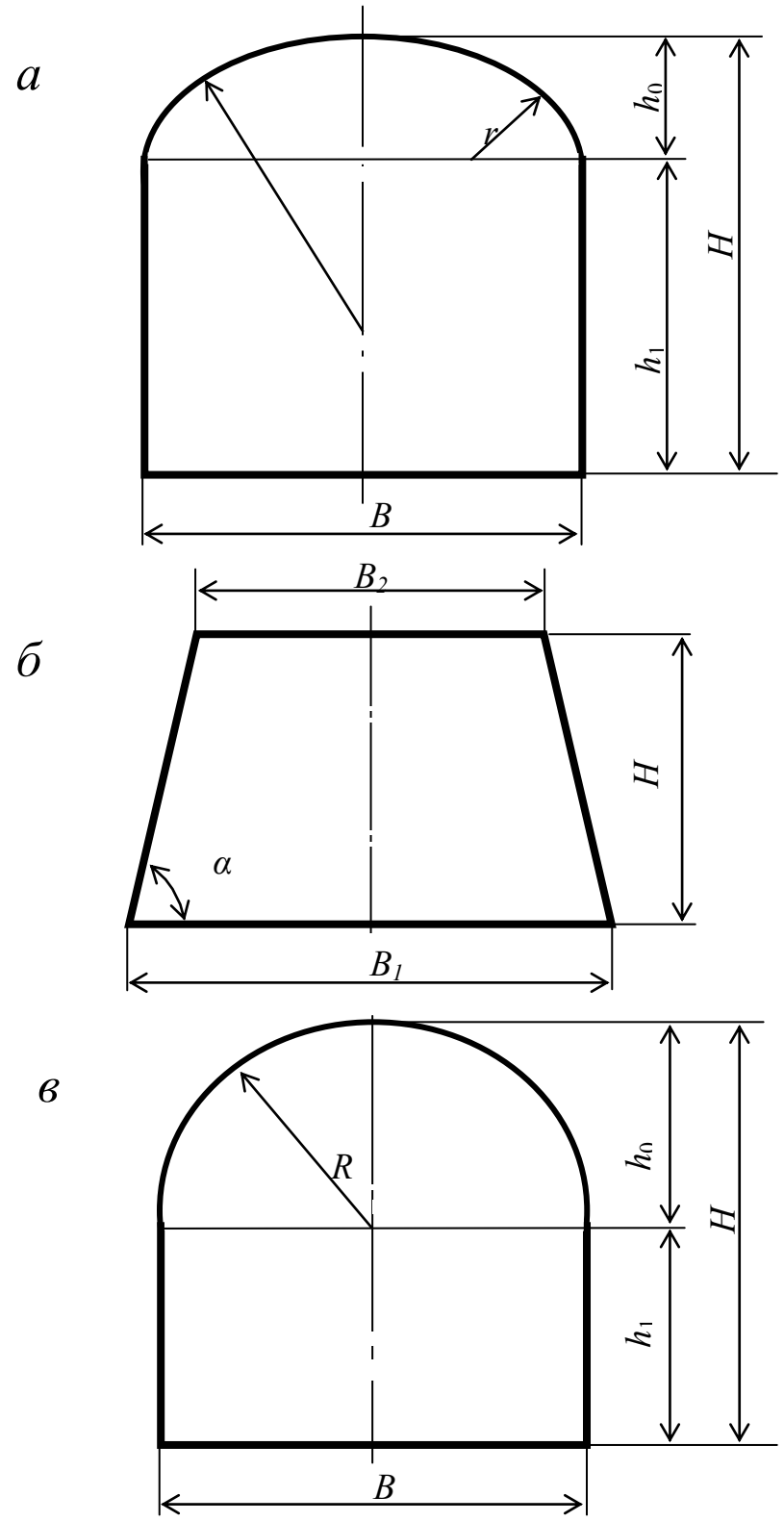
Окончание табл. П3.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 69 | Штрек | Сводчатая | 3,2 × 4,0 | 11,0 | 5 | IV | у | II |
| 70 | | | 3,2 × 4,0 | 11,0 | 8 | II | у | IV – выделения метана отсутствуют |
| 71 | | | 3,4 × 4,0 | 11,8 | 6 | III | с | |
| 72 | | | 3,2 × 4,0 | 11,0 | 12 | I | у | II – выделения метана отсутствуют |
| 73 | | | 4,2 × 4,4 | 16,4 | 1,5 (уголь) | IV | с | I |
| 74 | | | 4,0 × 4,2 | 14,9 | 4 | IV | у | I |
| 75 | | | 4,2 × 4,4 | 16,4 | 6 | III | с | II |
| 76 | | | 4,0 × 4,2 | 14,9 | 8 | II | с | IV – выделения метана отсутствуют |
| 77 | | | 3,8 × 4,4 | 14,6 | 7 | II | о | III |
| 78 | | | 4,2 × 5,0 | 18,3 | 8 | IV | с | I |
| 79 | | | 3,8 × 4,4 | 14,6 | 10 | I | о | II – выделения метана отсутствуют |
| 80 | | | 3,4 × 4,0 | 11,8 | 10 | II | о | |

[*] Рекомендации для вычерчивания контура поперечного сечения выработки приведены в Приложении 4.
[**] В столбце 8 «Обводнённость пород» приняты следующие обозначения: с – сухие, у – увлажнённые и о – обводнённые.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4**

**Формы поперечного сечения горизонтальных выработок**




$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
*а* – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
*б* – трапецевидная;
*в* – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок приведены в табл. П4.1.

Таблица П4.1

| Форма поперечного сечения выработки | Площадь поперечного сечения | Периметр |
|---|---|---|
| Сводчатая с коробовым сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$ |
| Трапециевидная | $\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$ | $B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$ |
| Арочная с полуциркульным сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$ |

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадьевич
Лещуков Николай Николаевич

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 3,28. Тираж 400. Заказ

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»




А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

*Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС* УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

*Разрушение горных пород:* Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе по дисциплине для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 59 с.

Материал пособия охватывает все раздела дисциплины в соответствии с учебником [1].

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов и выполнению практических заданий всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Разрушение горных пород».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Лещуков Н.Н.,
© Прищепа Д. В.

**Оглавление**

ВВЕДЕНИЕ ..... 5
1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 6
2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ..... 7
3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ..... 19
Практико-ориентированное задание №1 ..... 19
Практико-ориентированное задание №2 ..... 23
Практико-ориентированное задание №3 ..... 26

# ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студента является важнейшей составной частью образовательной программы подготовки дипломированного специалиста. В соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования объем учебной нагрузки студента составляет 180 часов или 5 зачетных единиц. Из них 89 часов отводится на самостоятельную работу студентов.

По курсу «Разрушение горных пород» обязательная самостоятельная работа студента осуществляется в следующих направлениях – *освоение материалов по отдельным темам, входящим в Рабочую учебную программу дисциплины; подготовка, оформление, защита практико-ориентированных заданий; подготовка и защита контрольной работы*. Дополнительная самостоятельная работа связана с углубленным изучением отдельных разделов курса на основе научно-исследовательской работы студента (НИРС).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов – освоения отдельных тем дисциплины.

# 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В следующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Разрушение горных пород». Она содержит названия 30 основных тем с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов в экзаменационном билете. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Причем в экзаменационный билет может включаться один из вопросов по такой теме. Основной объем информации по каждой теме содержится в учебнике по курсу [1].

При освоении указанных ниже тем *рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента:*

1. Ознакомьтесь со структурой темы.
2. По учебнику [1] освойте каждый структурный элемент темы. Во всех темах указаны разделы и страницы учебника, содержащие данный материал.
3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.
4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.
5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

**Тема 1**. **Краткая история развития взрывных работ.**

Значение взрывных работ в горнодобывающей промышленности и в строительстве. История развития взрывных работ.

***Литература:*** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Охарактеризуйте основные вехи развития взрывных работ.
2. Опишите первую технологию ведения взрывных работ в горном деле.
3. Назовите первое нитроглицериновое взрывчатое вещество.
4. Опишите историю развития средств инициирования.

**Тема 2. Современные виды взрывных работ.**

Современные виды взрывных работ в промышленности. Основные виды взрывных работ. Специальные виды взрывных работ.

**Литература:** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите современные виды взрывных работ.
2. Назовите современные виды специальных взрывных работ.

**Тема 2. Способы бурения шпуров и скважин.**

Классификация способов бурения шпуров и скважин. Механическое бурение и его виды. Термическое бурение и его виды. Специальные виды бурения шпуров и скважин.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Приведите классификацию способов бурения шпуров и скважин.
2. Опишите суть механических видов бурения шпуров и скважин.
3. Опишите суть термических видов бурения шпуров и скважин.
4. Опишите суть специальных видов бурения шпуров и скважин.
5. Укажите рациональные области применения механических, термических и специальных видов бурения шпуров и скважин.

**Тема 3. Ударно-поворотный способ бурения.**

Механизм разрушения горных пород при ударно-поворотном бурении. Механизмы скола и выкола. Зависимость скорости ударно-поворотного бурения от осевого усилия, частоты вращения. Оборудование.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите рациональную область применения ударно-поворотного бурения.
2. Охарактеризуйте механизмы скола и выкола.
3. Опишите механизм разрушения горных пород при ударном внедрении инструмента.
4. Укажите бурильные машины ударно-поворотного бурения.
5. Отметьте факторы, которые повышают энергоемкость ударного бурения по сравнению с другими способами.
6. Укажите последовательность процессов, происходящих при разрушении породы при ударном бурении.

**Тема 4. Вращательный способ бурения.**

Технические средства вращательного бурения. Работа ядра уплотнения при резании пород. Зависимость объема разрушения от толщины стружки. Режимы самозаточки и затупления режущей грани сверла. Оборудование.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите преимущества вращательного бурения.
2. Укажите бурильные машины вращательного бурения.
3. Охарактеризуйте основные механизмы износа и затупления бурового инструмента при вращательном бурении.
4. Опишите механизм разрушения горных пород при вращательном бурении.

**Тема 5. Ударно-вращательный и вращательно-ударный способ бурения.**

Технические средства бурения. Совместное действие механизмов удара и резания. Зависимость энергоемкости бурения от усилий полдачи на инструмент.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите область применения вращательно-ударного бурения.
2. Укажите область применения ударно-вращательного бурения.
3. Назовите преимущества вращательно-ударного бурения.
4. Охарактеризуйте зависимость энергоемкости бурения от усилия подачи.
5. Назовите машины и механизмы, реализующие ударно-вращательный способ бурения.
6. Назовите машины и механизмы, реализующие вращательно-ударный способ бурения.

**Тема 6. Шарошечное бурение.**

Технические средства бурения. Механизм шарошечного бурения. Режимы бурения в зависимости от осевого усилия. Контактная прочность пород как критерий буримости.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите особенности шарошечного бурения.
2. Опишите зависимость скорости бурения от величины осевого усилия.
3. Назовите машины и механизмы, реализующие шарошечное бурение.
4. Укажите область применения шарошечного бурения.

**Тема 7. Основы теории взрыва и взрывчатых веществ.**

Виды взрыва: механический, тепловой, электрический, ядерный, химический. Необходимые условия химического взрыва. Взрывчатое вещество. Классификация взрывчатых систем по физическому состоянию.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию взрыв.
2. Приведите пример механического взрыва.
3. Приведите пример Теплового взрыва.
4. Приведите примеры тепловых взрывов.
5. Охарактеризуйте химический взрыв.
6. Назовите необходимые условия химического взрыва.

**Тема 8. Свойства взрывчатых веществ.**

Классификация свойств взрывчатых веществ. Технологические свойства взрывчатых веществ. Специальные свойства взрывчатых веществ.

**Литература:** [1, 2]

***Контрольные вопросы:***

1. Приведите классификацию свойств взрывчатых веществ.
2. Назовите основные технологические свойства взрывчатых веществ.
3. Что такое кислородный баланс.
4. Назовите виды кислородного баланса.
5. Какие газы выделяются при положительном кислородном балансе.
6. При каком кислородном балансе образуется окись углерода (CO)?

**Тема 9. Начальный импульс и чувствительность взрывчатых веществ.**

Начальный импульс. Виды начального импульса. Инициирование. Чувствительность взрывчатых веществ. Способы изменения чувствительности.

**Литература:** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию «Начальный импульс».
2. Охарактеризуйте тепловой начальный импульс.
3. Какой вид начального импульса является основным для горного дела?
4. Перечислите пробы на чувствительность.
5. Что такое сенсибилизатор?
6. Приведите пример веществ вводимых в состав взрывчатых веществ для флегматизации.

**Тема 10. Формы химического превращения взрывчатых веществ.**

Основные формы химического превращения взрывчатых веществ. Режимы химического превращения: термический распад, горение, конвективное горение, детонация

**Литература:** [1, 2, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите основные формы химического превращения.
2. Дайте характеристику горению как форме химического превращения.
3. Дайте характеристику детонации как форме химического превращения.

**Тема 11. Основные положения теории детонации.**

Механизм детонации. Графическая интерпретация процесса детонации – адиабата Гюгонио. Количественная оценка характеристик процесса детонации.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите особенности детонационной волны.
2. Дайте определение понятию «Детонация».
3. Приведите основные детонационные характеристики взрывчатых веществ.

**Тема 12. Экспериментальные методы определения скорости детонации.**

Классификация методов определения скорости детонации взрывчатых веществ. Метод Дотриша. Осциллографический метод. Метод скоростной фотосъемки. Реостатный метод.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Охарактеризуйте метод Дотриша, для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
2. Назовите отличительные особенности осциллографического метода для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
3. Опишите процедуру измерения скорости детонации используя реостатный метод.

**Тема 13. Факторы, влияющие на скорость и устойчивость детонации.**

Группы факторов влияющие на скорость и устойчивости детонации. Влияние внутреннего состава и строения на скорость и устойчивость детонации. Влияние условий взрывания на скорость детонации.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Как влияет дисперсность взрывчатого вещества на скорость и устойчивость детонации?
2. Как влияет плотность взрывчатого веществ на скорость детонации?
3. Дайте определение понятию «критический диаметр детонации».
4. Как влияет на скорость и устойчивость детонации наличие плотной оболочки на заряде взрывчатого вещества.
5. Влияние величины начального импульса на устойчивость детонации.

**Тема 14. Работа взрыва.**

Работа взрыва: баланс энергии при взрыве. Потери при переходе потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва. Полезная работа взрыва. Бризантность и фугасность. Пробы на бризантность и фугасность.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Опишите переход потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва.
2. Чем обусловлены химические потери при взрыве?
3. Чем обусловлены тепловые потери при взрыве?
4. Охарактеризуйте бесполезные формы работы взрыва.
5. Что такое бризантность взрывчатых веществ.
6. Назовите формы проявления фугасной работы взрыва.

**Тема 15. Основные положения теории предохранительных взрывчатых веществ.**

Необходимость применения предохранительных взрывчатых веществ. Теории предохранительных взрывчатых веществ. Методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

**Литература:** [1, 2]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию пламегаситель.
2. Дайте определение понятию ингибитор.
3. Перечислите основные гипотезы воспламенения горючих шахтных сред.
4. Перечислите возможные пути предотвращения воспламенения горючих шахтных сред.
5. Охарактеризуйте методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

**Тема 16. Заряд взрывчатого вещества.**

Заряды взрывчатых веществ. Классификация. Воронка взрыва и ее элементы. Показатель действия взрыва.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. По каким признакам классифицируются заряды взрывчатых веществ.
2. Перечислите элементы воронки взрыва.
3. Что такое показатель действия взрыва.
4. Как классифицируются заряды взрывчатых веществ по показателю действия взрыва.

**Тема 17. Действие взрыва.**

Действие сосредоточенного заряда в твердой однородной безграничной среде и при наличии обнаженной поверхности. Стадии разрушения: образование газовой полости, зоны дробления, зона радиальных и кольцевых трещин, откольные явления. Соотношение бризантного и фугасного действия взрыва в зависимости от акустической жесткости разрушаемых пород.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Отразите последовательность развития взрыва в горных породах.
2. Отметьте области действия взрыва, образующие зону регулируемого дробления.
3. Какие трещины образуются в горной породе при падении давления и обратной деформации пород в сторону зарядной полости?

4. Какие трещины образуются при отражении волны сжатия от свободной поверхности горной породы?

**Тема 18. Классификации промышленных взрывчатых веществ.**

Классификация ВВ: по характеру воздействия на окружающую среду, по чувствительности к простым формам начального импульса, физическому состоянию. Классификация по химическому составу – индивидуальные ВВ и взрывчатые смеси. Классы ВВ по условиям применения.

**Литература:** [1, 2, 4, 6]

***Контрольные вопросы:***

1. К какой группе относятся взрывчатые вещества, имеющие скорость детонации 4000 м/с?
2. Какие классы промышленных ВВ выделяют по химическому составу?
3. К какому классу промышленных ВВ по химическому составу относится тротил, детонит?
4. Какие ВВ можно использовать только при взрывных работах на поверхности, в шахтах опасных по газу и пыли? Укажите номер класса и цвет оболочки.
5. Какой цвет имеют патроны предохранительных ВВ?
6. По какому характерному признаку выделяют первичные и вторичные ВВ?

**Тема 19. Непредохранительные взрывчатые вещества I класса по условиям применения.**

Предъявляемые требования. Нитросоединения: свойства, ассортимент, область применения. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите основные свойства гранулотола.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ.
3. Бестротиловые взрывчатые вещества: особенности, свойства.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ.

**Тема 20. Непредохранительные взрывчатые вещества II класса по условиям применения.**

Предъявляемые требования. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Порошкообразные ВВ – аммониты и аммоналы. Свойства и область применения.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите основные свойства граммонита 79/21.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.
3. Назовите отличительные особенности патронированных аммонитов.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.

**Тема 21. Предохранительные взрывчатые вещества III – VII классов по условиям применения.**

Требования к энергетическим и детонационным характеристикам предохранительных ВВ. Требования к кислородному балансу. Требования к составу и строению зарядов.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите названию взрывчатых веществ III класса по условиям применения.
2. Какие добавки вводят в состав предохранительных взрывчатых веществ?
3. Укажите требования, предъявляемые к предохранительным ВВ.

**Тема 22. Методы производства взрывных работ.**

Классификация методов производства взрывных работ. Метод шпуровых зарядов. Метод скважинных зарядов. Метод камерных зарядов. Метод наружных зарядов. Область применения, достоинства и недостатки методов.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите области применения метода шпуровых зарядов в подземных условиях.
2. Укажите область применения метода шпуровых зарядов при открытой разработке месторождений.
3. Укажите область применения метода скважинных зарядов.
4. Укажите область применения метода наружных зарядов.

**Тема 23. Метод шпуровых зарядов при проведении подземных горных выработок.**

Состав проходческого цикла. Коэффициент использования шпуров (КИШ). Коэффициент излишка сечения (КИС). Врубовые, отбойные и оконтуривающие шпуры. Очередность взрывания. Конструкции шпуровых зарядов. Размер и качество забойки. Прямое и обратное инициирование зарядов. Назначение и типы врубов. Конструкции наклонных врубов; их достоинства и недостатки. Конструкции прямых врубов; их достоинства и недостатки. Комбинированные врубы. Принципы расчета параметров буровзрывных работ.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите типы шпуров при проходке выработки.
2. Укажите очередность взрывания шпуров в типовой технологии проходки выработок.
3. Укажите условия, соответствующие обратному инициированию заряда.
4. Отметьте достоинства прямого инициирования заряда ВВ по сравнению с обратным.
5. Отметьте достоинства обратного инициирования заряда ВВ по сравнению с прямым.

**Тема 24. Метод шпуровых зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.**

Технология шпуровой отбойки при разработке рудных месторождений. Расчет параметров БВР. Технология шпуровой отбойки угля. Правила безопасности при использовании метода шпуровой отбойки.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Опишите существо метода шпуровых зарядов при добыче полезных ископаемых подземным спопобом.
2. Укажите классы ВВ допущенные к применению при шпуровой отбойке по углю.
3. Какой способ взрывания допущен к применению при шпуровой отбойке угля?
4. Какова допустимая величина уходки (м) при добыче угля методом шпуровых зарядов?

5. Какова величина предельного содержание метана в забое (в %), при котором разрешена отбойка угля методом шпуровых зарядов?

**Тема 25. Метод скважинных зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.**

Отбойка вертикальными и горизонтальными слоями. Параллельное и веерное расположение скважин – преимущества и недостатки. Схемы отбойки руды в блоке. Расчет параметров скважинной отбойки. Бурение, заряжание и взрывание скважин. Правила безопасности при скважинной отбойке.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите преимущества параллельного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с веерным расположением скважин).
2. Укажите преимущества веерного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с параллельным расположением скважин).
3. Укажите способы бурения скважин при отбойке руды в подземных условиях.
4. Какой тип ВВ обычно применяют при механизированном заряжании скважин?
5. Укажите показатели, входящие в формулу определения удельного расхода ВВ при скважинной отбойке руды в подземных условиях.

**Тема 26. Метод скважинных зарядов при открытой разработке месторождений полезных ископаемых.**

Расположение скважин на уступе и их бурение. Принципы расчета параметров буровзрывных работ. Схемы взрывания скважинных зарядов при однорядном и многорядном взрывании скважин.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите рациональные способы бурения скважин при открытой разработке месторождений.
2. Удельный расход ВВ на карьерах определяется по эталонному $q_э$ с учетом поправочных коэффициентов. Укажите факторы, определяющие величину данных коэффициентов.
3. Укажите основные способы взрывании зарядов взрывчатых веществ, используемых на земной поверхности.

4. Перечислите основные взрывчатые вещества, используемые при ведении взрывных работ на земной поверхности.

**Тема 27. Метод камерных зарядов.**

Расположение выработок при использовании камерных зарядов. Камерные заряды рыхления и их расчет. Камерные заряды выброса и их расчет. Камерные заряды на сброс и их расчет.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. В каких случаях целесообразно использовать метод камерных зарядов при открытой разработке месторождений?
2. Назовите достоинства и недостатки метода камерных зарядов.

**Тема 28. Взрывное разрушение негабарита.**

Характеристики, область применения, достоинства и недостатки различных способов разделки негабарита: наружными, шпуровыми, кумулятивными зарядами, гидровзрывание.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита накладными зарядами.
2. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита шпуровыми зарядами.
3. Укажите способы взрывного дробления негабарита при открытой разработке месторождений.

**Тема 29. Техническая документация для производства взрывных работ.**

Необходимая техническая документация для производства взрывных работ: типовой проект взрывных работ, проект массового взрыва, паспорт буровзрывных работ, схема взрывных работ.

**Литература:** [1, 4, 6, 8]

***Контрольные вопросы:***

1. Что входит в состав типового проекта взрывных работ?
2. Опишите процедуру составления и утверждения паспорта буровзрывных работ.
3. Для каких работ составляется схема взрывных работ.
4. В каких случаях составляется проект массового взрыва?

**Тема 30. Персонал для взрывных работ.**

Требования к лицам, допущенным к ведению взрывных работ: руководитель взрывных работ, мастер-взрывник, заведующий складом ВМ, раздатчики ВМ и лаборанты складов ВМ.

**Литература:** [1, 4, 6, 8]

***Контрольные вопросы:***

1. Какие требования предъявляются к руководителям взрывных работ?
2. Какие требования предъявляются к взрывникам?
3. В течение какого периода времени проходит стажировка взрывника?
4. Требования в заведующему склада взрывчатых материалов.

# 3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

## Практико-ориентированное задание №1

Расчет кислородного баланса и составление рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Цель: овладение методикой расчета кислородного баланса взрывчатых веществ и принципами составления рецептур промышленных взрывчатых веществ.

### *Краткая теория*

### *Определение кислородного баланса*

Кислородным балансом называется отношение избытка или недостатка кислорода во взрывчатом веществе (ВВ) для полного окисления горючих элементов (водорода, углерода, металлов и т. п.), выраженное в грамм-атомах, к грамм-молекулярной массе ВВ. Кислородный баланс выражается в долях или процентах.

Под полным окислением понимается окисление водорода в воду, а углерода в углекислый газ. При этом выделяется также молекулярный азот и кислород. Если в составе ВВ находится металл, то образуется его высший окисел.

Реакции полного окисления:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 + 396 \text{ кДж/моль};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O \rightarrow H_2O + 283 \text{ кДж/моль при воде жидкой};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + 241 \text{ кДж/моль при воде парообразной};$$

$$2Al + 1.5O_2 \rightarrow Al_2O_3 + 1671 \text{ кДж/моль}.$$

Следовательно, если ВВ имеет состав в виде $C_aH_bN_cO_d$, то кислородный баланс (%)

$$K_б = \frac{\left[d - \left(2a + \frac{b}{2}\right)\right] \cdot 16}{M_{BB}} 100\%, \quad (1.1)$$

где 16 – относительный атомная масса кислорода; $M_{BB}$ – молекулярная масса ВВ.

При

$$d > 2a + \frac{b}{2} \quad (1.2)$$

имеет положительный кислородный баланс;

при

$$d = 2a + \frac{b}{2} \quad (1.3)$$

нулевой кислородный баланс;

при

$$d < 2a + \frac{b}{2} \quad (1.4)$$

отрицательный кислородный баланс.

Взрывчатые вещества с нулевым кислородным балансом выделяют максимальное количество энергии и минимальное количество ядовитых газов.

При взрыве ВВ с отрицательным кислородным балансом в зависимости от относительного количества кислорода образуются либо ядовитая окись углерода (угарный газ) с меньшим выделением тепла, чем при образовании углекислоты, т. е.

$$C + 0{,}5O_2 \rightarrow CO + 109 \text{ кДж/моль;}$$

либо чистый углерод в виде сажи, резко снижающий образование газов.

При положительном кислородном балансе уменьшается выделение энергии, так как образуется ядовитая окись азота с поглощением тепла по реакции

$$0{,}5N_2 + 0{,}5O_2 \rightarrow NO - 90{,}5 \text{ кДж/моль.}$$

*Пример 1.* Определить кислородный баланс тротила $C_7H_5(NO_2)_3$, относительная молекулярная масса которого 227.

Для полного окисления необходимо $2a + b/2$ или $2 \cdot 7 + 5/2 = 16{,}5$ атомов кислорода.

В наличии имеется 6 атомов кислорода.

Следовательно,

$$K_6 = \frac{\left[6 - \left(2 \cdot 7 + \frac{5}{2}\right)\right] \cdot 16}{227} 100\% = -74\%.$$

*Пример 2.* Определить кислородный баланс граммонита 30/70. Граммонит 30/70 состоит из 30% аммиачной селитры $NH_4NO_3$ и 70% тротила.

Кислородный баланс аммиачной селитры АС, определенный вышеуказанным способом, равен +20%.

Кислородный баланс граммонита 30/70:

$$0{,}3 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot -74 = -45{,}5\%.$$

### *Составление рецептуры промышленных ВВ*

При изготовлении промышленных ВВ обычно состав подбирается таким, чтобы был нулевой кислородный баланс. Для изготовления патронированных ВВ принимается небольшой положительный кислородный баланс для окисления материала оболочки патронов. Для подземных работ при взрыве 1 кг ВВ должно выделятся не более 40 л ядовитых газов в пересчете на условную окись углерода. Если образуются окислы азота и сернистый газ, то для перевода их к условной окиси углерода принимается поправочный коэффициент соответственно 6,5 и 2,5.

Для открытых горных работ, особенно для ВВ, применяемых в обводненных условиях, требования к кислородному балансу ВВ не такие жесткие.

Пример 1. Составить рецептуру игданита с нулевым кислородным балансом па основе аммиачной селитры и дизельного топлива (ДТ) с кислородным балансом – 320%.

Количество весовых частей аммиачной селитры для окисления одной части дизельного топлива равно

$$n = \frac{[\text{КБ}_{DT}]}{[\text{КБ}_{\text{АС}}]},$$

где $\text{КБ}_{DT}$ – кислородный баланс дизельного топлива;

$\text{КБ}_{\text{АС}}$ – кислородный баланс аммиачной селитры.

$$n = \frac{320}{20} = 16.$$

Содержание дизельного топлива во взрывчатом веществе:

$$x = \frac{100}{1+n},$$

$$x = \frac{100}{1+16} = 5{,}9\ \%.$$

Соответственно содержание аммиачной селитры

$$100 - x = 100 - 5{,}9 = 94{,}1\%.$$

Следовательно, формула игданита:

$$94{,}1\%\ \text{аммиачной селитры};\ 5{,}9\%\ \text{дизельного топлива}.$$

Пример 2. Определить рецептуру ВВ с пулевым кислородным балансом на основе аммиачной селитры ($NH_4NO_3$) и тротила ($C_7H_5(NO_2)_3$).

Кислородный баланс тротила –74%, относительная молекулярная масса 227. Кислородный баланс аммиачной селитры +20%, относительная молекулярная масса 80.

Состав смеси должен отвечать условию:

$$x\ (-74\%) + (100 - x)\ 20\% = 0,$$

где $x$ – содержание в смеси тротила, %.

Решение данного уравнения показывает, что $x \approx 21\%$ и $(100 - x) = 79\%$. Такому составу смеси отвечают граммонит 79/21 и аммонит 6ЖВ.

Обозначим число молей аммиачной селитры через $y$, число молей тротила через $z$. Тогда из соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 227} = \frac{79}{21},$$

получим

$$y = \frac{79 \cdot z \cdot 227}{21 \cdot 80} = 10{,}7z.$$

Приняв z = 1, получим y = 10,7.

Следовательно, молекулярное уравнение граммонита имеет вид

$$z + 10{,}7y = C_7H_5(NO_2)_3 + 10{,}7NH_4NO_3.$$

Пример 3. Определить молекулярную формулу гранулита АС-8, имеющего следующий состав: 89% аммиачной селитры $NH_4NO_3$; 3% солярового масла $C_{16}H_{34}$ (относительная молекулярная масса 226); 8% алюминиевой пудры А1 (относительная молекулярная масса — 27).

Обозначив число молей солярового масла $x$, аммиачной селитры $y$, алюминиевой пудры $z$, можно написать химическую формулу в виде

$$y NH_4NO_3 + x\ C_{16}H_{34} + z\ Al.$$

В соответствии с весовым составом можно записать следующие соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 226} = \frac{89}{3};\quad \frac{z \cdot 27}{x \cdot 226} = \frac{8}{3},$$

Отсюда y = 83,9$x$; $z$ = 22,4$x$.

Примем x = 1, тогда молекулярное уравнение гранулита АС-8 имеет вид

$$83{,}9\ NH_4NO_3 + C_{16}H_{34} + 22{,}4\ Al.$$

## Практико-ориентированное задание №2

Определение работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Цель: овладение методикой определения работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

### *Краткая теория*

*Расчет идеальной работоспособности ВВ*

Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии газов равно количеству тепла, сообщенного окружающей среде и произведенной работе:

$$-dE = dQ + pdV. \quad (2.1)$$

Если техническим назначением взрыва ВВ является производство механической работы, то затраты на теплообмен продуктов взрыва (ПВ) с окружающей средой являются энергетическими потерями ($dQ$). Эти потери называются термодинамическими.

Идеальным с точки зрения отсутствия термодинамических потерь является адиабатический процесс расширения ПВ, т.е. $dQ = 0$. В этом случае изменение внутренней энергии ПВ равно количеству работы, совершаемой газами, т.е.

$$-dE = pdV = dA. \quad (2.2)$$

В реальных условиях взрывания наиболее близким к адиабатическому процессу является взрыв ПВ в воздушной среде, а, например, в горных породах термодинамические потери возрастают. Они существенно выше в пористых, хрупких, легко дробимых породах и минимальны в пластичных средах типа глин.

Мерой идеальной работоспособности ВВ может служить максимальная работа, которую совершают ПВ при своем адиабатическом расширении до давления окружающей среды (воздушной, водной, горной), т.е. когда остаточное давление ПВ уравновешивается противодавлением среды атмосферным, гидростатическим или горным давлением.

Идеальная работоспособность ВВ является одной из важнейших энергетических характеристик ВВ. Она дополняет теплоту взрыва, показывая теоретическую возможность реализации энергетического потенциала ВВ в механическую работу.

Идеальную работоспособность (полную идеальную работу взрыва) можно определить, как разность между значениями внутренней энергии ПВ в момент их образования и к концу расширения:

$$\mathrm{A_и} = \int dE = \int_{T_1}^{T_2} \overline{C_V} dT = \overline{C_V} * (T_1 - T_2) = \overline{C_V} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (2.3)$$

где $\overline{C_V}$ - средняя теплоемкость продуктов взрыва в интервалах изменения температуры взрыва от $T_1$ до $T_2$;

$T_1$ - начальная температура взрыва;

$T_2$ - конечная температура ПВ.

Для газовых взрываемых систем, расширение ПВ которых происходит вдоль изоэнтропы вида $pV'$ = const, пользуясь уравнением Клайперона $(PV'=RT)$, получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}} \quad (2.4)$$

Окончательно получаем

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad (2.5)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1}\right); \quad (2.6)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right); \quad (2.7)$$

где $Q_{\text{взр}}$- потенциальная энергия ВВ (полная тепловая энергия), кДж/кг;

$V_1$ и $V_2$ - начальный и конечный удельные объемы ПВ, м$^3$/кг;

$P_1$ и $P_2$ - начальное и конечное давление ПВ, Па;

$y = Cp/Cv$ – показатель адиабаты.

Эти же формулы могут быть использованы для расчета $A_u$ конденсированных ВВ.

При взрыве в воздухе ($P_2$ = 1,01·10$^5$Па) полная идеальная работа взрыва определяется

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right), \text{ кДж/кг.} \quad (2.8)$$

Расчет полного термодинамического КПД взрыва

Вышеприведенную формулу (2.8) можно представить в виде

$$A_u = Q_{\text{взр}} - q_T \quad (2.9)$$

Здесь величина $q_T = Q_{\text{взр}} - A_u = C_{v2} * T_2$ - термодинамические потери энергии ВВ в продуктах взрыва по достижении ими атмосферного давления. Это остаточное тепло идет на свечение ПВ после их расширения.

Отношение идеальной работоспособности к выделившейся тепловой энергии взрыва называется идеальным термодинамическим КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}}, \tag{2.10}$$

или с учетом формулы (2.7)

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}, \tag{2.11}$$

Идеальный термодинамический КПД взрыва определяет часть тепловой энергии, которая может быть использована для совершения механической работы взрыва.

Величины идеальной работоспособности ($A_u$) и полного термодинамического КПД (П) существенно зависят от свойств продуктов взрыва, влияющих на показатель адиабаты, *y= Cp/Cv*. Если в ПВ содержится 2/3 молекул двухатомных газов и 1/3 — одноатомных (гексоген), то *y* = 1,25. Если в ПВ содержится 2/3 трехатомных газов и 1/3 двухатомных (нитроглицерин), то *y* = 1,2. Величина *y* снижается (соответственно снижается $A_u$ и $\eta$), если в ПВ содержатся четырех и пятиатомные газы, а также твердые продукты (NaCl, $A1_2O_3$ и др.). В этих случаях *y* = 1,15, и 1,05.

Пример 1. Определить полную идеальную работоспособность и термодинамический КПД аммонита 6ЖВ при плотности заряжания 900 кг/м$^3$ и следующих параметрах взрывного превращения:

$V_{пв}$= 0,86 м$^3$/кг,

$Q_{взр}$ = 4300кДж/кг;

$T_{взр}$=2600$^o$ К.

Для расчета показатель адиабаты принимается y=1,25. Определение давления ПВ при взрыве аммонита 6ЖВ:

$$P = \frac{1{,}01*10^5*0{,}86*2600*900}{273*(1-0{,}001*0{,}86*900)} = 3{,}3 * 10^9,$$

Откуда полная идеальная работоспособность

$$A_u = Q_{\text{взр}}\left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right) = 4300 * \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{3{,}3 * 10^9}\right)^{\frac{1{,}25-1}{1{,}25}}\right) = 3762{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Полный термодинамический КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}} = \frac{3762{,}2}{4300} = 0{,}875$$

или $\eta = 87{,}5\%$

**Практико-ориентированное задание №3**

Расчет параметров и составление паспорта буровзрывных работ на проведение горизонтальной горной выработки.

Цель: овладение методикой расчета параметров буровзрывных работ (БВР) при проведении подземных горных выработок и составления паспорта БВР.

***Краткая теория***

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип вруба, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

### *3.1. Общие положения*

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа

бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

## *3.2. Определение параметров буровзрывных работ*

### *3.2.1. Выбор взрывчатых материалов*

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Правилами безопасности при взрывных работах» [6] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [7] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 3.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 3.1

**Рекомендуемые ВВ**

| Условия взрывных работ | Условия размещения зарядов | Коэффициент крепости пород $f$ | Тип ВВ | Способ заряжания |
|---|---|---|---|---|
| Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли | Сухие шпуры | до 12 | Гранулит М<br>Граммонит 79/21<br>Гранулит АС-4В<br>Гранулит-игданит | Механизированный |
| | | | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Гранулит АС-8В | Механизированный |
| | | | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | Ручной |
| | Обводнённые шпуры | до 12 | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | |
| Выработки, опасные по взрыву газа и пыли | Сухие и обводнённые шпуры | Для взрывания по породе | Аммонит АП–5ЖВ | Ручной |
| | | Для взрывания по углю с учетом степени опасности | IV кл. Аммонит Т-19<br>Аммонит ПЖВ-20<br>V кл. Угленит Э-6<br>VI кл. Угленит 12ЦБ | |
| | Для водораспыления | Открытый заряд | Ионит | |

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

**Характеристики ВВ**

| Наименование ВВ | Идеальная работа взрыва, кДж/кг | Плотность в патронах или насыпная, кг/м$^3$ | Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг | Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м$^3$ | Расстояние передачи детонации между патронами, см | | Диаметр патронов, мм | Масса патрона, кг | Длина патрона, мм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Сухие | После выдержки в воде | | | |
| Аммонит № 6ЖВ | 3561 | 1000-1100 | 3917 | 1,0 | 5-9 | 3-6 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал М-10 | 4410 | 950-1100 | 4520 | 1,15 | 4 | 3 | 32 | 0,2 | 250 |
| Детонит М | 4316 | 1000-1200 | 4963 | 1,27 | 8-18 | 5-15 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал скальный № 1 | 4420 | 1000-1100 | 4641 | 1,18 | 8-14 | 5-10 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонит АП-5ЖВ | 2991 | 1000-1150 | 3215 | 0,82 | 5-10 | 2-7 | 36 | 0,3 | 250 |
| Аммонит Т-19 | 2564 | 1000-1200 | 2820 | 0,72 | 7-12 | 4-8 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит Э-6 | 1946 | 1100-1250 | 2289 | 0,58 | 5-12 | 3-10 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит 12 ЦБ | 1770 | 1200-1350 | 2256 | 0,58 | 4 | 2 | 36 | 0,3 | 240 |
| Ионит | 1482 | 1000-1200 | 1704 | 0,44 | – | – | 36 | 0,3 | 240 |
| Гранулит М | 3163 | 780-820 (1000-1150)* | 3384 | 0,86 | | | | | |
| Гранулит АС-4В | 3645 | 800-850 (1100-1200)* | 4192 | 1,07 | | | | | |
| Гранулит АС-8В | 3997 | 800-850 (1100-1200)* | 4597 | 1,17 | | | | | |
| Гранулит-игданит | 3150 | 800-850 (1100-1200)* | 3760 | 0,85 | | | | | |

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 3.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 3.3

**Электродетонаторы для шахт и рудников**

| Тип электродетонаторов | Кол-во серий | Интервалы замедления, мс (с) | Безопасный ток, А | Гарантийный ток, А | Сопротивление, Ом | Примечание |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ЭД-8Ж(Э) | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности |
| ЭД-3-Н | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭД-1-8-Т | 1 | 0 | 1,0 | 5,0 | 0,5-0,75 | Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам |
| ЭД-3-Т | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭДКЗ-ОП | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности |
| ЭДКЗ-П | 5 | 25, 50, 75, 100, 125 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭДКЗ-ПМ | 7 | 15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭД-КЗ-ПКМ | 9 | 4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 3.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 3.4

**Характеристики систем неэлектрического инициирования**

| Устройство | Интервал замедления, мс | Назначение |
|---|---|---|
| СИНВ-Ш | 0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | Изготовление патронов-боевиков |
| ДБИ3 | 0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | |

*Примечание.* Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

### 3.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 3.5.

Таблица 3.5

**Тип вруба и глубина шпуров**

| Тип буровой техники | Сечение выработки, м$^2$ | |
|---|---|---|
| | менее 6 | более 6 |
| Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла | Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м | Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м |
| Установки механизированного бурения | – | Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины |

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки ($B$) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 $B$, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м$^2$) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 1.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

### 1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

#### 1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 3.6.

Таблица 3.6

**Параметры вертикального клинового вруба**

| Группа крепости пород по СНиП | Коэффициент крепости пород $f$ | Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм | Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$) | | Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | до 12 | более 12 | |
| IV-V | 1-6 | 500 | 4 | 4-6 | 75-70 |
| VI | 6-8 | 450 | 4-6 | 6-8 | 68 |
| VII | 8-10 | 400 | 6-8 | 8-10 | 65 |
| VIII | 10-13 | 350 | 8-10 | 10-12 | 63 |
| IX | 13-16 | 300 | 10-12 | 12-14 | 60 |
| X | 16-18 | 300 | 10-12 | 12-14 | 58 |
| XI | 20 | 250 | 10-12 | 12-14 | 55 |

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (3.1)$$

где $e$ – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 1.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

$d$ – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 3.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 3.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 1.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (3.2)$$

где $B$ – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 3.1).

Таблица3.7

**Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м**

| Ширина выработки, м | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 2,0 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 |
| 2,5 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 |
| 3,0 | 2,1 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |
| 3,5 | 2,4 | 2,2 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 4,0 | 2,8 | 2,6 | 2,2 | 2,1 | 1,9 | 1,8 | 1,7 |
| 4,5 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,0 | 1,9 |
| 5,0 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,1 |

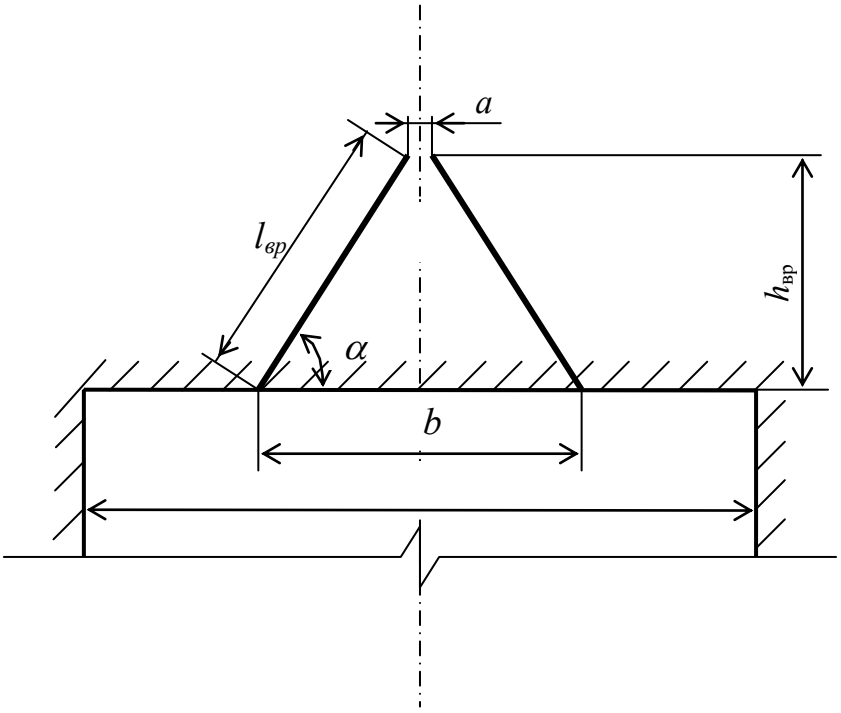



Рис. 3.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0{,}1 \div 0{,}2), \tag{3.3}$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \tag{3.4}$$

где $\alpha$ – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \tag{3.5}$$

где *а* – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород *а* = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров $\alpha$.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 3.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

### 3.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 1.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние $W_1$) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 1.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние $W_1$, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (1.1).

Пробивные расстояния $W_1$ учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе ($W_1$, $W_2$, $W_3$ и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

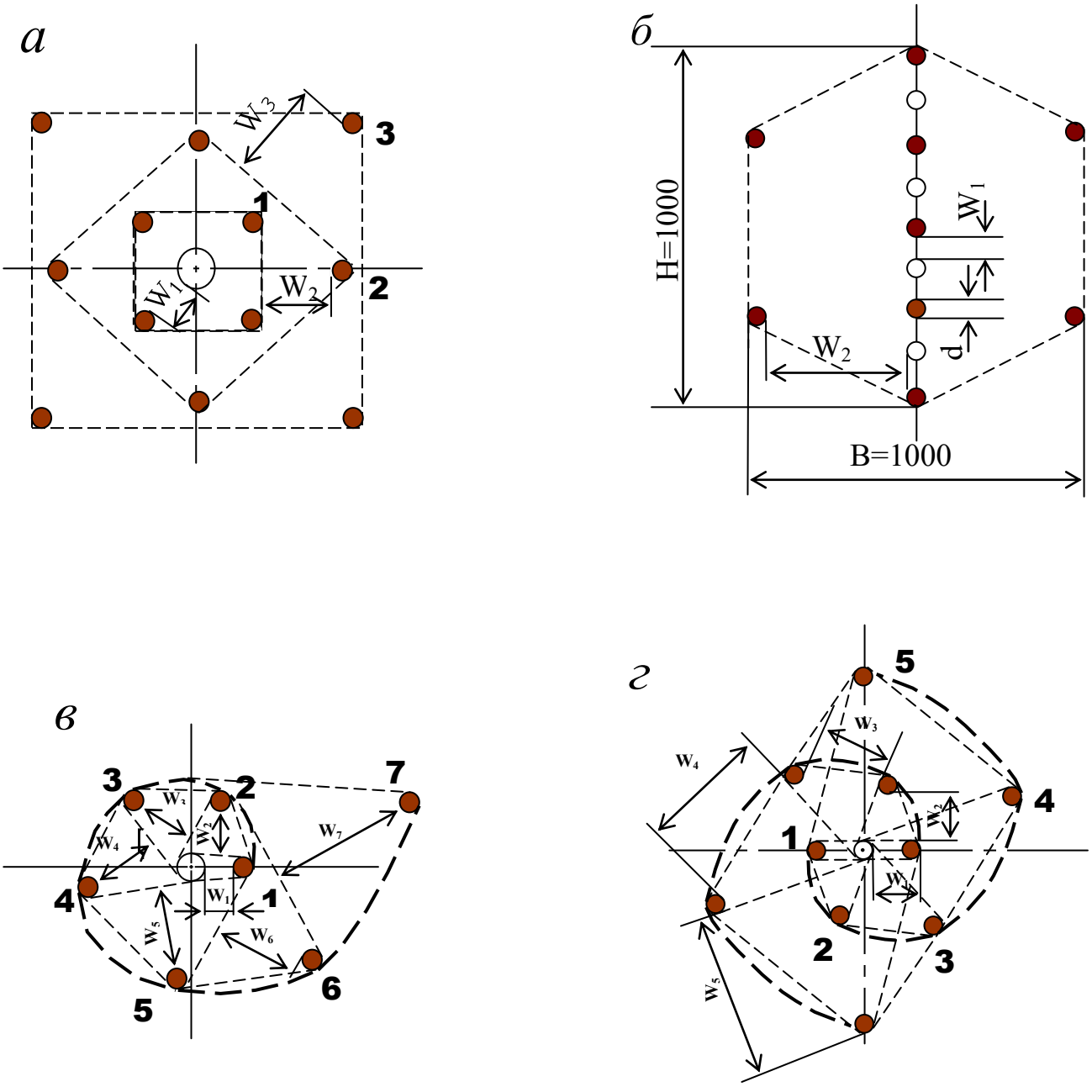



Рис. 3.2. Конструкции прямых врубов:
*а* – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
*г* – двойной спиральный

Таблица 3.8

**Пробивные расстояния $W_1$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 115 | 100 | 90 | 80 | 60 | 60 | 55 |
| 51 | 125 | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | 65 |
| 56 | 150 | 130 | 110 | 95 | 90 | 85 | 75 |
| 75 | 170 | 150 | 130 | 105 | 100 | 95 | 85 |
| 105 | 190 | 170 | 150 | 120 | 110 | 105 | 95 |
| 125 | 230 | 200 | 170 | 140 | 120 | 110 | 100 |

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 3.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (3.6)$$

где $W_1$ – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 1.7);

$D_x$ – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

$d$ – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния ($W_2$, $W_3$ и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 1.2) в масштабе 1:5.

Таблица 3.9

**Пробивные расстояния $W_2$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 170 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 | 110 |
| 51 | 180 | 160 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 |
| 56 | 210 | 180 | 170 | 160 | 150 | 140 | 130 |
| 75 | 260 | 210 | 200 | 185 | 170 | 150 | 140 |
| 105 | 300 | 260 | 240 | 215 | 200 | 185 | 175 |
| 125 | 340 | 300 | 270 | 250 | 230 | 220 | 215 |

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

**Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм**

| Диаметр шпуров, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 1000-900 | 800 | 700 | 650 | 600 | 550 | 500 |

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м$^2$ необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 1.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{3.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{3.8}$$

где $H$ – высота вруба, мм;

$W_1$ – пробивное расстояние, мм;

$d$ – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 3.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние $W_2$ для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 3.11.

В породах с $f$ >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 3.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 3.11

**Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами**

| Условия взрывания | Класса ВВ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | II | III-IV | V | VI |
| По углю | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| По породе: | | | | |
| при $f$ <7 | 0,5 | 0,45 | 0,3 | 0,25 |
| при $f$ >10 | 0,4 | 0,3 | – | – |

В породах с коэффициентом крепости $f$ < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 3.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

### 3.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (3.9)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, кг/м$^3$;

$f$ – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (3.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

$f_1$ – коэффициент структуры породы;

$v$ – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

$e$ – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (3.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

$\rho$, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м$^3$.

Необходимые данные для расчета величины $e$ принимают из табл. 3.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (3.10) и в табл. 3.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы $f_1$ принимается из табл. 3.12.

Таблица 3.12

**Коэффициент структуры породы $f_1$**

| Характеристика пород | Категория пород | Коэффициент структуры породы $f_1$ |
|---|---|---|
| Монолитные, крепкие, вязкие, упругие | I | 1,6 |
| Трещиноватые, крепкие | II | 1,2-1,4 |
| Массивно-хрупкие | III | 1,1 |
| Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов | IV | 0,8-0,9 |

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (3.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м$^2$.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах $v$ = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

**При щелевом врубе на полную высоту выработки** для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (3.9) следует принимать коэффициент зажима породы $v$ = 1,4.

**Прямые (дробящие) врубы** требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (3.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы $v$ = 1,1–1,4.

### 3.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 1.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм. При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

### 3.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (3.12)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м$^3$;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$\gamma$ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (3.13)$$

где $d$ – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 3.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м$^3$.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с $f$ = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (3.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 3.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт.

Таблица 3.13

**Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок**

| Коэффициент крепости пород $f$ | Сечение выработки вчерне, м$^2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 2-4 | 8-11 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 35-42 |
| 5-7 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 39-42 | 43-46 |
| 8-10 | 16-20 | 21-26 | 27-32 | 33-37 | 38-42 | 42-46 | 47-50 |
| 12-14 | 20-24 | 26-30 | 32-36 | 37-42 | 42-46 | 46-50 | 50-54 |
| более 14 | 26-28 | 32-36 | 36-40 | 44-48 | 48-52 | 52-54 | 56-60 |

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{вч} - S_{вр}}{N - N_{вр}}}, \qquad (3.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м$^2$;

$N$, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87$^o$ к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

**При применении прямых врубов** количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \quad (3.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м$^2$.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

### 3.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \quad (3.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \quad (3.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot (S_{вч} – S_{вр}) \cdot l_{шп}, \quad (3.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \quad (3.19)$$

где $d$ – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

$\rho$ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

$\alpha$ – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (3.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (3.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (3.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (3.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (3.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\,, \quad (3.25)$$

где η – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (3.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м$^2$, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 3.14.

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м$^3$ взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (3.27)$$

Таблица 3.14

**Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом**

| Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м$^2$ | Коэффициент крепости пород $f$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1–2 | 2–9 | 10–20 |
| до 8 | 5* | 10 | 12 |
| от 8 до 15 | 4 | 8 | 10 |
| более 15 | 3 | 5 | 7 |

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\, \eta). \quad (3.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м$^3$ взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\, l_{шп}\, \eta). \quad (3.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (3.30)$$

где $B$ – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

## 3.3 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взры-

вание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 3.15).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (3.31)$$

где $R$ – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

$l$ – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

$S$ – сечение проводов, м$^2$.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 1.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 3.15

**Взрывные приборы и машинки**

| Наименование прибора (исполнение) | Напряжение, В | Масса, кг | Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом | Назначение и область применения |
|---|---|---|---|---|
| Конденсаторный взрывной прибор<br>КВП-1/100М (РВ)<br>КВП-2/200М (РН) | <br>600<br>1700 | <br>2<br>2,5 | <br>320<br>1700 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли |
| Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ) | 610 | 2,7 | 320 | |
| Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН) | 1600 | 3,0 | 200 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли |

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.32}$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.33}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.34}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.35}$$

где $I$ – сила тока в электровзрывной сети, А;

$E$ – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

$R$ – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

$n$ – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

$m$ – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

$i$ – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

$r$ – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{3.36}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 3.16 или рассчитывается по формуле (3.31));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 3.16

**Характеристики проводов для электровзрывания**

| Обозначение | Назначение | Диаметр жилы, мм | Площадь сечения, мм$^2$ | Сопротивление 1 м провода, Ом/м |
|---|---|---|---|---|
| ВП-05 | соединительные | 0,5 | 0,196 | 0,090 |
| ВП-08 | магистральные | 0,8 | 0,502 | 0,034 |
| ВП-07х2 | магистральные | 0,7х2 | 0,769 | 0,024 |

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{\text{гар}}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + R}, \tag{3.37}$$

$$m = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + r}. \tag{3.38}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

## 3.4 ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 3.17

**Область применения бурильных машин и установочных приспособлений**

| Коэффициент крепости пород | Тип бурильных машин и установочных приспособлений |
|---|---|
| 1,5–3 | Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках |
| 4–6 | Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 7–9 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 10–20 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах |

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с $f$<8.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переустановку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с $f$ < 8; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с $f$ = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с $f$ = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с $f$ = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 3.2 – 3.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м$^2$ площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м$^2$ площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 3.18

**Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | Тип бурильной установки | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | УБШ-204 (БУЭ-1М) | УБШ-214А | УБШ-308У (1СБУ-2) | УБШ-303 (1БУР-2) | УБШ-254 | УБШ-332Д |
| Коэффициент крепости пород $f$ | 4-8 | 4-16 | 8-14 | 4-16 | 8-14 | 8-14 |
| Диаметр шпуров, мм | 42 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 |
| Длина шпуров, м | 2,75 | 2,75 | 2,8 | 2,8 | 2,4 | 3,0 |

| Зона бурения, м$^2$ | | 6-12 | 4,2-12 | до 20 | до 20 | до 12 | 8-22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Бурильная машина | тип | БУЭ | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | «Норит-1» (гидравл.) | М2 (БГА-2М) |
| | кол-во | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | рельс. | рельс. | гусен. | рельс. | гусен. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: длина | | 8,2 | 6,0 | 7,8 | 7,1 | 7,2 | 11,0 |
| ширина | | 1,3 | 1,0 | 1,6 | 1,15 | 1,4 | 1,75 |
| высота | | 0,9 | 1,5 | 1,7 | 1,65 | 1,8 | 2,3 |
| Масса, т | | 5,4 | 4 | 8,6 | 5 | 7,2 | 12 |

Таблица 3.9

**Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | | Тип бурильной установки | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Minimatic 205-40 | Mini 206-60 | Paramatic 305-60 | Rocket Bomer 104S | Rocket Bomer 282S |
| Коэффициент крепости пород $f$ | | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 |
| Диаметр шпуров, мм | | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 |
| Длина шпуров, м | | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4,0 | 4,0 |
| Высота обуривания, м | | 6,0 | 6,4 | 7,1 | 4,7 | 6,3 |
| Ширина обуривания, м | | 8,8 | 9,8 | 10,4 | 4,7 | 8,7 |
| Зона бурения, м$^2$ | | 8-49 | 8-60 | 12-68 | до 20 | до 45 |
| Бурильная машина | тип | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | COP 1838 ME пневмат. | COP 1838 ME пневмат. |
| | кол-во | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: длина | | 12,3 | 12,7 | 5,3 | 9,8 | 12,1 |
| ширина | | 1,98 | 2,24 | 2,5 | 2,0 | 2,0 |
| высота | | 2,35 | 2,35 | 2,8 | 2,6 | 3,1 |
| Масса, т | | 19 | 20 | 36 | 14 | 18 |

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 м$^2$.

## 3.5. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

*Пример оформления графической части:*

**Паспорт**
**буровзрывных работ на проведение**

_____
(*наименование выработки*)

**1. Характеристика выработки**

1.1. Форма сечения выработки _____
1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м$^2$ _____
1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____
- ширина, м _____
1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

**2. Характеристика пород**

2.1. Наименование пород _____
2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____
2.3. Трещиноватость пород _____
2.4. Обводнённость пород _____

**3. Исходные данные**

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____
3.2. Способ взрывания _____
3.3. Диаметры - шпуров, мм _____
- патронов, мм _____
3.4. Тип вруба _____
3.5. Материал забойки _____
3.6. Схема соединения электродетонаторов _____
3.7. Источник электрического тока _____

**4. Расчётные данные по шпурам**

| №№ шпуров | Наименование шпуров по назначению | Глубина шпуров, м | Угол наклона шпуров, град. | Расстояние между шпурами, м | Величина заряда в шпуре, кг | Длина заряда, м | Длина забойки в шпуре, м | Очередность взрывания, интервал замедления, мс | Примечания |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | |

**5. Схема расположения шпуров**

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

**6. Конструкции зарядов**

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

## 7. Основные показатели буровзрывных работ

| № п/п | Показатели | Единица измерения | Количество |
|---|---|---|---|
| 1 | Коэффициент использования шпуров | - | |
| 2 | Подвигание забоя за взрыв | - | |
| 3 | Объём горной массы за взрыв | $м^3$ | |
| 4 | Количество шпуров на цикл | шт. | |
| 5 | Количество шпурометров на цикл | м | |
| 6 | Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки | м шп./м | |
| 7 | Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы | м шп./$м^3$ | |
| 8 | Расход ВВ на цикл | кг | |
| 9 | Расход ВВ на 1 метр выработки | кг/м | |
| 10 | Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы | кг/$м^3$ | |
| 11 | Расход средств инициирования на цикл:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |
| 12 | Расход средств инициирования на 1 метр выработки:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |

## 8. Меры безопасности

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

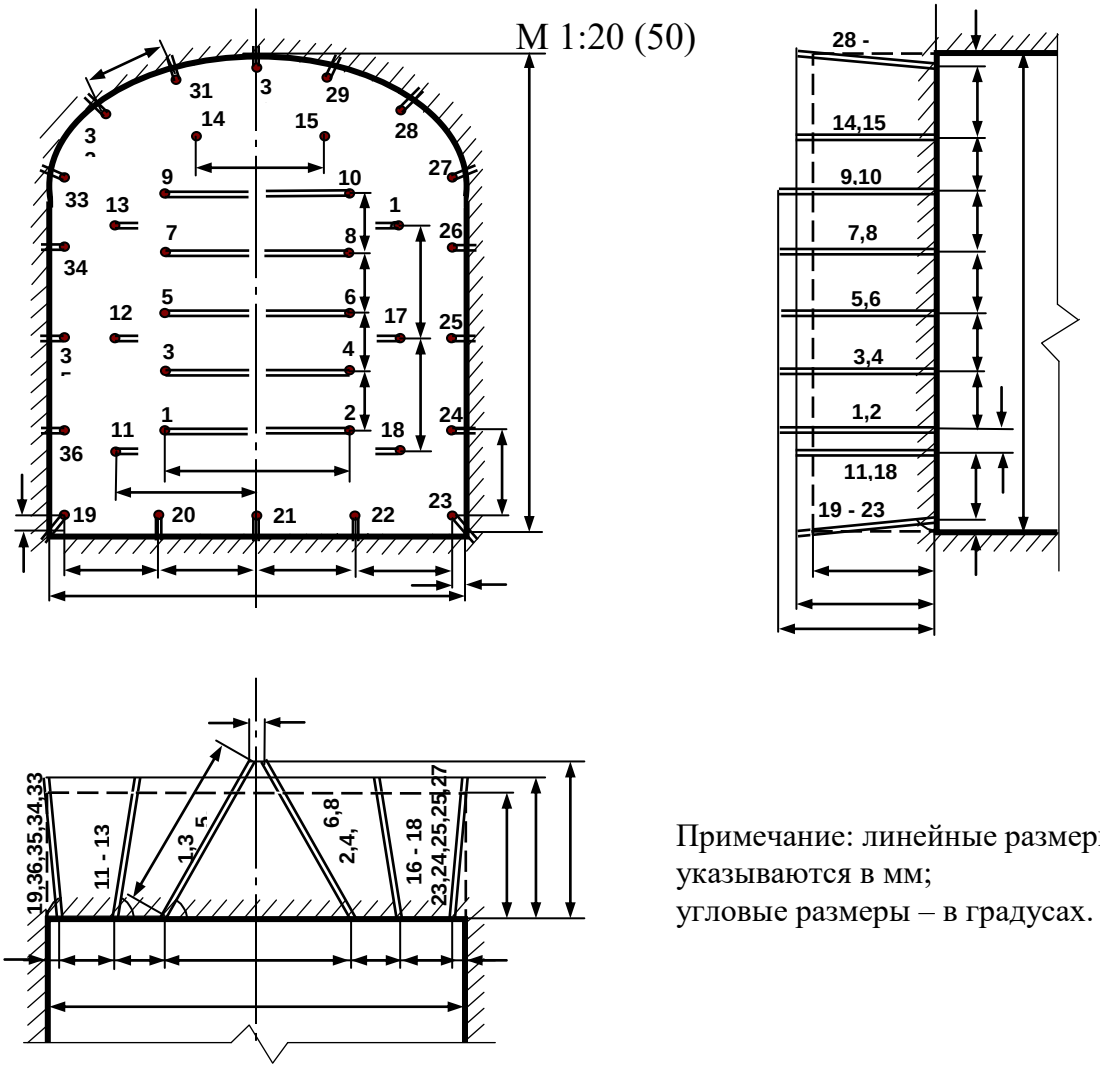
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

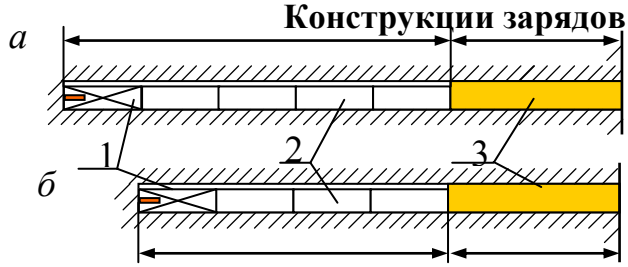
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

**Схема расположения шпуров**




Примечание: линейные размеры
указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

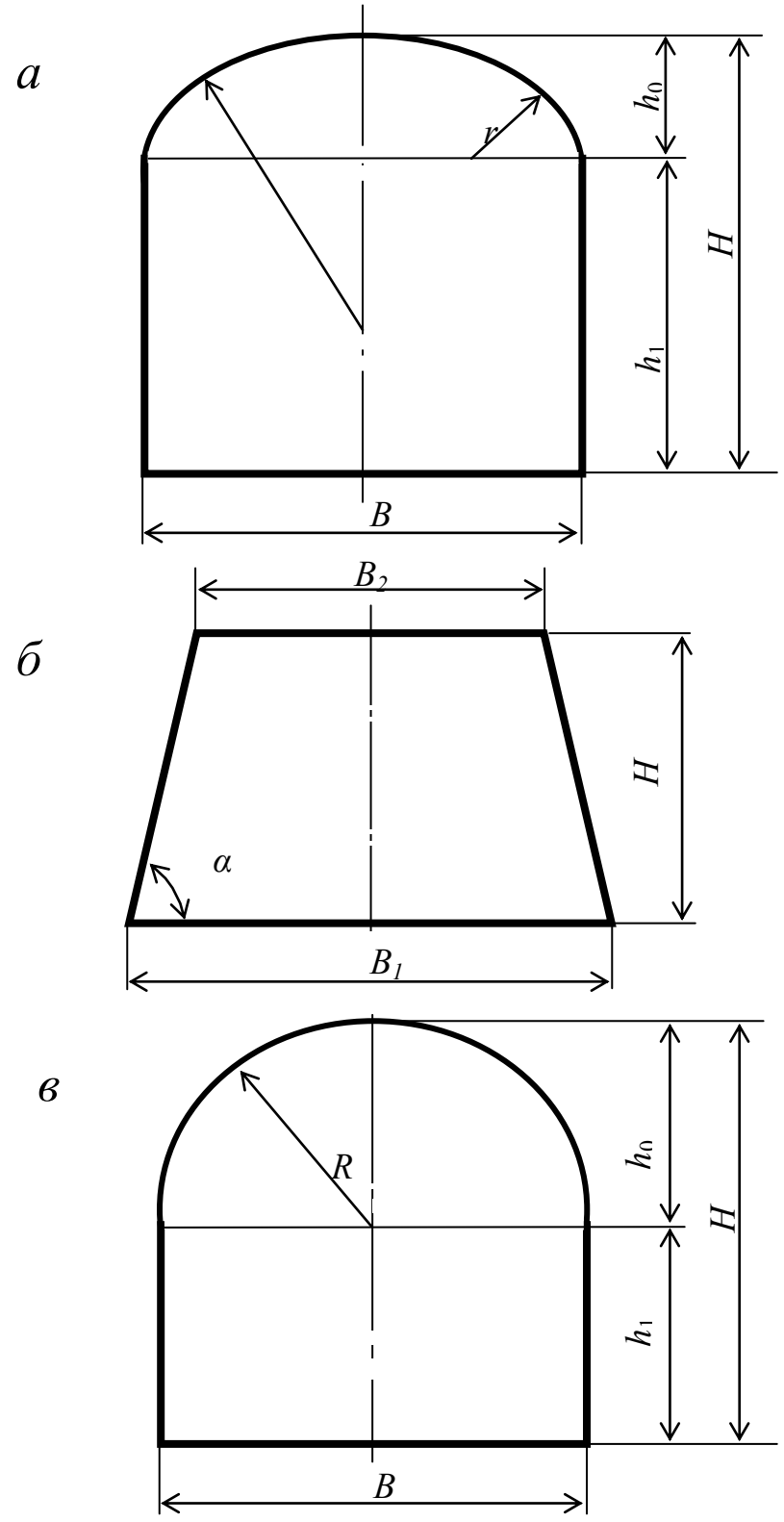
**Конструкции зарядов**




*а* – врубовые шпуры;
*б* – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

*Примечание*. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

**Формы поперечного сечения горизонтальных выработок**




$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
*а* – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
*б* – трапецевидная;
*в* – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок:

| Форма поперечного сечения выработки | Площадь поперечного сечения | Периметр |
|---|---|---|
| Сводчатая с коробовым сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$ |
| Трапециевидная | $\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$ | $B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$ |
| Арочная с полуциркульным сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$ |

## Рекомендуемая литература

1. Корнилков М.В. Разрушение горных пород взрывом: конспект лекций. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. - 202 с.

2. Латышев О.Г., Петрушин А.Г., Азанов М.А. Промышленные взрывчатые материалы: учебное пособие. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. - 221 с.

3. Кутузов Б.Н. Методы ведения взрывных работ. Часть 1. Разрушение горных пород взрывом: Учебник. – М.: Изд. МГГУ, 2007. – 345 с.

4. Кутузов Б.Н. Безопасность взрывных работ в горном деле и промышленности. – М.: Горная книга, 2009. – 670 с.

5. Латышев О.Г. Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2004. – 201 с.

6. Правила безопасности при взрывных работах (утверждены приказом Ростехнадзора от 16.12.2013 г. № 605; в редакции приказа Ростехнадзора от 30.11.2017 г. № 518). – М., 2018.

7. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

8. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадиевич
Лещуков Николай Николаевич
Прищепа Дмитрий ВЯчеславович

# РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

*Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Редактор *Д. В. Прищепа*

Подписано в печать «__»_____2019 г. Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 3,68. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»




А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа

# ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

*Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«19» апреля 2019 г.

Председатель комиссии


ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа

# ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

*Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»*

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

*Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС* УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 65 с.

Материал пособия охватывает все раздела дисциплины в соответствии с учебником [1].

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов, выполнению контрольных и практических заданий всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Технология и безопасность взрывных работ».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Азанов М.А.,
© Прищепа Д. В.

**Оглавление**

ВВЕДЕНИЕ ..... 5
1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 6
2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ..... 7
3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ..... 19
Практико-ориентированное задание №1 ..... 19
Практико-ориентированное задание №2 ..... 23
Практико-ориентированное задание №3 ..... 26
Практико-ориентированное задание №4 ..... 30
Практико-ориентированное задание №5 ..... 32

# ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студента является важнейшей составной частью образовательной программы подготовки дипломированного специалиста. В соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования объем учебной нагрузки студента составляет 144 часов или 4 зачетных единиц.

По курсу «Технология и безопасность взрывных работ» обязательная самостоятельная работа студента осуществляется в следующих направлениях – *освоение материалов по отдельным темам, входящим в Рабочую учебную программу дисциплины; подготовка, оформление, защита практико-ориентированных заданий; подготовка и защита контрольной работы*. Дополнительная самостоятельная работа связана с углубленным изучением отдельных разделов курса на основе научно-исследовательской работы студента (НИРС).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов – освоения отдельных тем дисциплины.

# 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В следующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Технология и безопасность взрывных работ». Она содержит названия 30 основных тем с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов в экзаменационном билете. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Причем в экзаменационный билет может включаться один из вопросов по такой теме. Основной объем информации по каждой теме содержится в учебнике по курсу [1].

При освоении указанных ниже тем *рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента:*

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебнику [1] освойте каждый структурный элемент темы. Во всех темах указаны разделы и страницы учебника, содержащие данный материал.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

**Тема 1**. **Краткая история развития взрывных работ.**

Значение взрывных работ в горнодобывающей промышленности и в строительстве. История развития взрывных работ.

***Литература:*** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Охарактеризуйте основные вехи развития взрывных работ.
2. Опишите первую технологию ведения взрывных работ в горном деле.
3. Назовите первое нитроглицериновое взрывчатое вещество.
4. Опишите историю развития средств инициирования.

**Тема 2. Современные виды взрывных работ.**

Современные виды взрывных работ в промышленности. Основные виды взрывных работ. Специальные виды взрывных работ.

**Литература:** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите современные виды взрывных работ.
2. Назовите современные виды специальных взрывных работ.

**Тема 2. Способы бурения шпуров и скважин.**

Классификация способов бурения шпуров и скважин. Механическое бурение и его виды. Термическое бурение и его виды. Специальные виды бурения шпуров и скважин.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Приведите классификацию способов бурения шпуров и скважин.
2. Опишите суть механических видов бурения шпуров и скважин.
3. Опишите суть термических видов бурения шпуров и скважин.
4. Опишите суть специальных видов бурения шпуров и скважин.
5. Укажите рациональные области применения механических, термических и специальных видов бурения шпуров и скважин.

**Тема 3. Ударно-поворотный способ бурения.**

Механизм разрушения горных пород при ударно-поворотном бурении. Механизмы скола и выкола. Зависимость скорости ударно-поворотного бурения от осевого усилия, частоты вращения. Оборудование.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите рациональную область применения ударно-поворотного бурения.
2. Охарактеризуйте механизмы скола и выкола.
3. Опишите механизм разрушения горных пород при ударном внедрении инструмента.
4. Укажите бурильные машины ударно-поворотного бурения.
5. Отметьте факторы, которые повышают энергоемкость ударного бурения по сравнению с другими способами.
6. Укажите последовательность процессов, происходящих при разрушении породы при ударном бурении.

**Тема 4. Вращательный способ бурения.**

Технические средства вращательного бурения. Работа ядра уплотнения при резании пород. Зависимость объема разрушения от толщины стружки. Режимы самозаточки и затупления режущей грани сверла. Оборудование.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите преимущества вращательного бурения.
2. Укажите бурильные машины вращательного бурения.
3. Охарактеризуйте основные механизмы износа и затупления бурового инструмента при вращательном бурении.
4. Опишите механизм разрушения горных пород при вращательном бурении.

**Тема 5. Ударно-вращательный и вращательно-ударный способ бурения.**

Технические средства бурения. Совместное действие механизмов удара и резания. Зависимость энергоемкости бурения от усилий полдачи на инструмент.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите область применения вращательно-ударного бурения.
2. Укажите область применения ударно-вращательного бурения.
3. Назовите преимущества вращательно-ударного бурения.
4. Охарактеризуйте зависимость энергоемкости бурения от усилия подачи.
5. Назовите машины и механизмы, реализующие ударно-вращательный способ бурения.
6. Назовите машины и механизмы, реализующие вращательно-ударный способ бурения.

**Тема 6. Шарошечное бурение.**

Технические средства бурения. Механизм шарошечного бурения. Режимы бурения в зависимости от осевого усилия. Контактная прочность пород как критерий буримости.

**Литература:** [1, 5]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите особенности шарошечного бурения.
2. Опишите зависимость скорости бурения от величины осевого усилия.
3. Назовите машины и механизмы, реализующие шарошечное бурение.
4. Укажите область применения шарошечного бурения.

**Тема 7. Основы теории взрыва и взрывчатых веществ.**

Виды взрыва: механический, тепловой, электрический, ядерный, химический. Необходимые условия химического взрыва. Взрывчатое вещество. Классификация взрывчатых систем по физическому состоянию.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию взрыв.
2. Приведите пример механического взрыва.
3. Приведите пример Теплового взрыва.
4. Приведите примеры тепловых взрывов.
5. Охарактеризуйте химический взрыв.
6. Назовите необходимые условия химического взрыва.

**Тема 8. Свойства взрывчатых веществ.**

Классификация свойств взрывчатых веществ. Технологические свойства взрывчатых веществ. Специальные свойства взрывчатых веществ.

**Литература:** [1, 2]

***Контрольные вопросы:***

1. Приведите классификацию свойств взрывчатых веществ.
2. Назовите основные технологические свойства взрывчатых веществ.
3. Что такое кислородный баланс.
4. Назовите виды кислородного баланса.
5. Какие газы выделяются при положительном кислородном балансе.
6. При каком кислородном балансе образуется окись углерода (CO)?

**Тема 9. Начальный импульс и чувствительность взрывчатых веществ.**

Начальный импульс. Виды начального импульса. Инициирование. Чувствительность взрывчатых веществ. Способы изменения чувствительности.

**Литература:** [1]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию «Начальный импульс».
2. Охарактеризуйте тепловой начальный импульс.
3. Какой вид начального импульса является основным для горного дела?
4. Перечислите пробы на чувствительность.
5. Что такое сенсибилизатор?
6. Приведите пример веществ вводимых в состав взрывчатых веществ для флегматизации.

**Тема 10. Формы химического превращения взрывчатых веществ.**

Основные формы химического превращения взрывчатых веществ. Режимы химического превращения: термический распад, горение, конвективное горение, детонация

**Литература:** [1, 2, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите основные формы химического превращения.
2. Дайте характеристику горению как форме химического превращения.
3. Дайте характеристику детонации как форме химического превращения.

**Тема 11. Основные положения теории детонации.**

Механизм детонации. Графическая интерпретация процесса детонации – адиабата Гюгонио. Количественная оценка характеристик процесса детонации.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите особенности детонационной волны.
2. Дайте определение понятию «Детонация».
3. Приведите основные детонационные характеристики взрывчатых веществ.

**Тема 12. Экспериментальные методы определения скорости детонации.**

Классификация методов определения скорости детонации взрывчатых веществ. Метод Дотриша. Осциллографический метод. Метод скоростной фотосъемки. Реостатный метод.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Охарактеризуйте метод Дотриша, для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
2. Назовите отличительные особенности осциллографического метода для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
3. Опишите процедуру измерения скорости детонации используя реостатный метод.

**Тема 13. Факторы, влияющие на скорость и устойчивость детонации.**

Группы факторов, влияющие на скорость и устойчивости детонации. Влияние внутреннего состава и строения на скорость и устойчивость детонации. Влияние условий взрывания на скорость детонации.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Как влияет дисперсность взрывчатого вещества на скорость и устойчивость детонации?
2. Как влияет плотность взрывчатого веществ на скорость детонации?
3. Дайте определение понятию «критический диаметр детонации».
4. Как влияет на скорость и устойчивость детонации наличие плотной оболочки на заряде взрывчатого вещества.
5. Влияние величины начального импульса на устойчивость детонации.

**Тема 14. Работа взрыва.**

Работа взрыва: баланс энергии при взрыве. Потери при переходе потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва. Полезная работа взрыва. Бризантность и фугасность. Пробы на бризантность и фугасность.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Опишите переход потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва.
2. Чем обусловлены химические потери при взрыве?
3. Чем обусловлены тепловые потери при взрыве?
4. Охарактеризуйте бесполезные формы работы взрыва.
5. Что такое бризантность взрывчатых веществ.
6. Назовите формы проявления фугасной работы взрыва.

**Тема 15. Основные положения теории предохранительных взрывчатых веществ.**

Необходимость применения предохранительных взрывчатых веществ. Теории предохранительных взрывчатых веществ. Методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

**Литература:** [1, 2]

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение понятию пламегаситель.
2. Дайте определение понятию ингибитор.
3. Перечислите основные гипотезы воспламенения горючих шахтных сред.
4. Перечислите возможные пути предотвращения воспламенения горючих шахтных сред.
5. Охарактеризуйте методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

**Тема 16. Заряд взрывчатого вещества.**

Заряды взрывчатых веществ. Классификация. Воронка взрыва и ее элементы. Показатель действия взрыва.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. По каким признакам классифицируются заряды взрывчатых веществ.
2. Перечислите элементы воронки взрыва.
3. Что такое показатель действия взрыва.
4. Как классифицируются заряды взрывчатых веществ по показателю действия взрыва.

**Тема 17. Действие взрыва.**

Действие сосредоточенного заряда в твердой однородной безграничной среде и при наличии обнаженной поверхности. Стадии разрушения: образование газовой полости, зоны дробления, зона радиальных и кольцевых трещин, откольные явления. Соотношение бризантного и фугасного действия взрыва в зависимости от акустической жесткости разрушаемых пород.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Отразите последовательность развития взрыва в горных породах.
2. Отметьте области действия взрыва, образующие зону регулируемого дробления.
3. Какие трещины образуются в горной породе при падении давления и обратной деформации пород в сторону зарядной полости?

4. Какие трещины образуются при отражении волны сжатия от свободной поверхности горной породы?

**Тема 18. Классификации промышленных взрывчатых веществ.**

Классификация ВВ: по характеру воздействия на окружающую среду, по чувствительности к простым формам начального импульса, физическому состоянию. Классификация по химическому составу – индивидуальные ВВ и взрывчатые смеси. Классы ВВ по условиям применения.

**Литература:** [1, 2, 4, 6]

***Контрольные вопросы:***

1. К какой группе относятся взрывчатые вещества, имеющие скорость детонации 4000 м/с?
2. Какие классы промышленных ВВ выделяют по химическому составу?
3. К какому классу промышленных ВВ по химическому составу относится тротил, детонит?
4. Какие ВВ можно использовать только при взрывных работах на поверхности, в шахтах опасных по газу и пыли? Укажите номер класса и цвет оболочки.
5. Какой цвет имеют патроны предохранительных ВВ?
6. По какому характерному признаку выделяют первичные и вторичные ВВ?

**Тема 19. Непредохранительные взрывчатые вещества I класса по условиям применения.**

Предъявляемые требования. Нитросоединения: свойства, ассортимент, область применения. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите основные свойства гранулотола.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ.
3. Бестротиловые взрывчатые вещества: особенности, свойства.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ.

**Тема 20. Непредохранительные взрывчатые вещества II класса по условиям применения.**

Предъявляемые требования. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Порошкообразные ВВ – аммониты и аммоналы. Свойства и область применения.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Назовите основные свойства граммонита 79/21.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.
3. Назовите отличительные особенности патронированных аммонитов.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.

**Тема 21. Предохранительные взрывчатые вещества III – VII классов по условиям применения.**

Требования к энергетическим и детонационным характеристикам предохранительных ВВ. Требования к кислородному балансу. Требования к составу и строению зарядов.

**Литература:** [1, 2, 7]

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите названию взрывчатых веществ III класса по условиям применения.
2. Какие добавки вводят в состав предохранительных взрывчатых веществ?
3. Укажите требования, предъявляемые к предохранительным ВВ.

**Тема 22. Методы производства взрывных работ.**

Классификация методов производства взрывных работ. Метод шпуровых зарядов. Метод скважинных зарядов. Метод камерных зарядов. Метод наружных зарядов. Область применения, достоинства и недостатки методов.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите области применения метода шпуровых зарядов в подземных условиях.
2. Укажите область применения метода шпуровых зарядов при открытой разработке месторождений.
3. Укажите область применения метода скважинных зарядов.
4. Укажите область применения метода наружных зарядов.

**Тема 23. Метод шпуровых зарядов при проведении подземных горных выработок.**

Состав проходческого цикла. Коэффициент использования шпуров (КИШ). Коэффициент излишка сечения (КИС). Врубовые, отбойные и оконтуривающие шпуры. Очередность взрывания. Конструкции шпуровых зарядов. Размер и качество забойки. Прямое и обратное инициирование зарядов. Назначение и типы врубов. Конструкции наклонных врубов; их достоинства и недостатки. Конструкции прямых врубов; их достоинства и недостатки. Комбинированные врубы. Принципы расчета параметров буровзрывных работ.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите типы шпуров при проходке выработки.
2. Укажите очередность взрывания шпуров в типовой технологии проходки выработок.
3. Укажите условия, соответствующие обратному инициированию заряда.
4. Отметьте достоинства прямого инициирования заряда ВВ по сравнению с обратным.
5. Отметьте достоинства обратного инициирования заряда ВВ по сравнению с прямым.

**Тема 24. Метод шпуровых зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.**

Технология шпуровой отбойки при разработке рудных месторождений. Расчет параметров БВР. Технология шпуровой отбойки угля. Правила безопасности при использовании метода шпуровой отбойки.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Опишите существо метода шпуровых зарядов при добыче полезных ископаемых подземным спопобом.
2. Укажите классы ВВ допущенные к применению при шпуровой отбойке по углю.
3. Какой способ взрывания допущен к применению при шпуровой отбойке угля?
4. Какова допустимая величина уходки (м) при добыче угля методом шпуровых зарядов?

5. Какова величина предельного содержание метана в забое (в %), при котором разрешена отбойка угля методом шпуровых зарядов?

**Тема 25. Метод скважинных зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.**

Отбойка вертикальными и горизонтальными слоями. Параллельное и веерное расположение скважин – преимущества и недостатки. Схемы отбойки руды в блоке. Расчет параметров скважинной отбойки. Бурение, заряжание и взрывание скважин. Правила безопасности при скважинной отбойке.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите преимущества параллельного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с веерным расположением скважин).
2. Укажите преимущества веерного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с параллельным расположением скважин).
3. Укажите способы бурения скважин при отбойке руды в подземных условиях.
4. Какой тип ВВ обычно применяют при механизированном заряжании скважин?
5. Укажите показатели, входящие в формулу определения удельного расхода ВВ при скважинной отбойке руды в подземных условиях.

**Тема 26. Метод скважинных зарядов при открытой разработке месторождений полезных ископаемых.**

Расположение скважин на уступе и их бурение. Принципы расчета параметров буровзрывных работ. Схемы взрывания скважинных зарядов при однорядном и многорядном взрывании скважин.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите рациональные способы бурения скважин при открытой разработке месторождений.
2. Удельный расход ВВ на карьерах определяется по эталонному $q_э$ с учетом поправочных коэффициентов. Укажите факторы, определяющие величину данных коэффициентов.
3. Укажите основные способы взрывании зарядов взрывчатых веществ, используемых на земной поверхности.

4. Перечислите основные взрывчатые вещества, используемые при ведении взрывных работ на земной поверхности.

**Тема 27. Метод камерных зарядов.**

Расположение выработок при использовании камерных зарядов. Камерные заряды рыхления и их расчет. Камерные заряды выброса и их расчет. Камерные заряды на сброс и их расчет.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. В каких случаях целесообразно использовать метод камерных зарядов при открытой разработке месторождений?
2. Назовите достоинства и недостатки метода камерных зарядов.

**Тема 28. Взрывное разрушение негабарита.**

Характеристики, область применения, достоинства и недостатки различных способов разделки негабарита: наружными, шпуровыми, кумулятивными зарядами, гидровзрывание.

**Литература:** [1, 3]

***Контрольные вопросы:***

1. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита накладными зарядами.
2. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита шпуровыми зарядами.
3. Укажите способы взрывного дробления негабарита при открытой разработке месторождений.

**Тема 29. Техническая документация для производства взрывных работ.**

Необходимая техническая документация для производства взрывных работ: типовой проект взрывных работ, проект массового взрыва, паспорт буровзрывных работ, схема взрывных работ.

**Литература:** [1, 4, 6, 8]

***Контрольные вопросы:***

1. Что входит в состав типового проекта взрывных работ?
2. Опишите процедуру составления и утверждения паспорта буровзрывных работ.
3. Для каких работ составляется схема взрывных работ.
4. В каких случаях составляется проект массового взрыва?

**Тема 30. Персонал для взрывных работ.**

Требования к лицам, допущенным к ведению взрывных работ: руководитель взрывных работ, мастер-взрывник, заведующий складом ВМ, раздатчики ВМ и лаборанты складов ВМ.

**Литература:** [1, 4, 6, 8]

***Контрольные вопросы:***

1. Какие требования предъявляются к руководителям взрывных работ?
2. Какие требования предъявляются к взрывникам?
3. В течение какого периода времени проходит стажировка взрывника?
4. Требования в заведующему склада взрывчатых материалов.

## 3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

### Практико-ориентированное задание №1

Расчет кислородного баланса и составление рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Цель: овладение методикой расчета кислородного баланса взрывчатых веществ и принципами составления рецептур промышленных взрывчатых веществ.

***Краткая теория***

***Определение кислородного баланса***

Кислородным балансом называется отношение избытка или недостатка кислорода во взрывчатом веществе (ВВ) для полного окисления горючих элементов (водорода, углерода, металлов и т. п.), выраженное в грамм-атомах, к грамм-молекулярной массе ВВ. Кислородный баланс выражается в долях или процентах.

Под полным окислением понимается окисление водорода в воду, а углерода в углекислый газ. При этом выделяется также молекулярный азот и кислород. Если в составе ВВ находится металл, то образуется его высший окисел.

Реакции полного окисления:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 + 396 \text{ кДж/моль};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O \rightarrow H_2O + 283 \text{ кДж/моль при воде жидкой};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + 241 \text{ кДж/моль при воде парообразной};$$

$$2Al + 1.5O_2 \rightarrow Al_2O_3 + 1671 \text{ кДж/моль}.$$

Следовательно, если ВВ имеет состав в виде $C_aH_bN_cO_d$, то кислородный баланс (%)

$$K_б = \frac{\left[d - \left(2a + \frac{b}{2}\right)\right] \cdot 16}{M_{BB}} 100\%, \quad (1.1)$$

где 16 – относительный атомная масса кислорода; $M_{BB}$ – молекулярная масса ВВ.

При

$$d > 2a + \frac{b}{2} \quad (1.2)$$

имеет положительный кислородный баланс;

при

$$d = 2a + \frac{b}{2} \quad (1.3)$$

нулевой кислородный баланс;

при

$$d < 2a + \frac{b}{2} \quad (1.4)$$

отрицательный кислородный баланс.

Взрывчатые вещества с нулевым кислородным балансом выделяют максимальное количество энергии и минимальное количество ядовитых газов.

При взрыве ВВ с отрицательным кислородным балансом в зависимости от относительного количества кислорода образуются либо ядовитая окись углерода (угарный газ) с меньшим выделением тепла, чем при образовании углекислоты, т. е.

$$C + 0{,}5O_2 \rightarrow CO + 109 \text{ кДж/моль;}$$

либо чистый углерод в виде сажи, резко снижающий образование газов.

При положительном кислородном балансе уменьшается выделение энергии, так как образуется ядовитая окись азота с поглощением тепла по реакции

$$0{,}5N_2 + 0{,}5O_2 \rightarrow NO - 90{,}5 \text{ кДж/моль.}$$

*Пример 1.* Определить кислородный баланс тротила $C_7H_5(NO_2)_3$, относительная молекулярная масса которого 227.

Для полного окисления необходимо $2a + b/2$ или $2 \cdot 7 + 5/2 = 16{,}5$ атомов кислорода.

В наличии имеется 6 атомов кислорода.

Следовательно,

$$K_б = \frac{\left[6 - \left(2 \cdot 7 + \frac{5}{2}\right)\right] \cdot 16}{227} 100\% = -74\%.$$

*Пример 2.* Определить кислородный баланс граммонита 30/70. Граммонит 30/70 состоит из 30% аммиачной селитры $NH_4NO_3$ и 70% тротила.

Кислородный баланс аммиачной селитры АС, определенный вышеуказанным способом, равен +20%.

Кислородный баланс граммонита 30/70:

$$0{,}3 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot -74 = -45{,}5\%.$$

### *Составление рецептуры промышленных ВВ*

При изготовлении промышленных ВВ обычно состав подбирается таким, чтобы был нулевой кислородный баланс. Для изготовления патронированных ВВ принимается небольшой положительный кислородный баланс для окисления материала оболочки патронов. Для подземных работ при взрыве 1 кг ВВ должно выделятся не более 40 л ядовитых газов в пересчете на условную окись углерода. Если образуются окислы азота и сернистый газ, то для перевода их к условной окиси углерода принимается поправочный коэффициент соответственно 6,5 и 2,5.

Для открытых горных работ, особенно для ВВ, применяемых в обводненных условиях, требования к кислородному балансу ВВ не такие жесткие.

Пример 1. Составить рецептуру игданита с нулевым кислородным балансом па основе аммиачной селитры и дизельного топлива (ДТ) с кислородным балансом – 320%.

Количество весовых частей аммиачной селитры для окисления одной части дизельного топлива равно

$$n = \frac{[\text{КБ}_{DT}]}{[\text{КБ}_{\text{АС}}]},$$

где $\text{КБ}_{DT}$ – кислородный баланс дизельного топлива;

$\text{КБ}_{\text{АС}}$ – кислородный баланс аммиачной селитры.

$$n = \frac{320}{20} = 16.$$

Содержание дизельного топлива во взрывчатом веществе:

$$x = \frac{100}{1+n},$$

$$x = \frac{100}{1+16} = 5{,}9\ \%.$$

Соответственно содержание аммиачной селитры

$$100 - x = 100 - 5{,}9 = 94{,}1\%.$$

Следовательно, формула игданита:

$$94{,}1\%\ \text{аммиачной селитры};\ 5{,}9\%\ \text{дизельного топлива}.$$

Пример 2. Определить рецептуру ВВ с пулевым кислородным балансом на основе аммиачной селитры ($NH_4NO_3$) и тротила ($C_7H_5(NO_2)_3$).

Кислородный баланс тротила –74%, относительная молекулярная масса 227. Кислородный баланс аммиачной селитры +20%, относительная молекулярная масса 80.

Состав смеси должен отвечать условию:

$$x\ (-74\%) + (100 - x)\ 20\% = 0,$$

где $x$ – содержание в смеси тротила, %.

Решение данного уравнения показывает, что $x \approx 21\%$ и $(100 - x) = 79\%$. Такому составу смеси отвечают граммонит 79/21 и аммонит 6ЖВ.

Обозначим число молей аммиачной селитры через $y$, число молей тротила через $z$. Тогда из соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 227} = \frac{79}{21},$$

получим

$$y = \frac{79 \cdot z \cdot 227}{21 \cdot 80} = 10{,}7z.$$

Приняв z = 1, получим y = 10,7.

Следовательно, молекулярное уравнение граммонита имеет вид

$$z + 10{,}7y = C_7H_5(NO_2)_3 + 10{,}7NH_4NO_3.$$

Пример 3. Определить молекулярную формулу гранулита АС-8, имеющего следующий состав: 89% аммиачной селитры $NH_4NO_3$; 3% солярового масла $C_{16}H_{34}$ (относительная молекулярная масса 226); 8% алюминиевой пудры А1 (относительная молекулярная масса — 27).

Обозначив число молей солярового масла $x$, аммиачной селитры $y$, алюминиевой пудры $z$, можно написать химическую формулу в виде

$$y NH_4NO_3 + x\ C_{16}H_{34} + z\ Al.$$

В соответствии с весовым составом можно записать следующие соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 226} = \frac{89}{3};\quad \frac{z \cdot 27}{x \cdot 226} = \frac{8}{3},$$

Отсюда y = 83,9$x$; $z$ = 22,4$x$.

Примем x = 1, тогда молекулярное уравнение гранулита АС-8 имеет вид

$$83{,}9\ NH_4NO_3 + C_{16}H_{34} + 22{,}4\ Al.$$

## Практико-ориентированное задание №2

Определение работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Цель: овладение методикой определения работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

### *Краткая теория*

*Расчет идеальной работоспособности ВВ*

Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии газов равно количеству тепла, сообщенного окружающей среде и произведенной работе:

$$-dE = dQ + pdV. \quad (2.1)$$

Если техническим назначением взрыва ВВ является производство механической работы, то затраты на теплообмен продуктов взрыва (ПВ) с окружающей средой являются энергетическими потерями ($dQ$). Эти потери называются термодинамическими.

Идеальным с точки зрения отсутствия термодинамических потерь является адиабатический процесс расширения ПВ, т.е. $dQ = 0$. В этом случае изменение внутренней энергии ПВ равно количеству работы, совершаемой газами, т.е.

$$-dE = pdV = dA. \quad (2.2)$$

В реальных условиях взрывания наиболее близким к адиабатическому процессу является взрыв ПВ в воздушной среде, а, например, в горных породах термодинамические потери возрастают. Они существенно выше в пористых, хрупких, легко дробимых породах и минимальны в пластичных средах типа глин.

Мерой идеальной работоспособности ВВ может служить максимальная работа, которую совершают ПВ при своем адиабатическом расширении до давления окружающей среды (воздушной, водной, горной), т.е. когда остаточное давление ПВ уравновешивается противодавлением среды атмосферным, гидростатическим или горным давлением.

Идеальная работоспособность ВВ является одной из важнейших энергетических характеристик ВВ. Она дополняет теплоту взрыва, показывая теоретическую возможность реализации энергетического потенциала ВВ в механическую работу.

Идеальную работоспособность (полную идеальную работу взрыва) можно определить, как разность между значениями внутренней энергии ПВ в момент их образования и к концу расширения:

$$\mathrm{A_и} = \int dE = \int_{T_1}^{T_2} \overline{C_V} dT = \overline{C_V} * (T_1 - T_2) = \overline{C_V} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (2.3)$$

где $\overline{C_V}$ - средняя теплоемкость продуктов взрыва в интервалах изменения температуры взрыва от $T_1$ до $T_2$;

$T_1$ - начальная температура взрыва;

$T_2$ - конечная температура ПВ.

Для газовых взрываемых систем, расширение ПВ которых происходит вдоль изоэнтропы вида $pV'$ = const, пользуясь уравнением Клайперона $(PV'=RT)$, получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}} \quad (2.4)$$

Окончательно получаем

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad (2.5)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1}\right); \quad (2.6)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right); \quad (2.7)$$

где $Q_{\text{взр}}$- потенциальная энергия ВВ (полная тепловая энергия), кДж/кг;

$V_1$ и $V_2$ - начальный и конечный удельные объемы ПВ, м$^3$/кг;

$P_1$ и $P_2$ - начальное и конечное давление ПВ, Па;

$y = Cp/Cv$ – показатель адиабаты.

Эти же формулы могут быть использованы для расчета $A_u$ конденсированных ВВ.

При взрыве в воздухе ($P_2$ = 1,01·10$^5$Па) полная идеальная работа взрыва определяется

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right), \text{ кДж/кг.} \quad (2.8)$$

Расчет полного термодинамического КПД взрыва

Вышеприведенную формулу (2.8) можно представить в виде

$$A_u = Q_{\text{взр}} - q_T \quad (2.9)$$

Здесь величина $q_T = Q_{\text{взр}} - A_u = C_{v2} * T_2$ - термодинамические потери энергии ВВ в продуктах взрыва по достижении ими атмосферного давления. Это остаточное тепло идет на свечение ПВ после их расширения.

Отношение идеальной работоспособности к выделившейся тепловой энергии взрыва называется идеальным термодинамическим КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}}, \tag{2.10}$$

или с учетом формулы (2.7)

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}, \tag{2.11}$$

Идеальный термодинамический КПД взрыва определяет часть тепловой энергии, которая может быть использована для совершения механической работы взрыва.

Величины идеальной работоспособности ($A_u$) и полного термодинамического КПД (П) существенно зависят от свойств продуктов взрыва, влияющих на показатель адиабаты, $y = Cp/Cv$. Если в ПВ содержится 2/3 молекул двухатомных газов и 1/3 — одноатомных (гексоген), то $y$ = 1,25. Если в ПВ содержится 2/3 трехатомных газов и 1/3 двухатомных (нитроглицерин), то $y$ = 1,2. Величина $y$ снижается (соответственно снижается $A_u$ и $\eta$), если в ПВ содержатся четырех и пятиатомные газы, а также твердые продукты (NaCl, $A1_2O_3$ и др.). В этих случаях $y$ = 1,15, и 1,05.

Пример 1. Определить полную идеальную работоспособность и термодинамический КПД аммонита 6ЖВ при плотности заряжания 900 кг/м$^3$ и следующих параметрах взрывного превращения:

$V_{пв}$= 0,86 м$^3$/кг,

$Q_{взр}$ = 4300кДж/кг;

$T_{взр}$=2600$^o$ К.

Для расчета показатель адиабаты принимается y=1,25. Определение давления ПВ при взрыве аммонита 6ЖВ:

$$P = \frac{1{,}01*10^5*0{,}86*2600*900}{273*(1-0{,}001*0{,}86*900)} = 3{,}3 * 10^9,$$

Откуда полная идеальная работоспособность

$$A_u = Q_{\text{взр}}\left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right) = 4300 * \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{3{,}3 * 10^9}\right)^{\frac{1{,}25-1}{1{,}25}}\right) = 3762{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Полный термодинамический КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}} = \frac{3762{,}2}{4300} = 0{,}875$$

или $\eta = 87{,}5\%$

## Практико-ориентированное задание №3

Расчет скважинного заряда при уступной отбойке на карьере

***Цель работы*** – овладение методикой проектирования параметров буровзрывных работ при открытой разработке месторождений скважинным способом

## Краткая теория

При разработке месторождений открытым способом (на карьерах и разрезах) используют в основном метод скважинных зарядов. В слабых породах используют вращательное (шнековое) бурение. В более прочных породах преобладает шарошечное бурение. В крепчайших породах с коэффициентом крепости $f$ > 14-16 наиболее эффективно термическое бурение скважин. Скважины на уступе карьера располагают в один или несколько рядов по различным схемам в зависимости от свойств разрушаемых пород и требуемой конфигурации забоя. Расположение скважин на уступе характеризуют следующими показателями (рис. 1):

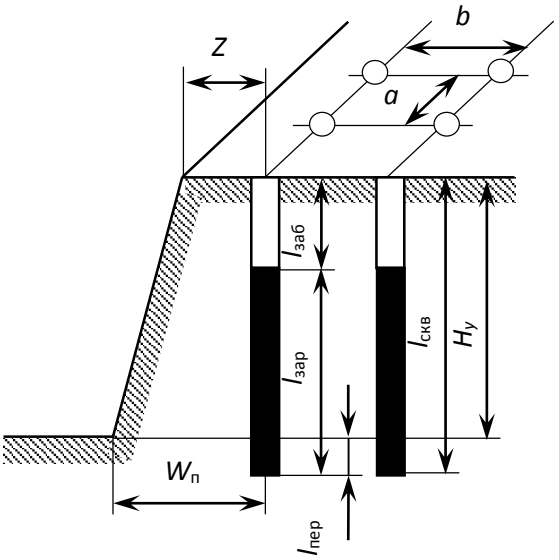



Рис. 3.1 Схема расположения скважин на уступе

$H_у$ – высота уступа, м; $W_п$ – линия сопротивления по подошве (ЛСПП); $a$ – расстояние между скважинами, м; $b$ – расстояние между рядами скважин, м; $Z$ – безопасное расстояние от оси скважины до верхней бровки уступа, м; $l_{зар}$ – длина заряда, м; $l_{пер}$ – длина перебура, м; $l_{заб}$ – длина забойки, м; $l_{скв}$ – длина (глубина) скважины, м; $\alpha$ - угол откоса уступа.

Характеристики и расположение скважин в первую очередь зависят от удельного расхода ВВ. Оптимальная величина удельного расхода ВВ определяется множеством факторов. При этом определяющую роль играют свойства разрушаемого массива, размеры его блоков (расстояние между трещинами), степень и качество заполнения трещин, их расположение

относительно вектора смещения породы и т. п. Учесть все эти факторы в единой теоретической модели не представляется возможным. Поэтому во многом оптимальные параметры процесса определяются путем опытного взрывания и интерпретации его результатов на основе общефизических представлений.

Удельный расход «эталонного» ВВ ($q_э$) может быть определен по данным таблицы 1.

Таблица 3.1

**Эталонный удельный расход ВВ, кг/м$^3$**

| Категория пород по степени трещиноватости | Коэффициент крепости горных пород $f$ по шкале проф. М. М. Протодьяконова | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 - 6 | 6 - 10 | 10 – 14 | более 14 |
| I | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 |
| II | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 |
| III | 0,45 | 0,5 | 0,6 | 0,67 |
| IV | 0,67 | 0,75 | 0,8 | 0,9 |
| V | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 |

***Реальный удельный расход ВВ*** рекомендуется определять путем введения серии поправочных коэффициентов, учитывающих тип ВВ, конструкцию заряда, наличие свободных поверхностей, заданную степень дробления и др:

$$q_{\text{р}} = q_{\text{э}} \cdot e \cdot k_d \cdot \frac{\rho_{\text{гп}}}{2{,}6}, \qquad (3.1)$$

где $q_э$ – эталонный расход Граммонита 79/21, кг/м$^3$;

$e$ – коэффициент относительной работоспособности ВВ, определяемый по формуле

$$e = A_{\text{эт}} / A_{\text{ВВ}}, \qquad (3.2)$$

$A_{эт}$ = 3560 кДж/кг - идеальная работа взрыва эталонного ВВ (Граммонит 79/21);

$A_{ВВ}$ – идеальная работа взрыва принятого ВВ, кДж/кг;

$k_d$ - поправочный коэффициент на кондиционный размер куска;

$\rho_{гп}$ – плотность горных пород, т/м$^3$.

Таблица 3.2

**Значения поправочного коэффициента на кондиционный размер куска $k_d$**

| Допустимый размер крупных кусков, мм | 250 | 500 | 750 | 1000 | 1250 | 1500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_d$ | 1,3 | 1,0 | 0,85 | 0,75 | 0,7 | 0,65 |

***Диаметр заряда*** определяется диаметром рабочего органа буровой машины (долота, коронки или резца) $d_{скв}$ с учетом характеристик разрабатываемых пород:

$$d_{зар} = k_р d_{скв}, \quad (3.3)$$

где $k_р$ = 1,06 – ($f$ – 2) 0,003 – коэффициент расширения скважин.

**Удельная вместимость 1 м скважины:**

$$P = 0{,}785 \cdot d_{зар}^2 \cdot \Delta, \quad (3.4)$$

где Δ, кг/м$^3$ - плотность заряда в скважине.

***Линия сопротивления по подошве*** (ЛСПП) для одиночной скважины:

$$W_п = 0{,}9 \cdot \sqrt{\frac{P}{q_р}}, \quad (3.5)$$

В соответствии с правилами безопасности при бурении первого ряда скважин станок располагается перпендикулярно верхней бровке уступа, за призмой обрушения, но не ближе 2 м от верхней бровки уступа, поэтому минимально допустимая по условиям безопасного расположения бурового станка линия сопротивления по подошве ($W_{min}$) для вертикальных скважин рассчитывается из соотношения

$$W_{min} = H_у \operatorname{ctg}\alpha + Z, \quad (3.6)$$

где α – угол откоса рабочего уступа, град;

$Z$ – ширина призмы обрушения, $Z \geq 2$ м.

Величина принимаемой при расчетах линии сопротивления по подошве ($W_п$) должна удовлетворять соотношению:

$$W_{min} < W_п. \quad (3.7)$$

Если значения $W_{min} > W_п$, это означает, что принятые параметры скважин и характеристики ВВ не обеспечивают проработку подошвы уступа. В этом случае следует изменить диаметр скважины, тип применяемого ВВ или перейти к наклонным скважинам.

***Глубина перебура:***

$$l_{пер} = 0{,}6 \cdot d_{скв} \cdot f + 0{,}75. \quad (3.8)$$

***Глубина скважины:***

$$l_{\text{скв}} = H_{\text{у}} + l_{\text{пер}} \tag{3.9}$$

***Масса заряда в скважине:***

$$Q = l_{\text{скв}} \cdot P \cdot k_{\text{зап}} \tag{3.10}$$

где $k_{зап}$ – коэффициент заполнения скважины, принимаемый по таблице 3.3.

Таблица 3.3

**Коэффициент заполнения скважин**

| Категория блочности | Высота уступа | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| **1** | 0,45 | 0,46 | 0,47 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,51 | 0,51 | 0,52 | 0,53 | 0,53 |
| **2** | 0,51 | 0,52 | 0,53 | 0,53 | 0,54 | 0,55 | 0,56 | 0,56 | 0,57 | 0,58 | 0,58 |
| **3** | 0,56 | 0,57 | 0,58 | 0,58 | 0,59 | 0,60 | 0,61 | 0,61 | 0,62 | 0,63 | 0,63 |
| **4** | 0,62 | 0,62 | 0,63 | 0,64 | 0,64 | 0,65 | 0,66 | 0,66 | 0,67 | 0,67 | 0,68 |
| **5** | 0,67 | 0,68 | 0,68 | 0,69 | 0,69 | 0,70 | 0,71 | 0,71 | 0,71 | 0,72 | 0,72 |

***Длина заряда:***

$$l_{\text{зар}} = l_{\text{скв}} \cdot k_{\text{зап}} \tag{3.11}$$

***Длина забойки:***

$$l_{\text{заб}} = l_{\text{скв}} - l_{\text{зар}} \tag{3.12}$$

***Расстояние между скважинами:***

При квадратной сетке расположения, расстояния между рядами скважин ($b$) равно расстоянию между скважинами в ряду ($a$), тогда:

$$S_{a \cdot b} = \frac{Q}{H_{\text{у}} \cdot q_{\text{р}}} \tag{3.13}$$

$$S_{a \cdot b} = a \cdot b$$

$$a = b$$

$$a = \sqrt{S_{a \cdot b}}$$

Окончательные расстояния между рядами скважин и между скважинами в ряду округляются с шагом 0,5 м.

***Задание:*** рассчитать параметры буровзрывных работ при скважинной отбойке в условиях открытой разработки месторождений полезных ископаемых.

## Практико-ориентированное задание №4

Расчёт безопасных расстояний по разлету кусков породы при взрывании скважинных зарядов

**Цель работы** – овладение методикой расчета безопасных расстояний по разлету кусков породы при взрывании скважинных зарядов.

При определении зон, опасных по разлету отдельных кусков породы при взрывании скважинных зарядов на земной поверхности, следует выделять и отдельно рассчитывать безопасные расстояния для людей зданий и сооружений, машин и механизмов.

При взрывании скважинных зарядов рыхления (дробления) расстояние опасное для людей, рассчитывается по формуле:

$$r_{разл} = 1250 \cdot h_З \cdot \sqrt{\frac{f}{1 + h_{заб}} \cdot \frac{d}{a}} \qquad (4.1)$$

где $h_з$ – коэффициент заполнения скважины взрывчатым веществом, определяемый по формуле

$$h_З = \frac{l_{зар}}{l_c}, \qquad (4.2)$$

$l_{зар}$ – длина заряда ВВ, м;

$l_{зар}$ – глубина скважины, м;

$f$ – коэффициент крепости горных пород;

$h_з$ – коэффициент заполнения скважины забойкой:

$$h_З = \frac{l_{заб}}{l_н}, \qquad (4.3)$$

$l_{зар}$ – длина забойки, м;

$l_н$ – длина свободной от заряда верхней части скважины, м;

$d$ – диаметр взрываемой скважины, м;

$a$ – расстояние между скважинами в ряду или между рядами, м.

Расчётные значения радиусов разлета осколков округляются в большую сторону до значения, кратного 50 м. Окончательно принимаемое безопасное расстояние не должно быть меньше указанных в табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Минимально допустимые безопасные расстояния для людей при взрывных работах**

| № п/п | Методы взрывных работ | Минимально допустимые радиусы опасных зон, м |
|---|---|---|
| 1. | Наружных зарядов, в том числе кумулятивных | 300 (по проекту) |
| 2. | Шпуровых зарядов | 200 |
| 3. | Котловых шпуров | 200 |
| 4. | Малокамерных зарядов (рукавов) | 200* |
| 5. | Скважинных зарядов | Не менее 200** |
| 6. | Котловых скважин | Не менее 300 |
| 7. | Камерных зарядов | Не менее 300 |

* - при взрывании на косогорах в направлении вниз по склону величина радиуса опасной зоны должна приниматься не менее 300 м.

** - радиус опасной зоны указан для взрывания зарядов с забойкой.

**Практико-ориентированное задание №5**

Составление паспорта буровзрывных работ на проведение горизонтальной горной выработки.

**Цель работы** – овладение методикой расчета параметров буровзрывных работ (БВР) при проведении подземных горных выработок и составления паспорта БВР.

***Краткая теория***

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип вруба, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

### *5.1. Общие положения*

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и

расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

## *5.2. Определение параметров буровзрывных работ*

### *5.2.1. Выбор взрывчатых материалов*

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Правилами безопасности при взрывных работах» [6] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [7] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 5.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 5.1

**Рекомендуемые ВВ**

| Условия взрывных работ | Условия размещения зарядов | Коэффициент крепости пород $f$ | Тип ВВ | Способ заряжания |
|---|---|---|---|---|
| Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли | Сухие шпуры | до 12 | Гранулит М<br>Граммонит 79/21<br>Гранулит АС-4В<br>Гранулит-игданит | Механизированный |
| | | | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Гранулит АС-8В | Механизированный |
| | | | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | Ручной |
| | Обводнённые шпуры | до 12 | Аммонит № 6ЖВ | Ручной |
| | | более 12 | Аммонал М-10<br>Детонит М<br>Аммонал скальный № 1 | |
| Выработки, опасные по взрыву газа и пыли | Сухие и обводнённые шпуры | Для взрывания по породе | Аммонит АП–5ЖВ | Ручной |
| | | Для взрывания по углю с учетом степени опасности | IV кл. Аммонит Т-19<br>Аммонит ПЖВ-20<br>V кл. Угленит Э-6<br>VI кл. Угленит 12ЦБ | |
| | Для водораспыления | Открытый заряд | Ионит | |

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

**Характеристики ВВ**

| Наименование ВВ | Идеальная работа взрыва, кДж/кг | Плотность в патронах или насыпная, кг/м$^3$ | Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг | Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м$^3$ | Расстояние передачи детонации между патронами, см | | Диаметр патронов, мм | Масса патрона, кг | Длина патрона, мм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Сухие | После выдержки в воде | | | |
| Аммонит № 6ЖВ | 3561 | 1000-1100 | 3917 | 1,0 | 5-9 | 3-6 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал М-10 | 4410 | 950-1100 | 4520 | 1,15 | 4 | 3 | 32 | 0,2 | 250 |
| Детонит М | 4316 | 1000-1200 | 4963 | 1,27 | 8-18 | 5-15 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонал скальный № 1 | 4420 | 1000-1100 | 4641 | 1,18 | 8-14 | 5-10 | 32<br>36 | 0,2<br>0,25 | 250<br>250 |
| Аммонит АП-5ЖВ | 2991 | 1000-1150 | 3215 | 0,82 | 5-10 | 2-7 | 36 | 0,3 | 250 |
| Аммонит Т-19 | 2564 | 1000-1200 | 2820 | 0,72 | 7-12 | 4-8 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит Э-6 | 1946 | 1100-1250 | 2289 | 0,58 | 5-12 | 3-10 | 36 | 0,3 | 240 |
| Угленит 12 ЦБ | 1770 | 1200-1350 | 2256 | 0,58 | 4 | 2 | 36 | 0,3 | 240 |
| Ионит | 1482 | 1000-1200 | 1704 | 0,44 | – | – | 36 | 0,3 | 240 |
| Гранулит М | 3163 | 780-820 (1000-1150)* | 3384 | 0,86 | | | | | |
| Гранулит АС-4В | 3645 | 800-850 (1100-1200)* | 4192 | 1,07 | | | | | |
| Гранулит АС-8В | 3997 | 800-850 (1100-1200)* | 4597 | 1,17 | | | | | |
| Гранулит-игданит | 3150 | 800-850 (1100-1200)* | 3760 | 0,85 | | | | | |

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 5.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 5.3

**Электродетонаторы для шахт и рудников**

| Тип электродетонаторов | Кол-во серий | Интервалы замедления, мс (с) | Безопасный ток, А | Гарантийный ток, А | Сопротивление, Ом | Примечание |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ЭД-8Ж(Э) | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности |
| ЭД-3-Н | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭД-1-8-Т | 1 | 0 | 1,0 | 5,0 | 0,5-0,75 | Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам |
| ЭД-3-Т | 36 | 20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с | | | | |
| ЭДКЗ-ОП | 1 | 0 | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности |
| ЭДКЗ-П | 5 | 25, 50, 75, 100, 125 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭДКЗ-ПМ | 7 | 15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |
| ЭД-КЗ-ПКМ | 9 | 4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс | 0,2 | 1,0 | 1,8-3,6 | |

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 3.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 5.4

**Характеристики систем неэлектрического инициирования**

| Устройство | Интервал замедления, мс | Назначение |
|---|---|---|
| СИНВ-Ш | 0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | Изготовление патронов-боевиков |
| ДБИ3 | 0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000 | |

*Примечание.* Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

### 5.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 5.5.

Таблица 5.5

**Тип вруба и глубина шпуров**

| Тип буровой техники | Сечение выработки, м$^2$ | |
|---|---|---|
| | менее 6 | более 6 |
| Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла | Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м | Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м |
| Установки механизированного бурения | – | Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины |

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки ($B$) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 $B$, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м$^2$) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 5.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

### 5.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

#### 5.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 5.6.

Таблица 5.6

**Параметры вертикального клинового вруба**

| Группа крепости пород по СНиП | Коэффициент крепости пород $f$ | Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм | Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$) | | Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | до 12 | более 12 | |
| IV-V | 1-6 | 500 | 4 | 4-6 | 75-70 |
| VI | 6-8 | 450 | 4-6 | 6-8 | 68 |
| VII | 8-10 | 400 | 6-8 | 8-10 | 65 |
| VIII | 10-13 | 350 | 8-10 | 10-12 | 63 |
| IX | 13-16 | 300 | 10-12 | 12-14 | 60 |
| X | 16-18 | 300 | 10-12 | 12-14 | 58 |
| XI | 20 | 250 | 10-12 | 12-14 | 55 |

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (5.1)$$

где $e$ – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 5.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

$d$ – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 5.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 5.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 5.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (5.2)$$

где $B$ – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 3.1).

Таблица 5.7

**Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м**

| Ширина выработки, м | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 2,0 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 |
| 2,5 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 |
| 3,0 | 2,1 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |
| 3,5 | 2,4 | 2,2 | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 4,0 | 2,8 | 2,6 | 2,2 | 2,1 | 1,9 | 1,8 | 1,7 |
| 4,5 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,0 | 1,9 |
| 5,0 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,1 |

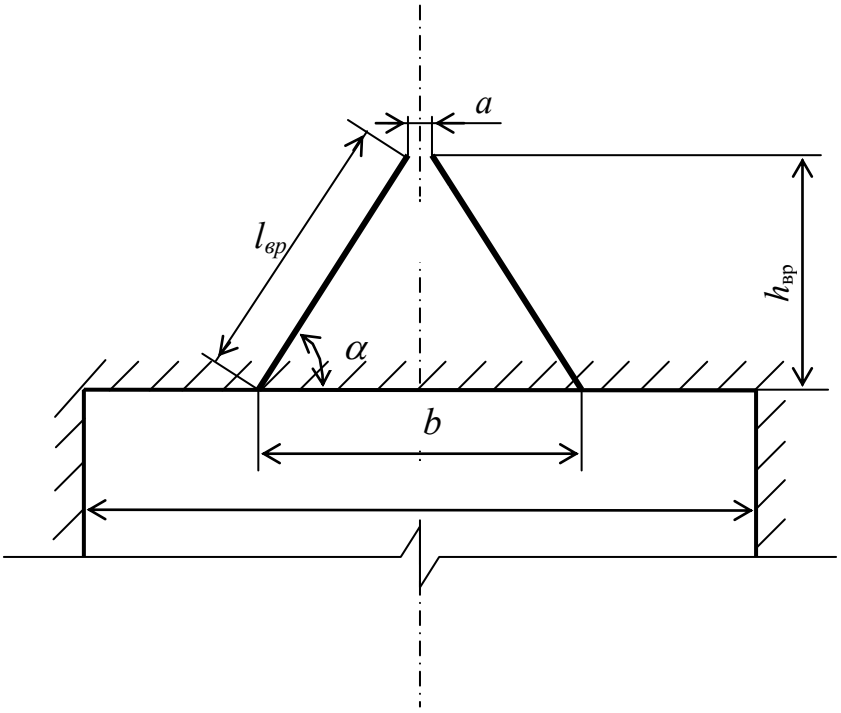



Рис. 5.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0{,}1 \div 0{,}2), \tag{5.3}$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \tag{5.4}$$

где $\alpha$ – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \tag{5.5}$$

где $a$ – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород $a$ = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров $\alpha$.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 3.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

### 5.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 5.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический  симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние $W_1$) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 5.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние $W_1$, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (5.1).

Пробивные расстояния $W_1$ учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе ($W_1$, $W_2$, $W_3$ и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

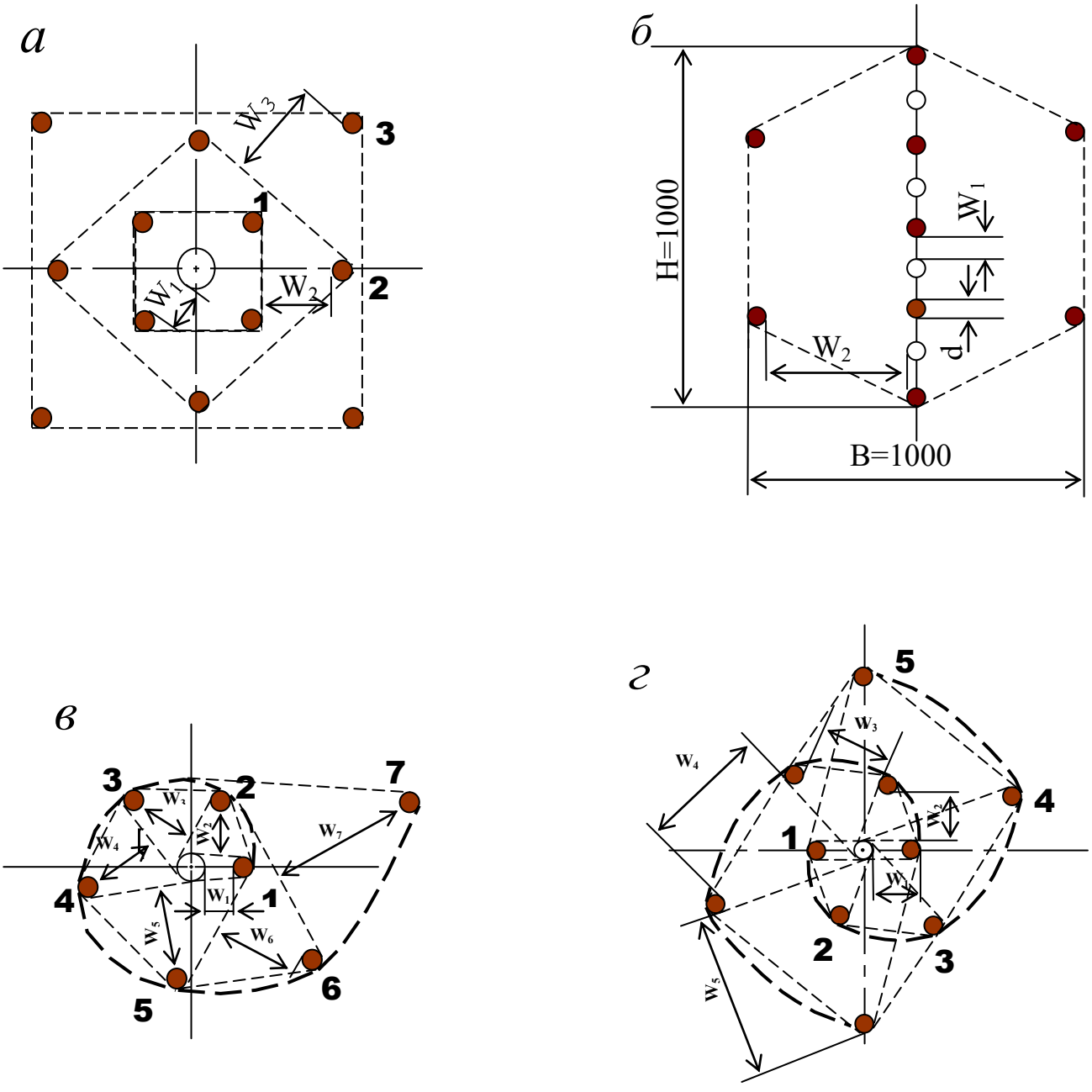



Рис. 5.2. Конструкции прямых врубов:
*а* – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
*г* – двойной спиральный

Таблица 5.8

**Пробивные расстояния $W_1$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 115 | 100 | 90 | 80 | 60 | 60 | 55 |
| 51 | 125 | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | 65 |
| 56 | 150 | 130 | 110 | 95 | 90 | 85 | 75 |
| 75 | 170 | 150 | 130 | 105 | 100 | 95 | 85 |
| 105 | 190 | 170 | 150 | 120 | 110 | 105 | 95 |
| 125 | 230 | 200 | 170 | 140 | 120 | 110 | 100 |

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 3.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (5.6)$$

где $W_1$ – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 5.7);

$D_x$ – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

$d$ – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния ($W_2$, $W_3$ и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 5.2) в масштабе 1:5.

Таблица 5.9

**Пробивные расстояния $W_2$, мм**

| Диаметр холостого шпура или скважины $D_x$, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 170 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 | 110 |
| 51 | 180 | 160 | 150 | 140 | 130 | 120 | 115 |
| 56 | 210 | 180 | 170 | 160 | 150 | 140 | 130 |
| 75 | 260 | 210 | 200 | 185 | 170 | 150 | 140 |
| 105 | 300 | 260 | 240 | 215 | 200 | 185 | 175 |
| 125 | 340 | 300 | 270 | 250 | 230 | 220 | 215 |

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 5.10.

Таблица 5.10

**Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм**

| Диаметр шпуров, мм | Коэффициент крепости пород $f$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2-5 | 6-7 | 8-9 | 10-12 | 13-15 | 16-17 | 18-20 |
| 42 | 1000-900 | 800 | 700 | 650 | 600 | 550 | 500 |

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м$^2$ необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 5.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{5.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{5.8}$$

где $H$ – высота вруба, мм;

$W_1$ – пробивное расстояние, мм;

$d$ – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 5.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние $W_2$ для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 5.11.

В породах с $f$ >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 3.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 5.11

**Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами**

| Условия взрывания | Класса ВВ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | II | III-IV | V | VI |
| По углю | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,4 |
| По породе: | | | | |
| при $f$ <7 | 0,5 | 0,45 | 0,3 | 0,25 |
| при $f$ >10 | 0,4 | 0,3 | – | – |

В породах с коэффициентом крепости $f$ < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 5.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

### 5.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (5.9)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, кг/м$^3$;

$f$ – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (5.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

$f_1$ – коэффициент структуры породы;

$v$ – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

$e$ – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (5.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

$\rho$, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м$^3$.

Необходимые данные для расчета величины $e$ принимают из табл. 5.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (5.10) и в табл. 5.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы $f_1$ принимается из табл. 5.12.

Таблица 5.12

**Коэффициент структуры породы $f_1$**

| Характеристика пород | Категория пород | Коэффициент структуры породы $f_1$ |
|---|---|---|
| Монолитные, крепкие, вязкие, упругие | I | 1,6 |
| Трещиноватые, крепкие | II | 1,2-1,4 |
| Массивно-хрупкие | III | 1,1 |
| Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов | IV | 0,8-0,9 |

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (5.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м$^2$.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах $v$ = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

**При щелевом врубе на полную высоту выработки** для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (5.9) следует принимать коэффициент зажима породы $v$ = 1,4.

**Прямые (дробящие) врубы** требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (5.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы $v$ = 1,1–1,4.

### 5.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 5.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм. При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

### 5.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (5.12)$$

где $q$ – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м$^3$;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$\gamma$ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (5.13)$$

где $d$ – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 5.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м$^3$.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с $f$ = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (5.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 5.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт.

Таблица 5.13

**Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок**

| Коэффициент крепости пород $f$ | Сечение выработки вчерне, м$^2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 2-4 | 8-11 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 35-42 |
| 5-7 | 12-16 | 17-21 | 22-27 | 28-33 | 34-38 | 39-42 | 43-46 |
| 8-10 | 16-20 | 21-26 | 27-32 | 33-37 | 38-42 | 42-46 | 47-50 |
| 12-14 | 20-24 | 26-30 | 32-36 | 37-42 | 42-46 | 46-50 | 50-54 |
| более 14 | 26-28 | 32-36 | 36-40 | 44-48 | 48-52 | 52-54 | 56-60 |

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{вч} - S_{вр}}{N - N_{вр}}}, \qquad (5.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м$^2$;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м$^2$;

$N$, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87$^o$ к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

**При применении прямых врубов** количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \qquad (5.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м$^2$.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

### 3.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \qquad (5.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \qquad (3.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot (S_{вч} – S_{вр}) \cdot l_{шп}, \qquad (5.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \qquad (5.19)$$

где $d$ – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

$\rho$ – плотность ВВ в заряде, кг/м$^3$;

$\alpha$ – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (5.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (5.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (5.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (5.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (5.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\,, \quad (5.25)$$

где η – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (5.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м$^2$, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 5.14.

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м$^3$ взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (5.27)$$

Таблица 5.14

**Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом**

| Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м$^2$ | Коэффициент крепости пород $f$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1–2 | 2–9 | 10–20 |
| до 8 | 5* | 10 | 12 |
| от 8 до 15 | 4 | 8 | 10 |
| более 15 | 3 | 5 | 7 |

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\, \eta). \quad (5.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м$^3$ взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\, l_{шп}\, \eta). \quad (5.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (5.30)$$

где $B$ – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

## 5.3 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взры-

вание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 5.15).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (5.31)$$

где $R$ – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

$l$ – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

$S$ – сечение проводов, м$^2$.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 5.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 5.15

**Взрывные приборы и машинки**

| Наименование прибора (исполнение) | Напряжение, В | Масса, кг | Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом | Назначение и область применения |
|---|---|---|---|---|
| Конденсаторный взрывной прибор<br>КВП-1/100М (РВ)<br>КВП-2/200М (РН) | <br>600<br>1700 | <br>2<br>2,5 | <br>320<br>1700 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли |
| Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ) | 610 | 2,7 | 320 | |
| Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН) | 1600 | 3,0 | 200 | Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли |

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.32}$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.33}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.34}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.35}$$

где $I$ – сила тока в электровзрывной сети, А;

$E$ – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

$R$ – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

$n$ – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

$m$ – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

$i$ – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

$r$ – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{5.36}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 3.16 или рассчитывается по формуле (5.31));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 5.16

**Характеристики проводов для электровзрывания**

| Обозначение | Назначение | Диаметр жилы, мм | Площадь сечения, мм$^2$ | Сопротивление 1 м провода, Ом/м |
|---|---|---|---|---|
| ВП-05 | соединительные | 0,5 | 0,196 | 0,090 |
| ВП-08 | магистральные | 0,8 | 0,502 | 0,034 |
| ВП-07х2 | магистральные | 0,7х2 | 0,769 | 0,024 |

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{\text{гар}}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + R}, \tag{5.37}$$

$$m = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + r}. \tag{5.38}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

## 5.4 ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 5.17

**Область применения бурильных машин и установочных приспособлений**

| Коэффициент крепости пород | Тип бурильных машин и установочных приспособлений |
|---|---|
| 1,5–3 | Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках |
| 4–6 | Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 7–9 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах |
| 10–20 | Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах |

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с $f$<8.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переустановку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с $f$ < 8; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с $f$ = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с $f$ = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с $f$ = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 5.2 – 5.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м$^2$ площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м$^2$ площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 5.18

**Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | Тип бурильной установки | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | УБШ-204 (БУЭ-1М) | УБШ-214А | УБШ-308У (1СБУ-2) | УБШ-303 (1БУР-2) | УБШ-254 | УБШ-332Д |
| Коэффициент крепости пород $f$ | 4-8 | 4-16 | 8-14 | 4-16 | 8-14 | 8-14 |
| Диаметр шпуров, мм | 42 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 | 42-52 |
| Длина шпуров, м | 2,75 | 2,75 | 2,8 | 2,8 | 2,4 | 3,0 |

| Зона бурения, м$^2$ | | 6-12 | 4,2-12 | до 20 | до 20 | до 12 | 8-22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Бурильная машина | тип | БУЭ | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | М2 (БГА-2М) | «Норит-1» (гидравл.) | М2 (БГА-2М) |
| | кол-во | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | рельс. | рельс. | гусен. | рельс. | гусен. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: длина | | 8,2 | 6,0 | 7,8 | 7,1 | 7,2 | 11,0 |
| ширина | | 1,3 | 1,0 | 1,6 | 1,15 | 1,4 | 1,75 |
| высота | | 0,9 | 1,5 | 1,7 | 1,65 | 1,8 | 2,3 |
| Масса, т | | 5,4 | 4 | 8,6 | 5 | 7,2 | 12 |

Таблица 5.19

**Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок**

| Характеристики | | Тип бурильной установки | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Minimatic 205-40 | Mini 206-60 | Paramatic 305-60 | Rocket Bomer 104S | Rocket Bomer 282S |
| Коэффициент крепости пород $f$ | | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 | 8-20 |
| Диаметр шпуров, мм | | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 | 32-50 |
| Длина шпуров, м | | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4,0 | 4,0 |
| Высота обуривания, м | | 6,0 | 6,4 | 7,1 | 4,7 | 6,3 |
| Ширина обуривания, м | | 8,8 | 9,8 | 10,4 | 4,7 | 8,7 |
| Зона бурения, м$^2$ | | 8-49 | 8-60 | 12-68 | до 20 | до 45 |
| Бурильная машина | тип | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | HL 510S-45 гидравл. | COP 1838 ME пневмат. | COP 1838 ME пневмат. |
| | кол-во | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| Тип платформы | | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. | пневм. |
| Размеры (м) в транспортном положении: длина | | 12,3 | 12,7 | 5,3 | 9,8 | 12,1 |
| ширина | | 1,98 | 2,24 | 2,5 | 2,0 | 2,0 |
| высота | | 2,35 | 2,35 | 2,8 | 2,6 | 3,1 |
| Масса, т | | 19 | 20 | 36 | 14 | 18 |

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 м$^2$.

## 5.5. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

*Пример оформления графической части:*

**Паспорт**
**буровзрывных работ на проведение**

_____
(*наименование выработки*)

**1. Характеристика выработки**

1.1. Форма сечения выработки _____
1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м$^2$ _____
1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____
- ширина, м _____
1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

**2. Характеристика пород**

2.1. Наименование пород _____
2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____
2.3. Трещиноватость пород _____
2.4. Обводнённость пород _____

**3. Исходные данные**

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____
3.2. Способ взрывания _____
3.3. Диаметры - шпуров, мм _____
- патронов, мм _____
3.4. Тип вруба _____
3.5. Материал забойки _____
3.6. Схема соединения электродетонаторов _____
3.7. Источник электрического тока _____

**4. Расчётные данные по шпурам**

| №№ шпуров | Наименование шпуров по назначению | Глубина шпуров, м | Угол наклона шпуров, град. | Расстояние между шпурами, м | Величина заряда в шпуре, кг | Длина заряда, м | Длина забойки в шпуре, м | Очередность взрывания, интервал замедления, мс | Примечания |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | |

**5. Схема расположения шпуров**

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

**6. Конструкции зарядов**

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

## 7. Основные показатели буровзрывных работ

| № п/п | Показатели | Единица измерения | Количество |
|---|---|---|---|
| 1 | Коэффициент использования шпуров | - | |
| 2 | Подвигание забоя за взрыв | - | |
| 3 | Объём горной массы за взрыв | $м^3$ | |
| 4 | Количество шпуров на цикл | шт. | |
| 5 | Количество шпурометров на цикл | м | |
| 6 | Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки | м шп./м | |
| 7 | Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы | м шп./$м^3$ | |
| 8 | Расход ВВ на цикл | кг | |
| 9 | Расход ВВ на 1 метр выработки | кг/м | |
| 10 | Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы | кг/$м^3$ | |
| 11 | Расход средств инициирования на цикл:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |
| 12 | Расход средств инициирования на 1 метр выработки:<br>ЭД<br>КД (СИНВ-Ш)<br>детонирующего шнура | <br>шт.<br>шт.<br>м | |

## 8. Меры безопасности

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

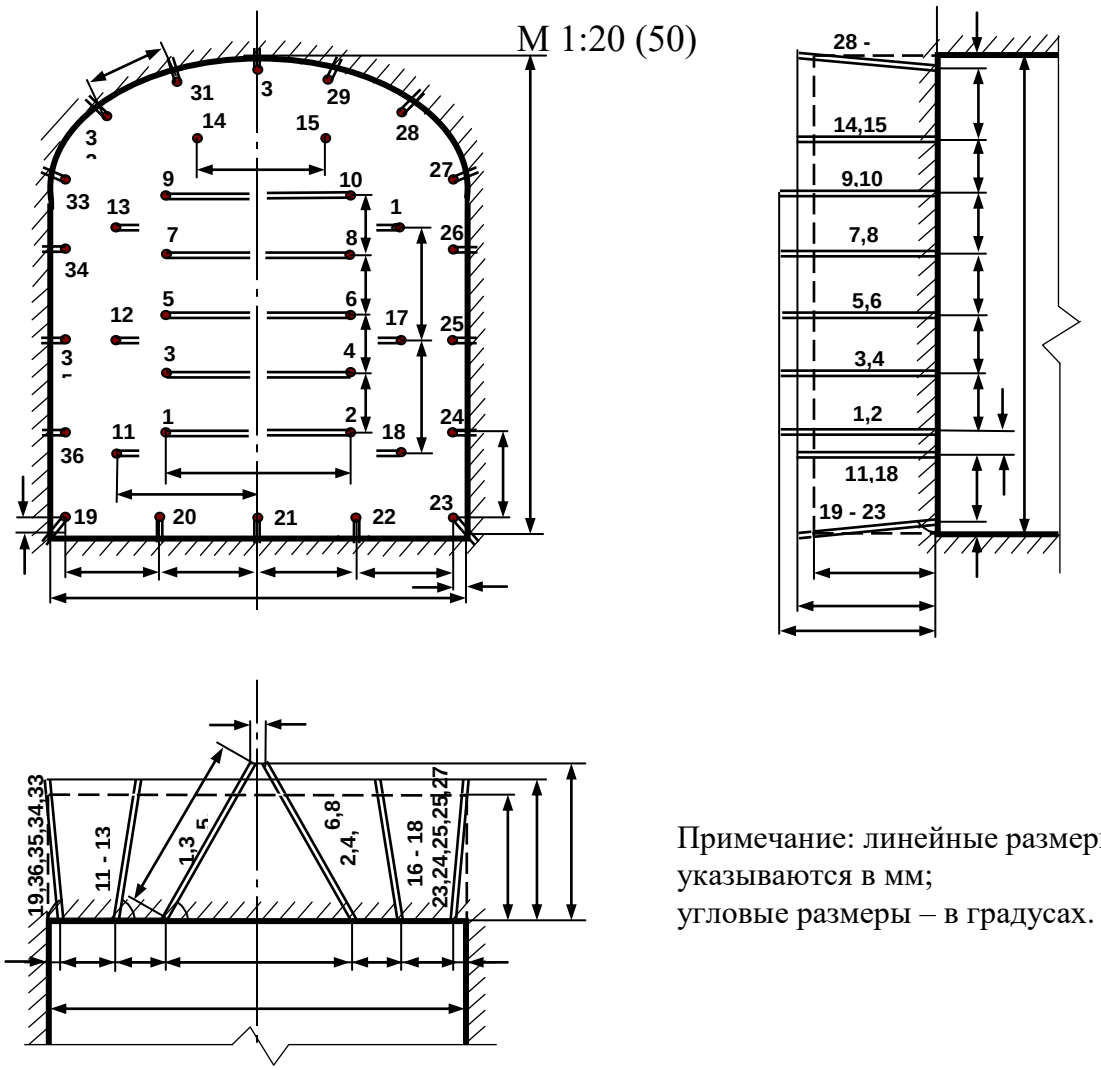
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

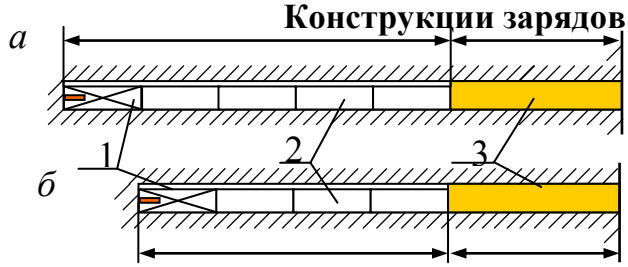
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

**Схема расположения шпуров**




Примечание: линейные размеры указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

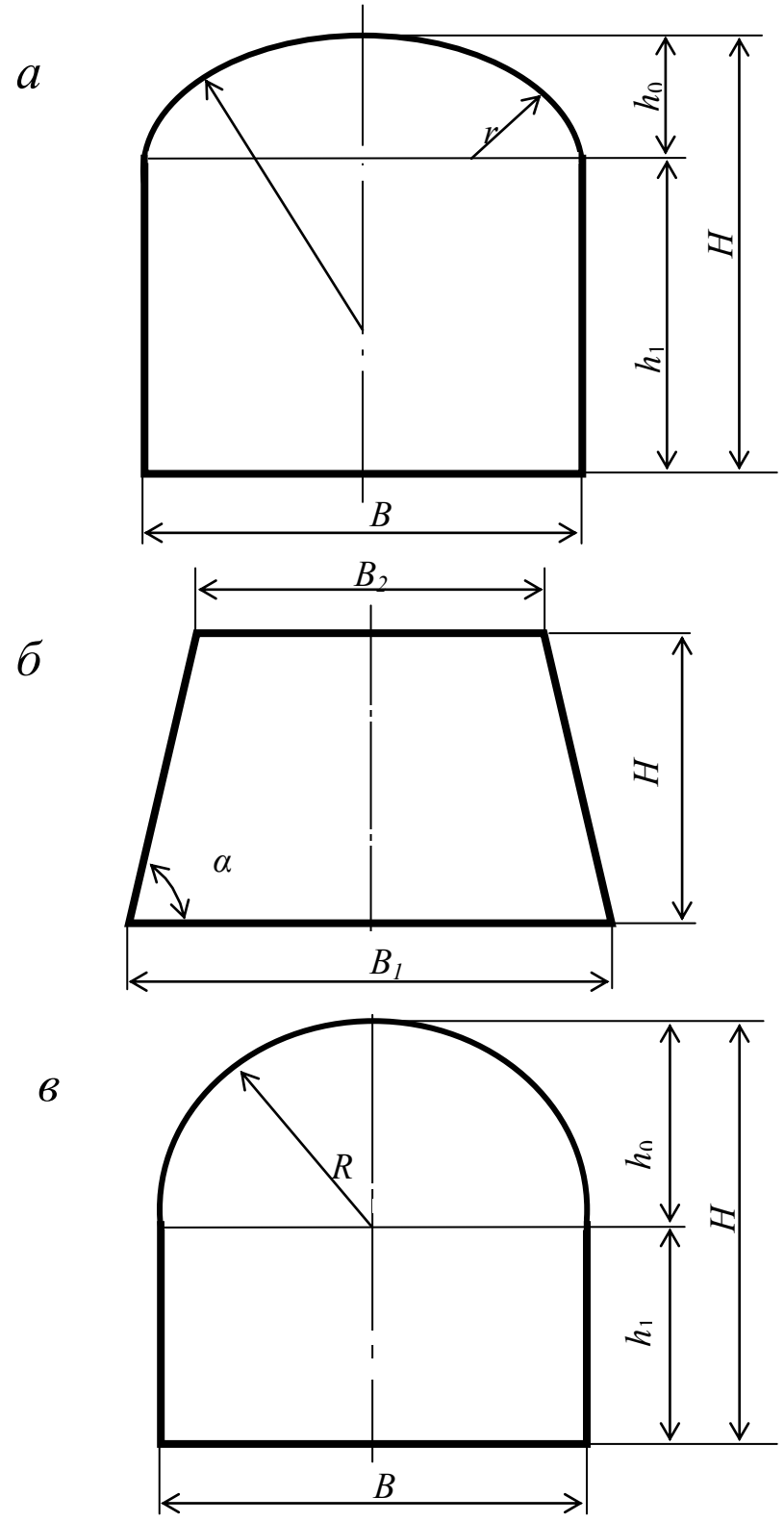
**Конструкции зарядов**




*а* – врубовые шпуры;
*б* – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

*Примечание*. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

**Формы поперечного сечения горизонтальных выработок**




$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
*а* – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
*б* – трапецевидная;
*в* – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок:

| Форма поперечного сечения выработки | Площадь поперечного сечения | Периметр |
|---|---|---|
| Сводчатая с коробовым сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$ |
| Трапециевидная | $\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$ | $B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$ |
| Арочная с полуциркульным сводом | $B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$ | $2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$ |

## Рекомендуемая литература

1. Корнилков М.В. Разрушение горных пород взрывом: конспект лекций. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. - 202 с.

2. Латышев О.Г., Петрушин А.Г., Азанов М.А. Промышленные взрывчатые материалы: учебное пособие. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. - 221 с.

3. Кутузов Б.Н. Методы ведения взрывных работ. Часть 1. Разрушение горных пород взрывом: Учебник. – М.: Изд. МГГУ, 2007. – 345 с.

4. Кутузов Б.Н. Безопасность взрывных работ в горном деле и промышленности. – М.: Горная книга, 2009. – 670 с.

5. Латышев О.Г. Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2004. – 201 с.

6. Правила безопасности при взрывных работах (утверждены приказом Ростехнадзора от 16.12.2013 г. № 605; в редакции приказа Ростехнадзора от 30.11.2017 г. № 518). – М., 2018.

7. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

8. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадиевич
Азанов Михаил Алексеевич
Прищепа Дмитрий Вячеславович

# ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «горное дело»

Редактор *Д. В. Прищепа*




МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

# ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПАРАМЕТРОВ И ПРОЦЕССОВ ОТКРЫТЫХ ГОРНЫХ РАБОТ

***Руководство***
**по выполнению практических работ**
**по дисциплине «Открытые горные работы»**
**для студентов специальности**
**21.05.04 Горное дело**

**Екатеринбург**

# Оглавление


Практическая работа № 1. ***Графическое изображение элементов горных работ*** ..... 3

*Контрольные вопросы* ..... 13

Практическая работа № 2. ***Определение объема капитальной траншеи*** ..... 14

*Контрольные вопросы* ..... 16

Практическая работа № 3. ***Определение объема, размеров, производительности и срока службы карьера, запасов полезного ископаемого и коэффициента вскрыши*** ..... 17

*Контрольные вопросы* ..... 22

Практическая работа № 4. ***Расчет заряда одиночной скважины*** ..... 23

*Контрольные вопросы* ..... 27

Практическая работа № 5. ***Расчет производительности бурового станка*** ..... 29

*Контрольные вопросы* ..... 32

Практическая работа № 6. ***Расчет производительности карьерных экскаваторов*** ..... 33

*Контрольные вопросы* ..... 36

Практическая работа № 7. ***Определение производительности карьерных автосамосвалов*** ..... 37

*Контрольные вопросы* ..... 41

Практическая работа № 8. ***Конструкция рабочего и нерабочего бортов карьера*** ..... 42

*Контрольные вопросы* ..... 46

Практическая работа № 9. ***Расчет бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте*** ..... 47

*Контрольные вопросы* ..... 51

Список использованных и рекомендуемых литературных источников ..... 51

Приложение 1 *Исходные данные к лабораторной работе № 1 "Графическое изображение элементов горных работ"* ..... 52

Приложение 2 *Исходные данные к лабораторной работе № 2 «Определение объема капитальных траншей»* ..... 58

Приложение 3 *Исходные данные к лабораторной работе № 3 «Определение объема, размеров, производи-тельности и срока службы карьера, запасов полезного ископаемого и коэффи-циента вскрыши»* ..... 59

Приложение 4 *Исходные данные к лабораторной работе № 4 «Расчет заряда одиночной скважины»* ..... 60

Приложение 5 *Значение коэффициента $k_{разб}$ в зависимости от крепости пород* ..... 61

Приложение 6 *Значение коэффициента $k_з$* ..... 61

Приложение 7 *Исходные данные к лабораторной работе № 5 «Расчет производительности бурового станка»* ..... 62

Приложение 8 *Зависимость оптимальной скорости вращения бурового става* ..... 63

Приложение 9 *Значение коэффициента k в зависимости от показателя буримости горных пород* ..... 63

Приложение 10 *Исходные данные для расчетов к лабораторной работе № 6 «Расчет производительности карьерных экскаваторов»* ..... 64

Приложение 11 *Коэффициенты разрыхления пород в ковше экскаватора и наполнения ковша (по ЕНВ)* ..... 64

Приложение 12 *Исходные данные для расчетов к лабораторной работе № 7 «Определение производитель-ности карьерных автосамосвалов»* ..... 65

Приложение 13 *Техническая характеристика карьерных автосамосвалов* ..... 66

Приложение 14 *Значение коэффициента технической готовности автосамосвалов* ..... 66

Приложение 15 *Среднетехнические скорости движения карьерных автосамосвалов* ..... 67

Приложение 16 *Исходные данные к лабораторной работе № 8 «Конструкция рабочего и нерабочего бортов карьера»* ..... 68

Приложение 17 *Исходные данные к лабораторной работе № 9 «Расчет бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте»* ..... 69

Приложение 18 *Значение коэффициентов $k_п^\circ$, $k_{зав}$ и высоты яруса $h_я$* ..... 70

Приложение 19 *Производительность бульдозеров (по данным института Гипроруда)* ..... 70

## Практическая работа № 1

# ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГОРНЫХ РАБОТ

***Цель работы*** – изучить и освоить графическое изображение элементов горных работ.

### *1.1. Задачи работы*

1.1.1. Изучить масштабы, линии и условные изображения горных машин, применяемые для горных чертежей.

1.1.2. Изучить и освоить навыки графического изображения основных элементов горных работ.

### *1.2. Порядок выполнения работы*

1.2.1. По рисункам 1.1- 1.4 ознакомиться с масштабами, линиями и условными изображениями горных машин, применяемыми для горных чертежей.

1.2.2. По учебнику [1, с. 10 - 11] и рис. 1.5 - 1.13 ознакомиться с типовыми графическими изображениями элементов горных работ.

1.1.3. В соответствии с номером варианта задания и соответствующими исходными данными в прил. 1 начертить элементы горных работ на формате А4 в масштабе, соответствующем заданным размерам.

Изображение заданных элементов горных работ вычертить в соответствии со знаниями и навыками, полученными при изучении дисциплин «Машиностроительное черчение» и «Начертательная геометрия».

Масштаб, типы линий и условные знаки
на чертежах горных работ

1. Масштаб изображений
1:5; 1:10; 1:50; 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000;
1:5000; 1:10000; 1:25000; 1:50000; 1:100000

Рис. 1.1. Масштабы изображений

| Линия | Начертание | Толщина линий в зависимости от масштаба чертежа (S) | Основное назначение |
|---|---|---|---|
| Основная |  | S=0,6 - 1,5 мм | Линии фактического и проектного контура всех горных выработок и сооружений на видах и разрезах (сечениях), верхняя бровка уступов в плане |
| Вспомогательная сплошная |  | от S/3 до S/2<br>0,2 - 0,8 мм | Линии размерные, выносные и штриховки, изолинии, линии границ горных пород на разрезах и сечениях, линии обрыва, нижняя бровка уступов в целике |
| Вспомогательная с изгибами |  | от S/3 до S/2<br>0,2 - 0,8 мм | Длинные линии обрыва на планах и разрезах |
| Вспомогательная штриховая |  | | Линии невидимых контуров горных выработок, находящихся за плоскостью проекций |
| Штрихпунктирная |  | | Осевые и центровые линии горных выработок, бровка отвалов, насыпей, навалов и уступов в разрыхленной горной массе |
| Разомкнутая |  | от S до 1,5S | Линии сечений |

Рис. 1.2. Типы линий

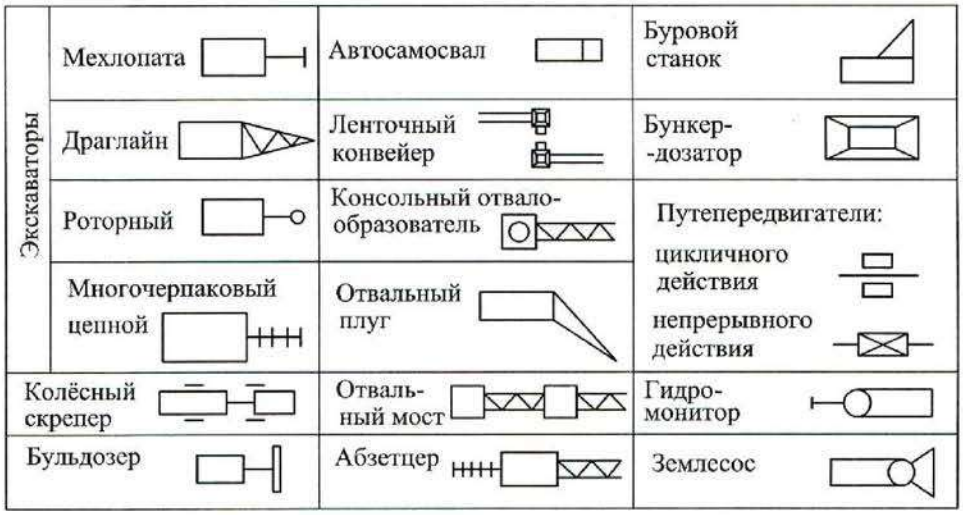
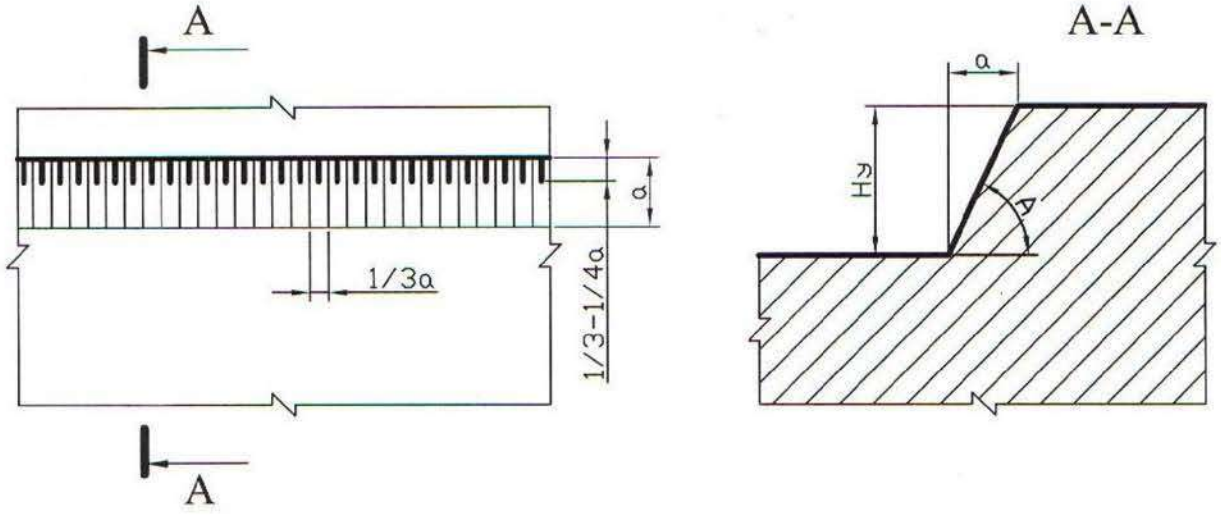



Рис. 1.3. Условные изображения горного оборудования

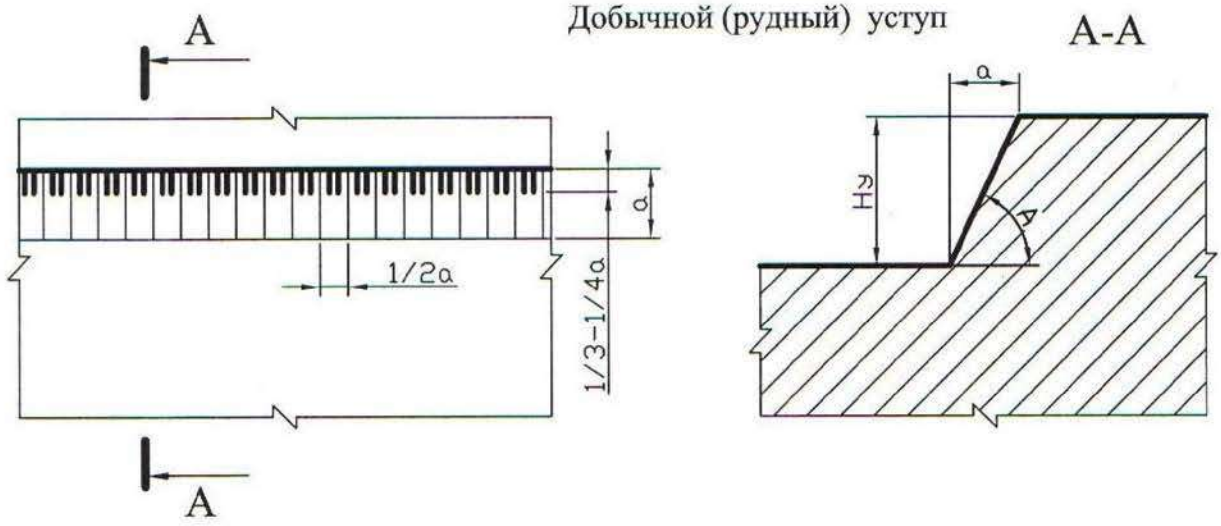
| Наименование элемента | Обозначение элемента |
|---|---|
| Горизонтальное проложение породного уступа в целике | |
| Горизонтальное проложение уступа в полезном ископаемом, пройденного в целике | |
| Горизонтальное проложение породного уступа, пройденного по разрыхленой горной массе | |
| Горизонтальное проложение уступа в полезном ископаемом, пройденного по разрыхленной горной массе | |
| Бергштрихи проводят перпендикулярно линии горизонта | |

Рис. 1.4. Условные обозначения откосов открытых горных выработок

Вскрышной уступ




Добычной (рудный) уступ




Смешанный (сложный) уступ

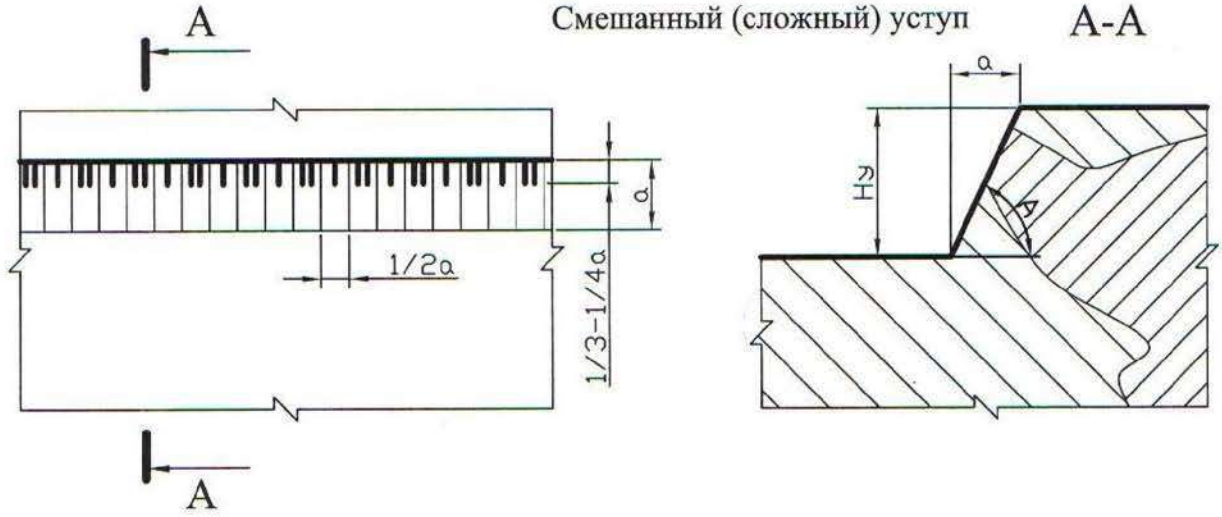



Рис. 1.5. Изображение уступов в целике

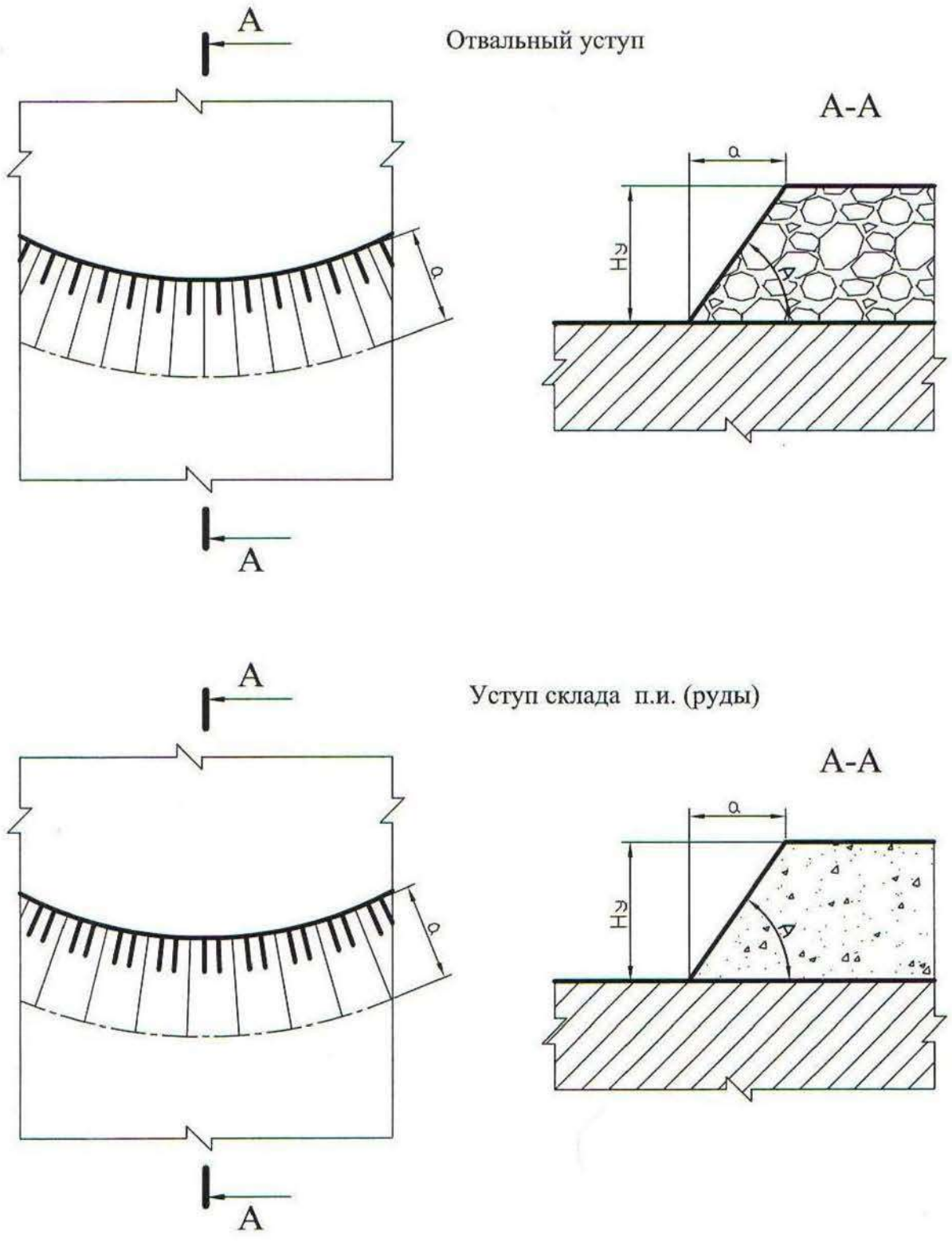



Рис. 1.6. Изображение уступов в искусственно разрыхленных горных породах

Забой мехлопаты в массиве

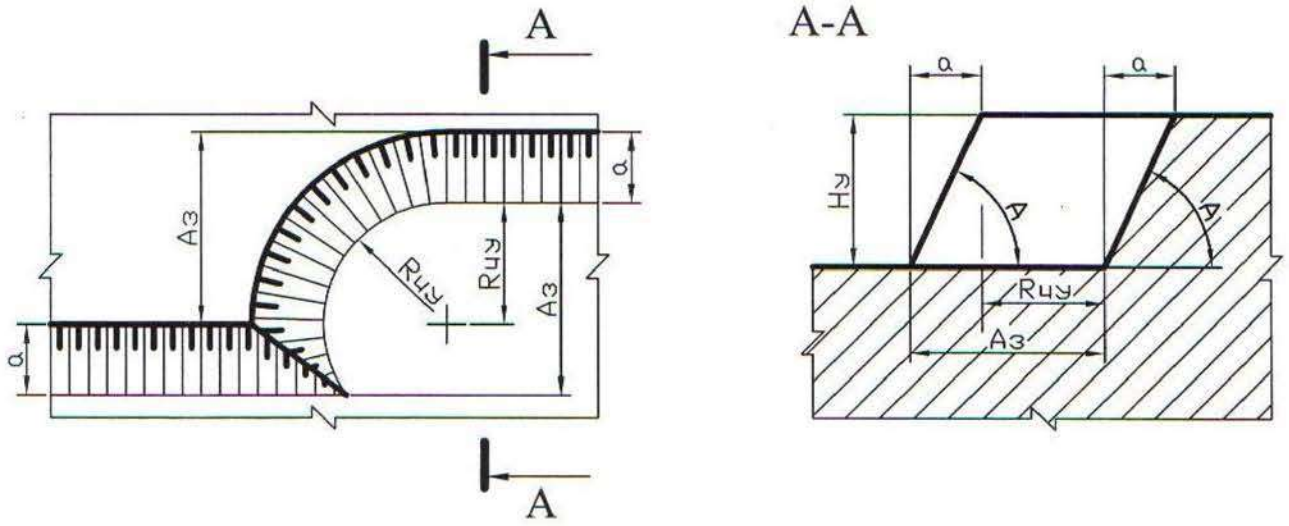



Рис. 1.7. Изображение забоев одноковшовых экскаваторов

Забой роторного экскаватора

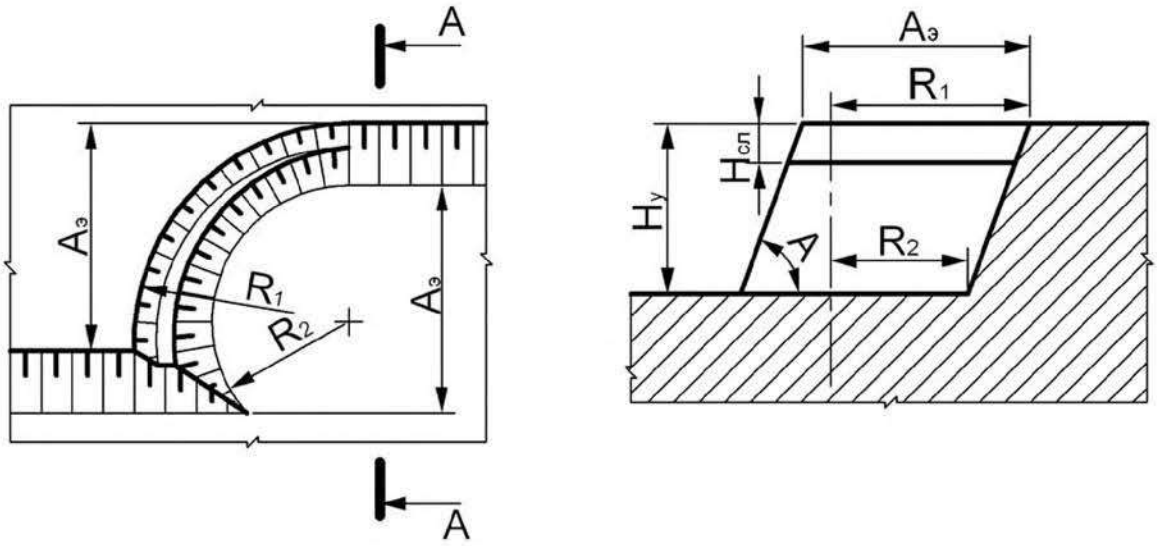



Рис. 1.8. Изображение забоя роторного экскаватора

Забой бульдозера

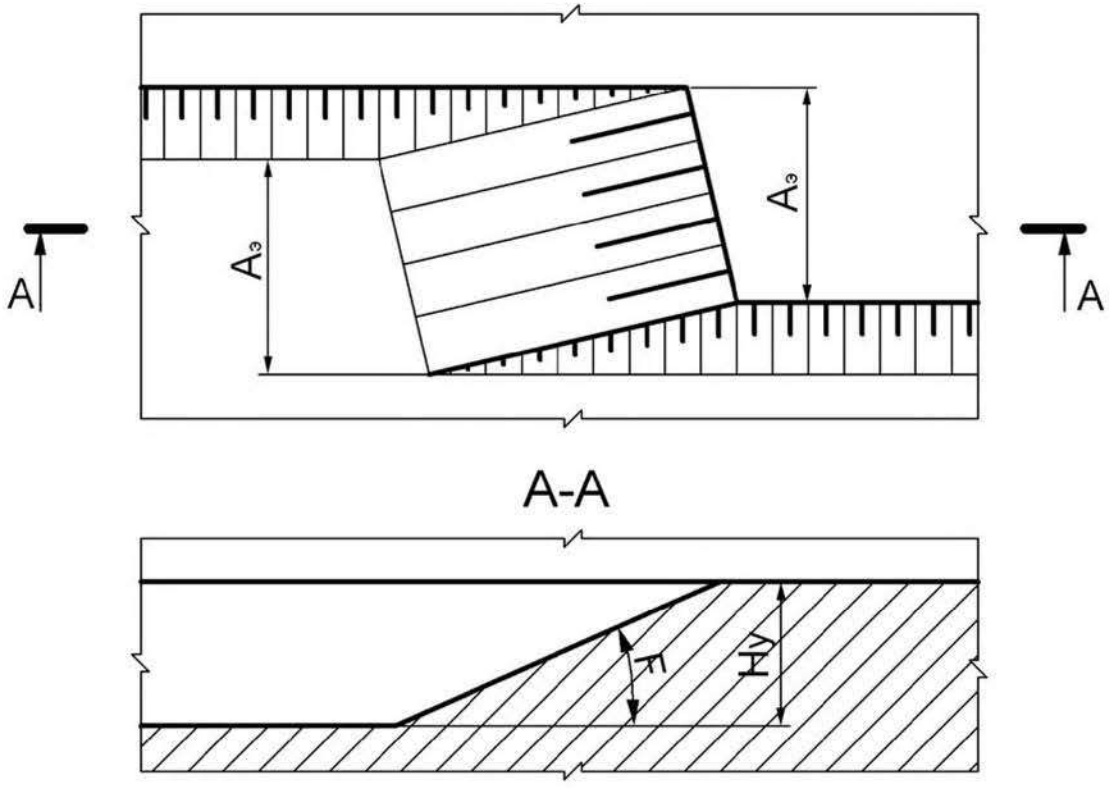



Рис. 1.9. Изображение бульдозерного забоя

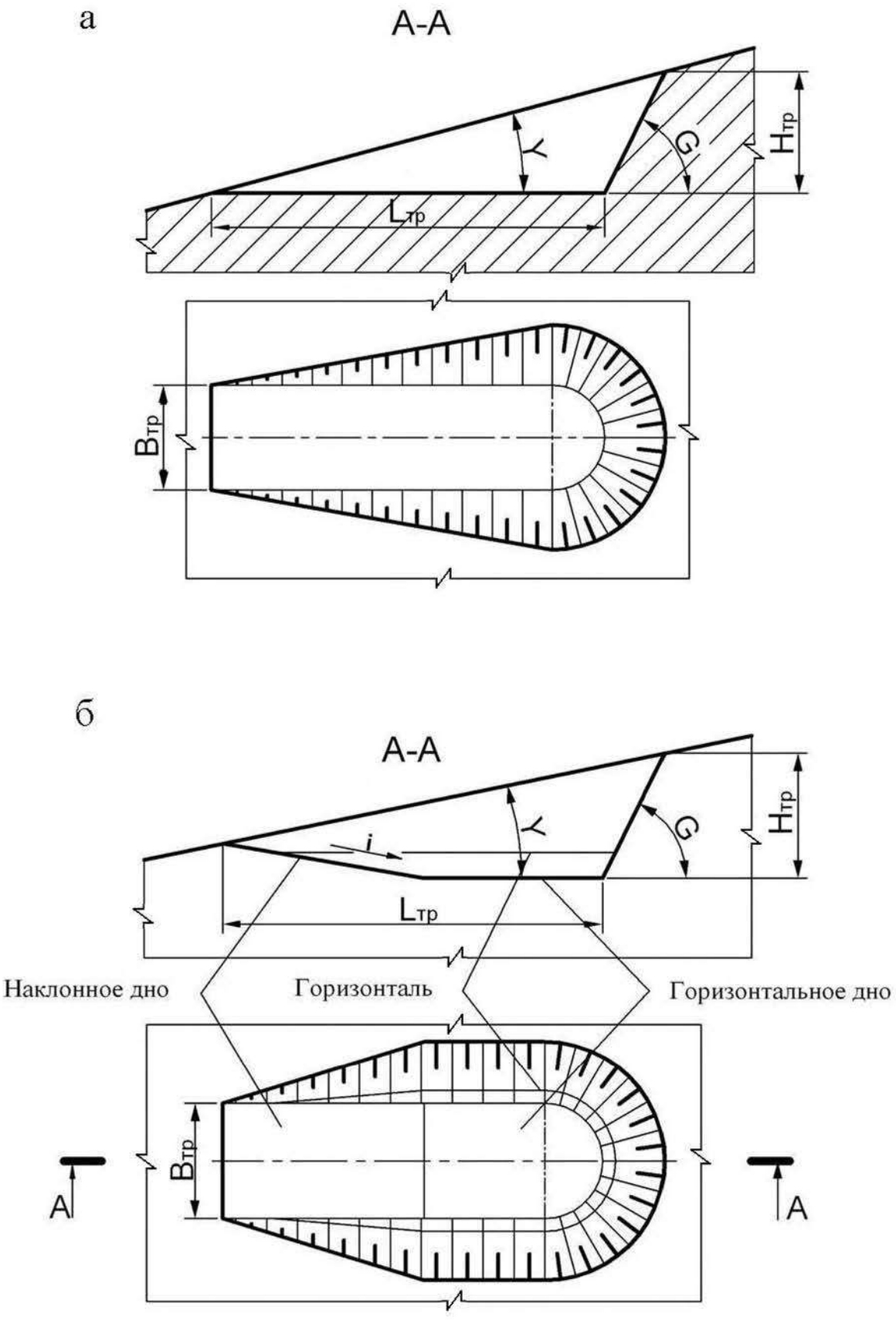



Рис. 1.10. Траншея на косогоре:
*а* – траншея с горизонтальным дном;
*б* – траншея с наклонным и горизонтальным дном

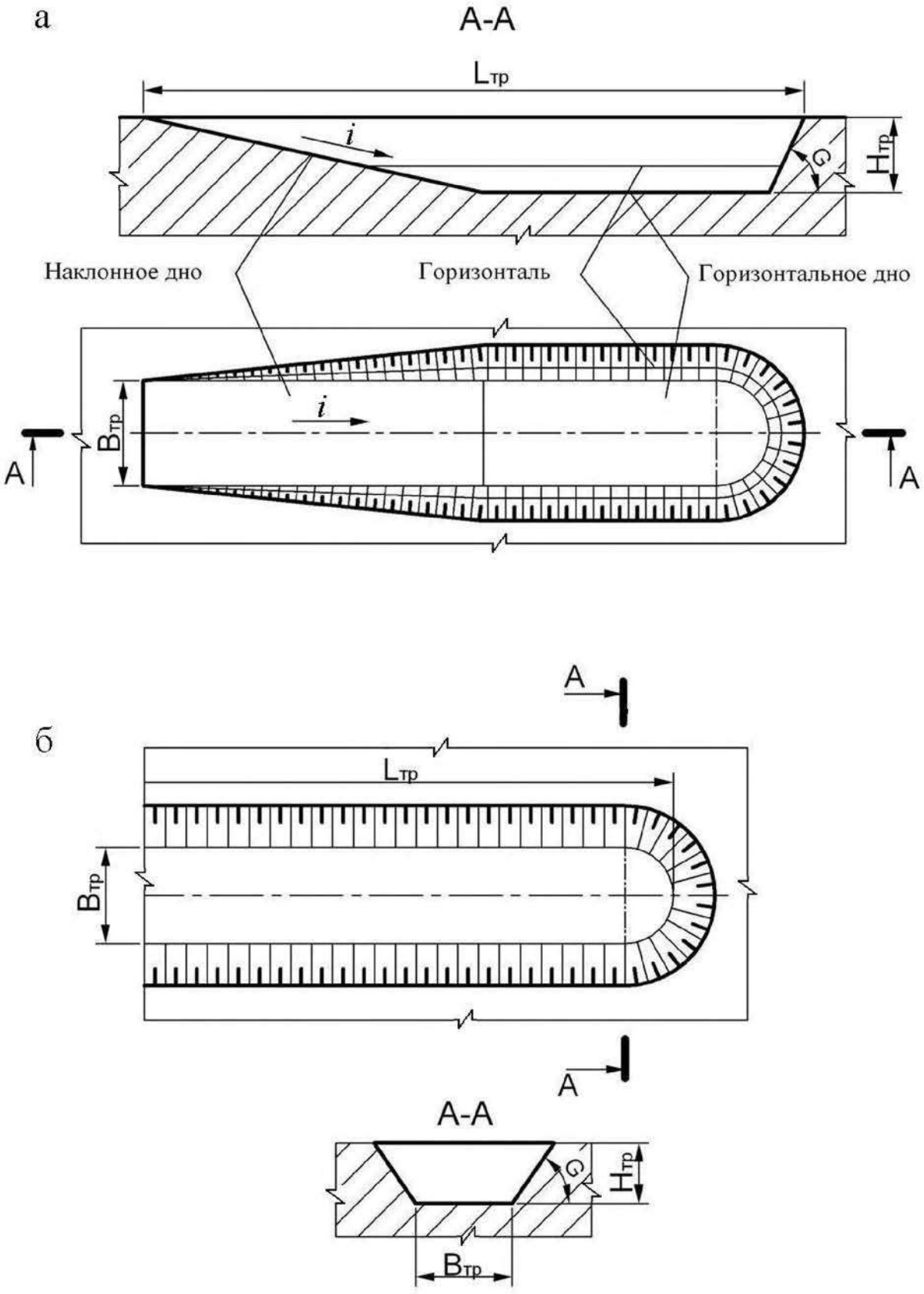
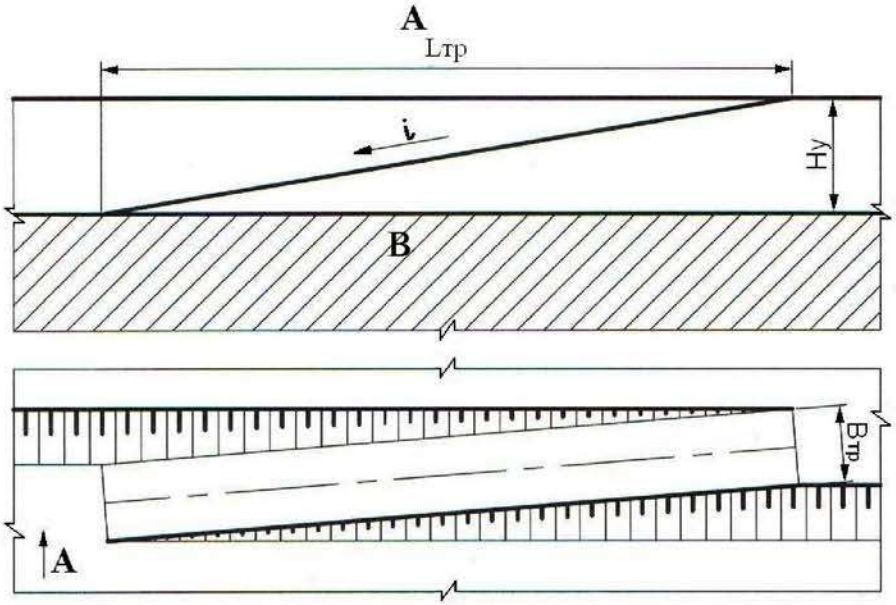
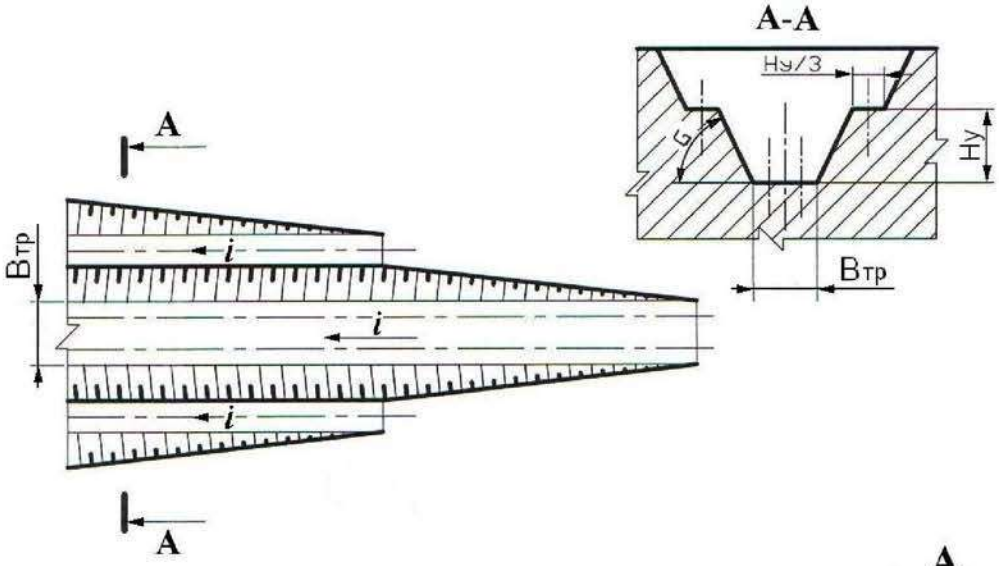



Рис. 1.11. Горизонтальные траншеи в равнинной местности:
*а* – траншея с горизонтальным и наклонным дном;
*б* – траншея с горизонтальным дном

*а*




*б*




*в*

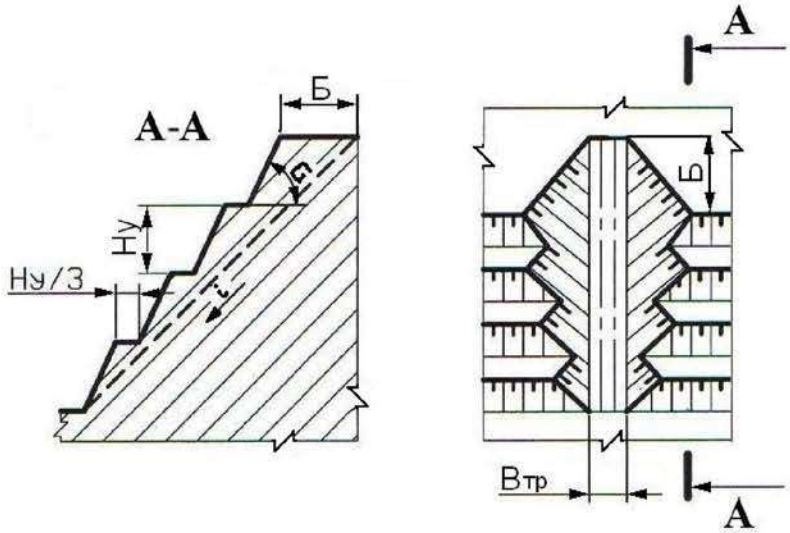



Рис. 1.12. Наклонные траншеи
*а* – внутренняя полутраншея (съезд); *б* – траншея групповая;
*в* – траншея крутонаклонная

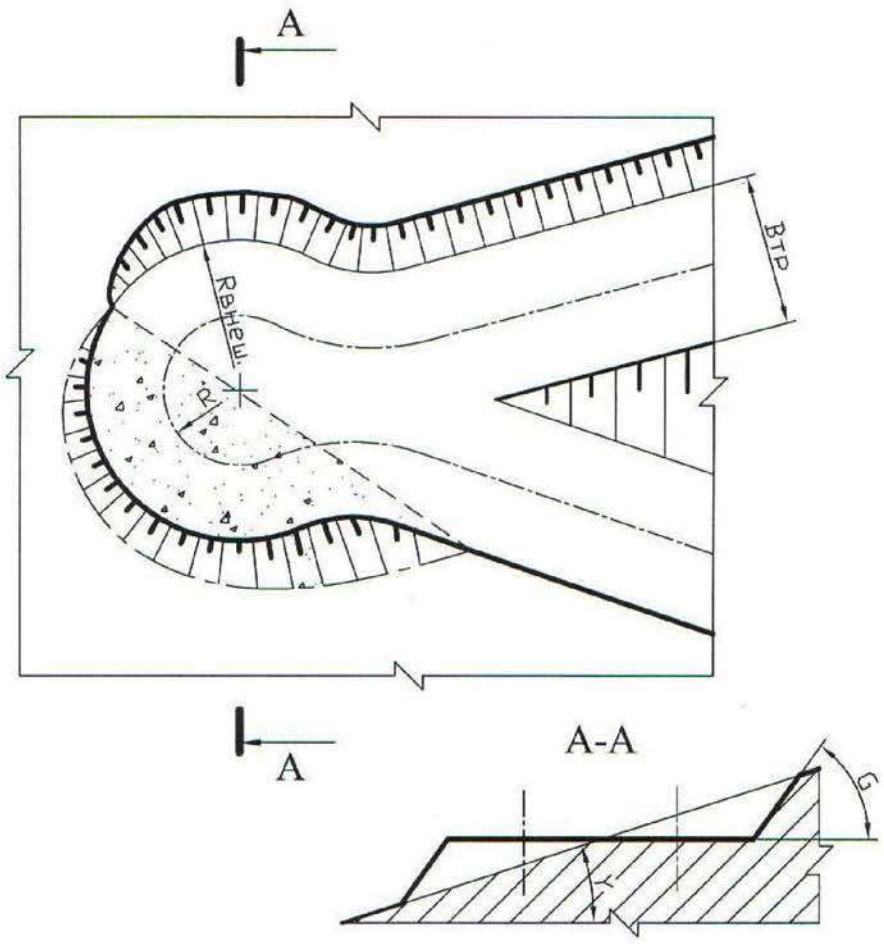



Рис. 1.13. Серпантина на косогоре

## Контрольные вопросы к практической работе № 1

1. 1: 5; 2:3; 1:3; 1:20; 1:30; 1:500; 1:70000; 1:25; 1:25000 – какой из этих масштабов не применяется?
2. Во сколько раз основная линия толще вспомогательной?
3. Когда применяется штрихпунктирная линия?
4. Когда применяется основная линия?
5. Когда применяется сплошная вспомогательная линия?
6. Как должны располагаться берг-штрихи при изображении горизонтальных проложений откосов?
7. От каких параметров уступа зависит ширина горизонтального проложения?

## Практическая работа № 2

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА КАПИТАЛЬНОЙ ТРАНШЕИ

***Цель работы*** – изучить методику определения объема капитальной траншеи.

### *2.1. Задачи работы*

2.1.1. Ознакомиться с методикой определения объема капитальных траншей.

2.1.2. Выполнить расчет объема капитальной траншеи по исходным данным.

2.1.3. Исследовать зависимость объема капитальной траншеи от определяющих факторов.

21.4. Выполнить графическое изображение плана и элементов капитальной траншеи.

### *2.2. Порядок выполнения работы*

2.2.1. По учебнику [1, с. 192 - 198] ознакомиться с конструкцией капитальных траншей и методикой определения их объема.

2.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 2. По данным заданного варианта выполнить расчет объема капитальной траншеи.

Объем простой капитальной траншеи можно представить как сумму объема полупризмы $V_1$ и объемов двух пирамид [1, рис. 10.3, с. 196].

$$V_т = V_1 + 2V_2, \qquad (2.1)$$

где $V_т$ – объем капитальной траншеи, м$^3$;

$V_1$ – объем полупризмы, м$^3$;

$V_2$ – объем пирамиды, м$^3$.

Объем породы в торце траншеи, заключенный в призме $V_3$ и двух пирамидах $V_3$ и $V_4$, незначителен и обычно в расчетах не учитывается.

Объем полупризмы $V_1$ (м$^3$) определяется

$$V_1 = \frac{b_т h_т^2}{2i}, \tag{2.2}$$

где $b_т$ – ширина основания траншеи, м;

$h_т$ – глубина траншеи, м;

$i$ – уклон траншеи, ед.

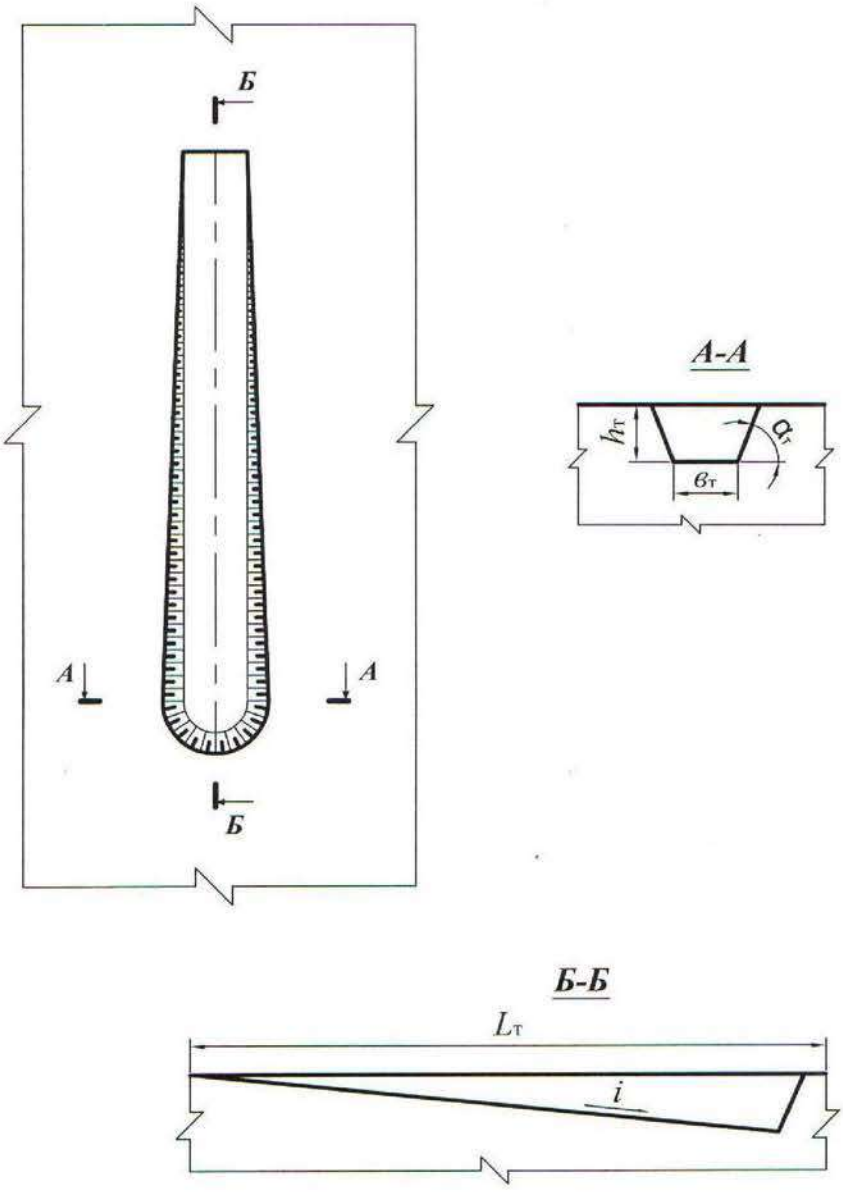



Рис. 2.1. Схема к расчету объема капитальной траншеи

Объем пирамиды $V_2$, (м$^3$) определяется

$$V_2 = \frac{h_т^3}{6i\,\mathrm{tg}\,\alpha_т}, \qquad (2.3)$$

где $\alpha_т$ – угол откоса борта траншеи, град.

После преобразования формулы (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) объем траншеи

$$V_т = \frac{h_т^2}{i}\left(\frac{b_т}{2} + \frac{h_т}{3\,\mathrm{tg}\,\alpha_т}\right). \qquad (2.4)$$

2.2.3. Исследовать зависимость объема капитальной траншеи от одного из определяющих факторов ($h_т$, $b_т$, $i$, $\alpha_т$) согласно заданию (прил. 2). Начертить график зависимости.

2.2.4. Вычертить графическое изображение плана и элементов капитальной траншеи в выбранном масштабе (аналогично рис. 2.1 и рис. 10.3 [1, с. 196].

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы, все необходимые расчеты и их результаты, а также чертежи на миллиметровой бумаге.

## Контрольные вопросы к практической работе № 2

1. Дайте определение траншеи.
2. Перечислите виды траншей по назначению.
3. Перечислите виды вскрывающих траншей.
4. Перечислите элементы траншеи.
5. Перечислите параметры разрезной траншеи.
6. Перечислите параметры вскрывающей траншеи
7. От каких факторов зависит ширина дна разрезной и вскрывающей траншеи? В каких пределах она изменяется?
8. Что такое уклон траншеи? От каких факторов он зависит и в каких пределах изменяется?
9. Перечислите способы проходки траншеи.
10. Какие сооружения располагаются во вскрывающей траншее?

## Практическая работа № 3

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА, РАЗМЕРОВ, ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И СРОКА СЛУЖБЫ КАРЬЕРА, ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО И КОЭФФИЦИЕНТА ВСКРЫШИ

***Цель работы*** – овладеть навыками простейших расчетов объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и коэффициента вскрыши, производительности и срока службы карьера.

### *3.1. Задачи работы*

3.1.1. Ознакомиться с методикой расчета объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

3.1.2. Выполнить расчет объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши по исходным данным.

3.1.3. Исследовать зависимость объема карьера от его глубины.

3.1.4. Выполнить простейшее графическое изображение плана и элементов объема карьера.

### *2.2. Порядок выполнения работы*

3.2.1. По учебнику [1, с. 28 - 29; с. 316 - 317] ознакомиться с методикой расчета объема карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

3.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 3. По данным заданного варианта выполнить расчет объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

При равнинном рельефе поверхности и наклонном или крутом падении залежи объем карьера может быть определен как сумма отдельных геометрических фигур (рис. 3.1)

$$V_к = V_1 + V_2 + V_3, \qquad (3.1)$$

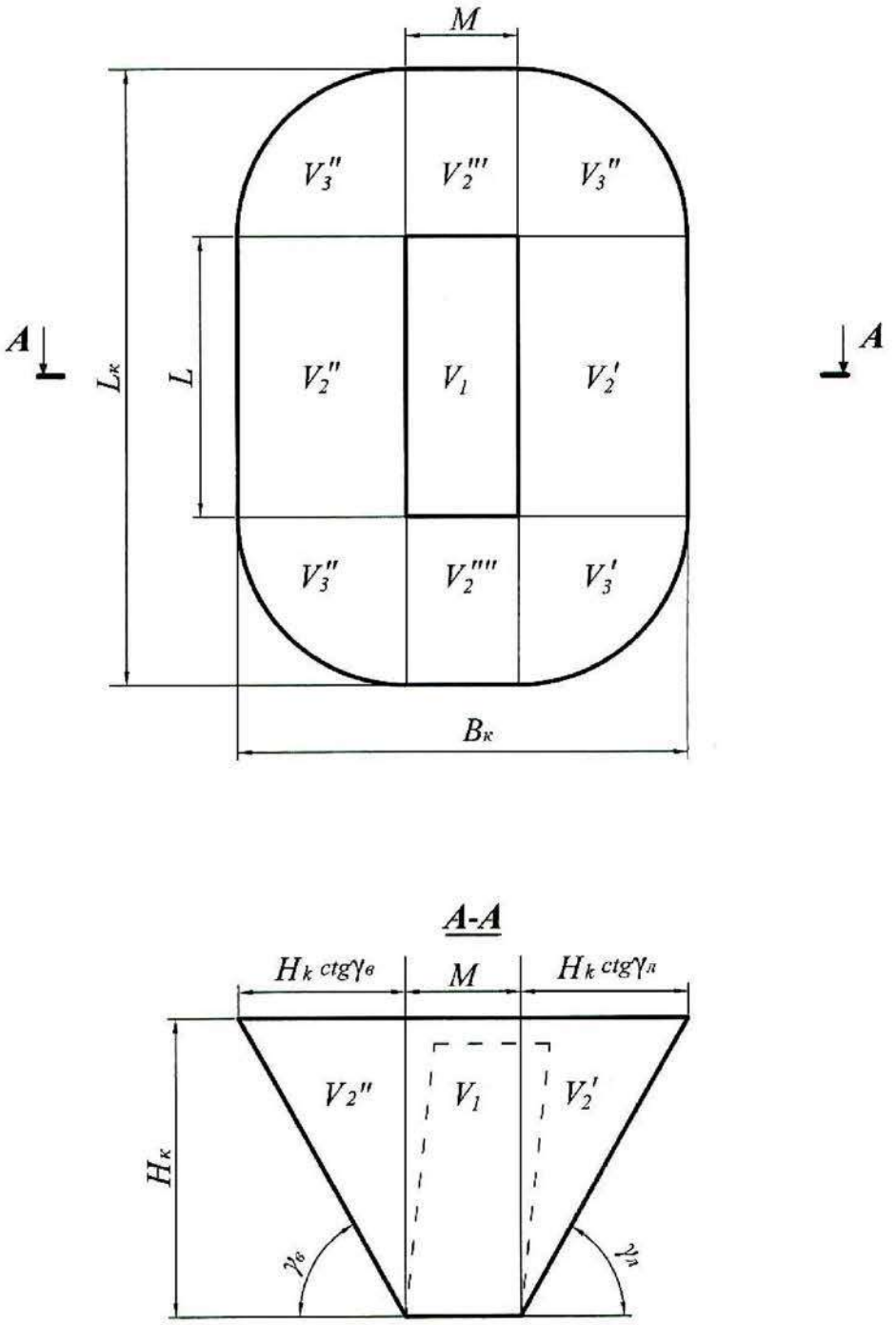



Рис. 3.1. Схема к расчету объема карьера

где $V_к$ – объем карьера, м$^3$;

$V_1$ – объем призмы с основанием $S = LM$, м$^3$;

$S$ – площадь дна карьера, м$^2$;

$L$ – длина залежи по простиранию, м;

$M$ – горизонтальная мощность залежи, м.

$$V_1 = LMH_к, \tag{3.2}$$

где $H_к$ – глубина карьера, м;

$V_2$ – суммарный объем призм треугольного сечения, прилегающих с четырех сторон к объему $V_1$ ($V_2'$ и $V_2''$ – вдоль длинных сторон карьера; $V_2'''$ и $V_2''''$ – вдоль коротких сторон у торцов карьера), м$^3$;

$$V_2 = \frac{1}{2} PH^2{}_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}, \tag{3.3}$$

где $P$ – периметр залежи (дна карьера), $P = 2(L + M)$ м;

$V_3$ – суммарный объем отдельных частей расчлененного конуса, располагающихся в угловых участках карьера ($V_3'$, $V_3''$, $V_3'''$ и $V_3''''$), м$^3$,

$$V_3 = \frac{\pi}{3} H_к^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{ср}, \tag{3.4}$$

где $\gamma_{ср}$ – усредненный угол откоса нерабочих бортов карьера, град.

$$\gamma_{ср} = \frac{\gamma_в + \gamma_л}{2},$$

где $\gamma_в$ – угол откоса висячего нерабочего борта карьера, град;

$\gamma_л$ – угол откоса лежачего нерабочего борта карьера, град. (см. рис. 3.1).

Суммарный объем карьера, таким образом, определяется по формуле:

$$V_к = SH_к + \frac{1}{2} PH_к^2 \operatorname{ctg} \gamma_{ср} + \frac{\pi}{3} H_к^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{ср}, \tag{3.5}$$

Длина карьера по верху ($L_к$, м)

$$L_к = L + 2H_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}. \tag{3.6}$$

Ширина карьера по верху ($B_к$, м)

$$B_к = M + 2H_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}. \tag{3.7}$$

Объем полезного ископаемого в контурах карьера ($V_{\text{п.и}}$, м$^3$)

$$V_{\text{п.и}} = S(H_{\text{к}} - h_{\text{н}}), \tag{3.8}$$

где $h_{\text{н}}$ – мощность наносов, м.

Промышленные (т. е. извлекаемые из недр) запасы полезного ископаемого в контурах карьера ($Q_{\text{п.и}}$, т)

$$Q_{\text{п.и}} = V_{\text{п.и}}\rho_{\text{п.и}}\eta_{\text{и}}, \tag{3.9}$$

где $\rho_{\text{п.и}}$ – объемная масса полезного ископаемого, т/м$^3$;

$\eta_{\text{и}}$ – коэффициент извлечения, учитывающий потери полезного ископаемого при разработке.

Объем породы в контурах карьера ($V_{\text{п}}$, м$^3$)

$$V_{\text{п}} = V_{\text{к}} - V_{\text{п.и}}. \tag{3.10}$$

Величина среднего коэффициента вскрыши (объем вынимаемой пустой породы, приходящийся на единицу добываемого полезного ископаемого) $k_{\text{ср}}$, м$^3$/т

$$k_{\text{ср}} = V_{\text{п}}/\ Q_{\text{п.и}}. \tag{3.11}$$

Производительность карьера по вскрыше ($П_{\text{в}}$, м$^3$/год) приблизительно устанавливается по среднему коэффициенту вскрыши

$$П_{\text{в}} = П_{\text{п.и}}\, k_{\text{ср}}\, k_{\text{н}}, \tag{3.12}$$

где $П_{\text{п.и}}$ – производительность карьера по полезному ископаемому, т/год (прил. 3);

$k_{\text{н}}$ – коэффициент неравномерности распределения вскрыши по годам ($k_{\text{н}}$ = 1,1÷1,3).

Производительность карьера по горной массе ($П_{\text{г.м}}$, м$^3$/год)

$$П_{\text{г.м}} = П_{\text{п.и}}\frac{1}{\rho_{\text{п.и}}} + П_{\text{в}}. \tag{3.13}$$

Суточная производительность карьера по полезному ископаемому ($П^{\text{с}}_{\text{п.и}}$, т/сут)

$$П^{с}_{п.и} = \frac{П_{п.и}}{T_г}, \qquad (3.14)$$

где $T_г$ – число рабочих дней карьера в год ($T_г$ = 350 дней).

Суточная производительность карьера по вскрыше ($П^{с}_{в}$, м$^3$/сут)

$$П^{с}_{в} = \frac{П_{в}}{T_г}. \qquad (3.15)$$

Сменная производительность карьера по добыче и вскрыше ($П^{см}_{п.и}$, т/смену; $П^{см}_{в}$, м$^3$/смену)

$$П^{см}_{пи} = \frac{П^{с}_{пи}}{n_{см}}, \qquad П^{см}_{в} = \frac{П^{с}_{в}}{n_{см}} \qquad (3.16)$$

где $n_{см}$ – число смен работы карьера в сутках (обычно 2-3 смены).

Срок службы карьера ($T_{сл}$, лет)

$$T_{сл} = T_{ос} + T_э + T_з, \qquad (3.17)$$

где $T_{ос}$ + $T_з$ – время на освоение и затухание мощности карьера по добыче (принимается 1,5 года);

$T_э$ – расчетный срок эксплуатации карьера, лет.

$$T_э = \frac{Q_{п.и}}{П_{п.и}}. \qquad (3.18)$$

3.2.3. Исследовать зависимость объема карьера от его глубины: построить график этой функции.

3.2.4. На миллиметровой бумаге вычертить карьер в выбранном масштабе в соответствии с заданными и полученными расчетными размерами (аналогично рис. 3.1).

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы, все необходимые расчеты и их результаты, а также чертеж карьера на миллиметровой бумаге и график зависимости $V_к = f(H_к)$.

## Контрольные вопросы к практической работе № 3

1. Перечислите размеры карьера. От чего они зависят?
2. Как различают производительность карьера (производительность по полезному ископаемому… )? В каких единицах она измеряется?
3. Что нужно знать для расчета годовой производительности карьера по горной массе?
4. Дайте классификацию запасов полезных ископаемых.
5. Дайте классификацию потерь полезного ископаемого.
6. Дайте определение коэффициента вскрыши. Как различаются коэффициенты вскрыши и в каких единицах они измеряются?

## Практическая работа № 4

## РАСЧЕТ ЗАРЯДА ОДИНОЧНОЙ СКВАЖИНЫ

***Цель работы*** – изучить параметры и освоить принципы расчета скважинных зарядов.

### *4.1. Задачи работы*

4.1.1. Изучить конструкции скважинных зарядов, параметры скважин, и их расположения на уступе.

4.1.2. Выполнить расчеты величины заряда одиночной скважины.

### *4.2. Порядок выполнения работы*

4.2.1. По учебнику [1, с. 72 - 74] ознакомиться с параметрами скважин, и их расположения на уступе, конструкцией зарядов.

4.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 4. По данным заданного варианта выполнить расчет заряда одиночной скважины и параметров расположения скважин на уступе при однорядном расположении скважин.

*Расчет выполняется в следующей последовательности:*

4.2.2.1. По заданному диаметру шарошечного долота (прил. 4) определяется диаметр взрывных скважин ($d_с$, мм)

$$d_с = d_д k_{разб}, \quad (4.1)$$

где $d_д$ – диаметр долота, мм;

$k_{разб}$ – коэффициент разбуривания, принимаемый в зависимости от крепости пород (прил. 5).

4.2.2.2. Определяется длина перебура ($l_{пер}$, м)

$$l_{пер} = 11 d_с, \quad (4.2)$$

где $d_с$ – диаметр скважины, м.

4.2.2.3. Определяется длина скважины ($l_с$, м)

$$l_с = H_у + l_{пер}, \quad (4.3)$$

где $H_у$ – высота уступа, м.

4.2.2.4. Принимается (задается) тип взрывчатого вещества (ВВ) (прил. 4) и конструкция скважины (заряда) – сплошной вертикальный заряд (рис. 4.1).

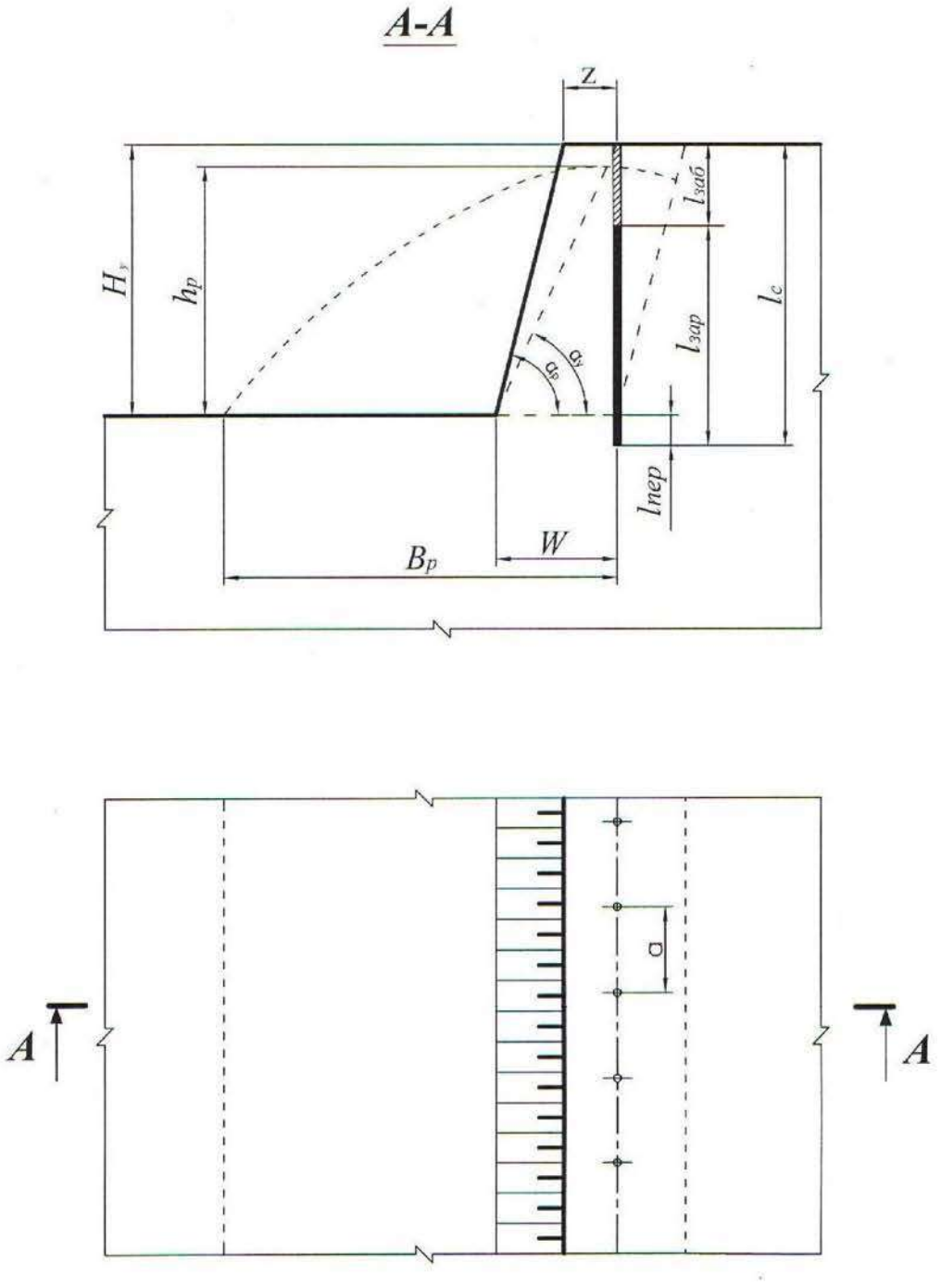



Рис. 4.1. Расположение скважин на уступе

4.2.2.5. Определяется длина забойки ($l_{заб}$, м)

$$l_{заб} = 0{,}27 l_c, \tag{4.4}$$

где $l_c$ – длина скважины, м.

4.2.2.6. Определяется длина заряда взрывчатого вещества (ВВ) в скважине ($l_{зар}$, м)

$$l_{зар} = l_{с} - l_{заб}. \quad (4.5)$$

4.2.2.7. Определяется удельная вместимость скважины ($p$, кг/м)

$$p = 7{,}85 d_{с}^{2} \Delta, \quad (4.6)$$

где $d_{с}$ – диаметр скважины, дм;

$\Delta$ – плотность заряда в скважине, кг/дм$^3$ (см. прил. 4).

4.2.2.8. Исходя из заданных удельного расхода эталонного ВВ ($q'$, кг/м$^3$) и коэффициента, учитывающего тип ВВ ($k_{ВВ}$) (см. прил. 4), вычисляется удельный расход принятого ВВ ($q_{п}$, кг/м$^3$)

$$q_{п} = q' k_{ВВ}. \quad (4.7)$$

4.2.2.9. Определяется величина преодолеваемой линии сопротивления по подошве ($W$, м)

$$W = 0{,}9 \sqrt{\frac{p}{q_{п}}}. \quad (4.8)$$

4.2.2.10. Выполняется проверка величины линии сопротивления по подошве по условию:

$$W \geq W_{min}, \quad (4.9)$$

$$W_{min} = H_{у} \operatorname{ctg} \alpha_{р} + Z, \quad (4.10)$$

где $\alpha_{р}$ – угол откоса рабочего уступа, град (прил. 4);

$Z$ – расстояние от верхней бровки уступа до скважины первого ряда, м.

$$Z = H_{у} \left( \operatorname{ctg} \alpha_{у} - \operatorname{ctg} \alpha_{р} \right) \geq 2,$$

где $\alpha_{у}$ – угол устойчивого откоса уступа, град ($\alpha_{у}$ на 5-10° меньше $\alpha_{р}$ );

$H_{у} \left( \operatorname{ctg} \alpha_{у} - \operatorname{ctg} \alpha_{р} \right)$ – ширина призмы возможного обрушения уступа, м.

Если $W < W_{min}$, то, по согласованию с руководителем, увеличивается диаметр скважины до ближайшего стандартного и соответственно по формуле (4.6) увеличивается величина $p$, по формуле (4.8) увеличивается $W$ и снова проверка по формуле (4.9).

4.2.2.11. Выполняется проверка $l_{пер}$ по условию

$$l_{\text{пер}} \le 0{,}3W. \qquad (4.11)$$

Если $l_{\text{пер}} > 0{,}3W$, то принимается $l_{\text{пер}} = 0{,}3W$ и производится перерасчет величин $l_{\text{с}}$, $l_{\text{заб}}$ и $l_{\text{зар}}$.

4.2.2.12. Определяется масса заряда в скважине ($Q_{\text{З}}$, кг)

$$Q_{\text{З}} = pl_{\text{зар}}. \qquad (4.12)$$

4.2.2.13. Определяется расстояние между скважинами в ряду ($a$, м)

$$a = \frac{Q_{\text{З}}}{q_{\text{п}} H_{\text{у}} W}. \qquad (4.13)$$

4.2.2.14. Выполняется проверка величины $a$ по допустимому коэффициенту сближения скважин $m$

$$m = a/W. \qquad (4.14)$$

На практике коэффициент сближения скважин составляет: $m = 0{,}8 \div 1{,}4$.

При расчетном значении $m$, отличающемся от рекомендуемого, необходимая величина его достигается путем изменения величины заряда в скважине $Q_{\text{З}}$ и соответствующего изменения расстояния между скважинами в ряду. При этом необходимо пересчитать длину заряда $l_{\text{зар}} = \frac{Q_{\text{З}}}{p}$ и длину забойки $l_{\text{заб}} = l_{\text{с}} - l_{\text{зар}}$.

4.2.2.15. Определяется ширина развала ($B_{\text{р}}$, м)

$$B_{\text{р}} \approx k_{\text{З}} k_{\text{в}} \sqrt{q_{\text{п}}} H_{\text{у}}, \qquad (4.15)$$

где $k_{\text{в}}$ – коэффициент, характеризующий взрываемость породы (для средневзрываемых пород $k_{\text{в}} = 2{,}5 \div 3{,}0$);

$k_{\text{з}}$ – коэффициент дальности отброса породы, зависящий от принятого интервала замедления между отдельными скважинами (прил. 6);

Интервал замедления ($\tau$, мс)

$$\tau = kW, \qquad (4.16)$$

где $k$ – коэффициент, зависящий от взрываемости пород (для средневзрываемых пород $k$ = 3,0 ÷4,0).

4.2.2.16. Определяется высота развала ($h_р$, м)

$$h_р \approx \frac{2H_у W k_р}{B_р}, \qquad (4.17)$$

где $k_р$ – коэффициент разрыхления пород после взрыва (в развале).

При взрывании пород на дробление с однорядным расположением скважин развал имеет форму, близкую к треугольной. При этом $k_р$ = 1,4 ÷ 1,6.

4.2.2.17. Определяется выход взорванной горной массы с 1 п. м скважины ($q_{г.м}$, м$^3$/м)

$$q_{г.м} = \frac{H_у a W}{l_с}. \qquad (4.18)$$

4.2.3. На миллиметровой бумаге вычертить буровую заходку (план и разрез), взрывные скважины и развал породы (на разрезе) с указанием всех необходимых размеров (см. рис. 4.1).

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные зависимости, необходимые расчеты и их результаты, а также чертеж буровой заходки в выбранном масштабе.

## Контрольные вопросы к практической работе № 4

1. Дайте определение скважинного заряда.
2. Перечислите параметры скважинного заряда.
3. Исходя из каких условий принимается (задается) тип ВВ?
4. Что такое линия сопротивления по подошве ($W$)? В чем ее геометрический и физический смысл?
5. Каким условием определяется минимально допустимая линия сопротивления по подошве ($W_{min}$)?
6. Каким параметром определяется положение первого ряда скважин?
7. Какими параметрами характеризуется сетка скважин?
8. Что такое «удельная вместимость скважины»? В каких единицах она измеряется? Выведите формулу для определения удельной вместимости скважины.

9. По какой формуле определяется выход горной массы с одного погонного метра скважины?
10. Какими факторами определяется ширина развала взорванной горной массы?
11. Каким показателем определяется отношение площади поперечного сечения развала взорванной горной массы к площади поперечного сечения буровой (взрывной) заходки? В каких пределах он изменяется?

## Практическая работа № 5

# РАСЧЕТ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ БУРОВОГО СТАНКА

***Цель работы*** – изучить методику определения производительности буровых станков типа СБШ.

### *5.1. Задачи работы*

5.1.1. Ознакомиться с технологией бурения взрывных скважин станками шарошечного бурения.

5.1.2. Выполнить расчет технической скорости бурения и производительности бурового станка.

5.1.3. Исследовать зависимость технической скорости бурения от показателя буримости горных пород.

### *5.2. Порядок выполнения работы*

5.2.1. По учебнику [1, с. 49 - 50] ознакомиться с технологией, условиями и областью применения шарошечного бурения взрывных скважин на карьерах.

5.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 7. По данным заданного варианта выполнить расчет технической скорости бурения и сменной производительности бурового станка типа СБШ.

Техническая скорость бурения ($v_б$, м/ч) скважин станками СБШ определяется по формуле

$$v_б = \frac{P_o n_в^{0,8}}{П_б^{1,6} d_д}, \qquad (5.1)$$

где $P_o$ – осевое усилие, кН;

$n_в$ – частота вращения бурового става, мин$^{-1}$;

$П_б$ – показатель буримости пород;

$d_д$ – диаметр долота (коронки), см.

Сменная производительность бурового станка ( $A_{б}^{см}$, м/смену) рассчитывается по формуле

$$A_{б}^{см} = \frac{T_{см} - (T_{п.з} + T_{р})}{v_{б}^{-1} + T_{в}}, \quad (5.2)$$

где $T_{см}$ – продолжительность смены, ч/смену;

$T_{п.з}$ – затраты времени на подготовительно-заключительные операции в течение смены, ч/смену;

$T_{р}$ – затраты времени на ремонты в течение смены, ч/смену;

$T_{в}$ – затраты времени на вспомогательные операции при бурении в расчёте на 1 м скважины ч/м;

$v_{б}$ – техническая скорость бурения, м/ч.

*Расчет выполняется в следующей последовательности:*

5.2.2.1. По заданным величинам $\sigma_{сж}$, $\sigma_{сд}$, $\rho$ определяется показатель буримости горных пород ($П_{б}$)

$$П_{б} = 0{,}07(\sigma_{сж} + \sigma_{сд}) + 0{,}7\rho, \quad (5.3)$$

где $\sigma_{сж}$ – предел прочности породы на сжатие, МПа;

$\sigma_{сд}$ – предел прочности породы на сдвиг, МПа;

$\rho$ – плотность горных пород, т/м$^3$.

По показателю буримости ($П_{б}$) определяется класс горных пород:

I класс – легкобуримые породы ($П_{б}$ = 1÷5);

II класс – породы средней трудности бурения ($П_{б}$ = 5,1÷10);

III класс – труднобуримые породы ($П_{б}$ = 10,1÷15,0);

IV класс – весьма труднобуримые породы ($П_{б}$ = 15,1÷20,0);

V класс – исключительно труднобуримые породы ($П_{б}$ = 20,1÷25,0).

5.2.2.2. В зависимости от показателей буримости пород ($П_б$) и заданного диаметра долота ($d_д$) по графику (прил. 8) определяется частота вращения бурового става ($n_в$).

5.2.2.3. Рассчитывается осевое усилие ($P_о$, кН) по выражению

$$P_о \geq kП_б d_д, \tag{5.4}$$

где $d_д$ – диаметр долота, см;

$k$ – коэффициент, зависящий от показателя буримости (прил. 9).

5.2.2.4. По формуле (5.1) рассчитывается техническая скорость бурения ($v_б$, м/ч).

5.2.2.5. По заданным величинам $T_{см}$, ($T_{п.з}$+$T_р$), $T_в$ и полученному значению $v_б$ рассчитывается сменная производительность станка ( $A_б^{см}$, м/смену).

5.2.2.6. Определяется суточная производительность бурового станка ( $A_б^с$, м/смену)

$$A_б^с = A_б^{см} n_{см}, \tag{5.5}$$

где $n_{см}$ – количество рабочих смен станка в сутки, смен/сут. ($n_{см} = 2 \div 3$).

5.2.2.7. Определяется годовая производительность станка ( $A_б^г$, м/год)

$$A_б^г = A_б^с n_{р.д.с}, \tag{5.6}$$

где $n_{р.д.с}$ – число рабочих дней станка в году, дней/год (с учетом вычета времени: ремонтов, перемещений с участка на участок, остановок в работе по климатическим условиям и др.). Для станков СБШ $n_{р.д.с} = 230 \div 280$ дней/год.

5.2.2.8. Рассчитывается парк буровых станков.

Списочный парк станков ($N_{б.с}$, ед.)

$$N_{б.с} = \frac{V_{г.м}}{A_б^г q_{г.м}}, \tag{5.7}$$

где $V_{г.м}$ – годовой объем обуриваемой горной массы, м$^3$ (принимается $V_{г.м}$ = $= П_{г.м}$ по результатам выполнения лаб. работы № 3);

$q_{г.м}$ – выход взорванной горной массы с 1 п. м скважины, м$^3$/м (принимается по результатам выполнения лаб. работы № 4).

Рабочий парк буровых станков ($N_{бр}$, ед.)

$$N_{бр} = \frac{N_{бс}}{k_{рез}}, \tag{5.8}$$

где $k_{рез}$ – коэффициент резерва буровых станков.

$$k_{рез} = \frac{T_г}{n_{р.д.с}}, \tag{5.9}$$

где $T_г$ – число рабочих дней карьера в году, дней/год ($T_г$ = 350 дней/год).

5.2.3. Исследовать зависимость технической скорости бурения ($v_б$, м/ч) от показателя буримости горных пород ($П_б$).

Для этого произвести расчет $v_б$ для пяти значений $П_б$. За базовое значение принять $П_б$, полученное при выполнении п. 5.2.2.1. Для принятия четырех оставшихся значений $П_б$ принять шаг варьирования от базового $\Delta П_б$ = 0,5÷1,5. Два принятых значения $П_б$ должны превышать базовое, а два быть меньше его. Строится график $v_б = f(П_б)$.

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы, все необходимые расчеты, а также график зависимости $v_б = f(П_б)$ на миллиметровой бумаге.

## Контрольные вопросы к практической работе № 5

1. Перечислите основные элементы станков шарошечного бурения.
2. Как маркируются модели станков шарошечного бурения?
3. От каких свойств пород зависят показатели буримости и что характеризуют эти свойства? В каких единицах они измеряются?
4. От каких факторов зависит скорость бурения?
5. От каких факторов зависит величина требуемого осевого усилия?
6. Написать формулу часовой производительности бурового станка.
7. Как определяется списочный парк бурстанков?
8. Как определяется рабочий парк бурстанков?

## Практическая работа № 6

# РАСЧЕТ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КАРЬЕРНЫХ ЭКСКАВАТОРОВ

***Цель работы*** – ознакомиться с технико-экономическими показателями и освоить методику расчета производительности одноковшовых экскаваторов.

### *6.1. Задачи работы*

6.1.1. Ознакомиться с распределением рабочего времени, производительностью и технико-экономическими показателями одноковшовых экскаваторов.

6.1.2. Выполнить расчет технической, сменной и годовой производительности экскаватора типа ЭКГ в скальных породах.

6.1.3. Исследовать зависимость технической производительности экскаватора от угла поворота на разгрузку.

### *6.2. Порядок выполнения работы*

6.2.1. По учебнику [1, с. 103 - 108] ознакомиться с распределением рабочего времени, принципами расчета производительности и технико-экономическими показателями работы одноковшовых экскаваторов.

6.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 10. По данным заданного варианта выполнить расчет технической, сменной и годовой производительности и параметров забоя одноковшового экскаватора типа ЭКГ в скальных породах.

*Расчет выполняется в следующей последовательности:*

6.2.2.1. Определяется техническая производительность экскаватора ($A_т$, м$^3$/ч)

$$A_т = \frac{3600E}{T_ц} k_э, \qquad (6.1)$$

где $E$ – вместимость ковша экскаватора, м$^3$;

$T_ц$ – продолжительность цикла экскавации, с;

$$T_ц = T_ч + T_{пов} + T_р, \qquad (6.2)$$

где $T_ч$ – длительность черпания, с;

$$T_ч = \frac{194 d_{ср}^2}{E} + \frac{E}{0{,}11E + 0{,}6}, \quad (6.3)$$

$d_{ср}$ – размер «среднего» куска в развале взорванной горной массы, м;

$$d_{ср} = (0{,}3 \div 0{,}4)\sqrt[3]{E}, \quad (6.4)$$

$T_{пов}$ – длительность поворота экскаватора для разгрузки ковша, с;

$$T_{пов} = (10 + E) + 0{,}18(\beta - 90°), \quad (6.5)$$

$T_р$ – длительность разгрузки ковша, с;

где $\beta$ – средний угол поворота экскаватора для разгрузки ковша, град;

(при $E$ = 1÷3 м$^3$, $T_р$ = 1,5÷2,5 с;

при $E$ = 3÷8 м$^3$, $T_р$ = 2,5÷2,7 с;

при $E$ = 12÷20 м$^3$, $T_р$ = 2,9÷3,5 с);

$k_э$ – коэффициент экскавации пород,

$$k_э = \frac{k_н}{k_р},$$

где $k_н$ – коэффициент наполнения ковша;

$k_р$ – коэффициент разрыхления пород в ковше экскаватора.

Значения $k_н$ и $k_р$ принимать по прил. 11 в зависимости от заданной категории пород по трудности экскавации.

6.2.2.2. Сменная производительность экскаватора ($A_{см}$, м$^3$/смену)

$$A_{см} = A_т \, T_{см} \, k_и, \quad (6.6)$$

где $T_{см}$ – продолжительность смены, ч/смену;

$k_и$ – коэффициент использования экскаватора в течение смены (прил. 10).

6.2.2.3. Суточная производительность экскаватора ($A_с$, м$^3$/сут)

$$A_с = A_{см} \, n_{см}, \quad (6.7)$$

где $n_{см}$ – число рабочих смен в сутках, смен/сут. ($n_{см}$ = 2÷3).

6.2.2.4. Годовая производительность экскаватора ($A_г$, м$^3$/год)

$$A_г = A_с\, n_г, \tag{6.8}$$

где $n_г$ – число рабочих дней экскаватора в году, дней/год (прил. 10).

6.2.2.5. Определяется парк экскаваторов. Списочный парк экскаваторов ($N_{эс}$, ед.)

$$N_{эс} = \frac{П_{г.м}}{Aг}, \tag{6.9}$$

где $П_{г.м}$ – производительность карьера по горной массе, м$^3$/год (принимается по результатам выполнения практической работы № 3).

Рабочий парк экскаваторов ($N_{эр}$, ед.)

$$N_{эр} = \frac{N_{эс}}{k_{рез}}, \tag{6.10}$$

где $k_{рез}$ – коэффициент резерва экскаваторов

$$k_{рез} = \frac{T_г}{n_г}, \tag{6.11}$$

где $T_г$ – число рабочих дней карьера в году, дней/год ($T_г$ = 350 дней/год).

6.2.2.6. Определяется ширина экскаваторной заходки (забоя) ($A_з$, м):

*при железнодорожном транспорте*

$$A_з = (1{,}5 \div 1{,}7) R_{ч.у}\,; \tag{6.12}$$

*при автомобильном транспорте*

$$A_э = (0{,}8 \div 1{,}2) R_{ч.у}\,, \tag{6.13}$$

где $R_{ч.у}$ – радиус черпания экскаватора на уровне стояния, м [1, с. 85, табл. 10].

6.2.2.7. Определяется допустимая высота уступа (забоя) ($H_у$, м) для скальных пород

$$H_у \le 1{,}5 H_ч^{max}, \tag{6.14}$$

где $H_ч^{max}$ – максимальная высота черпания экскаватора, м [1, с. 85, табл. 10].

6.2.3. Исследовать зависимость технической производительности экскаватора от угла поворота и построить график $A_т = f(\beta)$.

Для этого производится расчет $A_т$ для пяти значений β. Область варьирования угла поворота $150° > \beta > 90°$. Интервал варьирования $\Delta\beta = 5 \div 10°$.

Базовое значение β принять из прил. 10 для заданного варианта. Для принятия четырех оставшихся значений β принять шаг варьирования от базового $\Delta\beta = (5 \div 10)°$.

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы и результаты расчетов, а также график зависимости $A_т = f(\beta)$ на миллиметровой бумаге.

## Контрольные вопросы к практической работе № 6

1. Дайте определение производительности.
2. Вывести формулу технической производительности экскаватора.
3. Из каких элементов складывается цикл экскавации?
4. Вывести формулу максимальной ширины экскаваторной заходки.
5. Почему рациональная ширина экскаваторной заходки при железнодорожном транспорте больше, чем при автомобильном транспорте?
6. Как определяется допустимая высота уступа в сыпучих и связных породах?
7. Как определяется рабочий и списочный парк экскаваторов?

## Практическая работа № 7

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КАРЬЕРНЫХ АВТОСАМОСВАЛОВ

***Цель работы*** – ознакомиться с методикой и освоить принципы расчета производительности карьерных автосамосвалов.

### *7.1. Задачи работы*

7.1.1. Ознакомиться с техническими характеристиками и областью применения карьерных автосамосвалов для перевозки горной массы.

7.1.2. Выполнить расчет сменной производительности карьерного автосамосвала.

7.1.3. Исследовать зависимость сменной производительности карьерного автосамосвала от заданных параметров трассы.

### *7.2. Порядок выполнения работы*

7.2.1. По учебнику [1, с. 145 - 151] ознакомиться с техническими характеристиками и областью применения карьерных автосамосвалов для перевозки горной массы.

7.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 12. По данным заданного варианта выполнить расчет сменной производительности автосамосвала.

Производительность автосамосвала по заданной трассе ($Q_{\text{а}}$, т/смену) рассчитывается

$$Q_{\text{а}} = N_{\text{р}} q = \frac{T_{\text{см}}}{T_{\text{ц}}^{\text{а}}} k_{\text{и}} q, \qquad (7.1)$$

где $T_{\text{см}}$ – продолжительность смены, мин./смену;

$q$ – вес груза в кузове автосамосвала, т;

$k_{\text{и}}$ – коэффициент использования сменного времени;

$T_{\text{ц}}^{\text{а}}$ – продолжительность транспортного цикла автосамосвала, мин.;

$N_р$ – количество рейсов автосамосвала в течение смены, рейс/смену.

Продолжительность транспортного цикла ($T_ц^а$, мин.)

$$T_ц^а = t_о + t_п + t_д + t_{м.п} + t_{м.р} + t_р\ , \qquad (7.2)$$

где $t_о$ – продолжительность ожидания погрузки, мин. ($t_о \approx 0{,}5t_п$);

$t_п$ – продолжительность погрузки автосамосвала, мин.;

$t_д$ – продолжительность движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях, мин.;

$t_{м.п}$, $t_{м.р}$ – продолжительность маневровых операций соответственно при установке на погрузку и разгрузку, мин.;

$t_р$ – продолжительность разгрузки, мин.

*Расчеты выполняются в следующей последовательности:*

7.2.2.1. По заданной модели экскаватора (см. практическую работу № 6) подбирается модель автосамосвала прил. 13. Подбор осуществляется из условия обеспечения рационального соотношения (μ) между вместимостью кузова автосамосвала и ковша экскаватора

$$\mu = \frac{V_а}{E} = 3 \div 5, \qquad (7.3)$$

где $V_а$ – геометрическая вместимость кузова выбранного автосамосвала, м$^3$ (см. прил. 13);

$E$ – вместимость ковша экскаватора, м$^3$.

7.2.2.2. Производится расчет времени погрузки автосамосвала ($t_п$, мин.) и веса груза в кузове ($q$, т)

$$t_п = \frac{T_ц^э (n_{\min цик} - 0{,}5)}{60}, \qquad (7.4)$$

где $T_ц^э$ – продолжительность цикла экскавации, с (см. практическую работу № 6);

$n_{\min\ цик}$ – количество циклов экскавации при загрузке автосамосвала.

Для определения $n_{\min\ цик}$ рассчитывается необходимое количество ковшей для полной загрузки автосамосвала ($n_к$):

*исходя из грузоподъемности автосамосвала*

$$n_к = \frac{q_а k_р}{E k_н \rho}, \tag{7.5}$$

где $q_а$ – грузоподъемность автосамосвала, т;

$k_р$ – коэффициент разрыхления породы в ковше экскаватора;

$k_н$ – коэффициент наполнения ковша экскаватора;

$\rho$ – плотность пород в целике, т/м$^3$ (значения $k_н$, $k_р$ и $\rho$ принимаются по прил. 11 в зависимости от заданной категории пород);

*исходя из вместимости кузова автосамосвала с «шапкой»*

$$n_к = \frac{0{,}9V'_а}{E k_н}, \tag{7.6}$$

где $V'_а$ – вместимость кузова автосамосвала с «шапкой» (см. прил. 13), м$^3$.

Затем сравниваются значения $n_к$, вычисленные по формулам (7.5) и (7.6), выбирается меньшее ($n_к$) и округляется до ближайшего целого числа, которое принимается за $n_{\min\ цик}$.

Вес груза рассчитывается ($q$, т)

$$q = \frac{E k_н}{k_р} n_{\min\ цик} \rho. \tag{7.7}$$

Осуществляется проверка условия

$$q \le 1{,}1 q_а, \tag{7.8}$$

где $q_а$ – грузоподъемность автосамосвала, т.

7.2.2.3. Производится расчет времени движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях ($t_д$, мин.)

$$t_{\text{д}} = 60\frac{2L}{v_{\text{ср.т}}}, \qquad (7.9)$$

где $L$ – расстояние транспортирования горной массы, км;

$v_{\text{ср.т}}$ – средняя техническая скорость движения автосамосвала по трассе, км/ч;

$v_{\text{ср.т}}$ определяется в зависимости от заданного расстояния транспортирования ($L$, км) и высоты подъема горной массы ($H_{\text{п}}$, м) по прил. 15.

7.2.2.4. Производится расчет $T_{\text{ц}}^{\text{а}}$. При этом $t_{\text{м.п}}$, $t_{\text{м.р}}$ и $t_{\text{р}}$ принимаются из прил. 13 для выбранной модели автосамосвала.

7.2.2.5. По формуле 7.1 производится расчет сменной производительности автосамосвала при $k_{\text{и}} = 0{,}8$; $T_{\text{см}} = 8$ ч.

7.2.2.6. Производится расчет рабочего и инвентарного парка автосамосвалов.

Рабочий парк автосамосвалов ($N_{\text{а.р}}$, ед.)

$$N_{\text{а.р}} = \frac{V_{\text{см}}}{Q_{\text{а}}}, \qquad (7.10)$$

где $V_{\text{см}}$ – сменный объем перевозок, т/смену.

$$V_{\text{см}} = k_{\text{н}}\left(П_{\text{п.и}}^{\text{см}} + П_{\text{в}}^{\text{см}}\rho\right), \qquad (7.11)$$

где $k_{\text{н}}$ – коэффициент неравномерности выдачи горной массы из карьера ($k_{\text{н}} = 1{,}1$);

$П_{\text{п.и}}^{\text{см}}$ – сменная производительность карьера по полезному ископаемому, т/смену;

$П_{\text{в}}^{\text{см}}$ – сменная производительность карьера по вскрыше в целике, м$^3$/смену;

$\rho$ – плотность вскрышных пород в целике, т/м$^3$.

$П_{\text{п.и}}^{\text{см}}$ и $П_{\text{в}}^{\text{см}}$ принимаются по результатам выполнения практической работы № 3, $\rho$ – по прил. 11 в зависимости от заданной категории пород по трудности экскавации.

Инвентарный парк автосамосвалов ($N_{\text{а.и}}$, ед.)

$$N_{\text{а.и}} = \frac{N_{\text{а.р}}}{k_{\text{т.г}}}, \qquad (7.12)$$

где $k_{\text{т.г}}$ – коэффициент технической готовности, определяемый по прил. 14, в зависимости от суточного пробега автосамосвала.

Суточный пробег автосамосвала ($L_{\text{с}}$, км/сут)

$$L_{\text{с}} = \frac{2LQ_{\text{а}}}{q} k_{\text{о}} k_{\text{см}}, \qquad (7.13)$$

где $k_{\text{о}}$ – коэффициент, учитывающий нулевой пробег от гаража до места работы и обратно ($k_{\text{о}} = 1{,}05$);

$k_{\text{см}}$ – коэффициент сменности – среднее количество полных смен отработанных автосамосвалом за сутки (принять $k_{\text{см}} = 2{,}5$).

7.2.3. Исследовать зависимость сменной производительности автосамосвала от расстояния транспортирования или высоты подъема горной массы и построить график $Q_{\text{а}} = f(L)$ или $Q_{\text{а}} = f(H_{\text{п}})$.

Производится расчет для пяти значений $L$ или $H_{\text{п}}$. Интервал варьирования расстояния транспортирования $\Delta L$ = 0,2÷0,4 км, высоты подъема горной массы $\Delta H_{\text{п}}$ = 20 м.

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы и результаты расчетов, а также графики зависимостей $Q_{\text{а}} = f(L)$ или $Q_{\text{а}} = f(H_{\text{п}})$.

## Контрольные вопросы к практической работе № 7

1. Чем отличается процесс выемки горной массы от процесса транспортирования горной массы?
2. Вывести формулу сменной производительности автосамосвала.
3. От каких факторов зависит сменная производительность автосамосвала?
4. Из каких элементов складывается транспортный цикл?
5. Как определить количество рейсов (транспортных циклов) автосамосвала за смену?
6. От чего зависит продолжительность погрузки автосамосвала?
7. В чем различие между величиной количества циклов экскавации для загрузки автосамосвала и количества ковшей для загрузки автосамосвала?
8. От каких факторов зависит время движения автосамосвала в транспортном цикле?
9. Какое различие между рабочим и инвентарным парком автосамосвалов?
10. Как определить сменный пробег автосамосвала?

## Практическая работа № 8

## КОНСТРУКЦИЯ РАБОЧЕГО И НЕРАБОЧЕГО БОРТОВ КАРЬЕРА

***Цель работы*** – изучить конструкцию рабочего и нерабочего бортов карьера, освоить методику расчета ширины рабочей площадки и угла откоса рабочих и нерабочих бортов.

### *8.1. Задачи работы*

8.1.1. Ознакомиться с конструкцией рабочего и нерабочего бортов карьера.

8.1.2. Выполнить расчет углов откоса рабочих и нерабочих бортов.

8.1.3. Исследовать зависимость величины угла откоса рабочего борта от определяющих факторов.

### *8.2. Порядок выполнения работы*

8.2.1. По учебнику [1, с. 23 - 27; 269 - 271] ознакомиться с конструкцией рабочего и нерабочего бортов карьера и факторами, определяющими величины углов их откосов.

8.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 16. По данным заданного варианта выполнить расчет углов откоса рабочего и нерабочего бортов.

*Порядок выполнения расчетов*

8.2.2.1. Определяется высота рабочего борта карьера ($H_{р.б}$, м)

$$H_{р.б} = H_{у}\, n_{р.у}, \qquad (8.1)$$

где $H_{у}$ – высота уступа, м;

$n_{р.у}$ – количество рабочих уступов.

8.2.2.2. Определяется ширина рабочей площадки при погрузке горной массы в автомобильный транспорт ($Ш_{р.п}$, м)

$$Ш_{р.п} = B_{р} + C + T + S + Z + Ш_{в.б}, \qquad (8.2)$$

где $B_р$ – ширина развала породы, м (принимается по результатам расчетов из практической работы № 4);

$C$ – безопасный зазор между нижней бровкой развала и транспортной полосой, м (2-3 м);

$T$ – ширина транспортной полосы (проезжей части временной автодороги при двухполосном движении), м (см. прил. 13);

$S$ – безопасное расстояние (1,5÷2,0 м) от транспортной полосы до призмы возможного обрушения;

$Z$ – ширина призмы возможного обрушения, м;

$Ш_{в.б}$ – ширина взрывного блока, м (при однорядном взрывании $Ш_{в.б} = W$, принимается по результатам расчетов из практической работы № 4);

$$Z = H_у (\text{ctg}\, \alpha_у - \text{ctg}\, \alpha); \quad (8.3)$$

$\alpha$ – угол откоса рабочего уступа, град.;

$\alpha_у$ – угол устойчивого откоса уступа, град. (см. прил. 16).

8.2.2.3. Определяется горизонтальное проложение откоса рабочего борта ($C_{р.б}$, м)

$$C_{р.б} = H_у \,\text{ctg}\, \alpha\, n_{р.у} + Ш_{р.п} (n_{р.у} - 1). \quad (8.4)$$

8.2.2.4. Определяется тангенс угла откоса рабочего борта карьера ($\varphi$)

$$\text{tg}\, \varphi = H_{р.б} / C_{р.б}. \quad (8.5)$$

8.2.2.5. Определяется величина угла откоса, град, рабочего борта $\varphi$: $\varphi = \text{arctg}\, (\text{tg}\, \varphi)$.

8.2.2.6. Определяется высота нерабочего борта карьера ($H_{н.б}$, м)

$$H_{н.б} = H_у\, n_{н.у}, \quad (8.6)$$

где $n_{н.у}$ – количество нерабочих уступов (принимается $n_{н.у} = 3$).

8.2.2.7. Определяется горизонтальное проложение откоса нерабочего борта ($C_{н.б}$, м)

$$C_{н.б} = n_{н.у} (H_у \,\text{ctg}\, \alpha_у + b_с) + (n_{н.у} - 1)\, b_б, \quad (8.7)$$

где $b_с$ – ширина съезда, м;

$b_б$ – ширина бермы безопасности, м ($b_б$ = 8÷10 м).

8.2.2.8. Определяется тангенс угла откоса нерабочего борта карьера (γ)

$$\operatorname{tg}\gamma = H_{н.б} / C_{н.б}. \quad (8.8)$$

Затем сам угол откоса, град, нерабочего борта карьера (γ):

$$\gamma = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\gamma). \quad (8.9)$$

8.2.3. На миллиметровой бумаге вычертить разрез рабочей площадки (рис. 8.1), рабочего борта (рис. 8.2), план и разрез нерабочего борта карьера с тупиковыми съездами (рис. 8.3) в выбранном масштабе.

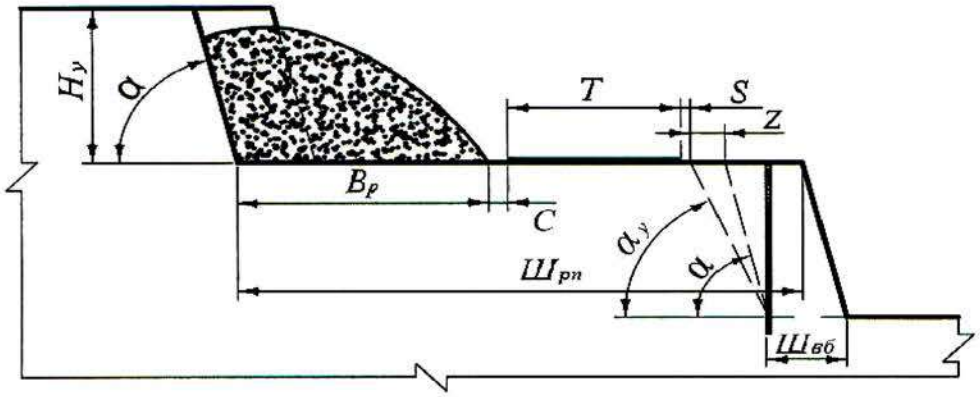



Рис. 8.1. Рабочая площадка

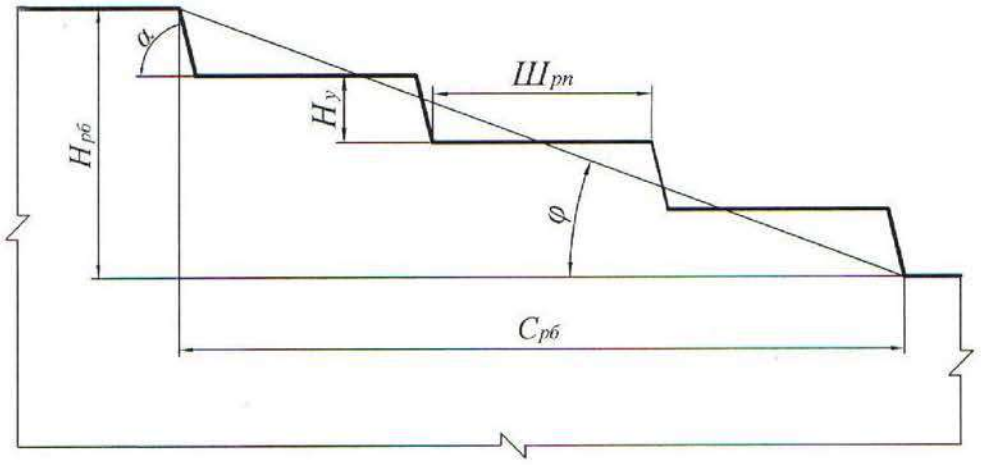
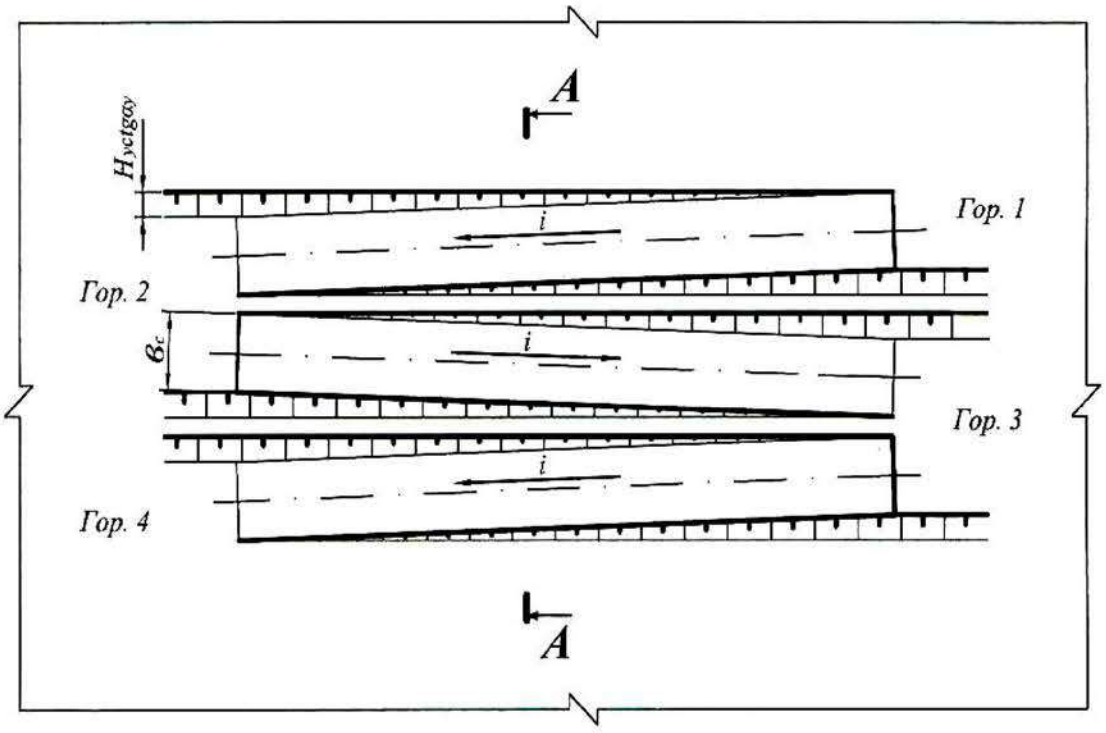



Рис. 8.2. Рабочий борт карьера

*а)*




*б)*

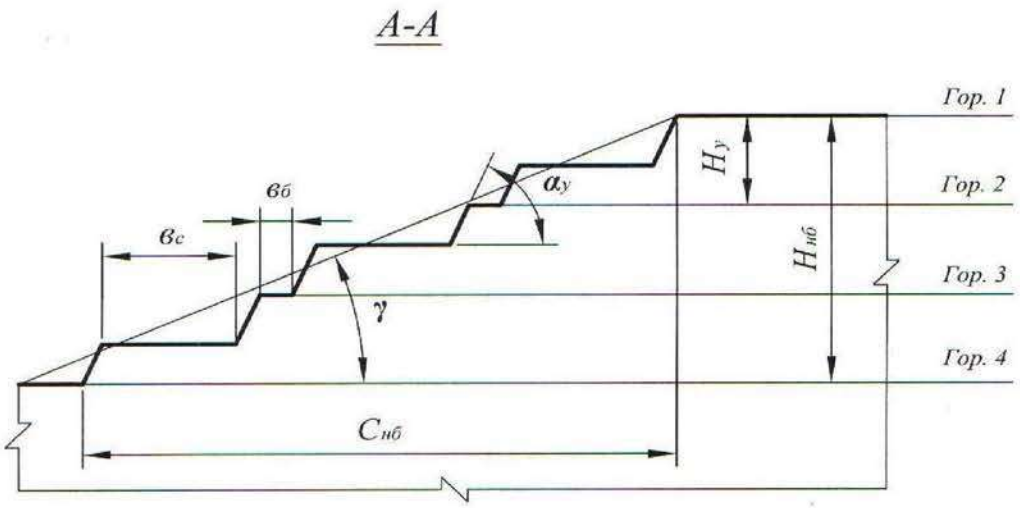



Рис. 8.3. Нерабочий борт карьера:
*а* – автомобильный съезд на нерабочем борту; *б* – профиль нерабочего борта

8.2.4. Исследовать зависимость угла откоса рабочего борта карьера (φ, град) от высоты уступа ($H_у$, м) или ширины рабочей площадки ($Ш_{р.п}$, м) и построить график $\varphi = f(H_у)$ или $\varphi = f(Ш_{р.п})$.

Производится расчет φ для пяти значений $H_у$ и $Ш_{р.п}$. Величина аргумента задается в пределах 10 м ≤ $H_у$ ≤ 25 м и 30 м ≤ $Ш_{р.п}$ ≤ 80 м.

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы и результаты расчетов, а также графики зависимостей $\varphi = f(H_у)$ или $\varphi = f(Ш_{р.п})$.

## Контрольные вопросы к практической работе № 8

1. Дайте определение рабочего и нерабочего борта карьера.
2. Из каких элементов состоят рабочий и нерабочий борт карьера?
3. Назовите параметры рабочего и нерабочего бортов карьера и их элементов.
4. Какими условиями определяется угол откоса нерабочего борта карьера?
5. От каких факторов зависит угол откоса рабочего борта карьера?
6. Из каких элементов состоит рабочая площадка (как определяется ширина рабочей площадки)?
7. Как определяется ширина призмы возможного обрушения уступа?
8. Как определить угол откоса борта карьера, если известны его высота и горизонтальное проложение?
9. Как определить горизонтальное проложение борта карьера (рабочего и нерабочего)?
10. Как определяется уклон внутрикарьерной траншеи?
11. В каких единицах измеряется уклон траншеи?

## Практическая работа № 9

# РАСЧЕТ БУЛЬДОЗЕРНОГО ОТВАЛООБРАЗОВАНИЯ ПРИ АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ

***Цель работы*** – ознакомиться с методикой и освоить принципы расчета основных параметров бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте.

### *9.1. Задачи работы*

9.1.1. Изучить технологию бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте.

9.1.2. Выполнить расчет основных параметров бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте.

### *9.2. Порядок выполнения работы*

9.2.1. По учебнику [1, с. 176 - 177] ознакомиться с основными параметрами отвалов и технологией бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте.

9.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 17. По данным заданного варианта выполнить расчет основных параметров бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте.

*Порядок выполнения расчетов*

9.2.2.1. Определяется требуемая площадь отвала ($S_о$, м$^2$)

$$S_о = \frac{W k_р^о}{n_я h_я \eta_о}, \qquad (9.1)$$

где $W$ – объем пород, подлежащих размещению в отвале за срок его существования, м$^3$ (см. прил. 17);

$k_р^о$ – коэффициент разрыхления пород в отвале (см. прил. 18);

$h_я$ – высота яруса, м (см. прил. 18);

$n_я$ – количество ярусов;

$\eta_о$ – коэффициент использования площади отвала ($\eta_о$ принимать: для одно- и двухъярусных отвалов – 0,8÷0,7; для трехъярусных и более – 0,5).

Тип (категорию) складируемых пород принимать согласно прил. 17. Количество отвальных ярусов принимать самостоятельно (на практике отвалы формируются, как правило, из одного-трех ярусов), исходя из необходимости минимизировать площадь отвалов и максимальной общей высоты отвала не более 120-180 м. По требуемой площади отвала, определяются его размеры в плане: ширина ($B$, м), длина ($L$, м). При этом рекомендуется выдерживать соотношение $B : L = 1 : 2$, тогда: $L = \sqrt{2S_0}$.

9.2.2.2. Рассчитывается количество автосамосвалов, разгружающихся на отвале в течение часа ($N_о$, ед./ч)

$$N_о = \frac{П_в^ч k_н}{Q_п}, \qquad (9.2)$$

где $П_в^ч$ – часовая производительность карьера по вскрыше, м$^3$/ч;

$k_н$ – коэффициент неравномерности работы карьера по вскрыше ($k_н = 1{,}1 \div 1{,}2$);

$Q_п$ – объем вскрыши в целике в кузове автосамосвала, м$^3$.

$$Q_п = q/\rho, \qquad (9.3)$$

где $q$ – вес груза в кузове автосамосвала, т (величина $q$ принимается по результатам расчетов в практической работе № 7);

$\rho$ – плотность пород в целике, т /м$^3$.

$$П_в^ч = \frac{П_в}{T_г n_{см} T_{см}},$$

где $П_в$ – годовая производительность карьера по вскрыше (см. прил. 17), м$^3$/год;

$T_г$ – число рабочих дней карьера в году, дней/год ($T_г$ = 350 дн./год);

$n_{см}$ – число рабочих смен в сутки, смен/сут. ($n_{см}$ = 3 смены/сут.);

$T_{см}$ – продолжительность смены, ч/смену ($T_{см}$ = 8 ч/смену).

9.2.2.3. Определяется число одновременно разгружающихся автосамосвалов на отвале ($N_{а.о}$, ед.)

$$N_{а.о} = N_о \frac{t_р + t_{м.р}}{60}, \qquad (9.4)$$

где $t_р$, $t_{м.р}$ – продолжительность разгрузки и маневровых операций при установке на разгрузку, мин. (см. прил. 13).

9.2.2.4. Определяется длина участка разгрузки ($L_р$, м)

$$L_р = N_{а.о}\, l_п, \qquad (9.5)$$

где $l_п$ – ширина полосы по рабочему фронту отвала, м, занимаемой одним автосамосвалом при маневрировании, для автосамосвалов грузоподъемностью:

30 – 55 т $l_п$ = 30÷40 м,
80 – 130 т $l_п$ = 50÷60 м,
180 – 240 т $l_п$ = 60÷70 м.

9.2.2.5. Отвальный фронт состоит из трех участков: разгрузки, планировки и резервный.

По мере заполнения участка разгрузки и выравнивания участка планировки, последний начинает выполнять функцию первого, а участок разгрузки становится участком планировки. Если участок планировки не подготовлен, то разгрузка производится на резервном участке. Таким образом, все три участка должны иметь одинаковую длину и общая длина отвального фронта ($L_о$, м) определится:

$$L_о = 3L_р. \qquad (9.6)$$

9.2.2.6. Определяется сменный объем бульдозерных работ по формированию отвала ($Q_б$, м$^3$/смену)

$$Q_{б} = П_{в}^{см} k_{н} k_{зав}, \quad (9.7)$$

где $П_{в}^{см}$ – сменная производительность карьера по вскрыше, м$^3$/смену;

$$П_{в}^{см} = П_{в}^{ч} T_{см}, \quad (9.8)$$

где $k_{зав}$ – средний коэффициент «заваленности» (см. прил. 18).

9.2.2.7. Выбирается модель бульдозера (см. прил. 19) и определяется число бульдозеров в работе ($N_б$, ед.):

$$N_б = Q_б / П_б, \quad (9.9)$$

где $П_б$ – сменная производительность бульдозера, м$^3$/смену (принимается по прил. 19).

9.2.2.8. Рассчитывается инвентарный парк бульдозеров ($N_{б.и}$, ед.)

$$N_{б.и} = 1{,}4\ N_б, \quad (9.10)$$

где 1,4 – ориентировочное значение коэффициента резерва бульдозеров.

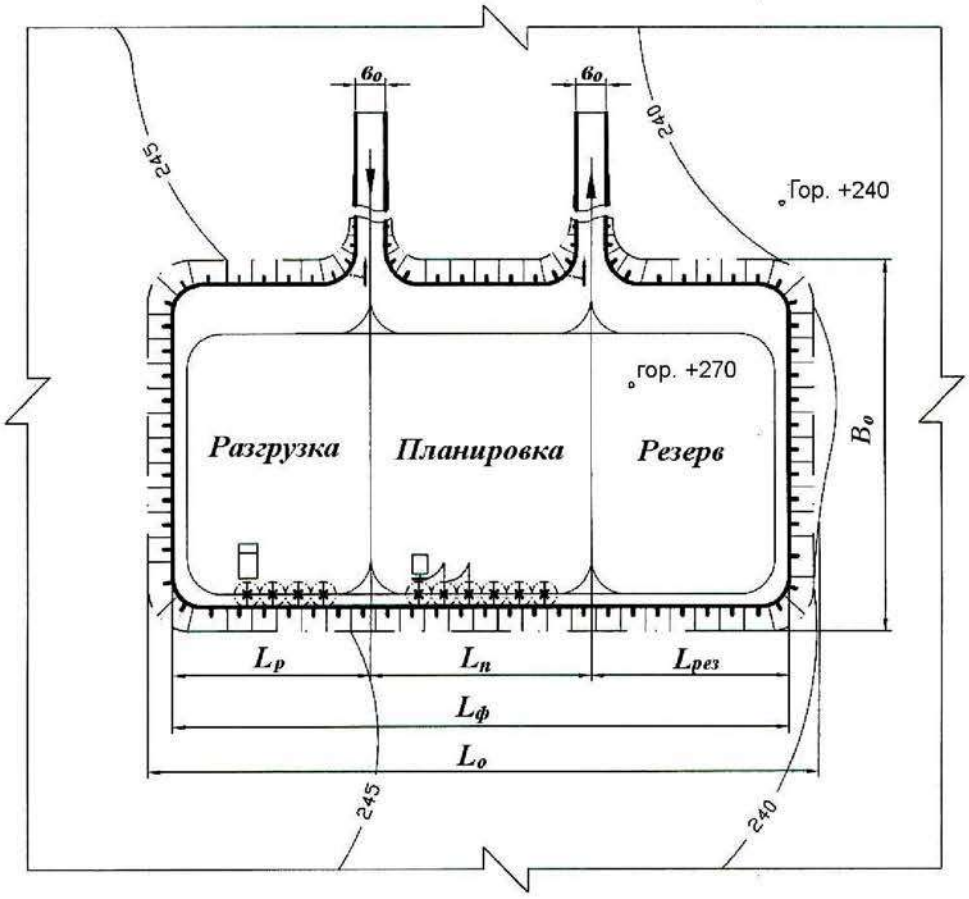



Рис. 9.1. План бульдозерного отвала

9.2.3. На миллиметровой бумаге вычертить план бульдозерного отвала с выделением рабочих участков, участков, находящихся в планировке, и резервных участков (см. рис. 9.1).

***Форма отчетности.*** По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы результаты расчетов, а также план бульдозерного отвала на миллиметровой бумаге.

## Контрольные вопросы к практической работе № 9

1. Перечислите способы отвалообразования, применяемые при открытой разработке месторождений.
2. В чем заключается отличительный признак бульдозерного отвалообразования?
3. Перечислите достоинства и недостатки бульдозерного отвалообразования.
4. Перечислите параметры отвалов.
5. От каких факторов зависит высота яруса отвала?
6. Перечислите операции технологии бульдозерного отвалообразования.
7. Перечислите параметры технологии бульдозерного отвалообразования.
8. Из каких участков состоит фронт отвальных работ при бульдозерном отвалообразовании?
9. Как соотносятся между собой размеры участков фронта отвальных работ?
10. От каких факторов зависит длина участка разгрузки?
11. Как определить количество одновременно разгружающихся автосамосвалов на участке разгрузки?
12. Как определить объем бульдозерных работ по формированию отвала (по планировке вскрышных пород на отвале)?

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ И РЕКОМЕНДУЕМЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. *Хохряков, В. С.* Открытая разработка месторождений полезных ископаемых /В. С. Хохряков. – 5-е изд. – М.: Недра, 1991. – 336 с.
2. *Томаков, П. И.; Наумов, И. К.* Технология, механизация и организация открытых горных работ /П. И. Томаков, И. К. Наумов: учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Моск. горного ин-та, 1992. – 464 с.
3. *Пахомов, Е. М.; Буянов, М. И.* Открытая разработка месторождений полезных ископаемых /Е. М. Пахомов, М. И. Буянов. – М.: Недра, 1990. – 250 с.
4. *Русский, И. И.* Технология отвальных работ и рекультивация на карьерах /И. И. Русский. – М.: Недра, 1979. – 262 с.

Приложение 1

**Исходные данные к практической работе № 1 «Графическое изображение элементов горных работ»**

Таблица П.1.1

**Графическое изображение забоев и уступов**

| Номер варианта | Уступ | | | Забой | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | тип уступа, м | высота $H_р$, м | угол откоса, $A$, град | тип забоя | высота уступа, $H_у$, м | высота развала, $H_р$, м | ширина развала, $B_р$, м | ширина взрывной заходки, $B_б$, м | ширина заходки экскаватора (забоя), $A_э$, м | угол откоса, град | | $R_{ч.у}$, м | $R_{ч.max}$, м | $R_1$, м | $R_2$, м | $H_{сл}$, м |
| | | | | | | | | | | забоя, $F$ | уступа, $A$ | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 1 | Вскрышной | 12 | 70 | Экскаваторный (мехлопата) | 10 | | Без БВР | - | 13 | 65 | 70 | 9,04 | | | | |
| | Склад руды | 10 | 60 | Экскаваторный (драглайн) | 30 | | Без БВР | - | 25 | 40 | 65 | | 71,4 | | | |
| 2 | Рудный | 12 | 75 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 16 | 26 | 17 | 13 | 70 | 80 | 13,5 | | | | |
| | Отвал | 25 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | | Без БВР | - | 20 | 60 | 65 | 13,5 | | | | |
| 3 | Сложный (руда и порода) | 7,5 | 78 | Экскаваторный (роторный) | 10 | | Без БВР | - | 20 | 60 | 60 | | | 15 | 16 | 2 |
| | Отвал | 30 | 55 | бульдозерный | 7 | | Без БВР | - | 30 | 20 | 65 | | | | | |
| 4 | Вскрышной | 15 | 75 | бульдозерный | 5 | | Без БВР | - | 30 | 10 | 65 | | | | | |
| | Склад руды | 12 | 55 | Экскаваторный (драглайн) | 35 | | Без БВР | - | 25 | 30 | 60 | | 83,0 | | | |
| 5 | Рудный | 12 | 80 | Экскаваторный (роторный) | 17 | | Без БВР | - | 25 | 60 | 60 | | | 21 | 24 | 4 |
| | Отвал | 25 | 50 | Экскаваторный (драглайн) | 40 | | Без БВР | - | 35 | 35 | 55 | | 91,5 | | | |
| 6 | Вскрышной | 20 | 80 | Бульдозерный | 3 | | Без БВР | - | 25 | 10 | 65 | | | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | 15 | 45 | 30 | 15 | 50 | 80 | 12,6 | | | | |

Продолжение табл. П.1.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | Сложный | 7,5 | 70 | Экскаваторный (драглайн) | 40 | | Без БВР | - | 35 | 30 | 60 | | 94,8 | | | |
| | Вскрышной | 35 | 50 | Экскаваторный (роторный) | 15 | 15 | Без БВР | - | 24 | 55 | 55 | | | 21 | 24 | |
| 8 | Рудный | 15 | 75 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | | Без БВР | - | 20 | 60 | 65 | 13,5 | | | | |
| | Отвал | 30 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | | Без БВР | - | 18 | 45 | 70 | 12,6 | | | | |
| 9 | Вскрышной | 12 | 60 | Экскаваторный (драглайн) | 30 | | Без БВР | - | 30 | 40 | 65 | | 71,4 | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | | Без БВР | - | 14 | 55 | 60 | 14,3 | | | | |
| 10 | Рудный | 12 | 80 | Бульдозерный | 5 | | Без БВР | - | 35 | 10 | 65 | | | | | |
| | Отвал | 25 | 55 | Экскаваторный (роторный) | 17 | | Без БВР | - | 28 | 60 | 65 | 14,3 | | | | |
| 11 | Вскрышной | 15 | 65 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 18 | 45 | 32 | 15 | 55 | 75 | 14,3 | | | | |
| | Склад руды | 12 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | | Без БВР | - | 16 | 50 | 80 | 12,6 | | | | |
| 12 | Рудный | 15 | 80 | Экскаваторный (драглайн) | 40 | 40 | Без БВР | - | 30 | 30 | 60 | | 91,5 | | | |
| | Отвал | 25 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 15 | Без БВР | - | 20 | 55 | 65 | 15,2 | | | | |
| 13 | Сложный | 7,5 | 65 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 18 | 36 | 24 | 12 | 55 | 75 | 14,3 | | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Бульдозерный | 5 | | Без БВР | - | 35 | 15 | 65 | | | | | |
| 14 | Вскрышной | 20 | 80 | Экскаваторный (роторный) | 16 | | Без БВР | - | 25 | 60 | 60 | | | 18 | 24 | 8 |
| | Склад руды | 15 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | | Без БВР | - | 9 | 45 | 70 | 12,6 | | | | |
| 15 | Рудный | 20 | 75 | Бульдозерный | 10 | | Без БВР | - | 40 | 18 | 65 | | | | | |
| | Отвал | 20 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | | Без БВР | - | 13 | 55 | 65 | 12,6 | | | | |
| 16 | Сложный | 7,5 | 80 | Бульдозерный | 10 | 10 | Без БВР | - | 40 | 20 | 60 | | | | | |
| | Отвал | 25 | 50 | Экскаваторный (драглайн) | 30 | | Без БВР | - | 25 | 30 | 60 | | 71,4 | | | |

Продолжение табл. П.1.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Вскрышной | 15 | 75 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | 14 | 36 | 24 | 18 | 45 | 70 | 12,6 | | | | |
| | Склад руды | 15 | 55 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | | Без БВР | - | 22 | 55 | 65 | 15,2 | | | | |
| 18 | Рудный | 15 | 80 | Бульдозерный | 7 | | Без БВР | - | 35 | 20 | 65 | | | | | |
| | Отвал | 25 | 50 | Экскаваторный (роторный) | 20 | | Без БВР | - | 34 | 60 | 60 | | | 29 | 33 | 5 |
| 19 | Вскрышной | 20 | 80 | Экскаваторный (драглайн) | 45 | | Без БВР | - | 25 | 35 | 60 | | 91,5 | | | |
| | Склад руды | 10 | 60 | Бульдозерный | 5 | 5 | Без БВР | - | | 15 | 60 | | | | | |
| 20 | Сложный | 10 | 70 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 12 | 28 | 6 | 12 | 55 | 75 | 14,3 | | | | |
| | Отвал | 30 | 50 | Бульдозерный | 5 | | Без БВР | - | | 17 | 65 | | | | | |
| 21 | Рудный | 12 | 70 | экскаваторный (мехлопата) | 15 | 15 | 28 | 8 | 14 | 55 | 75 | 14,3 | | | | |
| | Отвал | 35 | 50 | Экскаваторный (драглайн) | 40 | | Без БВР | - | 30 | 45 | 65 | | 91,5 | | | |
| 22 | Вскрышной | 12 | 65 | Экскаваторный (драглайн) | 30 | | Без БВР | - | 25 | 45 | 60 | | 83,0 | | | |
| | Склад руды | 12 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 10 | | Без БВР | - | 8 | 55 | 65 | 9,04 | | | | |
| 23 | Рудный | 15 | 70 | экскаваторный (драглайн) | 40 | | Без БВР | - | 35 | 45 | 65 | | 91,5 | | | |
| | Отвал | 25 | 50 | Экскаваторный (роторный) | 18 | | Без БВР | - | 27 | 65 | 65 | | | 18 | 26 | 8 |
| 24 | Вскрышной | 20 | 80 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 18 | 60 | 30 | 20 | 55 | 80 | 14,3 | | | | |
| | Склад руды | 12 | 55 | Бульдозерный | 3 | | Без БВР | - | 40 | 10 | 60 | | | | | |
| 25 | Рудный | 15 | 65 | Экскаваторный (мехлопата) | 10 | | Без БВР | - | 12 | 55 | 65 | 9,04 | | | | |
| | Отвал | 25 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | 12 | 28 | 6 | 14 | 50 | 80 | 14,3 | | | | |
| 26 | Сложный | 12 | 70 | Экскаваторный (драглайн) | 30 | 30 | Без БВР | - | 25 | 45 | 65 | | 71,4 | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Бульдозерный | 5 | | Без БВР | - | 20 | 20 | 55 | | | | | |

Окончание табл. П.1.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | Рудный | 15 | 80 | Бульдозерный | 7 | | Без БВР | - | 25 | 18 | 60 | | | | | |
| | Отвал | 15 | 55 | Экскаваторный (роторный) | 16 | | Без БВР | - | 25 | 65 | 65 | | | 18 | 26 | 8 |
| 28 | Вскрышной | 15 | 75 | Экскаваторный (драглайн) | 40 | | Без БВР | - | 30 | 45 | 60 | | 83,5 | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | 9 | 24 | 7 | 12 | 45 | 70 | 12,6 | | | | |
| 29 | Сложный | 7,5 | 70 | Экскаваторный (мехлопата) | 10 | | Без БВР | - | 12 | 50 | 60 | 9,04 | | | | |
| | Склад руды | 10 | 50 | Бульдозерный | 7 | | Без БВР | - | 30 | 8 | 55 | | | | | |
| 30 | Рудный | 15 | 80 | Экскаваторный (мехлопата) | 15 | | Без БВР | - | 12 | 55 | 60 | 15,2 | | | | |
| | Отвал | 40 | 50 | Экскаваторный (мехлопата) | 12 | 14 | 48 | 32 | 16 | 45 | 70 | 12,6 | | | | |

Таблица П.1.2

**Графическое изображение траншей и съездов**

| Номер варианта | Горизонтальная траншея | | | | | | | | Наклонная траншея | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | тип траншеи | уклон косогора, $Y$, град | внешний радиус серпантины, $R_{вн}$, м | радиус поворота трассы, $R$, м | глубина траншеи, $H_{тр}$, м | ширина траншеи, $B_{тр}$, м | длина траншеи, $L_{тр}$, м | угол откоса борта траншеи, $G$, град | тип траншеи | ширина траншеи, $B_{тр}$, м | уклон траншеи, $i$, % | число вскрываемых уступов, ед. | высота уступа, $H_{у}$, м | угол откоса борта траншеи, $G$, град |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | На косогоре | 10 | | | 20 | 25 | | 65 | Съезд | 25 | 4 | 1 | 10 | 75 |
| | Внутри карьера | | | | 15 | 25 | 500 | 70 | Крутая траншея | 22 | 32 | 3 | 10 | 60 |
| 2 | Серпантина | 40 | 45 | 30 | | 25 | | 75 | Внешняя траншея | 25 | 6 | 1 | 12 | 50 |
| | На косогоре | 15 | | | 25 | 30 | 350 | 60 | Съезд | 30 | 8 | 1 | 10 | 65 |
| 3 | На косогоре | 12 | | | 10 | 18 | 400 | 60 | Внешняя траншея | 18 | 4 | 1 | 15 | 60 |
| | Серпантина | 35 | 60 | 35 | | 30 | | 70 | Крутая траншея | 25 | 27 | 3 | 17 | 70 |
| 4 | Серпантина | 45 | 60 | 35 | | 25 | | 80 | Внешняя групповая траншея | 25 | 4 | 2 | 10 | 70 |
| | Внутри карьера | | | | 10 | 35 | 500 | 80 | Съезд | 35 | 10 | 1 | 15 | 75 |

Продолжение табл. П.1.2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | Серпантина | 30 | 45 | 30 | | 20 | | 70 | Съезд | 20 | 6 | 1 | 12 | 50 |
| 6 | На косогоре | 13 | | | 20 | 30 | | 60 | Внешняя групповая траншея | 30 | 4 | 3 | 10 | 55 |
| | Внутри карьера | | | | 15 | 30 | 700 | 70 | Крутая траншея | 24 | 27 | 8 | 12 | 60 |
| 7 | Внутри карьера | | | | 10 | 22 | 500 | 80 | Съезд | 25 | 10 | 1 | 15 | 75 |
| | Серпантина | 60 | 50 | 30 | | 22 | | 75 | Крутая траншея | 25 | 32 | 6 | 12 | 75 |
| 8 | На косогоре | 10 | | | 17 | 28 | | 55 | Внешняя траншея | 30 | 8 | 1 | 15 | 75 |
| | Серпантина | 50 | 50 | 30 | | 30 | | 70 | Съезд | 30 | 10 | 1 | 12 | 65 |
| 9 | На косогоре | 8 | | | 12 | 25 | | 60 | Внешняя траншея | 24 | 4 | 1 | 15 | 60 |
| | Внутри карьера | | | | 15 | 22 | 550 | 65 | Крутая траншея | 22 | 32 | 4 | 12 | 65 |
| 10 | Серпантина | 30 | 45 | 30 | | 25 | | 75 | Внешняя групповая траншея | 22 | 4 | 2 | 10 | 70 |
| | На косогоре | 11 | | | 17 | | | 60 | Съезд | 22 | 4 | 1 | 20 | 55 |
| 11 | Внутри карьера | | | | 10 | 30 | 100 | 75 | Съезд | 26 | 6 | 1 | 20 | 75 |
| | Серпантина | 50 | 60 | 35 | | 25 | | 75 | Внешняя групповая траншея | 26 | 6 | 3 | 12 | 60 |
| 12 | Внутри карьера | | | | 15 | 22 | 200 | 65 | Внешняя траншея | 28 | 8 | 1 | 17 | 65 |
| | На косогоре | 12 | | | 25 | 30 | | 50 | Крутая траншея | 24 | 32 | 6 | 12 | 50 |
| 13 | Серпантина | 45 | 50 | 30 | | 28 | | 65 | Съезд | 30 | 8 | 1 | 15 | 60 |
| | На косогоре | 12 | | | | 28 | | 50 | Крутая траншея | 24 | 27 | 5 | 15 | 55 |
| 14 | Внутри карьера | | | | 12 | 22 | 700 | 70 | Внешняя траншея | 32 | 8 | 1 | 12 | 60 |
| | Серпантина | 30 | 50 | 35 | | 30 | | 75 | Съезд | 30 | 8 | 1 | 12 | 75 |
| 15 | На косогоре | 15 | | | 15 | 25 | | 60 | Съезд | 30 | 10 | 1 | 10 | 75 |
| | Серпантина | 45 | 50 | 35 | | 30 | | 70 | Крутая траншея | 22 | 27 | 4 | 10 | 60 |
| 16 | Внутри карьера | | | | 15 | 22 | 250 | 65 | Внешняя траншея | 22 | 4 | 1 | 15 | 65 |
| | Серпантина | 35 | 50 | 35 | | 25 | | 70 | Съезд | 24 | 6 | 1 | 15 | 70 |
| 17 | Внутри карьера | | | | 12 | 25 | 300 | 80 | Внешняя траншея | 24 | 6 | 1 | 17 | 70 |
| | На косогоре | 10 | | | 17 | 28 | | 75 | Крутая траншея | 24 | 32 | 6 | 12 | 65 |
| 18 | На косогоре | 15 | | | 25 | 30 | | 60 | Внешняя групповая траншея | 25 | 4 | 2 | 12 | 65 |
| | Серпантина | 40 | 50 | 35 | | 25 | | 65 | Съезд | 22 | 4 | 1 | 12 | 80 |

Окончание табл. П.1.2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | Серпантина | 60 | 60 | 40 | | 25 | | 75 | Съезд | 28 | 8 | 1 | 15 | 75 |
| | Внутри карьера | | | | 17 | 22 | 700 | 70 | Внешняя траншея | 28 | 8 | 1 | 20 | 60 |
| 20 | Внутри карьера | | | | 7,5 | 22 | 450 | 65 | Внешняя траншея | 25 | 6 | 1 | 20 | 60 |
| | На косогоре | 12 | | | 20 | 30 | | 50 | Крутая траншея | 24 | 27 | 8 | 15 | 55 |
| 21 | На косогоре | 8 | | | 12 | 30 | | 55 | Съезд | 24 | 8 | 1 | 20 | 70 |
| | Внутри карьера | | | | 10 | 28 | 500 | 75 | Крутая траншея | 22 | 27 | 8 | 10 | 65 |
| 22 | На косогоре | 8 | | | 10 | 25 | | 50 | Внешняя траншея | 30 | 8 | 1 | 15 | 60 |
| | Внутри карьера | | | | 12 | 25 | 700 | 80 | Съезд | 28 | 8 | 1 | 17 | 70 |
| 23 | Серпантина | 50 | 60 | 40 | | 28 | | 75 | Съезд | 30 | 8 | 1 | 12 | 70 |
| | На косогоре | 10 | | | 15 | 24 | | 55 | Крутая траншея | 24 | 32 | 7 | 12 | 60 |
| 24 | На косогоре | 8 | | | 15 | 24 | | 70 | Внешняя траншея | 26 | 8 | 1 | 15 | 65 |
| | Серпантина | 40 | 50 | 30 | | 24 | | 75 | Съезд | 26 | 10 | 1 | 12 | 75 |
| 25 | Серпантина | 60 | 70 | 40 | | 25 | | 65 | Внешняя траншея | 22 | 4 | 1 | 17 | 60 |
| | Внутри карьера | | | | 10 | 30 | 300 | 75 | Крутая траншея | 22 | 32 | 4 | 8 | 55 |
| 26 | Серпантина | 30 | 60 | 35 | | 25 | | 75 | Внешняя групповая траншея | 20 | 4 | 3 | 10 | 75 |
| | На косогоре | 8 | | | 12 | 25 | | 65 | Съезд | 22 | 6 | 1 | 15 | 80 |
| 27 | На косогоре | 10 | | | 12 | 30 | | 75 | Съезд | 28 | 10 | 1 | 17 | 80 |
| | Внутри карьера | | | | 7 | 30 | 600 | 65 | Внешняя траншея | 30 | 8 | 1 | 17 | 70 |
| 28 | Внутри карьера | | | | 15 | 30 | 600 | 75 | Внешняя групповая траншея | 24 | 6 | 3 | 12 | 60 |
| | Серпантина | 30 | 50 | 30 | | 25 | | 80 | Крутая траншея | 24 | 27 | 5 | 12 | 60 |
| 29 | На косогоре | 12 | | | 15 | 25 | | 63 | Съезд | | 8 | 1 | 15 | 70 |
| | Серпантина | 50 | 60 | 35 | | 30 | | 75 | Крутая траншея | 22 | 32 | | 15 | 55 |
| 30 | На косогоре | 15 | | | 25 | 25 | | 58 | Внешняя траншея | 26 | 8 | 1 | 17 | 60 |
| | Внутри карьера | | | | 20 | 25 | 500 | 70 | Съезд | 26 | 8 | 1 | 17 | 70 |
| 31 | Серпантина | 55 | 50 | 30 | | 25 | | 80 | Съезд | 28 | 8 | 1 | 15 | 70 |
| | На косогоре | 15 | | | 22 | 25 | | 60 | Крутая траншея | 22 | 32 | 6 | 12 | 65 |
| 32 | Внутри карьера | | | | 10 | 30 | 280 | 70 | Внешн. траншея | 24 | 4 | 1 | 17 | 65 |
| | Серпантина | 55 | 40 | 25 | | 23 | | 70 | Съезд | 26 | 6 | 1 | 12 | 70 |

***Исходные данные к практической работе № 2***
**«Определение объема капитальных траншей»**

| Вариант | $h_т$, м | $b_т$, м | $i$, ед. | $\alpha_т$, град | Исследуемая зависимость |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 0,025 | 35 | $V_т = f(b_т)$ |
| 2 | 6 | 12 | 0,030 | 40 | $V_т = f(\alpha_т)$ |
| 3 | 8 | 16 | 0,040 | 41 | $V_т = f(b_т)$ |
| 4 | 16 | 50 | 0,060 | 65 | $V_т = f(i)$ |
| 5 | 15 | 22 | 0,055 | 25 | $V_т = f(\alpha_т)$ |
| 6 | 35 | 29 | 0,060 | 50 | $V_т = f(b_т)$ |
| 7 | 45 | 26 | 0,080 | 65 | $V_т = f(\alpha_т)$ |
| 8 | 55 | 10 | 0,100 | 35 | $V_т = f(h_т)$ |
| 9 | 54 | 18 | 0,110 | 37 | $V_т = f(i)$ |
| 10 | 18 | 11 | 0,035 | 34 | $V_т = f(\alpha_т)$ |
| 11 | 41 | 22 | 0,085 | 62 | $V_т = f(h_т)$ |
| 12 | 26 | 17 | 0,036 | 40 | $V_т = f(i)$ |
| 13 | 37 | 44 | 0,085 | 43 | $V_т = f(h_т)$ |
| 14 | 19 | 23 | 0,040 | 38 | $V_т = f(i)$ |
| 15 | 82 | 30 | 0,120 | 49 | $V_т = f(b_т)$ |
| 16 | 66 | 38 | 0,066 | 62 | $V_т = f(\alpha_т)$ |
| 17 | 45 | 34 | 0,040 | 51 | $V_т = f(h_т)$ |
| 18 | 75 | 40 | 0,080 | 45 | $V_т = f(h_т)$ |
| 19 | 67 | 20 | 0,080 | 37 | $V_т = f(i)$ |
| 20 | 25 | 25 | 0,035 | 30 | $V_т = f(b_т)$ |

***Исходные данные к практической работе № 3***

**«Определение объема, размеров, производительности и срока службы карьера, запасов полезного ископаемого коэффициента вскрыши»**

| Вариант | $L$, м | $M$, м | $H_к$, м | $h_н$, м | $\rho_{п.и}$, т/м$^3$ | $\gamma_{ср}$, град | $\eta_и$ | $П_{п.и}$, млн т/год |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1200 | 300 | 350 | 45 | 2,8 | 40 | 0,92 | 10,7 |
| 2 | 1500 | 400 | 460 | 40 | 2,9 | 39 | 0,93 | 20,9 |
| 3 | 1700 | 500 | 170 | 20 | 3,0 | 38 | 0,94 | 12,8 |
| 4 | 1600 | 450 | 280 | 30 | 3,1 | 36 | 0,92 | 16,1 |
| 5 | 1400 | 350 | 390 | 40 | 3,2 | 35 | 0,93 | 14,0 |
| 6 | 1300 | 250 | 200 | 20 | 3,3 | 34 | 0,94 | 6,1 |
| 7 | 1900 | 550 | 210 | 30 | 3,2 | 33 | 0,93 | 17,9 |
| 8 | 1800 | 180 | 220 | 40 | 3,1 | 32 | 0,94 | 5,8 |
| 9 | 1900 | 280 | 330 | 30 | 3,0 | 31 | 0,95 | 15,4 |
| 10 | 2000 | 380 | 240 | 10 | 2,9 | 40 | 0,96 | 15,1 |
| 11 | 2200 | 200 | 450 | 25 | 3,1 | 41 | 0,97 | 20,0 |
| 12 | 1300 | 100 | 210 | 40 | 3,4 | 42 | 0,92 | 2,5 |
| 13 | 1500 | 250 | 180 | 15 | 2,1 | 43 | 0,93 | 4,5 |
| 14 | 1900 | 150 | 250 | 30 | 2,8 | 44 | 0,94 | 5,7 |
| 15 | 1200 | 230 | 320 | 45 | 2,7 | 45 | 0,92 | 7,9 |
| 16 | 1800 | 210 | 280 | 20 | 2,5 | 44 | 0,94 | 9,1 |
| 17 | 2200 | 190 | 345 | 25 | 3,0 | 43 | 0,95 | 13,2 |
| 18 | 1900 | 245 | 360 | 35 | 1,9 | 40 | 0,92 | 8,7 |
| 19 | 2100 | 320 | 500 | 10 | 2,7 | 39 | 0,93 | 9,9 |
| 20 | 1600 | 195 | 370 | 12 | 2,5 | 38 | 0,95 | 9,7 |

***Исходные данные к практической работе № 4***
**«Расчет заряда одиночной скважины»**

Расчет проводится для станков шарошечного бурения (СБШ), пород II – IV классов по буримости и взрываемости, III – IV категорий по трещиноватости, сухих вертикальных скважин, сплошных колонковых зарядов.

| Вариант | $d_д$, мм | $f$ | $H_у$, м | $\alpha_р$, град | Тип ВВ | $\Delta$, кг/дм$^3$ | $q'$, кг/м$^3$ | $K_{ВВ}$ | $\alpha_у$, град |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 214 | 9,7 | 10 | 65 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 0,85 | 1,00 | 55 |
| 2 | 190 | 8,0 | 10 | 70 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 0,80 | 1,00 | 55 |
| 3 | 243 | 14,0 | 12 | 65 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 0,95 | 1,00 | 55 |
| 4 | 320 | 15,9 | 12 | 70 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 1,10 | 1,00 | 55 |
| 5 | 243 | 12,0 | 15 | 70 | Ифзанит Т-80 | 1,0 | 0,90 | 1,08 | 55 |
| 6 | 214 | 8,7 | 15 | 75 | Ифзанит Т-80 | 1,0 | 0,80 | 1,08 | 55 |
| 7 | 320 | 14,5 | 18 | 75 | Ифзанит Т-80 | 1,0 | 1,20 | 1,08 | 55 |
| 8 | 214 | 9,0 | 18 | 80 | Ифзанит Т-80 | 1,0 | 0,85 | 1,08 | 55 |
| 9 | 190 | 8,5 | 10 | 75 | Игданит | 1,0 | 0,80 | 1,13 | 55 |
| 10 | 269 | 11,4 | 15 | 80 | Игданит | 1,0 | 0,90 | 1,13 | 55 |
| 11 | 320 | 16,4 | 20 | 65 | Граммонит 50/50 | 1,0 | 1,20 | 1,01 | 55 |
| 12 | 320 | 15,2 | 10 | 70 | Граммонит 50/50 | 1,0 | 1,20 | 1,01 | 55 |
| 13 | 269 | 11,2 | 15 | 65 | Граммонит 50/50 | 1,0 | 1,15 | 1,01 | 55 |
| 14 | 190 | 8,0 | 20 | 70 | Граммонит 50/50 | 1,0 | 0,75 | 1,01 | 55 |
| 15 | 269 | 10,0 | 12 | 70 | Ифзанит | 1,0 | 0,80 | 1,08 | 55 |
| 16 | 190 | 16,0 | 10 | 80 | Ифзанит | 1,0 | 1,20 | 1,08 | 55 |
| 17 | 320 | 16,4 | 12 | 65 | Ифзанит | 1,0 | 1,20 | 1,08 | 55 |
| 18 | 214 | 14,5 | 20 | 70 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 1,15 | 1,00 | 55 |
| 19 | 269 | 15,0 | 15 | 70 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 1,20 | 1,00 | 55 |
| 20 | 214 | 8,0 | 20 | 75 | Граммонит 79/21 | 0,9 | 0,80 | 1,00 | 55 |

Приложение 5

**Значение коэффициента $k_{разб}$ в зависимости от крепости пород**

| Крепость пород, $f$ | 2 | 4 | 6 | 8 - 10 | 12 - 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{разб}$ | 1,00 | 1,05 | 1,04 | 1,037 - 1,031 | 1,03 - 1,021 | 1,02 |

Приложение 6

**Значение коэффициента $k_з$**

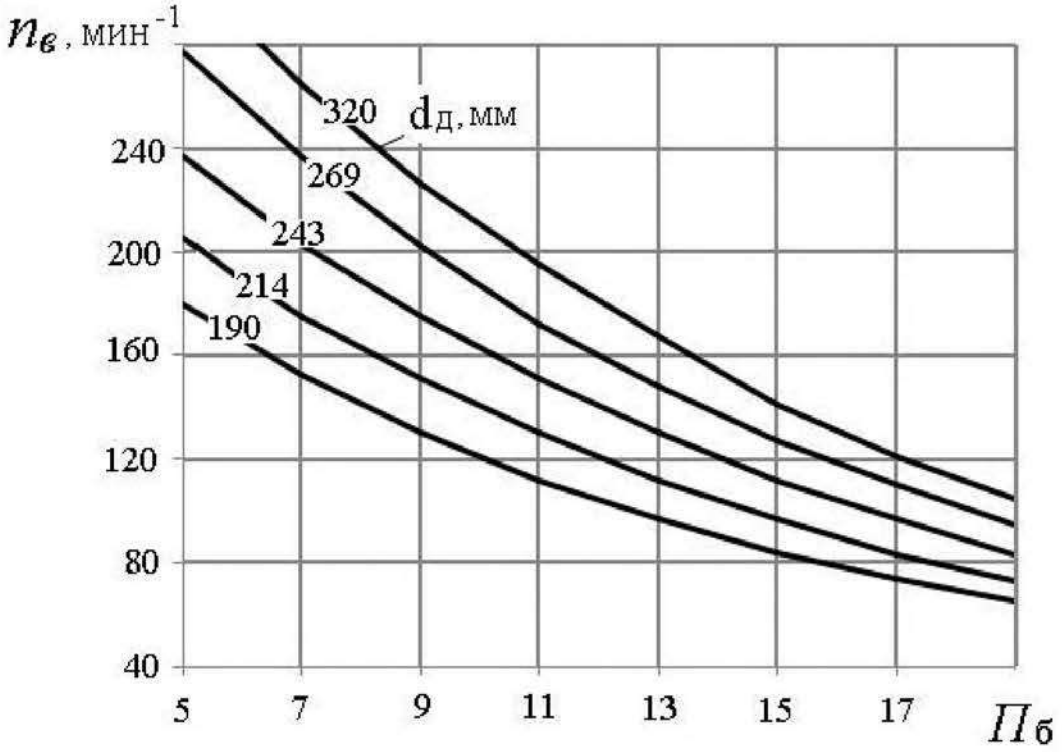
| Время замедления, τ, мс | 0 | 10 | 25 | 50 | 75 и более |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_з$ | 1 | 0,95 | 0,90 | 0,85 | 0,80 |

***Исходные данные к практической работе № 5***
**«Расчет производительности бурового станка»**

| Вариант | $d_д$, мм | $\sigma_{сж}$, МПа | $\sigma_{сд}$, МПа | $\rho$, т/м$^3$ | $T_{см}$, ч/смен | $T_в$, ч/м | $(T_{п.з} + T_р)$, ч/смен |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 214 | 97 | 13 | 3,4 | 8 | 0,03 | 0,5 |
| 2 | 190 | 80 | 9 | 3,0 | 12 | 0,03 | 0,7 |
| 3 | 243 | 140 | 14 | 3,8 | 8 | 0,04 | 0,6 |
| 4 | 320 | 159 | 16 | 2,7 | 12 | 0,04 | 0,7 |
| 5 | 243 | 120 | 10 | 2,5 | 8 | 0,05 | 0,5 |
| 6 | 214 | 87 | 10 | 3,9 | 12 | 0,05 | 0,7 |
| 7 | 320 | 145 | 17 | 3,7 | 8 | 0,03 | 0,6 |
| 8 | 214 | 90 | 10 | 2,7 | 12 | 0,03 | 0,7 |
| 9 | 190 | 95 | 17,5 | 2,8 | 8 | 0,04 | 0,5 |
| 10 | 269 | 113,5 | 8,5 | 2,9 | 12 | 0,04 | 0,7 |
| 11 | 320 | 164 | 8,5 | 3,1 | 8 | 0,05 | 0,6 |
| 12 | 320 | 152 | 9 | 4,0 | 12 | 0,05 | 0,7 |
| 13 | 269 | 112 | 14 | 3,4 | 8 | 0,03 | 0,5 |
| 14 | 190 | 80 | 8 | 2,3 | 12 | 0,03 | 0,7 |
| 15 | 269 | 100 | 15 | 2,4 | 8 | 0,04 | 0,6 |
| 16 | 190 | 160 | 10 | 3,2 | 8 | 0,03 | 0,7 |
| 17 | 320 | 164 | 9 | 2,7 | 12 | 0,04 | 0,6 |
| 18 | 214 | 145 | 16 | 2,3 | 8 | 0,03 | 0,5 |
| 19 | 269 | 150 | 15 | 3,1 | 12 | 0,04 | 0,7 |
| 20 | 214 | 80 | 12 | 2,5 | 8 | 0,05 | 0,6 |

Приложение 8

**Зависимость оптимальной скорости вращения $n_в$ бурового става станков СБШ от $П_б$ и $d_д$**




Приложение 9

**Значение коэффициента $k$ в зависимости от показателя буримости горных пород**

| $П_б$ | ≥ 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 0,700 | 0,725 | 0,750 | 0,775 | 0,800 | 0,825 |

Приложение 10

*ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ № 6*
**«Расчет производительности карьерных экскаваторов»**

| Вариант | Модель экскаватора | Категория пород по трудности экскавации | β, град | $T_{см}$, ч/смен | $n_г$, дней/год | Вид транспорта | $k_и$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ЭКГ-3,2 | III | 90 | 8 | 260 | Авто | 0,75 |
| 2 | ЭКГ-5А | IV | 130 | 12 | 260 | Ж.-д. | 0,60 |
| 3 | ЭКГ-8И | V | 120 | 8 | 250 | Авто | 0,72 |
| 4 | ЭКГ-6,3УС | III | 100 | 12 | 250 | Ж.-д. | 0,63 |
| 5 | ЭКГ-5А | IV | 120 | 8 | 250 | Авто | 0,74 |
| 6 | ЭКГ-8И | V | 130 | 12 | 250 | Ж.-д. | 0,68 |
| 7 | ЭКГ-6,3УС | III | 120 | 8 | 250 | Авто | 0,75 |
| 8 | ЭКГ-12,5 | IV | 110 | 12 | 230 | Ж.-д. | 0,65 |
| 9 | ЭКГ-3,2 | V | 90 | 8 | 260 | Авто | 0,73 |
| 10 | ЭКГ-5А | III | 120 | 12 | 240 | Ж.-д. | 0,68 |
| 11 | ЭКГ-6,3УС | IV | 130 | 8 | 240 | Авто | 0,75 |
| 12 | ЭКГ-8И | V | 140 | 12 | 240 | Ж.-д. | 0,63 |
| 13 | ЭКГ-12,5 | III | 150 | 8 | 250 | Авто | 0,73 |
| 14 | ЭКГ-20 | IV | 90 | 12 | 230 | Ж.-д. | 0,64 |
| 15 | ЭКГ-5А | V | 120 | 8 | 240 | Авто | 0,74 |
| 16 | ЭКГ-3,2 | III | 110 | 12 | 260 | Ж.-д. | 0,65 |
| 17 | ЭКГ-5А | IV | 115 | 8 | 240 | Авто | 0,75 |
| 18 | ЭКГ-6,3УС | V | 140 | 12 | 250 | Ж.-д. | 0,68 |
| 19 | ЭКГ-8И | III | 95 | 8 | 240 | Авто | 0,74 |
| 20 | ЭКГ-12,5 | IV | 115 | 12 | 250 | Ж.-д. | 0,63 |

Приложение 11

**Коэффициенты разрыхления пород в ковше экскаватора и наполнении ковша (по ЕНВ)**

| Категория пород по трудности экскавации | Плотность пород в целике ρ, т/м$^3$ | $k_р$ | $k_н$ |
|---|---|---|---|
| I | 1,6 | 1,15 | 1,05 |
| II | 1,8 | 1,25 | 1,05 |
| III | 2,0 | 1,35 | 0,95 |
| IV | 2,5 | 1,50 | 0,90 |
| V | 3,5 | 1,60 | 0,90 |

Приложение 12

***Исходные данные для расчетов к практической работе № 7***
**«Определение производительности карьерных автосамосвалов»**

| Вариант | Категория пород (по ЕНВ) | Параметры трассы | | Исследуемая зависимость |
|---|---|---|---|---|
| | | $L$, км | $H_{п}$, м | |
| 1 | I | 1,2 | 20 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 2 | II | 4,0 | 80 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 3 | III | 1,4 | 40 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 4 | IV | 3,8 | 20 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 5 | V | 1,6 | 60 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 6 | I | 3,6 | 200 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 7 | II | 1,8 | 100 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 8 | III | 3,4 | 120 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 9 | IV | 2,0 | 60 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 10 | V | 3,2 | 140 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 11 | I | 2,2 | 80 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 12 | II | 3,0 | 140 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 13 | III | 2,4 | 140 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 14 | IV | 2,8 | 60 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 15 | V | 2,6 | 160 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 16 | I | 4,0 | 200 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 17 | II | 1,0 | 20 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 18 | III | 1,4 | 60 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |
| 19 | IV | 1,8 | 80 | $Q_{а} = f(L)$ |
| 20 | V | 3,6 | 220 | $Q_{а} = f(H_{п})$ |

Приложение 13

**Техническая характеристика карьерных автосамосвалов БелАЗ**

| Показатель | Модель автосамосвала | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | БелАЗ - 7540 | БелАЗ - 7548 | БелАЗ - 7549 | БелАЗ - 7514 | БелАЗ - 7521 |
| Грузоподъемность, $q_a$, т | 30,0 | 42,0 | 80,0 | 120,0 | 180,0 |
| Собственная масса, $G_a$, т | 21,9 | 29,5 | 67,0 | 95,0 | 163,0 |
| Геометрическая вместимость кузова, $V_a$, м$^3$ | 15,0 | 21,0 | 35,0 | 47,0 | 84,0 |
| Вместимость кузова «с шапкой», $V'_a$, м$^3$ | 18,0 | 26,0 | 46,0 | 61,0 | 110,0 |
| К. п. д. трансмиссии, $\eta_т$ | 0,70 | 0,70 | 0,78 | 0,77 | 0,77 |
| Мощность двигателя, $N_д$, кВт | 310 | 368,0 | 809 | 1029,0 | 1691 |
| Продолжительность, мин: | | | | | |
| маневровых операций при установке на погрузку, $t_{м.п}$ | 0,50 | 0,59 | 0,64 | 0,70 | 0,87 |
| маневровых операций при установке на разгрузку, $t_{м.р}$ | 0,54 | 0,64 | 0,69 | 0,76 | 0,94 |
| разгрузки, $t_р$ | 0,67 | 0,78 | 1,00 | 1,17 | 1,51 |
| Ширина проезжей части автодороги при двухполосном движении, $T$, м | 10,5 | 11,5 | 14,5 | 16,0 | 19,0 |

Приложение 14

**Значение коэффициента технической готовности автосамосвалов ($k_{т.г}$)**

| Грузоподъемность автосамосвала, т | Значение $k_{т.г}$ при суточном пробеге, $L_c$, км | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 |
| 30 – 42 | 0,94 | 0,88 | 0,84 | 0,80 | 0,76 | 0,73 | 0,70 |
| 80 | 0,93 | 0,86 | 0,81 | 0,76 | 0,72 | 0,69 | 0,64 |
| 110 – 180 | 0,92 | 0,86 | 0,81 | 0,76 | 0,72 | 0,68 | 0,64 |

**Среднетехнические скорости движения карьерных автосамосвалов ($v_{ср.т}$), км/ч**

| Расстояние, $L$, км | Высота подъема горной массы, $H_п$, м | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 | 240 |
| 1,0 | 22,7 | 21,1 | 18,4 | 16,0 | | | | | | | | | |
| 1,2 | 23,9 | 21,8 | 19,5 | 17,5 | 15,8 | | | | | | | | |
| 1,4 | 24,1 | 22,0 | 20,0 | 18,3 | 16,7 | | | | | | | | |
| 1,6 | 24,7 | 22,5 | 20,6 | 19,0 | 17,6 | 16,3 | | | | | | | |
| 1,8 | 25,3 | 23,3 | 21,5 | 19,9 | 18,6 | 17,4 | 16,2 | | | | | | |
| 2,0 | 26,0 | 24,0 | 22,3 | 20,8 | 19,5 | 18,3 | 17,2 | | | | | | |
| 2,2 | 26,7 | 24,8 | 23,1 | 21,7 | 20,4 | 19,2 | 18,1 | 17,2 | | | | | |
| 2,4 | 27,3 | 25,5 | 23,9 | 22,5 | 21,2 | 20,0 | 19,0 | 18,0 | 17,2 | | | | |
| 2,6 | 27,9 | 26,2 | 24,6 | 23,2 | 22,0 | 20,8 | 19,8 | 18,9 | 17,9 | 17,2 | | | |
| 2,8 | 28,6 | 26,9 | 25,4 | 24,0 | 22,7 | 21,6 | 20,6 | 19,6 | 18,8 | 18,0 | | | |
| 3,0 | 29,2 | 27,5 | 26,1 | 24,7 | 23,5 | 22,4 | 21,3 | 20,4 | 19,5 | 18,7 | 18,0 | | |
| 3,2 | 29,7 | 28,2 | 26,7 | 25,3 | 24,2 | 23,2 | 22,0 | 21,1 | 20,2 | 19,4 | 18,6 | | |
| 3,4 | 30,4 | 28,8 | 27,4 | 26,1 | 24,9 | 23,7 | 22,7 | 21,8 | 20,9 | 20,1 | 19,2 | 18,2 | |
| 3,6 | 31,0 | 29,4 | 28,0 | 26,7 | 25,5 | 24,4 | 23,4 | 22,5 | 21,6 | 20,8 | 19,6 | 18,7 | 17,7 |
| 3,8 | 31,6 | 30,0 | 28,6 | 27,4 | 26,1 | 25,1 | 24,1 | 23,1 | 22,3 | 21,4 | 20,2 | 19,4 | 18,4 |
| 4,0 | 32,0 | 30,6 | 29,2 | 28,0 | 26,8 | 25,7 | 24,7 | 23,8 | 22,9 | 22,1 | 20,9 | 20,0 | 19,2 |

***Исходные данные к практической работе № 8***
**«Конструкция рабочего и нерабочего бортов карьера»**

| Вариант | $H_у$, м | $n_{ру}$ | α, град | $\alpha_у$, град | $b_с$, м | $i$, ед | Исследуемая зависимость φ от следующих параметров |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 3 | 65 | 55 | 16 | 0,08 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 2 | 10 | 4 | 70 | 55 | 12 | 0,04 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 3 | 12 | 5 | 65 | 52 | 15 | 0,06 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 4 | 12 | 3 | 70 | 64 | 20 | 0,03 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 5 | 15 | 4 | 70 | 60 | 15 | 0,04 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 6 | 15 | 5 | 75 | 67 | 18 | 0,06 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 7 | 18 | 3 | 75 | 70 | 12 | 0,03 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 8 | 18 | 4 | 80 | 70 | 10 | 0,04 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 9 | 10 | 5 | 75 | 68 | 15 | 0,06 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 10 | 15 | 3 | 80 | 69 | 16 | 0,03 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 11 | 20 | 4 | 65 | 57 | 12 | 0,04 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 12 | 10 | 5 | 70 | 60 | 13 | 0,06 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 13 | 15 | 3 | 65 | 57 | 10 | 0,03 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 14 | 20 | 4 | 70 | 65 | 15 | 0,04 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 15 | 12 | 5 | 70 | 59 | 16 | 0,06 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 16 | 10 | 3 | 80 | 68 | 17 | 0,03 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 17 | 12 | 4 | 65 | 58 | 18 | 0,04 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 18 | 20 | 5 | 70 | 60 | 15 | 0,06 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |
| 19 | 15 | 3 | 70 | 60 | 12 | 0,08 | $\varphi = f(H_у)$ |
| 20 | 20 | 4 | 75 | 60 | 13 | 0,04 | $\varphi = f(Ш_{р.п})$ |

***Исходные данные к практической работе № 9***
**«Расчет бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте»**

| Вариант | $W$, млн м$^3$ | $П_в^г$, млн м$^3$/год | Характеристика складируемых пород | |
|---|---|---|---|---|
| | | | тип | ρ, т/м$^3$ |
| 1 | 160 | 8,0 | Рыхлые | 1,6 |
| 2 | 180 | 9,0 | Полускальные | 1,8 |
| 3 | 200 | 10,0 | Полускальные | 2,0 |
| 4 | 220 | 11,0 | Скальные | 2,5 |
| 5 | 120 | 5,0 | Скальные | 3,5 |
| 6 | 140 | 6,0 | Рыхлые | 1,6 |
| 7 | 185 | 7,5 | Полускальные | 1,8 |
| 8 | 260 | 12,5 | Полускальные | 2,0 |
| 9 | 170 | 8,5 | Скальные | 2,5 |
| 10 | 210 | 9,5 | Скальные | 3,5 |
| 11 | 250 | 13,0 | Рыхлые | 1,6 |
| 12 | 280 | 13,5 | Полускальные | 1,8 |
| 13 | 300 | 14,0 | Полускальные | 2,0 |
| 14 | 320 | 14,5 | Скальные | 2,5 |
| 15 | 195 | 9,0 | Скальные | 3,5 |
| 16 | 100 | 5,0 | Рыхлые | 1,6 |
| 17 | 150 | 7,5 | Полускальные | 1,8 |
| 18 | 200 | 9,4 | Полускальные | 2,0 |
| 19 | 210 | 8,3 | Скальные | 2,5 |
| 20 | 240 | 12,7 | Скальные | 3,5 |

Приложение 18

**Значение коэффициентов $k_{р}^{\circ}$, $k_{зав}$ и высоты яруса $h_{я}$**

| Породы | $h_{я}$, м | Значения коэффициентов | |
|---|---|---|---|
| | | $k_{р}^{\circ}$ | $k_{зав}$ |
| Скальные ..... | 30 - 60 | 1,12 - 1,20 | 0,7 |
| Полускальные, смешанные ..... | 20 - 40 | 1,06 - 1,12 | 0,8 |
| Рыхлые, глинистые ..... | 15 - 20 | 1,05 - 1,07 | 0,9 |

Приложение 19

**Производительность бульдозеров (по данным института Гипроруда)**

| Тип бульдозера | Сменная (за 8 ч) производительность при дальности перемещения грунта до 10 м в породах, м$^3$ | | |
|---|---|---|---|
| | рыхлые | полускальные | скальные |
| Д-685 на базе Т-100М | 1100 | 950 | 750 |
| ДЗ-27 на базе Т-130 | 1500 | 1300 | 1000 |
| Д-575 на базе Т-180 | 1900 | 1650 | 1300 |
| ДЗ-118 на базе ДЭТ-250М | 2200 | 1850 | 1500 |
| ДЗ-159УХЛ на базе Т-50.01 | 4740 | 4000 | 3230 |
| D10N (фирма «Катерпиллер») | 3730 | 3130 | 2536 |
| D11N (фирма «Катерпиллер») | 5510 | 4630 | 3750 |

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
«Уральский государственный горный университет»

**А. М. Вандышев, В. В. Потапов**

# ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА. ПОДЗЕМНАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ

## Учебно-методическое пособие

по выполнению практических работ по дисциплине
«Основы горного дела»
для студентов специальности 21.05.04 Горное дело специализации
«Электрификация и автоматизация горного производства»

Екатеринбург
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
«Уральский государственный горный университет»

Одобрено
Методической комиссией
горно-технологического факультета
« __24_ » _сентября_____ 2019 г.
Председатель комиссии

_____ Колчина Н. В.
(подпись)

**А. М. Вандышев, В. В. Потапов**

# ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА. ПОДЗЕМНАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ

## Учебно-методическое пособие

по выполнению практических работ по дисциплине
«Основы горного дела»
для студентов специальности 21.05.04 Горное дело специализации
«Электрификация и автоматизация горного производства»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

УДК 622.34
В 17

Рецензент: Беркович В. Х., канд. техн. наук, доцент кафедры ГД
(ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»)

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры горного дела 19 сентября 2019 (протокол № 1-19/20) и рекомендовано для издания в УГГУ.

**Вандышев А. М. , Потапов В. В.**

В 17 ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА. ПОДЗЕМНАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ. Учебно-методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Основы горного дела» для студентов специальности 21.05.04 Горное дело специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»

Изложены теоретические основы, методические указания и задания по практическим работам. Приведены примеры выполнения работ.
Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 21.05.04 Горное дело. дело специализации «Электрификация и автоматизация горного производства»

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Вандышев А. М., 2019
Потапов В. В., 2019

# 1. ИЗУЧЕНИЕ ФОРМ И ЭЛЕМЕНТОВ ЗАЛЕГАНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

**Цель работы.** Закрепление и углубление знаний студентов по условиям и элементам залегания угольных пластов, а также привитие студентам навыков по определению основных параметров залегания полезных ископаемых.

**Теоретические основы выполнения работы.**

По форме залегания месторождения твердых полезных ископаемых подразделяются на правильные и неправильные.

К правильным месторождениям относятся пласты (рис. 1.1, *а*) и пластообразные залежи.

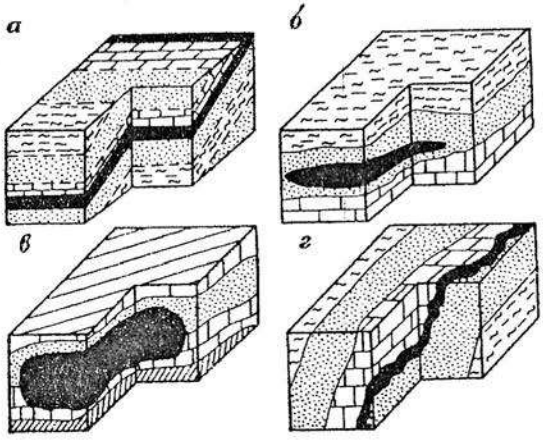



Рис .1.1. Форма залегания полезных ископаемых в недрах:
*а* – пласт; *б* – линза; *в* – гнездо; *г* – жила

**Пластом** называется плитообразная залежь, имеющая значительное распространение в земной коре и ограниченная двумя более или менее параллельными плоскостями. Весьма тонкие пласты, не разрабатываемые вследствие малой мощности (до 0,4 м), называются прослойками. Плоскости соприкосновения пластов отдельных пород называются плоскостями напластования.

Породы, залегающие над пластом полезного ископаемого, называются кровлей или висячим боком, залегающие ниже пласта, – почвой или лежачим боком.

Пласты могут иметь однородное (простое) и сложное строение (рис. 1.2). Тонкие слои пустой породы, заключенные в пласте, называются прослойками.

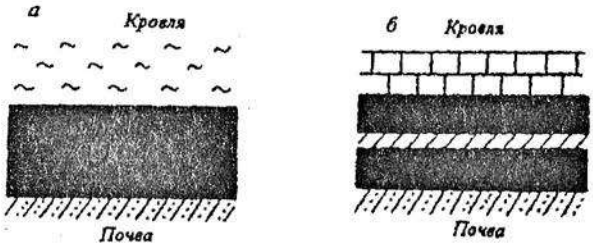



Рис. 1.2. Строение пластов:
*а* – простое; *б* - сложное

Правильную форму залегания обычно имеют месторождения полезных ископаемых осадочного происхождения (уголь, горючие сланцы, различные соли, гипс, марганцевые руды и т. п.).

Часть пласта, выходящая на земную поверхность или находящаяся неглубоко от нее под наносами, называется выходом пласта под наносы. Пласты угля залегают согласно, если они в земной коре расположены параллельно друг другу. Несколько согласно залегающих пластов составляют свиту.

К неправильным месторождениям относятся линзы (рис. 1.1, *б*), гнезда (рис. 1.1, *в*), жилы (рис. 1.1, *г*). Неправильную форму залегания имеют, как правило, рудные месторождения.

Жилой называется заполненная минеральным веществом трещина в земной коре. Жилы бывают простые и сложные. Ответвления от жил называют апофизами.

Такие формы залегания, как линзы, гнезда, штоки, представляют собой полости в земной коре, заполненные минеральным веществом. Они отличаются друг от друга формой и размерами. Такую форму залегания имеют месторождения железных, медных, полиметаллических и других руд.

Пласты горных пород в период образования залегали более или менее горизонтально, но под действием тектонических (горообразовательных) процессов, протекавших в земной коре, первоначальное залегание пород нарушалось в той или иной степени. В некоторых районах пласты оказались собранными в складки. Они могут занимать любое положение в земной коре.

Нарушения нормального залегания пластов называются дислокациями. Дислокации без разрыва сплошности называются пликативными, с разрывом сплошности – дизъюнктивными.

К пликативным нарушениям относятся утолщения и утонения пластов, а также складчатость (рис. 1.3).

В разрезе складки в горизонтальной плоскости в центре расположено **ядро**, а вокруг – боковые части или **крылья** складки. Если в ядре залегают более молодые породы, чем в крыльях, то складку называют синклинальной или сокращенно **синклиналью** (см. рис. 1.3, *а*).

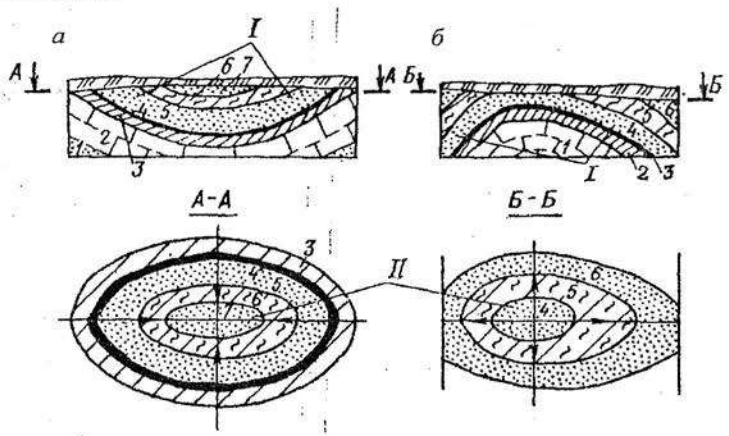



Рис. 1.3. Синклинальная (*а*) и антиклинальная (*б*) складки угольного пласта и вмещающих пород (стрелками на плане показано падение крыльев складок):
*I* - крылья складки; *II* - ядро складки; *1 - 7* – номера слоев горных пород в порядке убывания их геологического возраста

Если ядро складки сформировано более древними породами, чем крылья, то такую складку называют антиклинальной или **антиклиналью** (рис. 1.3, *б*). В синклинальной складке падение направлено к ядру, в антиклинальной – от ядра к ее краевым частям.

К дизъюнктивным (разрывным) нарушениям относят сброс, взброс, надвиг, сдвиг, грабен, горст. Для дизъюнктивного нарушения характерно наличие поверхности внутри горного массива, по которой произошли разрыв и последующие перемещения блоков сместителя. Породы, залегающие над сместителем, называют его висячим крылом, под сместителем - лежачим крылом. Угол между плоскостью сместителя и горизонтальной плоскостью называют углом падения сместителя.

Сброс образуется в том случае, если породы висячего крыла в результате тектонических движений оказываются опущенными по отношению к породам лежачего крыла (рис. 1.4, *а*).

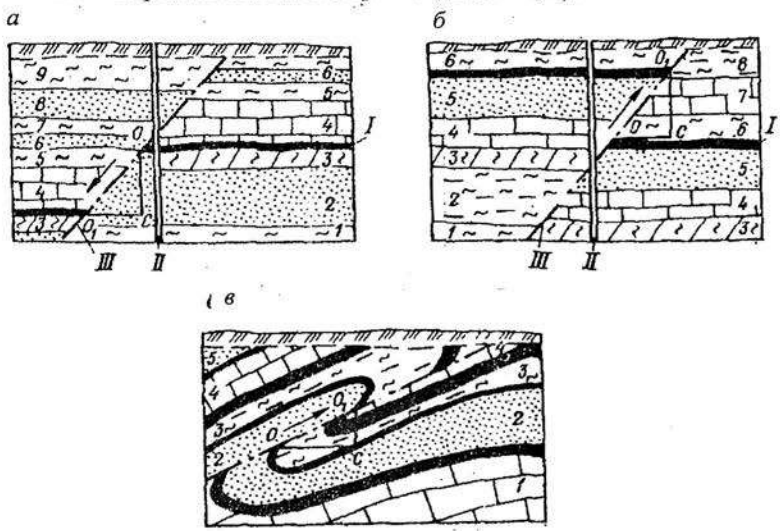



Рис.1.4. Сброс (*а*), взброс (*б*) и надвиг (*в*) пород:
*1 - 9* - номера слоев горных пород в порядке убывания их геологического возраста; *I* – угольный пласт; *II* – разведочная скважина; *III* – след плоскости смещения

Взброс – такое разрывное нарушение залегания пласта, когда породы висячего крыла смещены вверх над породами лежачего крыла (рис. 1.4, *б*). Плоскость смещения при взбросе называют взбрасывателем. Для безошибочного распознавания типа нарушения следует пронумеровать слои пород и пласты в порядке убывания их геологического возраста и через плоскость смещения мысленно провести вертикальную скважину. При сбросе по линии скважины наблюдается пропуск слоев или пластов, при взбросе – их повторение.

Надвиг – взброс, у которого плоскость взбрасывателя наклонена на угол до 45° при значительном горизонтальном смещении взброшенного крыла (рис. 1.4, *в*). Сдвиг – разрыв с перемещением (раздвижкой) крыльев в горизонтальном направлении. Грабен и горст представляют собой блокообразное опускание и поднятие горных пород. Каждый из них имеет два разрыва и три крыла.

Перемещение какой-либо точки горных пород от начального ее положения по горизонтали (отрезок $A_1M$) называют горизонтальной, по вертикали (отрезок $AM$) – вертикальной амплитудой нарушения. На рис. 1.5 показаны элементы разрывных нарушений: простирание, характеризуемое азимутом линии простирания, и падение, характеризуемое углом падения, азимутом линии падения и амплитудой.

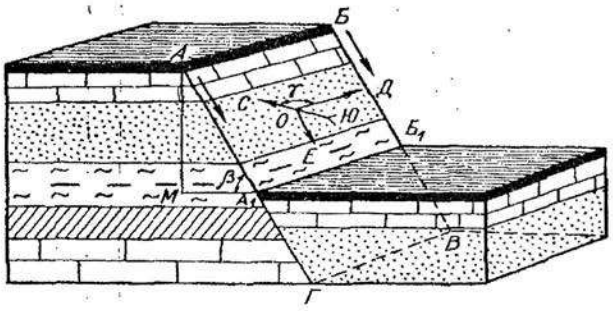



Рис.1.5. Элементы залегания геологического нарушения пласта типа сброса:
*АБВГ* – плоскость сместителя; *ОД* и *ОЕ* – соответственно простирание и падение сбрасывателя; *АМ* и $MA_1$ - соответственно вертикальная и горизонтальная амплитуды нарушения; $\gamma$ - азимут линии простирания; $\beta$ – угол падения сбрасывания

Для правильного выбора способа, технологии и средств механизации ведения горных работ важно возможно точнее знать не только форму, простирание, падение и мощность угольных пластов, но и тип, число и элементы залегания геологических нарушений.

Положение пластов в земной коре определяется элементами их залегания. К ним относятся простирание, угол падения и мощность.

Положение пласта в пространстве определяется линией простирания – линией пересечения пласта с любой горизонтальной плоскостью (рис. 1.6). Направление линии простирания в пространстве принято называть простиранием пласта. Так как линия простирания всегда лежит в горизонтальной плоскости, то на плане ее длина изображается без искажений.

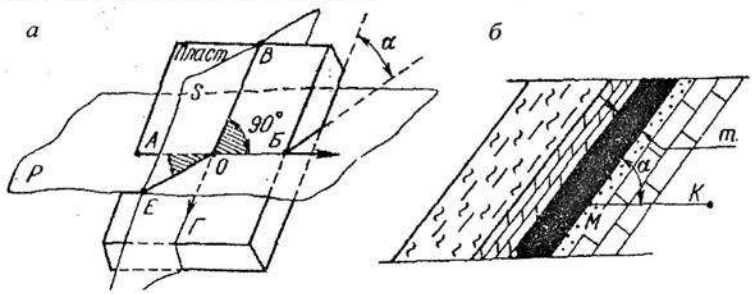



Рис. 1.6. Элементы залегания угольного пласта:
*а* – общий вид; *б* – вертикальный разрез, проведенный перпендикулярно к линии простирания; *Р* – горизонтальная плоскость; *S* - вертикальная плоскость; *ЕО, МК* – линии вкрест простирания; *α* – угол падения; *m* – мощность пласта; $\angle AOE = 90°$

Направление простирания пласта определяется углом, который составляет линия простирания с меридианом.

Линия, лежащая в плоскости пласта перпендикулярно линии простирания, называется линией падения, а само направление этой линии – падением пласта.

Угол, который составляет линия падения пласта с горизонтальной плоскостью, называется углом падения пласта.

В зависимости от формы залегания и способа разработки полезных ископаемых их делят на горизонтальные, пологие, крутонаклонные и крутые (табл. 1.1).

Таблица 1.2

**Классификация залежей полезных ископаемых по мощности**

| Тип пласта (залежи) по мощности | Мощность, м | | | |
|---|---|---|---|---|
| | угольных пластов | | | рудных месторождений |
| | при подземной разработке | при открытой разработке | | |
| | | горизонтальные и пологие | наклонные и крутые | |
| Весьма тонкий | до 0,7 | - | - | до 0,6 |
| Весьма малой мощности | - | до 3-5 | до 15-25 | - |
| Тонкий | 0,71-1,2 | - | - | 0,6-2 |
| Малой мощности | - | 6-20 | 25-75 | - |
| Средней мощности | 1,21-3,5 | 20-40 | 75-100 | 2-5 |
| Мощный | > 3,5 | - | - | 5-20 |
| Весьма мощный | - | - | - | >20 |
| Большой мощности | - | > 40 | >100 | - |

## Содержание и порядок выполнения работы

Первоначально студенты должны ознакомиться с теоретическими основами работы. Затем по планам горных работ они знакомятся с правилами нанесения элементов залегания пластов, изучают их структурные колонки, устанавливают наличие и вид геологических нарушений

При работе с планами и схемами горных работ студенты осуществляют зарисовку структурных колонок пластов, геологических нарушений (по указанию преподавателя) с основными элементами их залегания.

Далее следует ознакомиться с примерами и выполнить соответствующие расчеты для заданных преподавателем условий.

***Пример 1.*** *Мощность угольного пласта* $m = 2,5$ *м, угол падения* $\alpha = 20°$. *Определить горизонтальную* $m_г$ *и вертикальную* $m_в$ *мощности пласта.*

***Решение.***

$$m_г = \frac{2,5}{\sin 20°} = \frac{2,5}{0,342} = 7,2 \text{ м};$$

$$m_в = \frac{2,5}{\cos 20°} = \frac{2,5}{0,946} = 2,6 \text{ м}.$$

***Пример 2.*** *Из данных геологоразведочных работ известны значения вертикальной мощности* $m_в$ *= 3,0 м и угла падения пласта* $\alpha$=25 °. *Определить истинную* $m$ *и горизонтальную* $m_г$ *мощности пласта*

***Решение.***

$$m = 3,0 \cdot \cos 25° = 3,0 \cdot \cos 25° = 3,0 \cdot 0,914 = 2,75 \text{ м};,$$

$$m_г = \frac{2,75}{\sin 25°} = \frac{2,75}{0,42} = 6,5 \text{ м}$$

## Контрольные вопросы

1. Что такое угольный пласт?
2. Что называется простиранием пласта?
3. Что называется углом падения пласта?
4. Приведите классификацию угольных пластов по углу падения.
5. Приведите классификацию угольных пластов по мощности.
6. Какие угольные пласты относятся к угольным пластам сложного строения?
7. Что называется истинной мощностью пласта?
8. Чем принципиально различаются группы пликативных и дизъюнктивных нарушений?
9. Чем отличается синклиналь от антиклинали?
10. Чем отличается сброс от взброса?

## Рекомендуемая литература

1. Основы горного дела: учебник для вузов / В. П. Егоров [и др.] – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 408 с.

## 2. ИЗУЧЕНИЕ ФОРМ И ЭЛЕМЕНТОВ ШАХТНЫХ ПОЛЕЙ

**Цель работы.** Закрепление знаний о формах и элементах шахтных полей на примерах реально существующих шахт, а также приобретение навыков по определению размеров шахтного поля по простиранию и падению и построения по разведочным линиям геологических разрезов вкрест простирания пластов.

**Теоретические основы выполнения работы.** Промышленное предприятие, предназначенное для разработки или разведки месторождений полезных ископаемых, называют **горным предприятием**. Горное предприятие, осуществляющее добычу угля подземным способом, называют **шахтой**. Месторождение или его часть, отводимая для разработки одной шахте, называется **шахтным полем**.

Шахтное поле имеет границы по восстанию, падению и простиранию (рис. 2.1).

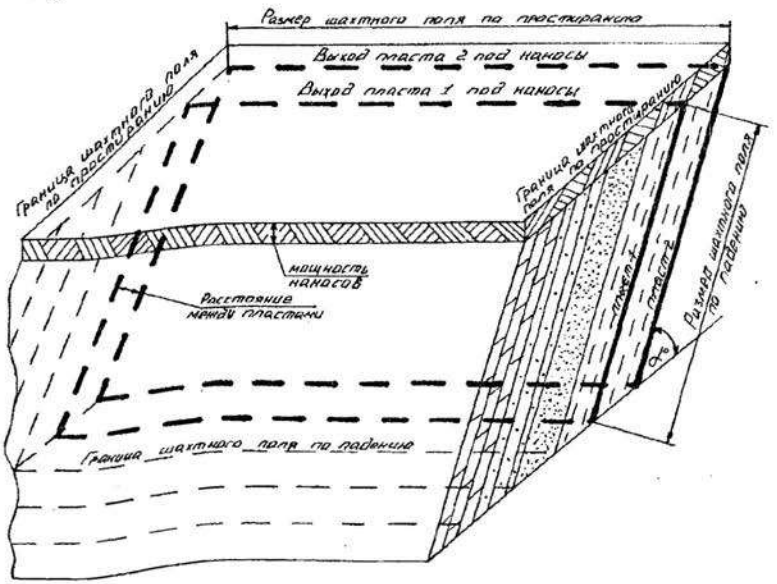



Рис. 2.1. Элементы шахтного поля

Границы шахтного поля могут быть фиксированными и условными. Форма шахтных полей может быть различной. Если все месторождение разрабатывают только одной шахтой, то его форма предопределяет конфигурацию шахтного поля, а границы месторождения и шахтного поля совпадают. Если же месторождение делят на несколько шахтных полей, то при выдержанных элементах залегания пластов шахтному полю по возможности придают форму прямоугольника, вытянутого по простиранию.

При невыдержанных элементах залегания пластов и в случае, если в пределах месторождения имеются крупные геологические нарушения, а также охранные целики под зданиями и сооружениями и водоемами, шахтные поля могут иметь самую разнообразную конфигурацию (рис. 2.2). Их границы в данном случае являются фиксированными.

Параметрами шахтного поля являются размеры по простиранию и падению. Размером по простиранию ($S$) называется наибольшее расстояние между боковыми границами шахтного поля.

Размером по падению ($H$) называется наибольшее расстояние между верхней и нижней границами шахтного поля в плоскости пласта.

Размеры полей угольных шахт колеблются в широких пределах. На пологих пластах они составляют 3 - 10 км по простиранию и до 2 - 3 км по падению, при наличии в шахтном поле мощных крутых пластов – 3 - 4 км по простиранию и до 0,7 - 1,5 км по падению.

Шахтное поле со всеми расположенными в их пределах выработками изображают на специальных (маркшейдерских) планах: при пологом, наклонном и крутонаклонном залегании пластов в виде проекции на горизонтальную плоскость, при крутом падении – на вертикальную плоскость (рис. 2.3). Возможна проекция и на плоскость, параллельную пласту. Пласты угля вычерчивают с соблюдением их истинного угла падения.

На маркшейдерские планы обычно наносят и изогипсы пласта (рис. 2.4). Изогипсы представляют собой линии пересечения почвы (или кровли) пласта с мысленно проводимыми на одинаковом расстоянии одна от другой горизонтальными плоскостями. изогипсы проводят через 10, 50 и даже 100 м в зависимости от угла падения и

принятого масштаба. Каждая изогипса имеет свою относительную отметку.

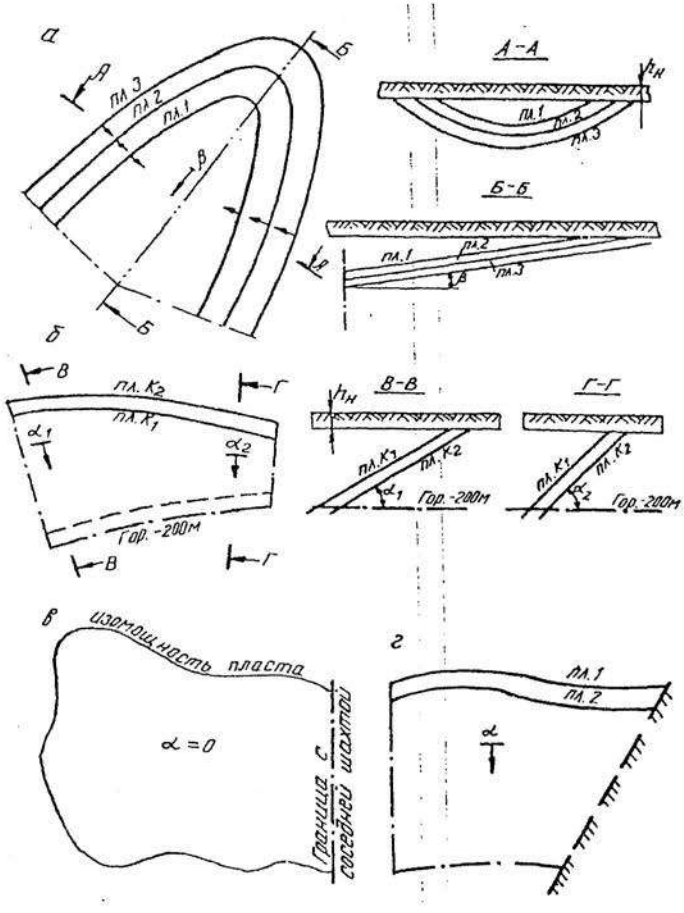



Рис. 2.2. Формы шахтных полей:
при синклинальной складке с наклонной осью (*а*); с переменным простиранием и углом падения пласта (*б*); при горизонтальном залегании пласта (*в*); при разрывных тектонических нарушениях (*г*)

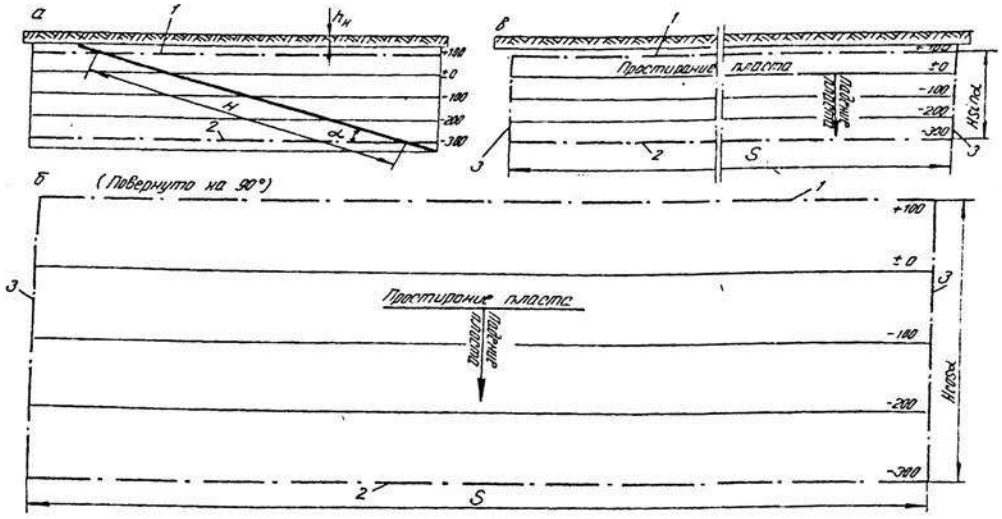



Рис. 2.3. Разрез по падению (*а*), горизонтальная (*б*) и вертикальная (*в*) проекции шахтного поля

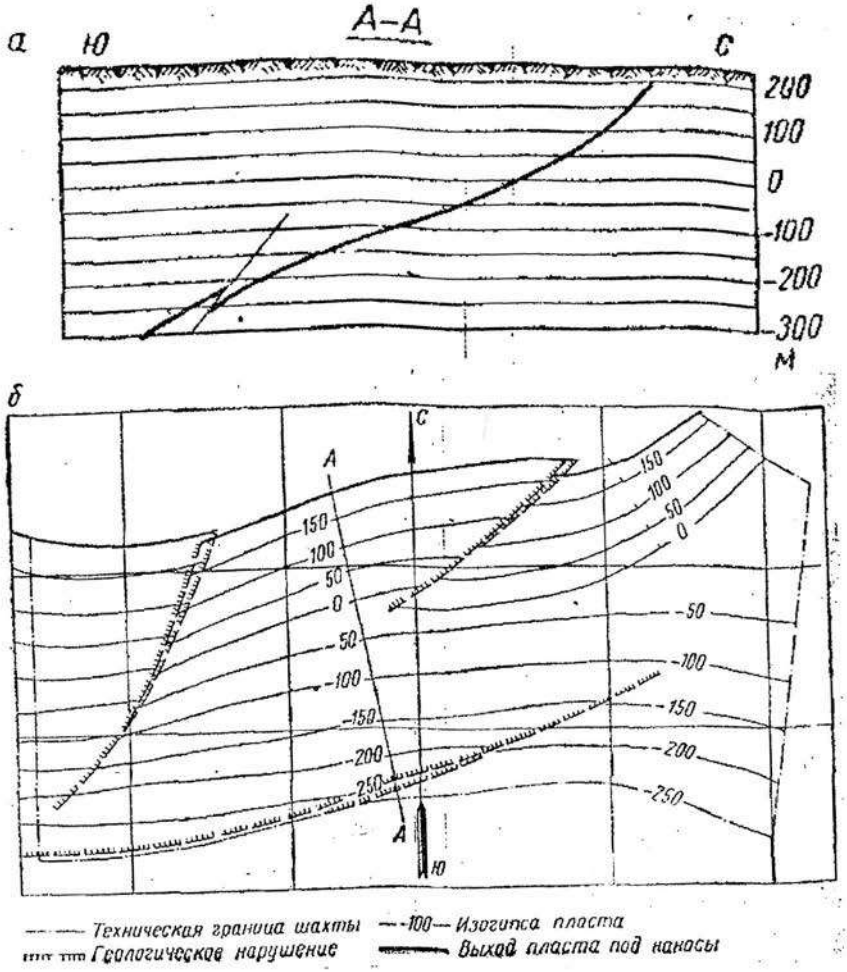



Рис. 2.4. Вертикальный разрез вкрест простирания (*а*) и гипсометрический план пласта (*б*)

Изогипсы почвы пласта предопределяют направление штреков по пласту. По изогипсам обычно проводят и нижнюю, и верхнюю границы шахтного поля.

## Содержание и порядок выполнения работы

Сначала студенты должны ознакомиться с теоретическими основами выполнения работы и тщательно разобрать приведенный пример.

Каждому студенту выдается план горных работ шахты. По определенным планам горных работ студенты изучают характер изменения изогипс почвы пласта.

Рассчитывается кратчайшее расстояние между изогипсами (м) по формуле

$$l=h \ \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (2.1)$$

Изучаются границы шахтного поля по простиранию, падению и восстанию, обращается внимание на обоснованность выбора технических границ шахты.

Вычерчивается в масштабе 1: 5000 или 1: 10000 план шахтного поля, на котором должны быть изображены границы шахтного поля по пласту, выход пласта под наносы, изогипсы почвы пласта, зарегистрированные геологические нарушения, разведочные скважины и выработки. Рассчитываются размеры шахтного поля по падению:

$$H = \frac{H_{\text{п}}}{\cos\alpha}, \qquad (2.2)$$

где $H_{\text{п}}$ - размер проекции шахтного поля по падению;

$\alpha$ - угол падения пласта, град.

При правильной форме шахтного поля приближенно рассчитывается его площадь, м$^2$:

$$F = SH. \qquad (2.3)$$

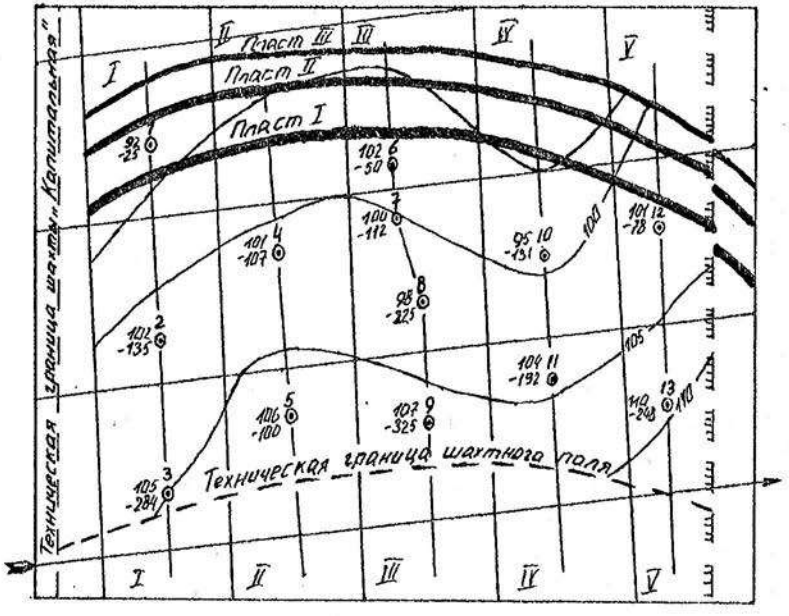
Строится геологический разрез по разведочной линии вкрест простирания в масштабе 1 : 1000 или 1 : 2000.

***Пример. 1.*** *Шахта «Центральная». Пласты I, II, III.*

2. Вычерчиваем в масштабе 1 : 5000 или 1 : 10000 топографический план поверхности с выходами пластов под наносы (рис. 2.5) и наносим на нем границы шахтного поля.

3. Границами шахтного поля шахты «Центральная» являются:

*а*




*б*

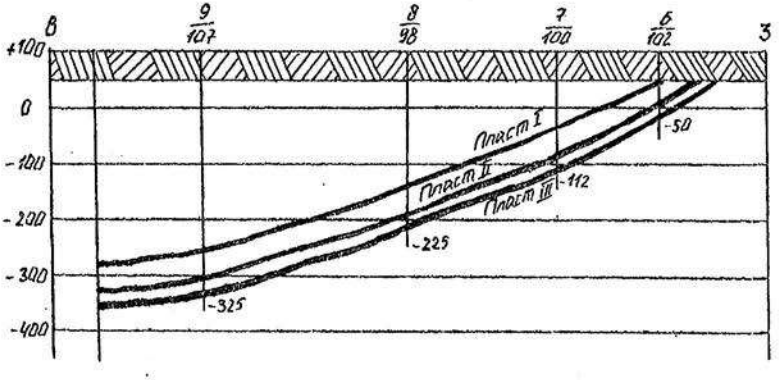



Рис. 2.5. Топографический план шахтного поля (*а*) и разрез по разведочной линии III – III (*б*)

по восстанию – выход пластов под наносы;

по падению – отметка горизонта -300 м;

по простиранию: на южном крыле – условная техническая граница поля шахты «Капитальная»; на северном крыле – геологическое нарушение с амплитудой 20 - 25 м.

На основе представленного на рис. 2.5. топографического плана поверхности с выходами пластов под наносы строим геологический разрез по разведочной линии *III - III*.

Средний размер шахтного поля по простиранию равен 4300 м, по падению - 2100 м.

Ориентировочная площадь шахтного поля шахты «Центральная»

$$F = SH = 4300 \cdot 2100 = 90300 \text{ м}^2.$$

## Контрольные вопросы

1. Что называют шахтным полем?
2. Какие бывают шахтные поля по форме границ?
3. Как принимаются границы шахтного поля по простиранию, падению и восстанию?
4. Назовите наиболее распространенные размеры шахтного поля по простиранию и падению?
5. Почему размеры шахтного поля по простиранию больше размеров по падению?
6. Почему верхнюю и нижнюю границы шахтного поля принимают по изогипсе пласта?

# 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСОВ И ПОТЕРЬ УГЛЯ В ШАХТНОМ ПОЛЕ

**Цель работы.** Приобретение навыков укрупненного определения балансовых и промышленных запасов, обоснования величины потерь угля в шахтном поле.

**Теоретические основы выполнения работы.**

Часть угольного месторождения, отведенную для разработки одной шахте, называют **шахтным** полем.

Запасы угля в шахтном поле – масса угля в недрах, заключенного в пределах шахтного поля. По народнохозяйственному значению запасы угля делят на геологические, балансовые, забалансовые и промышленные. **Геологическими** ($Z_{\text{геол}}$) называют общие запасы угля в шахтном поле. **Балансовыми** ($Z_{\text{бал}}$) считают такие запасы, разработка которых экономически целесообразна при существующем уровне техники и технологии. Забалансовыми ($Z_{\text{заб.}}$) называют такие запасы угля, разработка которых в настоящее время вследствие некондиционности мощности пластов, высокого содержания пустой породы, наличия многих геологических нарушений или обводненности экономически нецелесообразна. Эти запасы в будущем с совершенствованием техники и технологии добычи и обогащения угля могут быть полностью или частично вовлечены в разработку. Таким образом,

$$Z_{\text{геол}} = Z_{\text{бал}} + Z_{\text{заб}}. \tag{3.1}$$

Балансовые запасы подразделяются на промышленные ($Z_{\text{пр.}}$) и потери ($Z_{\text{п.}}$):

$$Z_{\text{бал}} = Z_{\text{пр}} + Z_{\text{п}}\,. \tag{3.2}$$

Промышленные запасы – часть балансовых запасов, подлежащая извлечению и выдаче на поверхность. Отношение промышленных запасов к балансовым называют коэффициентом извлечения ($C$):

$$C = \frac{Z_{пр}}{Z_{бал}}. \quad (3.3)$$

Величина коэффициента извлечения зависит от горно – геологических условий и колеблется в широких пределах. При ориентировочных расчетах рекомендуется этот коэффициент принимать равным:

для тонких пластов – 0,90 – 0,92;

для пластов средней мощности – 0,85 - 0,88;

для мощных пологих пластов – 0,82 - 0,85;

для мощных крутых пластов – 0,75 - 0,80.

В зависимости от условий залегания пластов применяют различные методы подсчета балансовых запасов /1, 2/. При выдержанных элементах залегания (мощность, угол падения) подсчет запасов ($Z_{бал}$) рекомендуется производить методом среднеарифметического по формуле

$$Z_{бал} = SH \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i , \quad (3.4)$$

где $S$ – размер шахтного поля по простиранию, м;

$H$ - размер шахтного поля по падению, м;

$n$ - число рабочих пластов в шахтном поле;

$m_i$ - мощность $i$-го рабочего пласта, м;

$\gamma_i$ - объемная масса угля $i$-го пласта, т/м$^3$, $\gamma_i$ = 1,30 – 1,45 т/м$^3$.

Для определения промышленных запасов необходимо установить величину потерь по каждому из пластов по их источникам: общешахтные (в охранных и барьерных целиках), эксплуатационные и связанные с геологическими нарушениями.

Промышленные запасы определяются по формуле

$$Z_{пр} = Z_{бал} - Z_{п} , \quad (3.5)$$

где $Z_{п}$ - суммарные потери угля, т.

Потери определяются на основании расчетов частных видов потерь: общешахтных ($Z_{об.}$), эксплуатационных ($Z_{эксп.}$) и вблизи геологических разрушений ($Z_{г.н.}$), т. е.

$$Z_{п} = Z_{об} + Z_{эксп} + Z_{г.н.}. \quad (3.6)$$

Общешахтные потери слагаются из потерь угля в барьерных ($Z_1$) и охранных ($Z_2$) целиках:

$$Z_{об} = Z_1 + Z_2. \quad (3.7)$$

Барьерные целики, как правило, оставляют у границ шахтного поля по простиранию, чтобы исключить возможность вскрытия старых затопленных горных выработок соседних шахт. Ширина барьерных целиков ($l$) условно принимается равной 50 м.

Потери в барьерных целиках ($Z_1$, т) определяются по формуле

$$2l\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i H. \quad (3.8)$$

Охранные целики оставляют для предотвращения разрушений зданий и сооружений технологического комплекса на поверхности, а также природных объектов. Методика построения охранных целиков и подсчета потерь угля в них приведена в Приложении 1. Потери угля в охранных целиках ($Z_2$, т) условно составляют при пологих пластах 1 - 2 %, при крутых - 2 - 4 % от балансовых запасов:

$$Z_2 = (0{,}01 \ldots 0{,}04)Z_{бал.}. \quad (3.9)$$

Потери в целиках вблизи геологических нарушений ($Z_{г.н.}$) определяются характером и числом нарушений. Их величина в среднем составляет 1 - 1,5 % от балансовых запасов:

$$Z_{г.н.} = (0{,}010 \ldots 0{,}015)Z_{бал.}. \quad (3.10)$$

Эксплуатационные потери ($Z_{эксп}$, т) включают потери по площади – в целиках у горных выработок, по мощности – в пачках угля

в кровле, почве или между слоями пласта, а также потери угля в забоях и при транспортировании.

Эксплуатационные потери угля

$$Z_{эксп} = (Z_{бал} - Z_{об} - Z_{г.н.})\, K_{э.п.}, \qquad (3.11)$$

где $K_{э.п.}$ - коэффициент эксплуатационных потерь; принимается для тонких пластов – 0,08; средней мощности – 0,12; мощных пологих – 0,15; мощных крутых – 0,20.

Общий коэффициент извлечения запасов в шахтном поле ($C_{извл.}$)

$$C_{извл} = \frac{Z_{пр}}{Z_{бал}}. \qquad (3.12)$$

***Пример.*** *Подсчитать промышленные запасы шахтного поля для следующих условий: размер шахтного поля по простиранию $S = 5250$ м, по падению – $H = 1800$ м; количество пластов 3, их мощность: $m_1 = 2{,}4$ м, $m_2 = 2{,}0$ м, $m_3 = 3{,}1$ м; средняя плотность угля $\gamma = 1{,}4$ т/м$^3$; коэффициент эксплуатационных потерь $K_{эп} = 0{,}15$; коэффициент потерь в охранных целиках $K_ц = 0{,}01$; ширина барьерных целиков на границах шахтного поля по простиранию $l = 50$ м.*

***Решение.***

1. Определяем балансовые запасы в шахтном поле:

$$Z_б = SH\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i = 5250 \cdot 1800 \cdot (2{,}4 + 2{,}0 + 3{,}1) \cdot 1{,}4 = 99225000 \text{ т}.$$

2. Подсчитываем потери угля в шахтном поле:

в барьерных целиках

$$Z_1 = 2lH\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i = 2 \cdot 50 \cdot 1800 \cdot (2{,}4 + 2{,}0 + 3{,}1) \cdot 1{,}4 = 1890000 \text{ т};$$

в охранных целиках

$$Z_2 = K_ц Z_{бал} = 0{,}01 \cdot 99225000 = 992250 \text{ т};$$

эксплуатационные

$$Z_{\text{эксп}} = (Z_{\text{бал}} - Z_1 - Z_2)K_{\text{эп}} = (99225000 - 1890000 - 992250) \cdot 0{,}15 =$$

$$= 14451413 \text{ т};$$

суммарные

$$Z_{\text{п}} = Z_1 + Z_2 + Z_{\text{эксп}} = 1890000 + 992250 + 14451413 = 17333663 \text{ т}.$$

3. Определяем промышленные запасы угля в шахтном поле:

$$Z_{\text{пр}} = Z_{\text{б}} - Z_{\text{п}} = 99225000 - 17333663 = 81891337 \text{ т}.$$

4. Рассчитываем коэффициент извлечения запасов угля из недр:

$$C_{\text{извл}} = \frac{Z_{\text{пр}}}{Z_{\text{бал}}} = \frac{81891337}{992250000} = 0{,}83 .$$

Графическая интерпретация потерь угля в шахтном поле показана на рис. 3.1.

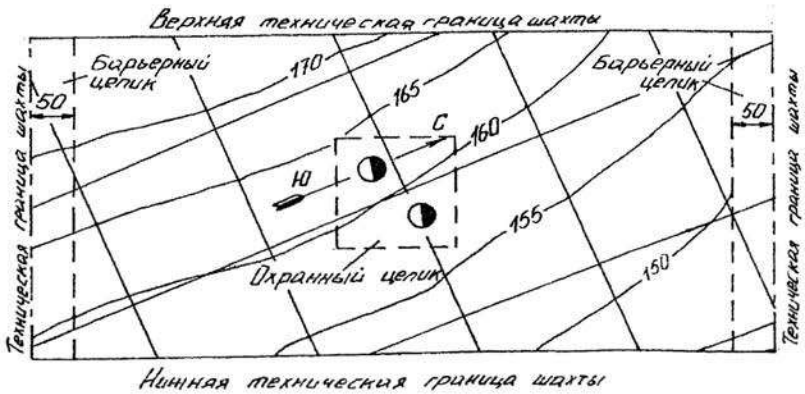



Рис. 3.1. Графическая интерпретация потерь угля в шахтном поле

## Порядок выполнения работы

После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы студенты получают вариант задания, отражающий горно-геологические и горнотехнические условия шахтного поля (табл. 3.1).

Таблица 3.1

**Исходные данные для выполнения работы**

| Номер варианта | Размеры шахтного поля, м | | Вынимаемая мощность пластов, м | | | | Плотность угля γ, т/м$^3$ | Коэф. экспл. потерь $K_{эксп}$ | Коэф. потерь в целиках $K_ц$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S$ | $H$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | | | |
| 1 | 6100 | 1950 | 1,80 | 1,75 | 1,45 | 1,65 | 1,30 | 0,15 | 0,01 |
| 2 | 3800 | 1100 | 1,75 | 1,15 | 1,65 | 1,55 | 1,34 | 0,14 | 0,02 |
| 3 | 4300 | 3850 | 1,95 | 1,25 | 2,00 | 1,75 | 1,40 | 0,10 | 0,03 |
| 4 | 4900 | 1950 | 2,10 | 1,35 | 2,05 | 1,25 | 1,32 | 0,12 | 0,01 |
| 5 | 5300 | 2550 | 1,25 | 1,45 | 1,95 | 1,45 | 1,30 | 0,15 | 0,04 |
| 6 | 5150 | 2450 | 1,35 | 1,95 | 1,85 | 1,50 | 1,35 | 0,16 | 0,03 |
| 7 | 4000 | 1350 | 1,45 | 1,35 | 1,75 | 1,60 | 1,40 | 0,09 | 0,02 |
| 8 | 5050 | 1500 | 1,75 | 1,85 | 1,65 | 1,70 | 1,31 | 0,10 | 0,01 |
| 9 | 4250 | 1400 | 1,65 | 1,45 | 1,55 | 1,95 | 1,36 | 0,12 | 0,04 |
| 10 | 5250 | 2350 | 1,85 | 1,55 | 1,75 | 1,90 | 1,41 | 0,14 | 0,03 |
| 11 | 5100 | 3250 | 2,10 | 1,85 | 2,00 | 1,40 | 1,37 | 0,11 | 0,02 |
| 12 | 3150 | 1200 | 2,25 | 1,75 | 1,15 | 1,50 | 1,31 | 0,10 | 0,01 |
| 13 | 4700 | 1850 | 2,05 | 1,45 | 1,35 | 1,60 | 1,33 | 0,12 | 0,04 |
| 14 | 4650 | 2300 | 1,15 | 1,55 | 1,95 | 1,80 | 1,35 | 0,15 | 0,03 |
| 15 | 5050 | 2200 | 1,35 | 1,65 | 1,70 | 1,70 | 1,36 | 0,14 | 0,02 |
| 16 | 4200 | 4350 | 1,85 | 1,55 | 1,40 | 2,00 | 1,38 | 0,10 | 0,01 |
| 17 | 5200 | 1800 | 1,65 | 1,50 | 1,55 | 2,10 | 1,40 | 0,12 | 0,04 |
| 18 | 5000 | 3150 | 1,70 | 1,45 | 1,85 | 2,15 | 1,42 | 0,13 | 0,03 |
| 19 | 5650 | 1550 | 1,60 | 1,50 | 1,65 | 2,05 | 1,35 | 0,09 | 0.01 |
| 20 | 4950 | 2650 | 1,35 | 1,80 | 1,55 | 1,90 | 1,35 | 0,10 | 0,02 |
| 21 | 4050 | 4450 | 1,45 | 1,95 | 1,85 | 1,85 | 1,30 | 0,13 | 0,04 |
| 22 | 5550 | 1750 | 1,85 | 1,70 | 1,60 | 1,90 | 1,40 | 0,14 | 0,03 |
| 23 | 3950 | 1450 | 1,95 | 1,50 | 1,40 | 2,05 | 1,33 | 0,10 | 0,01 |
| 24 | 5350 | 4950 | 1,35 | 1,40 | 1,95 | 2,10 | 1,30 | 0,11 | 0,04 |
| 25 | 5500 | 2050 | 1,45 | 1,60 | 1,75 | 2,05 | 1,40 | 0,13 | 0,03 |

По заданным условиям осуществляется расчет балансовых и промышленных запасов шахтного поля, а также коэффициента извлечения угля из шахтного поля.

Приводится графическая интерпретация шахтного поля с нанесением границ возможных потерь угля.

## Контрольные вопросы

1. Что называется шахтным полем?
2. Какие запасы в шахтном поле называются балансовыми?
3. Какие запасы угля называются промышленными?
4. Какие виды потерь угля в шахтном поле Вы знаете?
5. Что называется коэффициентом извлечения запасов угля в шахтном поле?

## Рекомендуемая литература

1. Основы горного дела: учебник для вузов / П. В. Егоров [и др.]. – М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2000. – 408 с.

2. Подземная разработка пластовых месторождений. Теоретические и методические основы проведения практических занятий: учебное пособие. – 2-е изд. перераб. и доп. / О. В. Михеев [и др.]; под ред. Л. А. Пучкова. – М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 200[illegible] – 487 с.

# 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ МОЩНОСТИ И СРОКА СЛУЖБЫ ШАХТЫ

**Цель работы.** Приобретение навыков по определению мощности шахты и срока ее службы по укрупненным значениям исходных данных.

**Теоретические основы выполнения работы**. Мощность шахты является важнейшим производственным параметром, определение которого требует обязательного учета конкретных горно-геологических и горнотехнических характеристик.

**Производственной мощностью** шахты ($A$, т) называют количество полезного ископаемого, добываемого в единицу времени (сутки, год). Ее величину определяют такие горно-геологические характеристики, как: количество, мощность и угол падения пластов, свойства вмещающих пород, газоносность месторождения, величина запасов угля, степень нарушенности пластов и другие факторы. В значительной степени величина производственной мощности зависит и от организационно-технических факторов: режима работы очистных забоев и нагрузки на них, производительности транспорта, подъема и др.

**Срок службы шахты** ($T$, год) равен периоду, в течение которого отрабатываются промышленные запасы угля в пределах шахтного поля.

В учебных целях на первом этапе изучения дисциплины с учетом уровня и объема имеющихся знаний показатели $A$ и $T$ можно определять по упрощенной методике. Между промышленными запасами $Z_{\text{пр}}$, годовой мощностью шахты $A_{\text{г}}$ и расчетным сроком ее службы $T_{\text{р}}$ существует следующая взаимосвязь:

$$Z_{\text{пр}} = A_{\text{г}} T_{\text{р}} . \qquad (4.1)$$

При правильной конфигурации шахтного поля и выдержанных элементах залегания пластов промышленные запасы угля определяются по формуле

$$Z_{\text{пр}} = SH \sum PC_{\text{о}} . \qquad (4.2)$$

где $S$ - размер шахтного поля по простиранию, м;

$H$ - размер шахтного поля по падению, м;

$\sum P$ - суммарная производительность рабочих пластов в шахтном поле, т/м$^2$;

$C_o$ - общий коэффициент извлечения угля в шахтном поле.

Суммарная производительность пластов в шахтном поле

$$\sum P = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + \cdots + m_n \gamma_n, \qquad (4.3)$$

где $m_i$ - мощность рабочих пластов в шахтном поле, м;

$\gamma_i$ - плотность угля соответствующих пластов, т/м$^3$.

Отсюда значение $A_г$ можно определить по формуле

$$A_г = \frac{Z_{пр}}{T_р}. \qquad (4.4)$$

Полученное значение $A_г$ следует привести в соответствие с параметрическим рядом мощностей шахт: 0,9; 1,2; 1,5; 1,8: 2,1; 2,4; 3,0; 4,5; 6,0 млн т в год. При этом расчетный срок службы шахты мощностью более 1,8 млн т в год рекомендуется принимать не менее 50 - 60 лет.

Полный срок службы шахты $T_п$ будет больше расчетного за счет времени освоения проектной мощности и ее затухания к концу отработки запасов:

$$T_п = T_р + (t_р + t_з)/2, \qquad (4.5)$$

где $t_р$ - срок освоения проектной мощности шахты, $t_р = 2 - 3$ года;

$t_з$ - срок затухания добычи, $t_з = 2 - 3$ года.

Между годовой $A_г$ и суточной $A_с$ мощностью шахты существует следующая зависимость:

$$A_г = 300 A_с, \qquad (4.6)$$

где 300 - число рабочих дней шахты в году.

Более объективный и надежный аналитический метод расчета мощности шахты с учетом геологических и организационно-технических возможностей предложен проф. А. С. Малкиным:

$$A_{ш.г.} = K_н(K_{пл} + K_{н.о.з})\sqrt{Z_{пр}\frac{\sum m'}{\sum m}K_{гл.}}, \qquad (4.7)$$

где $K_н$ - коэффициент надежности технологической схемы шахты; при шахте блочного типа $K_н$ = 0,85-0,95.

Для индивидуальной шахты при вскрытии вертикальными стволами и панельной подготовке $K_н$ = 0,80 - 0,85; при этажной подготовке $K_н$ = 0,70 - 0,80. При вскрытии шахтного поля наклонными стволами $K_н$ = 0,80;

$\sum m$ - суммарная мощность всех пластов в шахтном поле, м;

$K_{пл}$ - коэффициент, учитывающий общее количество пластов в шахтном поле $n_{пл}$ и количество пластов, принятых к одновременной разработке $n'_{пл}$, определяется по формуле

$$K_{пл} = \frac{n'_{пл} + \sqrt{n_{пл} - n'_{пл}}}{\sqrt{n_{пл}}}; \qquad (4.8)$$

$K_{н.о.з}$ - коэффициент, учитывающий уровень нагрузки на очистной забой, определяется по формуле

$$K_{н.о.з.} = \sqrt{\Psi A_{о.з.м.}\frac{m_{ср}}{m'_{ср}}}; \qquad (4.9)$$

$\Psi$ - коэффициент, учитывающий условия бассейна (месторождения, шахтного поля):

$$\Psi = \frac{K_{у.кр}K_{кр.п}}{1 + K_{наруш.} + K_{газ}}, \qquad (4.10)$$

где $K_{у.кр}$ - коэффициент, учитывающий устойчивость кровли пластов; для неустойчивых кровель $K_{у.кр}$ = 0,06; средней устойчивости $K_{у.кр}$ = 0,08 и устойчивых $K_{у.кр}$ = 0,10;

$K_{кр.п}$ - коэффициент, учитывающий крепость пород почвы; при $f = 3 - 4$ $K_{кр.п} = 0,01$; при $f = 5 - 6$ $K_{кр.п} = 0,015$; при $f \geq 7$ $K_{кр.п} = 0,02$;

$K_{наруш.}$ - коэффициент, учитывающий геологическую нарушенность шахтного поля, $K_{наруш.} = 0 \ldots 0,03$;

$K_{газ}$ - коэффициент, учитывающий влияние газового фактора, $K_{газ} = 0 \div 1$.

$A_{о.з.м}$ - месячная нагрузка на очистной забой, т :

$$A_{о.з.м.} = l m_{ср} V_{сут} \gamma C N , \qquad (4.11)$$

где $l$ – длина лавы, м;

$m_{ср}$ – средняя мощность пластов в шахтном поле, м;

$V_{сут}$ – суточное подвигание очистного забоя, м;

$\gamma$ - средняя плотность угля, т/м$^3$;

$C$ – коэффициент извлечения угля по системе разработки, $C = 0{,}95 \div 0{,}97$;

$N$ – число рабочих дней в месяце, $N = 25$;

$m'_{ср}$ – средняя мощность одновременно разрабатываемых пластов, м:

$$m'_{ср} = \frac{\sum m'}{n'_{пл}} , \qquad (4.12)$$

где $\sum m'$ - суммарная мощность одновременно разрабатываемых пластов, м;

$K_{гл}$ - коэффициент, учитывающий глубину залегания пластов:

$$K_{гл} = 1 + \frac{H_{в.гр}}{H_{н.гр}} , \qquad (4.13)$$

где $H_{в.гр}$ и $H_{н.гр}$ - вертикальная глубина соответственно верхней и нижней технических границ шахтного поля, м.

***Пример.*** *Количество пластов в шахтном поле* $n_{пл.} = 3$; *мощность пластов* $m_1 = 1{,}2$ *м;* $m_2 = 1{,}6$ *м;* $m_3 = 0{,}8$ *м; угол падения пластов* $\alpha = 15°$; *промышленные запасы шахтного поля* $Z_{пр.} = 80000$ *тыс. т; глубина нижней границы* $H_{н.гр.} = 600$ *м; плотность угля* $\gamma = 1{,}4$ *т/м*$^3$; *породы кровли средней устойчивости; крепость пород почвы* $f = 6$; *коэффициент нарушенности шахтного поля* $K_{наруш..} = 0{,}02$; *коэффициент влияния газового фактора* $K_{газ} = 0{,}5$; *коэффициент надежности технологической схемы* $K_н = 0{,}8$; *длина лавы* $l = 200$ *м; суточное подвигание очистного забоя* $V_{сут} = 3{,}15$ *м.*

*Определить мощность и срок службы шахты.*

***Решение.*** К одновременной разработке принимается два пласта. Средняя мощность одновременно разрабатываемых пластов

$$m'_{\text{ср}} = \frac{1{,}2 + 1{,}6}{2} = 1{,}4 \text{ м}.$$

Средняя мощность угольных пластов в шахтном поле

$$m_{\text{ср}} = \frac{1{,}2 + 1{,}6 + 0{,}8}{3} = 1{,}2 \text{ м}.$$

Коэффициент, учитывающий влияние общего числа угольных пластов в шахтном поле и принятых к одновременной разработке:

$$K_{\text{пл}} = \frac{2 + \sqrt{3-2}}{\sqrt{3}} = 1{,}73.$$

Месячная нагрузка на очистной забой

$$A_{\text{о.з.м.}} = 200 \cdot 1{,}4 \cdot 3{,}15 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}90 \cdot 25 = 27783 \text{ т}.$$

Коэффициент, учитывающий условия работы очистных забоев:

$$\Psi = \frac{0{,}08 + 0{,}015}{1 + 0{,}02 + 0{,}5} = 0{,}0008.$$

Коэффициент, учитывающий влияние нагрузки на очистной забой:

$$K_{\text{н.о.з.}} = \sqrt{\frac{0{,}0008 \cdot 27783 \cdot 1{,}2}{1{,}4}} = 4{,}2.$$

Определяется коэффициент, учитывающий влияние глубины разработки на производственную мощность шахты:

$$K_{\text{гл}} = 1 + \frac{400}{600} = 1{,}668.$$

Коэффициент надежности технологической схемы шахты в соответствии с заданием принят $K_н = 0,8$. Тогда проектная мощность шахты

$$A_{ш.г.} = 0,8(1,73 + 4,2)\sqrt{80000 \cdot \frac{2,8}{3,6}} \cdot 1,668 = 1518 \text{ тыс. т/год.}$$

С учетом параметрического ряда мощностей шахт принимаем типовую производственную мощность $A = 1500$ тыс. т/год = = 1,5 млн т/год.

Полный срок службы шахты $T$ с учетом периода освоения и затухания

$$T = \frac{80000}{1500} + \frac{1}{2} \cdot 6 = 56 \text{ лет.}$$

## Порядок выполнения работы

После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы и разбора приведенного примера студенты осуществляют расчет для заданных условий (см. табл. 3.1.) мощности шахты по методике проф. А. С. Малкина и срока ее службы с кратким обоснованием принятых технических решений.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение производственной мощности шахты.
2. Как влияют на мощность шахты основные горно-геологи-Ч0еские факторы?
3. Как сказывается на мощности шахты влияние таких факторов, как нагрузка на очистной забой, количество одновременно отрабатываемых пластов, производительность транспорта и подъема?
4. Поясните сущность аналитического метода расчета мощности шахты.

## Рекомендуемая литература

1. Проектирование шахт / А. С. Малкин и [др.] - М.: Изд-во Академии горных наук, 2000. – 375 с.

## 5. ПОДЗЕМНЫЕ ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ И НАЗНАЧЕНИЕ

**Цель работы.** Закрепление и углубление знаний студентов по горным выработкам, привитие навыков работы с геолого-маркшейдерской документацией.

**Теоретические основы выполнения работы.** Сооружение в недрах земли или на ее поверхности, созданное в результате ведения горных работ и представляющее собой полость в массиве, называется горной выработкой. Горные выработки, проведенные в недрах земли, независимо от того, имеют они выход на поверхность или нет, называютнся подземными, а проведенные на поверхности земли – открытыми.

В зависимости от народнохозяйственного значения различают выработки разведочные, используемые для поиска и разведки месторождений полезных ископаемых, и эксплуатационные, используемые для эксплуатации месторождений.

Разработка месторождений полезного ископаемого складывается из трех этапов: вскрытие, подготовка и очистная выемка. В связи с этим эксплуатационные горные выработки подразделяются на вскрывающие (капитальные), подготовительные и очистные.

К **вскрывающим** относятся выработки, по которым осуществляется доступ к месторождению или его части (стволы, штольни, главные квершлаги).

**Подготовительные** выработки проводят от вскрывающих. Они служат для подготовки отдельных частей шахтного поля к очистной выемке.

**Очистными** называют выработки, служащие для непосредственной выемки полезного ископаемого.

По положению в земной коре подземные выработки могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными. Расположение горных выработок в пространстве, их названия и назначение рассмотрим на рис. 5.1 – 5.5.

**Вертикальные горные выработки.** К ним относят ствол, шурф, гезенк, слепой ствол, скважину (см. рис. 5.1).

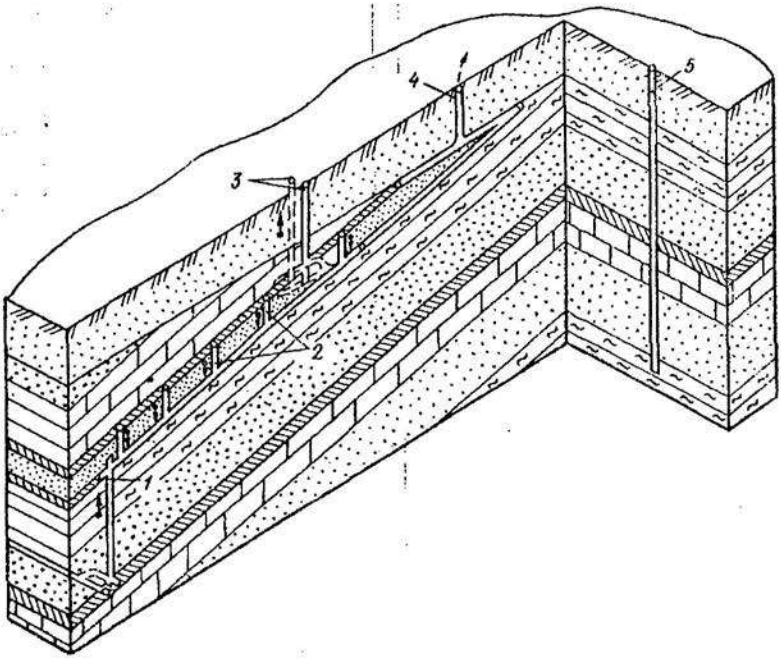



Рис. 5.1. Вертикальные горные выработки:
*1* – слепой ствол; *2* – гезенки; *3* – стволы; *4* – шурф;
*5* - скважина

**Ствол** – выработка, имеющая непосредственный выход на земную поверхность и предназначенная для обслуживания подземных работ. Если ствол сооружается для разведки месторождения, то его называют разведочным, если для строительства и эксплуатации шахты – шахтным. В зависимости от назначения стволы бывают главными, вспомогательными и вентиляционными. Главный ствол служит для подъема полезного ископаемого на поверхность и других целей, вспомогательный – для спуска и подъема людей, материалов, оборудования, выдачи породы, подвода электроэнергии, сжатого воздуха и воды, вентиляционный – для подачи в шахту свежего или отвода из шахты загрязненного воздуха. При подаче по вентиляционному стволу свежего воздуха его называют воздухоподающим. Ствол обычно оборудуют механизированным подъемом.

**Шурф** – выработка небольшой площади поперечного сечения и небольшой глубины, имеющая непосредственный выход на земную поверхность и предназначенная для вентиляции и других вспомогательных целей. Шурфы используют так же, как запасные выходы из шахты. Отличительной особенностью шахтного шурфа является отсутствие подъема полезного ископаемого и породы.

**Гезенк** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность и служащая для спуска угля из вышележащих выработок в нижележащие под действием собственного веса, передвижения людей, вентиляции, подвода электроэнергии и др.

**Слепой ствол** – выработка, не имеющая выхода на земную поверхность и предназначенная для подъема угля, вентиляции, спуска-подъема людей, оборудования, подвода электроэнергии, воды и др. Слепые стволы служат для вскрытия отдельных частей месторождения из подземных горных выработок.

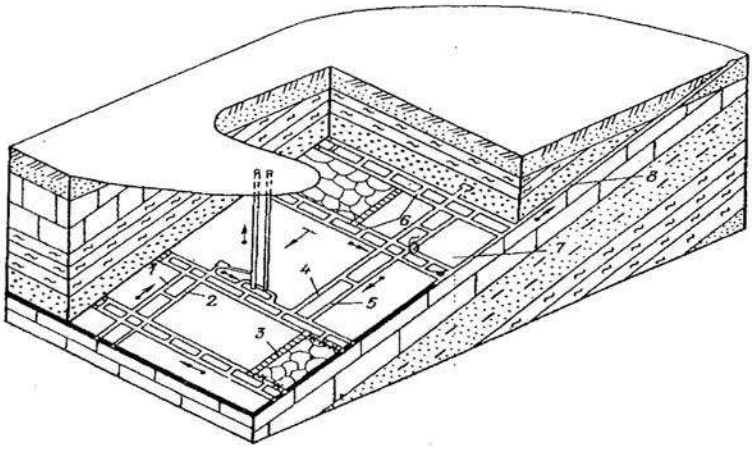
**Скважина** – вертикальная выработка, пройденная путем выбуривания горных пород, обычно диаметром до 2 м. Скважины бывают вентиляционными, лесоспускными, доставочными и др. Такие скважины бурят как с поверхности, так и из горных выработок. Следует иметь в виду, что скважины могут иметь любой угол наклона к горизонту.

**Наклонные выработки** включают наклонный ствол, бремсберг, уклон, ходок, скат, восстающий, печь (рис. 5.2).

**Наклонный ствол** – выработка, имеющая непосредственный выход на земную поверхность и предназначенная для подъема полезного ископаемого на поверхность, вентиляции шахты, водоотлива, подвода электро- и пневмоэнергии, доставки оборудования, передвижения людей. Наклонные стволы проводят как по полезному ископаемому, так и по пустым породам.

**Бремсберг** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность, пройденная по восстанию или падению пласта и служащая для транспортировки полезного ископаемого сверху вниз, вентиляции, подвода электроэнергии, воды, передвижения людей и доставки оборудования. Бремсберги проводят по пласту и реже по породе.

*а*




*б*

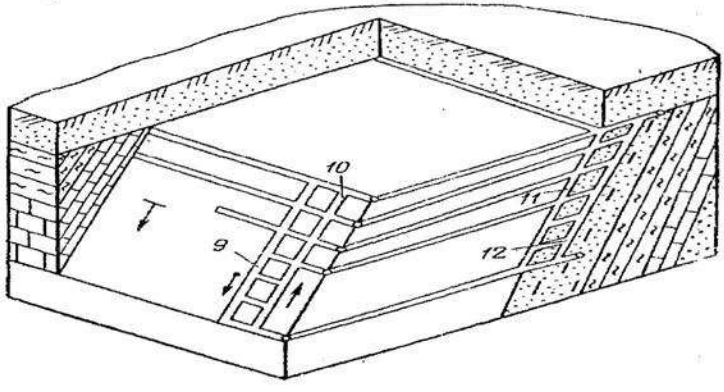



Рис. 5.2. Наклонные горные выработки на пологих (*а*) и крутых (*б*) пластах:

*1* – уклон; *2* – ходок при уклоне; *3* – очистной забой (не относится к наклонным выработкам); *4* – ходок при бремсберге; *5* - бремсберг; *6* – сбоечные печи (сбойки); *7* – угольный пласт; *8* – наклонный ствол; *9* – углеспускная печь; *10* – воздухоподающая печь; *11* – пластовый скат; *12* – полевой скат

**Уклон** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность, пройденная по восстанию или падению пласта и служащая для транспортировки полезного ископаемого снизу вверх, вентиляции, подвода электроэнергии, воды, передвижения людей и доставки оборудования. Уклон проводят по пласту и реже по породе.

**Ходок** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность, пройденная, как правило, параллельно бремсбергу (уклону) на расстоянии от него 20-40 м и служащая для передвижения людей, доставки материалов и оборудования, вентиляции и других целей.

**Скат** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность, расположенная по падению пласта и служащая для спуска полезного ископаемого сверху вниз под действием собственного веса. Скат сооружают в том случае, если угол его наклона достаточен для движения угля или породы вниз самотеком (30-35° и более). Скат может быть пластовым и полевым.

**Восстающий** – выработка, пройденная по рудному телу или вмещающим породам и предназначенная для подготовки отдельных участков (блоков) полезного ископаемого, проветривания, спуска закладочного материала, передвижения людей и других целей. Восстающий в ряде случаев проводят вертикально.

**Рудоспуск** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность и предназначенная для спуска руды под действием собственного веса. Рудоспуск служит для тех же целей, что и скат. Часто он проводится вертикально.

**Печь** – выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность, проводимая по пласту без присечки породы и предназначенная для монтажа очистного оборудования, проветривания, передвижения людей и грузов, подвода электро - и пневмоэнергии. Печь, предназначенная только для монтажа очистного оборудования, называется **разрезной**.

**К горизонтальным выработкам** относят штольню, квершлаг, штрек, орт, просек (рис. 5.3).

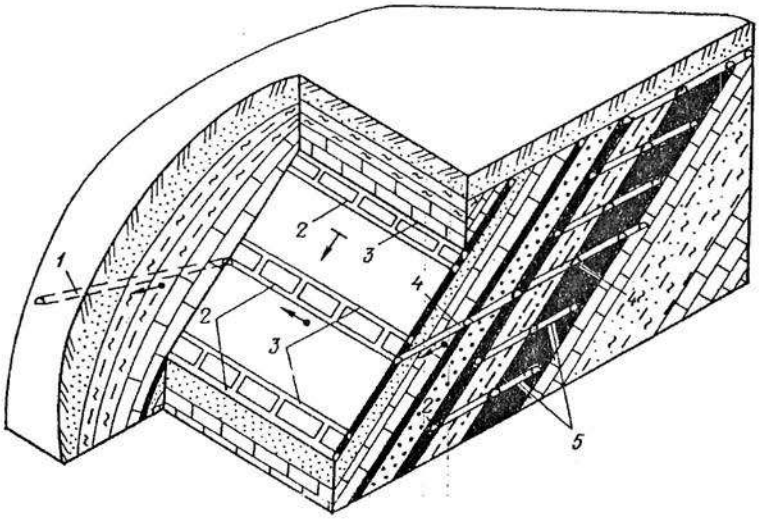



Рис. 5.3. Горизонтальные горные выработки:
*1* – штольня; *2* – штреки; *3* – просеки; *4* – квершлаг; *5* - орты

**Штольней** называется горная выработка, проведенная к месторождению с поверхности горизонтально или с незначительным наклоном, имеющая непосредственный выход и предназначенная для обслуживания подземных горных работ. Штольни проводят как в крест, так и по простиранию пород при гористом рельефе местности.

В зависимости от назначения различают штольни разведочные и эксплуатационные (для разработки месторождения), а также откаточные, вентиляционные и водоотливные.

**Квершлаг** – горизонтальная (реже наклонная) горная выработка, не имеющая непосредственного выхода на поверхность, проведенная по вмещающим породам вкрест простирания месторождения и используемая для транспорта, вентиляции, передвижения людей, водоотлива, для прокладки электрических кабелей и линий связи.

**Штрек** – горизонтальная (с углом наклона не более 0 – 3°) подземная горная выработка, проведенная по простиранию залегающего месторождения или в любом направлении при горизон-

тальном его залегании. Штрек может быть пройден по полезному ископаемому (с подрывкой или без подрывки боковых пород) или по породам (полевой). Штрек выполняет в основном те же функции, что и квершлаг.

**Орт** – горизонтальная (с углом наклона не более 0-3°) выработка, не имеющая непосредственного выхода на поверхность и проведения в крест простирания месторождения (при крутом и наклонном падении). Орт обычно служит для соединения выработок, пройденных у висячего и лежачего боков мощного пласта (залежи).

**Просеком** называется подземная горная выработка, проводимая обычно в толще полезного ископаемого по простиранию пласта или залежи и предназначенная для проветривания, передвижения людей и транспортирования грузов. Просек обычно проводится параллельно штреку и соединяется с ним с помощью печей. Просек необходим для обеспечения нормальных условий проведения штрека, а также для соединения очистной выработки с примыкающими к ней выемочными выработками.

**Камеры и очистные выработки**

**Камерами** называются горные выработки, имеющие небольшую длину по сравнению с размерами поперечного сечения. Они предназначаются для размещения в них различных машин, оборудования, хранения материалов и других целей. Камеры в основном располагаются около шахтных стволов.

Совокупность камер и выработок, примыкающих к шахтным стволам и предназначенных для обслуживания подземного хозяйства, называют **околоствольным двором**. В околоствольном дворе располагаются следующие камеры: электроподстанция, насосная, электровозное депо, камера ожидания и др.

Выработки, образующиеся в результате выемки пласта или залежи, где осуществляется добыча полезного ископаемого, называются **очистными**. Обязательный признак очистной выработки – очистной забой, который может быть длинным и коротким.

К первому относится лава – протяженная (до 250 и более м) очистная выработка линейной или уступной формы, одна стенка которой образована угольным массивом, другая – крепью, установленной на границе с выработанным пространством или закладочным массивом, а кровлей и почвой служат вмещающие породы или

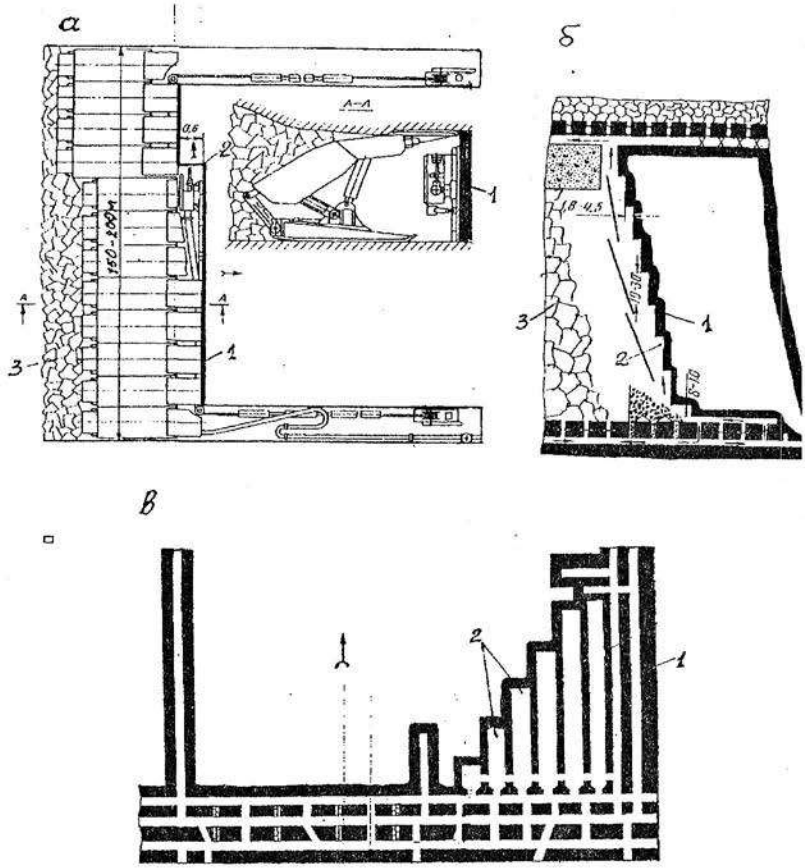



Рис. 5.4. Протяженный линейный (*а*), протяженный уступный (*б*) и короткие камерные (*в*) забои:
*1* – угольный пласт; *2* – забои; *3* – выработанное пространство

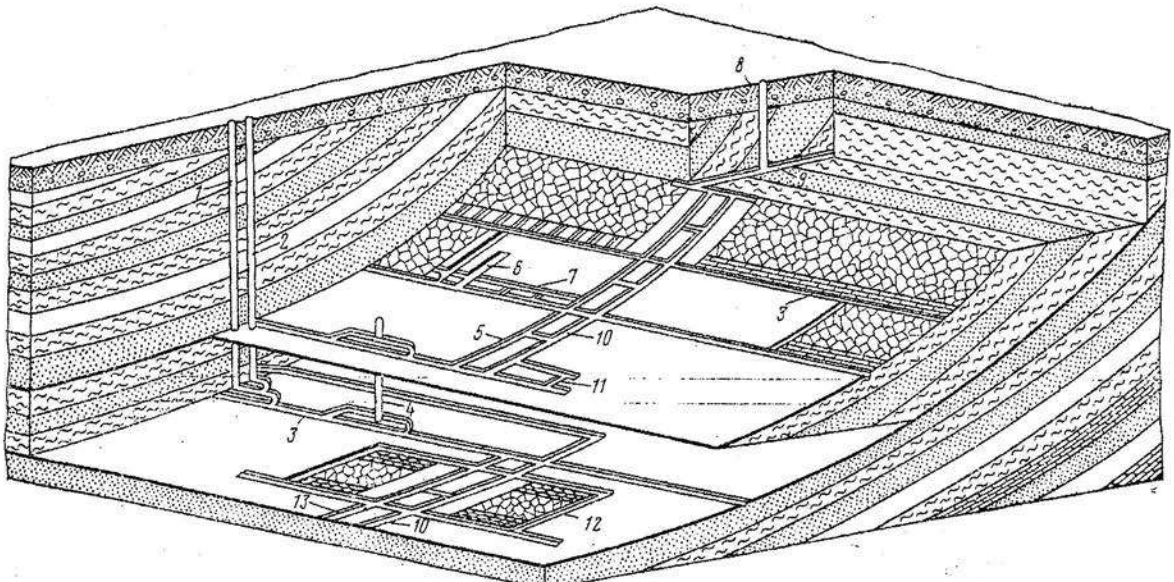



Рис. 5.5. Расположение горных выработок:

*1, 2* - вертикальные стволы, соответственно главный и вспомогательный; *3* – штрек; *4* – гезенк; *5* – бремсберг; *6* – очистная камера; *7* – просек, *8* – шурф; *9* – квершлаг; *10* – ходок; *11* – печь; *12* – лава; *13* - уклон

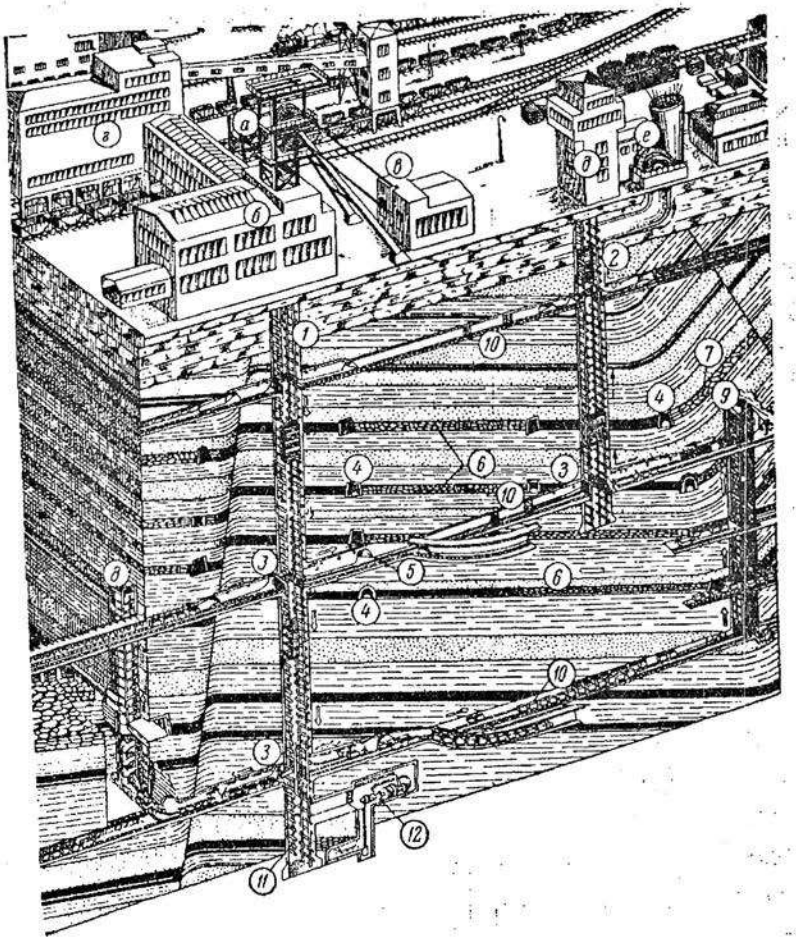



Рис. 5.6. Взаимное расположение подземных выработок и поверхностных сооружений:

*а* – шахтный копер главного ствола; *б* – надшахтное здание; *в* – здание подземной машины; *г* – обогатительная фабрика; *д* – башенный копер вспомогательного ствола; *е* – вентилятор главного проветривания; *1* – главный подъемный вертикальный ствол; *2* – вертикальный вспомогательный ствол; *3* – сопряжение вертикального ствола с выработками околоствольного двора; *4*– пластовый штрек; *5* – полевой штрек; *6, 7* - выработанное пространство; *8* – гезенк; *9* – слепой ствол; *10* – квершлаг; *11* – зумпф; *12* – насосная камера

пачки угля (рис. 5.4, *а*). Длина протяженных выработок во много раз больше их размеров по ширине и высоте. К коротким очистным забоям относят **очистную камеру** – выработку с забоем небольшой (до 16 м) протяженности, ограниченную по бокам массивом полезного ископаемого или целиками угля (рис. 5.4, *в*).

Пример общей схемы расположения горных выработок в шахтном поле приведен на рис. 5.5. и 5.6.

## Содержание и порядок выполнения работы

После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы (классификация, терминология и функциональная характеристика горных выработок) студенты изучают выработки по предложенным планам горных работ. Затем по заданию преподавателя описывают выработки на определенном участке шахтного поля, графически показывает залегание угольных пластов на вертикальном разрезе (вкрест простирания пласта) с указанием мощности и угла падения пластов и горных выработок, пройденных при этом.

## Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите вертикальные горные выработки.
2. Дайте определение вертикальному стволу.
3. Перечислите горизонтальные горные выработки.
4. В чем отличие квершлага от штрека?
5. Какие горные выработки относятся к наклонным?
6. Чем отличается бремсберг от уклона?
7. Назовите принципиальное отличие лавы от очистной камеры.

## Рекомендуемая литература

1. Основы горного дела: учебник для вузов / П. В.Егоров [и др.].- М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2000.- 408 с.

## 6. ВЫБОР ФОРМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

**Цель работы.** Изучение форм поперечного сечения горных выработок и методики определения их размеров в различных горно-геологических и горнотехнических условиях.

**Теоретические основы выполнения работы.** При подземной разработке полезных ископаемых применяются следующие формы поперечного сечения горных выработок: прямоугольная (рис. 6.1), трапециевидная (рис. 6.1, *б*), арочная (рис. 6.1, *в, г*), сводчатая (рис. 6.1. *д, е*), подковообразная с обратным сводом (рис. 6.1, *ж*), а также полигональная и др.

Наибольшее распространение получили трапециевидная и арочная формы поперечного сечения горных выработок. Первая обеспечивает лучшее использование площади поперечного сечения, вторая – большую устойчивость при возведении в слабых породах.

Выбор формы поперечного сечения горных выработок зависит от величины и направления горного давления, назначения и размеров выработки, типа и конструкции применяемой крепи.

Крепь – это строительная конструкция, возводимая в подземных горных выработках для сохранения их заданных размеров и формы, защиты от обрушений и чрезмерных смещений окружающих пород.

Тип, размеры и материал крепи должны соответствовать горно-геологическим условиям и сроку службы выработки.

Деревянную крепь рационально применять в выработках трапециевидной формы поперечного сечения при умеренном горном давлении со сроком службы до 2-3 лет.

Наиболее широко для крепления горных выработок применяют металлическую крепь. Преимущественно выработки крепят арочной податливой трехзвенной (АП-3) или пятизвенной (АП-5) крепями из спецпрофиля СВП.

Монолитную бетонную (железобетонную) крепь применяют при проведении капитальных горных выработок с большим сроком службы – выработки околоствольных дворов, капитальные квершлаги, штреки, бремсберги и уклоны, проводимые по слабым породам.

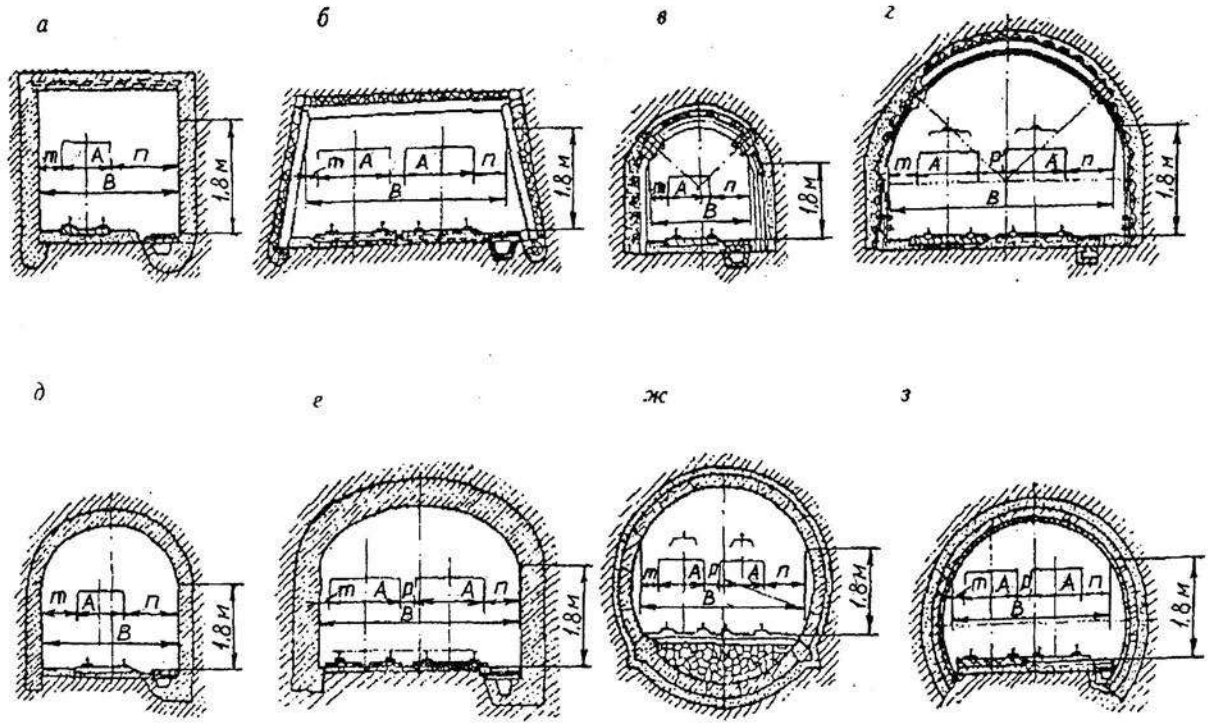



Рис. 6.1. Формы поперечного сечения горных выработок

Анкерная крепь представляет собой стержни (анкеры), закрепляемые различными способами в шпурах, пробуренных в определенном порядке в породах кровли и боков выработки. Она обеспечивает возможность использования несущей способности породного массива, снижения материалоемкости применяемых в сочетании с ней крепей и может использоваться:

в качестве самостоятельной в квершлагах, полевых штреках, бремсбергах, уклонах и ходках, в выемочных штреках, вентиляционных сбойках и др.

в комбинации с набрызгбетоном в подготовительных выработках, проводимых в трещиноватых породах;

в качестве временной в камерах и нишах, на сопряжениях горных выработок, с последующим креплением их подпорной крепью;

как средство борьбы с пучением пород почвы – в необводненных породах капитальных и подготовительных выработках. Коэффициент крепости пород по шкале проф. М. М. Протодьяконова f должен быть не ниже 4.

Набрызгбетон применяется для крепления горных выработок, проведенных в крепких устойчивых породах с $f \geq 9$, в сочетании с анкерной крепью – может применяться для пород с $f = 6 - 9$.

Крепь из железобетонных тюбингов применяют в капитальных горных выработках, расположенных вне зоны влияния очистных работ.

Площадь поперечного сечения подготовительных выработок рассчитывается исходя из условий нормальной работы средств транспорта (электровозы, вагонетки, конвейеры и др.), числа рельсовых путей, наличия зазоров, предусмотренных ПБ, и подачи к очистному забою с допустимыми скоростями необходимого количества воздуха.

В выработке различают площадь сечения *в свету* (площадь по внутреннему контуру крепи и почве выработки), *вчерне* (площадь по наружному контуру крепи, включая затяжку, и почве выработки), в проходке (площадь по контуру пород, которую принимают на 3 – 5 % больше площади вчерне), а также размеры выработок до осадки и после осадки крепи.

Тип крепи подготовительных выработок выбирается с учетом запаса сечения на осадку:

- при вертикальных смещениях пород до 300 мм применяется арочная податливая трехзвенная крепь АП3;

- при вертикальных смещениях пород от 300 до 1000 мм применяется арочная податливая пятизвенная крепь АП5 ;

- при вертикальных смещениях пород до 1000 мм и горизонтальных до 500 мм рекомендуется податливая крепь типа МПК.

В целях унификации рекомендуются семь типовых сечений выработок с арочной трехзвенной крепью АП3, три сечения с арочной пятизвенной крепью АП5 и два сечения с металлической крепью из прямолинейных элементов МПК (табл. 6.1).

Таблица 6.1

**Типовые площади сечения подготовительных выработок**

| Тип крепи | Площадь сечения в свету, м$^2$ | | | Размер выработки до осадки, м | |
|---|---|---|---|---|---|
| | после осадки | до осадки | в проходке | высота $H$ | ширина $B$ |
| АП3 | 5,2 | 6,4 | 8,2 | 2,79 | 2,46 |
| АП3 | 6 | 7,3 | 9,3 | 2,87 | 2,78 |
| АП3 | 7,1 | 8,5 | 10,8 | 3,13 | 3,07 |
| АП3 | 8,9 | 10,1 | 12,9 | 3,26 | 3,69 |
| АП3 | 11,2 | 12,8 | 15,9 | 3,58 | 4,25 |
| АП3 | 12, | 14,5 | 17,8 | 3,69 | 4,7 |
| АП3 | 16,4 | 17,2 | 20,8 | 4,11 | 5,11 |
| АП5 | 7,1 | 10,3 | 12.1 | 3,52 | 3,55 |
| АП5 | 8,9 | 12,5 | 15,1 | 3,64 | 4,16 |
| АП5 | 11,2 | 15,2 | 18,3 | 3,95 | 4,72 |
| МПК | 7 | 7,5 | 10,5 | 2,55 | 2,96 |
| МПК | 8,4 | 9,2 | 10,9 | 2,55 | 3,43 |

Размеры поперечного сечения выработки в свету определяются графическим путем. При определении размеров поперечного сечения горных выработок необходимо, в первую очередь, иметь данные о размерах вагонеток, скипов (для наклонных выработок), электровозов (приложение 2) и самоходного оборудования, а также выполнять требования Правил безопасности (ПБ) по зазорам.

Все выработки, по которым производится транспортирование грузов, должны иметь зазоры между крепью или размещенным в выработках оборудованием и наиболее выступающей кромкой габарита подвижного состава не менее 700 мм со стороны прохода лю-

дей, а с другой стороны – не менее 250 мм при рамных конструкциях крепи, и 200 мм при сплошных видах крепи. Указанные зазоры должны быть выдержаны на высоте выработки не менее 1800 мм.

Зазор между встречными электровозами (вагонетками) в двухпутных выработках по наиболее выступающей кромке габарита электровоза (вагонетки) должен быть не менее 200 мм.

Во всех выработках, оборудованных конвейерной доставкой, ширина прохода должна быть с одной стороны от конвейера не менее 700 мм, а с другой – не менее 400 мм. Расстояние от верхней выступающей части конвейера до верхняка должно быть не менее 500 мм.

В горизонтальных выработках, оборудованных конвейерами и рельсовым транспортом, а также в горизонтальных и наклонных выработках, оборудованных конвейерным и монорельсовым транспортом, зазор между конвейером и крепью должен быть не менее 400 мм, между конвейером и подвижным составом – не менее 400 мм, между подвижным составом и крепью – не менее 700 мм.

При применении самоходного оборудования зазоры между габаритом подвижного состава и крепью выработки со стороны свободного прохода для людей должны быть не менее 1,2 м, а с противоположной стороны – 0,5 м.

Высота подвески контактного провода должна быть не ниже 2 м от головок рельсов, а при механической доставке людей по выработке или при наличии отдельных выработок либо отделения для передвижения людей – на высоте не менее 1,8 м. В местах подвески расстояние контактного провода от верхняка крепи должно быть не менее 0,2 м.

Установленные ПБ зазоры должны выдерживаться в течение всего срока службы выработки. В связи с этим выработки, подверженные влиянию очистных работ и закрепляемые податливыми крепями, должны иметь первоначальные размеры на 10 – 20 % больше, чем это требуется в соответствии с вышеприведенными условиями.

С учетом изложенного первоначально определяется необходимая ширина выработки ($B$, м) по формулам:

однопутной $B = m + A + n;$ (6.1)

двухпутной $B = m + 2A + p + n;$ (6.2)

конвейерной $B = a' + A + n,$ (6.3)

где $m$ - зазор между подвижным составом и крепью (с неходовой стороны $a$ = 0,25 м);

$a'$ - зазор между конвейером и крепью, $a'$ = 0,4 м;

$p$ - зазор между подвижными составами, $p$ = 0,2 м;

$n$ - ширина прохода для людей, $n$ = 0,7 м;

$A$ - габариты подвижного состава или конвейера, м (см. приложение 2).

По полученной ширине из табл. 6.1 принимается ближайшее типовое сечение и тип крепи. Примеры сечений горных выработок приведены в приложении 3. Далее площадь поперечного сечения выработки в свету проверяют на скорость движения вентиляционной струи:

$$V_{\max} = \frac{Q}{S_{св}} \geq V_{\min}, \quad (6.4)$$

где $V_{\max}$ - максимально допустимая скорость движения воздушной струи для главных шахтных стволов 12 м$^3$/с; для откаточных штреков, квершлагов, бремсбергов, уклонов – 8 м/с; для остальных выработок – 6 м/с;

$Q$ – количество воздуха, проходящего по данной выработке, м$^3$/с;

$S_{св}$ - площадь поперечного сечения выработки в свету, м$^2$;

$V_{\min}$ - минимальная скорость движения воздуха, $V_{\min}$ = 0,25 м/с.

Если неизвестна величина $Q$, то $S_{св}$ можно определять по формуле

$$S_{св} = 0{,}00154\frac{A_{оз}qK}{V_д}, \quad (6.5)$$

где $A_{оз}$ - нагрузка на очистной забой, т/сут;

$q$ - относительная газообильность лавы, м$^3$/т;

$K$ - коэффициент запаса, принимается $K$ = 1,5;

$V_д$ - предельно допустимая скорость движения воздуха по выработке, м/с.

Принимается большее из двух сечений, определенных по габаритам средств транспорта и по фактору проветривания.

Плотность установки крепи в подготовительной выработке зависит от прочности вмещающих пород: при коэффициенте сти, по М. М. Протодьяконову, $f \leq 3$ плотность принимается равной 1,1 - - 1,5 рам/м; при $f$ = 4 – 6 - 0,8 – 1,1 рам/м; при $f$ > 6 - 0,8 – 1 рам/м.

При проведении подготовительной выработки по пласту угля забой располагают в сечении штрека так, чтобы пласт занимал как можно большую площадь сечения и была обеспечена наиболее простая перегрузка угля с конвейера лавы на штрек. В этой связи целесообразна подрывка почвы пласта.

***Пример***. *Определить поперечное сечение откаточного штрека, пройденного смешанным забоем по пласту мощностью 1,6 м с углом залегания 9° и коэффициентом крепости f = 1,4. Почва и кровля пласта представлены мелкозернистым алевролитом (f = 4–5, плотность γ = 2,2 т/м$^3$). Откатка грузов по выработке производится аккумуляторным электровозом АМ - 8Д в вагонетках УВГ - 3,3. Выработка двухпутная, ширина колеи 900 мм.Количество воздуха, преходящего по выработке Q = 50 м$^3$/с.*

***Решение***. Учитывая физико-механические свойства горных пород, окружающих откаточный штрек, и нахождение его в зоне влияния очистных работ, принимаем арочную податливую крепь.

Следовательно, форма поперечного сечения штрека будет сводчатая.

Для удобства погрузки угля с конвейера лавы в вагонетки на штреке принимаем подрывку почвы пласта. Пласт в сечении штрека располагаем так, чтобы высота подрывки кровли была минимальной, иначе это затруднит управление горным давлением на сопряжении лавы с откаточным штреком (рис. 6.2).

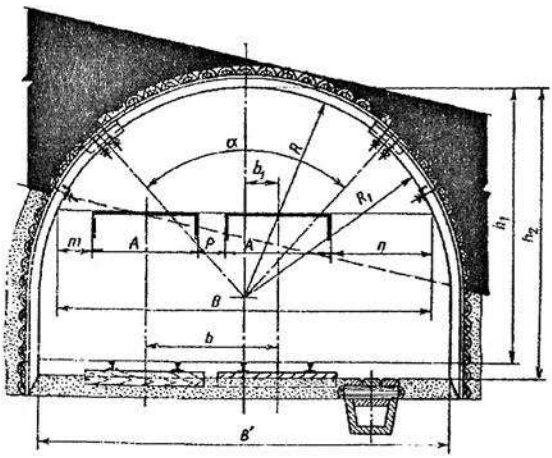



Рис. 6.2. Схема к определению поперечного сечения

Минимальная ширина штрека в свету на уровне подвижного состава определяется по формуле (6.2)

$$B = 0{,}25 + 2 \cdot 1{,}35 + 0{,}2 + 0{,}7 = 3{,}85 \text{ м.}$$

По полученному размеру $B$ = 3,85 м принимаем типовое сечение согласно табл. 6.1. Применяем трехзвенную податливую крепь. Плотность установки крепи – одна рама на 1 м выработки. По типовым сечениям выбираем площадь сечения штрека, закрепленного арочной трехзвенной крепью.

Площадь сечения откаточного штрека: в проходке $S_1$ = 15,9 м$^2$, в свету до осадки $S_2$ = 12,8 м$^2$, после осадки $S_3$ = 11,2 м$^2$.

Минимальное сечение выработки по фактору проветривания определяется по формуле (6.4)

$$S_{\text{св}} = \frac{50}{8} = 6{,}25 \text{ м}^2.$$

Принимается большее из двух сечений – сечение, определенное по габаритам средств транспорта, т. е. $S_{св} = 11{,}2$ м$^2$.

Коэффициент присечки боковых пород при этом

$$K_{п} = \frac{15{,}9 - 6{,}4}{15{,}9} 100\ \% = 60\ \%.$$

## Порядок выполнения работы

1. После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы в лабораторных условиях осуществляется изучение паспортов проведения и крепления горных выработок на шахтах.

2. По заданным горно-геологическим и горнотехническим условиям (табл. 6.2) обосновываются формы и размеры проводимой выработки.

Таблица 6.2

**Исходные данные для выполнения работы**

| Показатель | Вариант | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Тип выработки | бремс-берг | уклон | откат. штрек | бремс-берг | откат. штрек |
| Мощность пласта, м | 1,5 | 1,2 | 2,0 | 1,4 | 1,8 |
| Угол падения пласта, град | 15 | 10 | 25 | 18 | 20 |
| Коэффициент крепости пород: кровли | 2,5 | 3,0 | 1,8 | 4,0 | 4,2 |
| почвы | 3,2 | 2,7 | 2,5 | 4,8 | 5,1 |
| Нагрузка на лаву, т/сут | 600 | 500 | 1400 | 1100 | 1300 |
| Относительная газообильность, м$^3$/т | 15 | 17 | 6 | 20 | 25 |
| Показатель | Вариант | | | | |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Тип выработки | уклон | конв. штрек | вент. штрек | откат. штрек | Уклон |
| Мощность пласта, м | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,9 | 2,0 |
| Угол падения пласта, град | 12 | 30 | 22 | 15 | 6 |
| Коэффициент крепости пород: кровли | 3,5 | 3,1 | 4,8 | 6,0 | 5,0 |
| почвы | 2,9 | 3,4 | 4,3 | 5,2 | 6,2 |
| Нагрузка на лаву, т/сут | 1200 | 700 | 800 | 1700 | 2000 |
| Относительная газообильность, м$^3$/т | 10 | 8 | 15 | 12 | 8 |

Продолжение табл. 6.2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Показатель | Вариант | | | | |
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Тип выработки | уклон | откат. штрек | вент. штрек | конв. штрек | Уклон |
| Мощность пласта, м | 1,7 | 1,0 | 2,3 | 1,4 | 1,8 |
| Угол падения пласта, град | 5 | 25 | 11 | 22 | 10 |
| Коэффициент крепости пород: кровли | 3,0 | 2,1 | 4,3 | 3,5 | 4,0 |
| почвы | 3,5 | 2,9 | 3,6 | 4,0 | 3,8 |
| Нагрузка на лаву, т/сут | 920 | 600 | 2200 | 7500 | 2000 |
| Относительная газообильность, $м^3/т$ | 12 | 14 | 6 | 13 | 8 |
| Показатель | Вариант | | | | |
| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Тип выработки | откат. штрек | бремсберг | откат. штрек | бремсберг | бремсберг |
| Мощность пласта, м | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,5 | 1,8 |
| Угол падения пласта, град | 18 | 12 | 15 | 12 | 8 |
| Коэффициент крепости пород: кровли | 4,3 | 3,5 | 5,0 | 3,7 | 3,0 |
| почвы | 3,7 | 3,8 | 4,0 | 2,4 | 3,2 |
| Нагрузка на лаву, т/сут | 1300 | 900 | 1000 | 800 | 1400 |
| Относительная газообильность, $м^3/т$ | 12 | 14 | 5 | 15 | 10 |

3. Обосновываются площадь поперечного сечения выработки, тип крепи и шаг ее установки.

4. Выбирается схема расположения забоя выработки по углю и устанавливается коэффициент присечки пород.

## Контрольные вопросы

1. Какие основные факторы определяют форму и размеры поперечного сечения подготовительных выработок?

2. Что такое крепь?

3. Поясните основные принципы выбора типа крепи подготовительных выработок.

4. Какие функции может выполнять анкерная крепь?

## Рекомендуемая литература

1. Шахтное и подземное строительство, проведение горизонтальных и наклонных выработок: учебное пособие / под общ. ред. М. В. Корнилкова. – Екатеринбург:. Изд-во УГГГА, 2002. - 188 с.

2. Подземная разработка пластовых месторождений. Теоретические и методические основы проведения практических занятий: учебное пособие / О. В. Михеев [и др.]; под общ. ред. Л. А. Пучкова.- М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2001. - 487 с.

## 7. ВЫБОР МЕСТА ЗАЛОЖЕНИЯ СТВОЛОВ

**Цель работы.** Приобретение навыков по выбору места заложения главного и вспомогательного стволов при различных горно-геологических и горнотехнических условиях разработки шахтного поля.

**Теоретические основы выполнения работы.** Выбор места заложения стволов определяется многими горно-геологическими и горнотехническими факторами.

К основным горно-геологическим факторам следует отнести следующие: мощность и угол падения пластов; количество рабочих пластов в шахтном поле; размеры шахтного поля по простиранию и падению; расстояние между отрабатываемыми пластами; газообильность и водообильность углепородного массива; физико-механические свойства вмещающих пород; нарушенность месторождения и рельеф поверхности.

Горнотехнические факторы, определяющие выбор места заложения стволов, могут быть следующие: безопасность ведения горных работ; суточная мощность шахты и средняя нагрузка на очистной забой; количество подготовительных и очистных забоев; запасы шахтного поля и др.

На выбор места заложения стволов определенное влияние оказывают и социально-экономические факторы: учет требований охраны окружающей среды; отвод и очищение технических вод, удаление отходов производства; наличие подъездных путей, электроснабжения, водоснабжения и развитие инфраструктуры. Место заложения главного ствола определяется экономическими расчетами после учета вышеперечисленных факторов. При этом необходимо обеспечить минимальные первоначальные капитальные затраты и эксплуатационные расходы. Однако поиск оптимума комплекса горно-геологических, горнотехнических и социально-экономических аспектов, характерных для каждой конкретной ситуации, остается до сих пор не решенным.

При близкой к прямоугольной конфигурации шахтного поля и выдержанной мощности пластов оптимальное место заложения главного ствола по простиранию будет в середине шахтного поля.

Это определяется эксплуатационными затратами на транспортирование полезного ископаемого, оборудования и материалов.

Центральное расположение главного ствола обеспечивает концентрацию ведения горных работ, улучшение технико-экономических показателей добычи полезного ископаемого.

Выбор места заложения главного ствола вкрест простирания пластов рекомендуется производить по методике акад. Л. Д. Шевякова, согласно которой оптимальный пункт заложения главного ствола находится в пункте сосредоточения грузов на главном квершлаге, к которому по каждому направлению к стволу (справа и слева) свозится сумма грузов, меньшая полусуммы всех грузов, т. е. выполняется следующее условие:

$$\Sigma Z_{\text{лев}} < Z/2;$$
$$\Sigma Z_{\text{пр}} < Z/2, \qquad (7.1)$$

где $Z$ - сумма всех грузов, транспортируемых к стволу, т.

Оптимальная точка своза грузов совпадает с точкой приложения такого груза, при котором сумма всех грузов делится пополам.

Если вскрытие шахтного поля производится не одним, а несколькими квершлагами, расположенными на разных горизонтах, то определение места заложения главного ствола, обеспечивающего минимальные транспортные расходы по всем квершлагам, производится следующим образом. Внизу чертежа схемы вскрытия, выполненной в масштабе, проводят горизонтальную линию АБ и проецируют на нее все пункты сосредоточения грузов на транспортных квершлагах. Проекции пунктов на прямую нумеруют слева направо. В точке проекций переносятся соответствующие грузы и находят оптимальный пункт, в котором выполняются неравенства (7.1). При равных размерах шахтного поля и этажа по простиранию и падению и одинаковой плотности угля всех пластов свиты данные, выражающие запасы угля, подлежащие транспортированию, можно заменить пропорциональными им мощностями пластов.

***Пример1.*** *Выбрать место заложения главного ствола в крест простирания шахтного поля, оптимальное по фактору подземного транспорта, при следующих условиях: число разрабатываемых пластов – 4; мощности пластов:* $m_1 = 1{,}0$ *м,* $m_2 = 0{,}9$ *м,* $m_3 =$

*= 0,7м, $m_4$ = 0,8 м; угол падения пластов – 60°; расстояние между пластами: $a_1$ = 60 м, $a_2$ = 45 м, $a_3$ = 50 м; размер шахтного поля по падению - H = 500 м; количество транспортных горизонтов –3.*

***Решение.*** В масштабе вычерчиваем схему вскрытия шахтного поля (рис. 7.1), проводим параллельно квершлагам линию АБ, на которую проецируем все точки пересечения транспортных квершлагов с пластами. В полученных точках сосредоточены соответствующие грузы. Так как размеры шахтного поля, этажей и плотность угля одинаковы для всех пластов, то заменяем грузы (промышленные запасы угля в этаже по каждому пласту) пропорциональными им величинами – мощностями пластов. Затем на транспортном пути 1…12 отыскиваем графическим способом оптимальное место заложения главного ствола. Из рисунка видно, что полусумма грузов располагается между пунктами 5 и 6. Следовательно, место заложения ствола может находиться в любой точке этого участка.

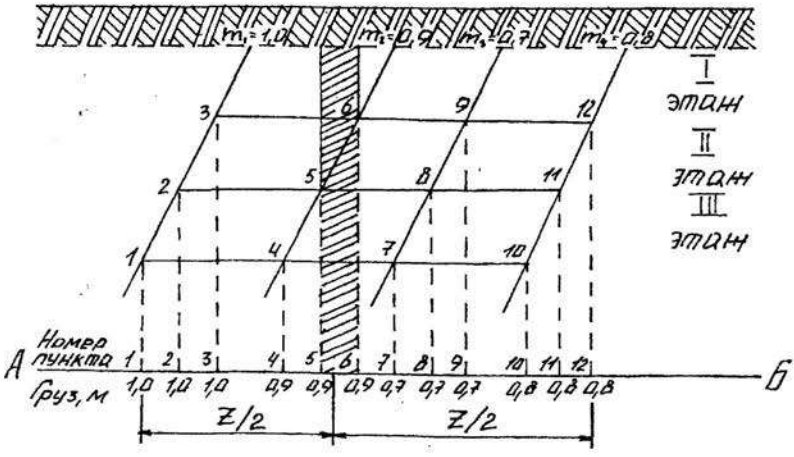



Рис. 7.1. К определению места заложения главного ствола

***Пример 2.*** *Выбрать место заложения ствола шахты в направлении простирания пласта, обеспечивающее минимальную работу подземного транспорта угля при следующих условиях: разра-*

*батывается пласт угля с переменным углом падения и невыдержанной мощностью; способ подготовки шахтного поля – этажный; этажи делятся на выемочные поля разной длины из-за невыдержанных элементов залегания пластов.*

***Решение.*** Грузы (запасы выемочных полей), подлежащие транспортировке по этажным штрекам, показываются на плане шахтного поля (рис. 7.2). Пункты сосредоточения грузов (точки пересечения участковых бремсбергов с этажными штреками) для удобства нумеруются.

На горизонтальную линию АБ проецируем все точки пересечения этажных штреков с участковыми бремсбергами. В этих точках сосредотачиваются величины соответствующих грузов. Затем на транспортном пути 1...12 отыскиваем графическим способом оптимальный пункт своза грузов. В данном случае он находится между пунктами 11 и 3.

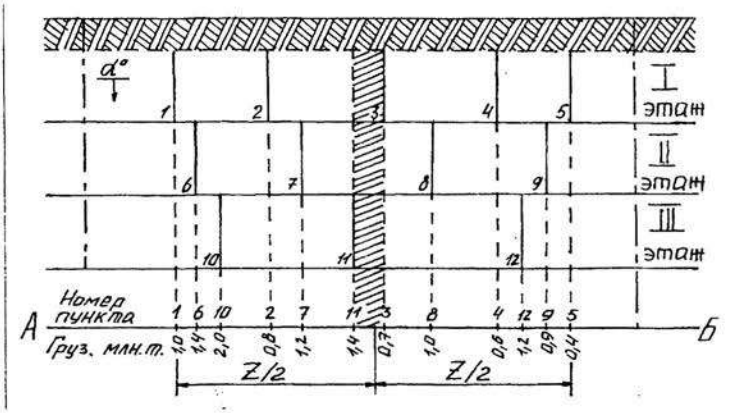



Рис. 7.2. К определению места заложения ствола в направлении простирания пласта

**Порядок выполнения работы.** После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы студенты в лабораторных условиях изучают место заложения главного ствола с использованием планов горных работ, макетов и планшетов.

На основании исходных данных (табл. 7.1) студенты вычерчи-

Таблица 7.1

**Исходные данные для выполнения работы**

| Номер варианта | Размеры шахтного поля, м | | Мощность угольных пластов, м | | | | Расстояние между пластами, м | | | Угол падения пластов, α, град |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S$ | $H$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | |
| 1 | 5000 | 2380 | 2,5 | 4,5 | 3,8 | - | 15 | 32 | - | 27 |
| 2 | 5500 | 1800 | 1,8 | 2,4 | 2,8 | - | 40 | 60 | - | 35 |
| 3 | 4720 | 2100 | 3,9 | 2,1 | - | - | 70 | - | - | 30 |
| 4 | 4800 | 1900 | 4,5 | 2,5 | 1,8 | 3,2 | 20 | 15 | 60 | 38 |
| 5 | 5800 | 2300 | 2,0 | 3,1 | 1,5 | 5,0 | 40 | 35 | 80 | 30 |
| 6 | 4650 | 1600 | 1,2 | 1,8 | 2,1 | 1,5 | 25 | 15 | 40 | 45 |
| 7 | 3800 | 1200 | 4,2 | 2,9 | 3,5 | - | 60 | 40 | - | 60 |
| 8 | 5100 | 1700 | 1,3 | 2,0 | 1,8 | 1,5 | 30 | 50 | 20 | 32 |
| 9 | 4250 | 1400 | 2,7 | 1,8 | 3,6 | - | 80 | 30 | - | 28 |
| 10 | 6000 | 7000 | 2,0 | 3,1 | 1,6 | 2,2 | 10 | 60 | 20 | 35 |
| 11 | 3950 | 1350 | 1,5 | 1,8 | 2,5 | 1,2 | 20 | 70 | 30 | 40 |
| 12 | 7200 | 3000 | 3,1 | 3,3 | 1,7 | 2,0 | 45 | 20 | 60 | 22 |
| 13 | 4660 | 1380 | 1,6 | 2,4 | 4,1 | - | 70 | 30 | - | 34 |
| 14 | 3820 | 1160 | 2,8 | 1,7 | 1,5 | - | 25 | 40 | - | 55 |
| 15 | 6500 | 2800 | 1,4 | 3,6 | 4,2 | 5,0 | 18 | 35 | 50 | 36 |
| 16 | 4280 | 1120 | 3,1 | 1,5 | 2,6 | 2,8 | 40 | 25 | 70 | 42 |
| 17 | 5400 | 1460 | 1,9 | 2,7 | 1,4 | 2,3 | 20 | 38 | 55 | 50 |
| 18 | 7000 | 4000 | 2,0 | 1,5 | 2,2 | 3,3 | 40 | 20 | 15 | 28 |
| 19 | 5060 | 1700 | 1,4 | 1,7 | 2,0 | - | 30 | 40 | - | 25 |
| 20 | 6000 | 3100 | 1,5 | 3,0 | 2,5 | 2,0 | 25 | 18 | 30 | 27 |
| 21 | 3720 | 1330 | 1,3 | 1,8 | 1,9 | 2,5 | 12 | 30 | 38 | 37 |
| 22 | 4740 | 158 | 2,2 | 1,4 | 2,7 | - | 2 | 42 | - | 30 |

вают схему выбора места заложения ствола вкрест простирания и на плане шахтного поля. При этом производятся необходимые расчеты.

## Контрольные вопросы

1. Назовите основные горно-геологические факторы, влияющие на выбор места заложения главного ствола.
2. Каковы достоинства и недостатки центрального расположения главного ствола в шахтном поле?
3. В чем заключается сущность методики акад. Л. Д. Шевякова по выбору места заложения главного ствола?
4. При каких условиях величины транспортируемых грузов можно заменить мощностями разрабатываемых пластов?

## Рекомендуемая литература

1. Примеры и задачи по технологии горного производства / Ю. К. Нурмухамедов. - М.: Недра, 1973.- 296 с.
2. Технология подземной разработки пластовых месторождений полезных ископаемых.- 2-е изд., перераб. и доп. / А. С. Бурчаков, Н. К. Гринько, А. Б. Ковальчук.- М.: Недра. – 536 с.

# 8. СПОСОБЫ ДЕЛЕНИЯ ШАХТНОГО ПОЛЯ НА ЧАСТИ И ПОРЯДОК ЕГО ОТРАБОТКИ

**Цель работы.** Изучение способов деления шахтного поля на части, порядка и направления отработки шахтного поля в пространстве и времени в зависимости от горно-геологических и горнотехнических условий.

**Теоретические основы выполнения работы.** Шахтное поле угольной шахты не может разрабатываться одновременно по всей площади из-за его больших размеров. Для обеспечения системной и безопасной отработки шахтного поля его делят на части, удобные для разработки, – выемочные ступени (выемочные горизонты), крылья, блоки, этажи, панели, выемочные столбы и полосы. Параметры этих частей шахтного поля должны соответствовать условиям эффективного использования существующей и прогнозируемой горной техники и технологии.

Разделение шахтного поля на части зависит от ряда горно-геологических и горнотехнических факторов, основными из которых являются угол падения пластов, газообильность месторождения, технология и механизация очистных работ.

**Горизонт** (ступень) – часть шахтного поля, одной из границ которого по падению является главный транспортный штрек, а другой – верхняя или нижняя граница шахтного поля. Боковыми границами горизонта служат границы шахтного поля по простиранию.

**Транспортным горизонтом** называют совокупность вскрывающих, подготовительных выработок и выработок околоствольного двора, расположенных на одном уровне и служащих для транспортирования угля к стволу.

Часть шахтного поля, ограниченная по падению и восстанию смежными транспортными горизонтами или транспортным горизонтом и границей шахтного поля, а по простиранию границами шахтного поля, называют **выемочной ступенью** (выемочным горизонтом).

Наклонная высота выемочной ступени изменяется в широких пределах: от 100 - 150 м при крутом падении пластов до 1500 – 2000 м и более - при пологом.

При одногоризонтном вскрытии пологих пластов (с одним

транспортным горизонтом) шахтное поле обычно делят по падению на две части – бремсберговую ($H_{бр}$) и уклонную ($H_{у}$) независимо от способа подготовки (рис. 8.1).

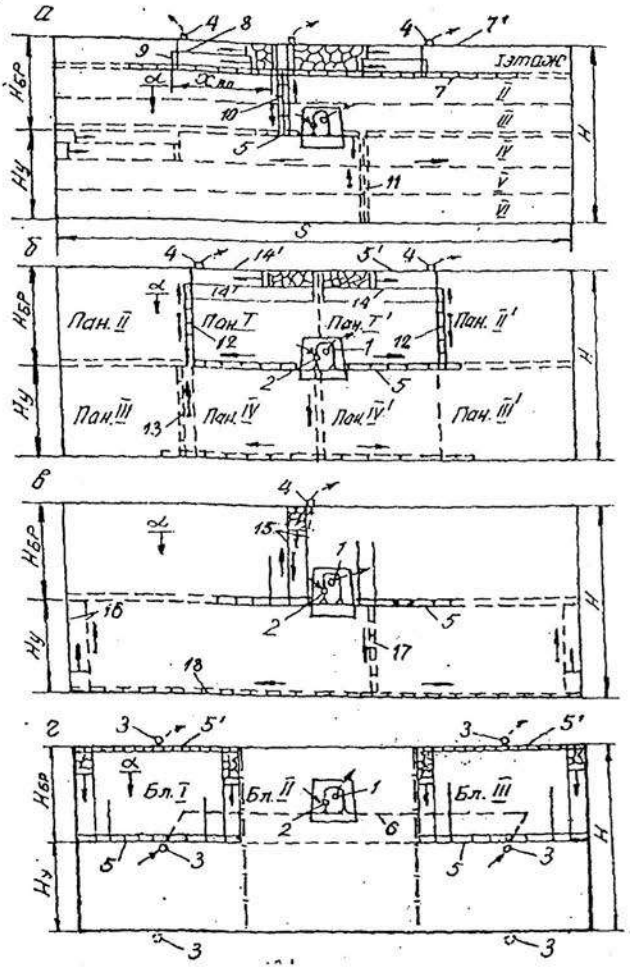



Рис. 8.1. Деление шахтного поля:
на этажи *(а)*; на панели *(б)*; на выемочные ступени, отрабатываемые длинными столбами по падению и восстанию *(в)*; на блоки *(г)*

По простиранию шахтное поле делится на **крылья.** Под крылом понимается часть шахтного поля, расположенная по одну сторону от главной вскрывающей выработки. Как правило, шахты отрабатывают двухкрылые шахтные поля. Крылья обычно обозначают частями света (западное, восточное и др.).

**Блок** – часть шахтного поля, характеризующаяся независимым провстриванием. Для этого проводятся блоковые воздухоподающие и воздухоотводящие стволы *3* (см. рис. 8.1, 8.2). Уголь из всех блоков по магистральному полевому штреку *6* доставляется к главному стволу *1*, располагаемому в центральном блоке. Размер блоков по простиранию обычно колеблется в пределах 3,0 – 4,5 км.

Границами блока по простиранию являются границы соседних блоков, а также одной из границ крайних блоков служат границы шахтного поля. Границами блоков по падению и восстанию являются границы шахтного поля.

К разделению шахтного поля на блоки прибегают при большой производственной мощности шахты, больших размерах шахтного поля, высокой газообильности месторождения.

При крутом, крутонаклонном, наклонном и, реже, пологом падении шахтное поле разделяется на этажи. **Этажом** называется часть шахтного поля, ограниченная по падению этажным откаточным штреком *7*, по восстанию этажным вентиляционным штреком *7′*, по простиранию – границами шахтного поля (см. рис. 8.1, *а*). При пологом падении в пределах выемочной ступени обычно располагается несколько этажей, соединяемых с транспортным горизонтом капитальными бремсбергами *10* и капитальными уклонами *11*.

При наклонном и пологом падении этаж, как правило, разделяется промежуточными штреками *8* на 2 - 3 подэтажа. Часть этажа по простиранию, заключенная между участковыми бремсбергами *9*, скатами и уклонами, а также между промежуточными квершлагами, называется **выемочным полем** ($x_{вп}$ на рис. 8.1, *а*). Длина выемочного поля по простиранию на пологих пластах принимается в пределах 1000 - 2000 м, на крутых – 300 - 600 м.

При углах падения до 18 – 25 ° выемочная ступень по простиранию может быть разделена на панели (см. рис. 8.1, *б*). **Панелью** называется часть шахтного поля, ограниченная по восстанию и па-

дению главными штреками (откаточным *5* и вентиляционным *5'*) либо с одной стороны границей шахтного поля, а по простиранию - границами соседних панелей или границей соседней панели с одной стороны и границей шахтного поля - с другой. Панели могут быть бремсберговыми и уклонными (см. рис. 8.1, *б*). Как и выемочные поля, они могут быть односторонними и двусторонними. Размеры панелей по простиранию находятся в пределах 1200 - 3500 м, а по падению – 1000 - 1200 м. По падению панели делятся на ярусы. **Ярус** – одновременно отрабатываемая часть панели, ограниченная по падению конвейерным *14*, по восстанию вентиляционным *14* ярусными штреками. В ярусе обычно располагается один забой очистной. Возможно деление яруса на подъярусы.

При углах падения пластов до 10° пласт в пределах горизонта делят по простиранию месторождения на выемочные столбы, вытянутые по восстанию или падению от верхней границы горизонта до нижней. Такой способ подготовки называют **погоризонтным** (см. рис. 8.1, *в*). Выемочные ступени делятся конвейерными и вентиляционными бремсбергами *15* или уклонами *16* на столбы шириной 150 - 250 м, отрабатываемые по падению или восстанию.

Порядок отработки различных частей шахтного поля показан на рис. 8.2.

Порядок отработки шахтного поля – это определенная очередность выемки в пространстве и времени, увязанная со схемами вскрытия и подготовки шахтного поля и его участков.

Этажи (ярусы), как правило, отрабатывают в нисходящем порядке, а по простиранию можно отрабатывать в прямом или обратном порядке.

Порядок отработки свиты пластов устанавливается с учетом принятой производительности шахты и требований безопасности ведения работ.

При выборе порядка отработки частей шахтного поля следует учитывает достоинства и недостатки вариантов. При прямом порядке отработки сокращается срок строительства и обеспечивается быстрое начало эксплуатационных работ, не требуется больших разовых капиталовложений. Однако при этом увеличиваются утечки воздуха, возрастают пожарная опасность и затраты на противопожарную профилактику, значительно увеличиваются расходы на

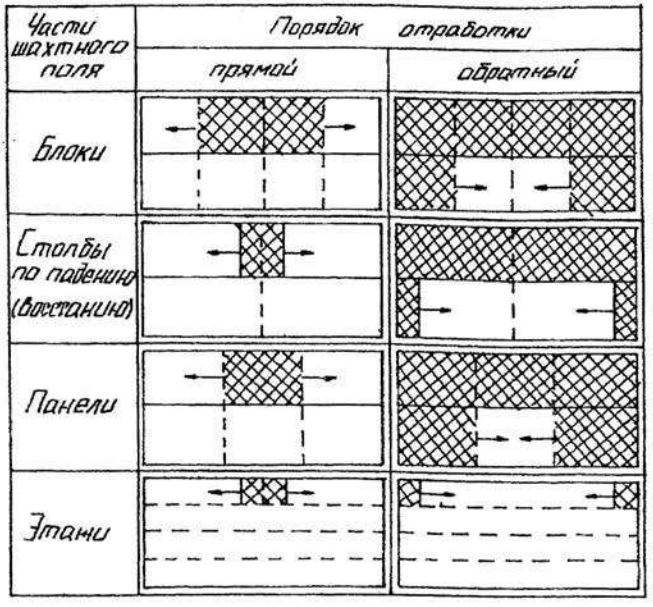



Рис. 8.2. Порядок отработки шахтного поля

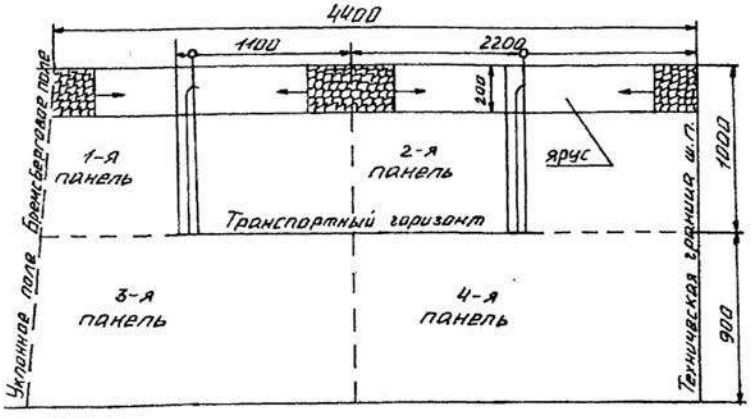



Рис. 8.3. Графическая интерпретация примера

поддержание транспортных и вентиляционных выработок, затрудняется борьба с пожарами.

***Пример.*** *Разделить шахтное поле с размерами по простиранию 4,5 км и по падению 1,9 км на части. Обосновать возможные способы деления шахтного поля на части и вычертить их схемы для следующих условий: мощность пласта 2 м, угол падения 16°. Шахтное поле на западе ограничено дизъюнктивным нарушением амплитудой H=30 м, а на востоке – технической границей с шахтой «Центральная».*

***Решение.*** С учетом заданных условий принимается панельный способ подготовки шахтного поля. По падению шахтное поле делится на бремсберговую ($h_б$ =1000 м) и уклонную ($h_у$ =900 м) части. Панели двусторонние с размерами по простиранию 2200 м. Панель делится на ярусы. Графическая интерпретация примера представлена на рис. 8.3.

## Порядок выполнения работы

Первоначально необходимо ознакомиться с теоретическими основами выполнения работы. Затем по планам горных работ определить, на какие части разделено шахтное поле, установить их размеры и порядок отработки.

Далее по заданным условиям (табл. 8.1) осуществляется деление шахтного поля на части и обосновывается порядок их отработки. Принятые решения отображаются графически. При этом графическая часть выполняется в масштабе.

Таблица 8. 1

**Исходные данные для выполнения работ**

| Номер варианта | Размер шахтного поля | | Число пластов в шахтном поле | Мощность пластов, м | Угол падения, град | Категория шахты по метану |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | по простиранию | по падению | | | | |
| 1 | 5500 | 2400 | 3 | 1,8; 2,4; 2,8 | 8 | III |
| 2 | 9000 | 3000 | 2 | 2,9; 3,5 | 15 | Сверхкат. |
| 3 | 4500 | 2100 | 2 | 2,7; 3,2 | 27 | II |
| 4 | 6000 | 2600 | 1 | 2,3 | 18 | I |
| 5 | 4000 | 1800 | 2 | 1,9; 2,6 | 12 | III |
| 6 | 8000 | 3000 | 1 | 3,1 | 10 | Сверхкат. |
| 7 | 7000 | 2700 | 2 | 1,8; 2,9 | 20 | III |
| 8 | 5000 | 1700 | 3 | 2,0; 2,2; 2,0 | 35 | Сверхкат. |
| 9 | 6350 | 1950 | 2 | 1,7; 3,0 | 22 | II |
| 10 | 4050 | 1550 | 3 | 3,1; 2,4; 1,8 | 30 | I |
| 11 | 5200 | 1800 | 2 | 2,5; 3,1 | 24 | II |
| 12 | 3450 | 1200 | 3 | 1,5; 2,0; 2,5 | 40 | Сверхкат. |
| 13 | 4250 | 1400 | 2 | 2,4; 3,0 | 50 | II |
| 14 | 6100 | 1950 | 1 | 3,6 | 6 | I |
| 15 | 3800 | 1100 | 3 | 1,5; 1,9; 2,6 | 45 | II |
| 16 | 4000 | 1420 | 2 | 3,2; 2,8 | 60 | III |
| 17 | 4650 | 1600 | 1 | 4,2 | 32 | III |
| 18 | 12000 | 2400 | 3 | 1,4; 2,1; 1,8 | 3 | Сверхкат. |
| 19 | 10000 | 1200 | 3 | 2,9; 3,8; 4,5 | 15 | III |
| 20 | 5400 | 2050 | 2 | 3,2; 4,3 | 26 | II |
| 21 | 6300 | 1980 | 3 | 1,9; 2,6; 1,7 | 18 | III |
| 22 | 7200 | 2400 | 2 | 4,0; 3,7 | 8 | I |
| 23 | 4630 | 1420 | 2 | 2,6; 3,2 | 45 | II |
| 24 | 10800 | 2500 | 3 | 3,0; 4,1; 2,5 | 32 | Сверхкат. |
| 25 | 5800 | 2100 | 2 | 2,2; 2,8 | 30 | II |

## Контрольные вопросы

1. Что понимается под термином «шахтное поле»?
2. Перечислите основные горно-геологические и горнотехнические факторы, влияющие на способы деления шахтного поля.
3. На какие основные части делится шахтное поле по падению и простиранию?
4. В чем заключается сущность этажного, панельного и погоризонтного способов подготовки шахтного поля?
5. Назовите области применения этажного, панельного и погоризонтного способов подготовки.
6. Порядок отработки шахтного поля при этажном, панельном и погоризонтном способах подготовки.

## Рекомендуемая литература

1. Подземная разработка месторождений полезных ископаемых. Подземная разработка пластовых месторождений: учебник для вузов / В. Н. Корнилков.- Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. горного ун-та, 2005. – 494 с.
2. Технология подземной разработки месторождений полезных ископаемых / А. С. Бурчаков [и др.] – М.: Недра, 1983. – 487 с.

# 9. ИЗУЧЕНИЕ ФАКТОРОВ И КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ПРИЗНАКОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ВЫБОР СИСТЕМ РАЗРАБОТКИ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

**Цель работы.** Закрепление и углубление знаний студентов, привитие навыков по определению классификационных признаков систем разработки угольных пластов по планам горных работ.

**Теоретические основы выполнения работы**

Под **системой разработки** пластовых месторождений понимается порядок проведения подготовительных и очистных работ в пределах выемочного поля, увязанный в пространстве и времени.

Условия залегания угольных месторождений весьма разнообразны, и поэтому выбор системы разработки зависит от многих геологических, технических и организационных факторов, определяющих эти условия. Основными факторами, влияющими на выбор системы разработки угольных пластов, являются: форма залегания пластов в недрах; их мощность и угол падения; строение пластов; свойства угля и вмещающих пород; газоносность и водоносность месторождения; склонность пластов к самовозгоранию; склонность пластов к горным ударам и внезапным выбросам; расстояние между смежными пластами угля; глубина разработки; способы и средства механизации производственных процессов в очистных и подготовительных выработках и др.

Рассмотрим основные из них.

**Форма месторождений** бывает правильная и неправильная (см. работу № 2). Пластовые месторождения характеризуются тем, что элементы их залегания сохраняются на значительных площадях. Однако довольно часто наблюдаются изменения мощности и угла падения пласта, нарушения его сплошности и др. Поэтому при выборе систем разработки следует предусматривать систему разработки, пригодную для диапазона колебаний элементов залегания пласта или, при необходимости, предусматривать возможность перехода от одной системы к другой.

**Мощность пласта** определяет способ выемки угля, интенсивность сдвижений вмещающих пород, способ управления горным давлением, а также способ проведения и поддержания подготовительных выработок.

Мощность пласта, как правило, выполняет роль классифицирующего признака систем разработки угольных пластов.

**Угол падения пласта** также является важным фактором при выборе систем разработки, а в некоторых классификациях - классификационным признаком. Он оказывает влияние на способ доставки угля вдоль очистного забоя, выбор средств механизации очистной выемки, форму и размер очистного забоя, способ управления горным давлением.

**Свойства боковых пород** оказывают существенное влияние на выбор способа охраны подготовительных выработок, способа управления горным давлением и крепления очистного забоя, средств механизации очистной выемки.

Основными характеристиками вмещающих угольный пласт пород являются их обрушаемость и устойчивость. При неустойчивых породах возникает необходимость использования механизированных крепей с максимальным коэффициентом перекрытия кровли, упрочнение пород кровли или оставление подкровельной пачки угля. На пластах с труднообрушающимися кровлями следует ориентироваться на очистные механизированные комплексы с высоким удельным сопротивлением, а также на проведение специальных мероприятий по разупрочнению пород кровли.

Устойчивость боковых пород предопределяет и расположение подготовительных выработок по пласту или пустым породам.

**Газоносность пласта и вмещающих пород.** При разработке угольных месторождений из пластов и вмещающих пород выделяются природные газы. При выборе системы разработки и их элементов наибольшее значение с точки зрения проветривания имеют метан ($CH_4$) и диоксид углерода ($CO_2$). Наибольшую опасность представляет метановоздушная смесь с содержанием метана 4,5 – 16 %, при котором она становится взрывчатой. На газовых шахтах предпочтительнее прямоточная и обособленная схема проветривания лав.

**Водоносность.** При высокой водообильности наблюдается вдавливание элементов крепей в породы почвы и интенсивно развивается пучение. Это должно учитываться при выборе вида крепей выработок и способов их охраны. Влияние этого фактора заключается и в том, что работа в обводненных забоях оказывает вредное

воздействие на здоровье рабочих, при этом увеличивается травматизм и снижается производительность труда. Поэтому при разработке обводненных месторождений необходимо применять также системы разработки, при которых либо данное месторождение дренируется, либо полностью исключается поступление воды в призабойное пространство очистного забоя.

Количество воды($м^3$), которое выдается из шахты, водоотливными установками на 1 т добычи полезного ископаемого в течение года называют коэффициентом водообильности шахты. Значение его изменяется в широком диапазоне от 0,1 до 35 $м^3$/т и более. В учебных целях по коэффициенту водообильности шахты разделяют на три группы: 1 – незначительная обводненность -$W \leq 1$ $м^3$/ т; 2 – средняя $W = 1{,}0 - 4{,}5$ $м^3$/ т; 3 - высокая - $W > 4{,}5$ $м^3$/ т.

**Склонность угля к самовозгоранию** проявляется тем чаще, чем мощнее пласт. Эндогенные пожары обычно возникают в местах геологических нарушений и разрушенных целиках угля. Наиболее пожаробезопасны системы разработки с минимальными потерями угля.

**Глубина разработки** вносит существенные изменения в разработку месторождений. С глубиной возрастает напряженное состояние горных пород, увеличивается давление на крепь горных выработок, возрастает вероятность возникновения горных ударов и внезапных выбросов газа, угля и породы. Общими рекомендациями при этом являются: опережающая отработка защитных пластов, минимальный объем подготовительных выработок, проведение выработок без оставления целиков угля и повторное их использование и др.

**Способы механизации очистных и подготовительных работ** весьма тесно связаны с системами разработки. Внедрение в практику горных работ новых средств комплексной механизации очистных работ вызвало необходимость в изменении элементов системы разработки и способов управления горным давлением.

Разнообразие горно-геологических условий залегания угольных пластов и технических средств их выемки предопределяет и многообразие вариантов и разновидностей систем разработки, которые характеризуются различными признаками.

В качестве основного классификационного признака в большинстве классификаций систем разработки принят признак разделе-

ния пласта по мощности на слои (табл. 9.1). В соответствии с этим признаком системы разработки разделяют на два вида – без разделения на слои (с выемкой на полную мощность) и с разделением на слои.

Первый дополнительный признак – длина очистного забоя. По этому признаку системы разработки разделяют на две группы: с длинными очистными забоями и с короткими забоями. Это разделение основывается не только на геометрическом признаке и на больших технологических различиях (виды механизации и организации очистных работ).

Второй признак – порядок проведения подготовительных выработок в выемочном поле по отношению к перемещающейся поверхности очистного забоя. Различают столбовую, сплошную и комбинированную системы разработки.

Для ***столбовых*** систем разработки характерным является то, что подготовительные выработки в выемочном поле по отношению к перемещающейся поверхности очистного забоя проводятся до начала очистной выемки.

Для ***сплошных*** систем разработки характерно одновременно-последовательное проведение подготовительных выработок в выемочном поле по отношению к перемещающейся поверхности очистного забоя, часть из них проводится до начала очистной выемки или одновременно с ней.

При ***комбинированной*** системе разработки можно применять одновременно или последовательно столбовую и сплошную системы разработки.

Третий признак – направление перемещения в пространстве очистного забоя в выемочном поле по отношению к элементам залегания пласта. Различают системы разработки с подвиганием очистных забоев по простиранию, падению, восстанию или диагонально.

Таблица 9.1

**Классификационные признаки систем разработки**

| Классификационные признаки | | | |
|---|---|---|---|
| Разделение пласта по мощности на слои | Длина очистного забоя | Порядок проведения подготовительных выработок в выемочном поле по отношению к подвижной плоскости очистного забоя | Направление перемещения в пространстве очистного забоя в выемочном поле по отношению к элементам залегания пласта |
| Без разделения на слои | С длинными забоями | Одновременный (сплошная) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | | Последовательный (столбовая) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | | Одновременно-последовательный (комбинированная) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | С короткими забоями | Одновременный (камерная) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | | Последовательный (короткими столбами) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | | Одновременно-последовательный (камерно-столбовая) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| С разделением на слои: наклонные | С длинными забоями | Последовательный (столбовая) | По простиранию<br>По падению<br>По восстанию<br>По диагонали |
| | С короткими забоями | | По простиранию |
| Горизонтальные: поперечно-наклонные | С короткими забоями | | По простиранию |

Варианты систем разработки могут также отличаться: схемами проветривания в пределах выемочного участка (возвратноточная, прямоточная); способами охраны подготовительных выработок (целиками, без целиков); способами управления горным давлением (с обрушением, с закладкой); способами выемки угля в очистном забое и др. При слоевых системах разработки возможны варианты порядка отработки слоев – нисходящий, восходящий и комбинированный.

Отличительные признаки наиболее широко применяемых систем разработки угольных пластов с выемкой на полную мощность представлены на рис. 9.1.

Применяемые системы разработки в конкретных горно-геологических условиях и их конструктивные особенности находят отражение на планах горных работ – основном документе шахты. На план наносятся все горные выработки (обычно в масштабе 1 : 2000, 1 : 5000 и реже 1 : 10000); отмечаются последовательность и сроки их проведения, а для очистных работ – величина месячного подвигания линии очистного забоя; старые очистные работы отмечаются по годовому подвиганию очистного забоя; указываются тип механизации выемки и способ управления кровлей.

**Порядок выполнения работы**

После ознакомления с теоретическими основами выполнения работы, а также с примером выполнения работы студент получает план горных работ одной из действующих шахт. По полученному плану горных работ необходимо:

- определить и занести в таблицу (табл. 9.2) горно-геологические и горнотехнические параметры действующих выемочных участков;
- определить на основании отличительных признаков класс системы разработки;
- установить направление движения струи воздуха и транспорта угля на выемочном участке.

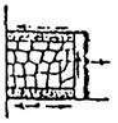
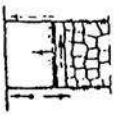
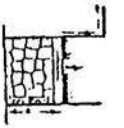
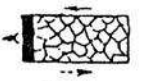
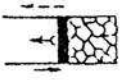
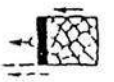
| Признаки системы | | Классификационные признаки | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Вид системы разработки | | |
| | | Сплошная | Столбовая | Комбинированная |
| | |  |  |  |
| Основные | Порядок ведения очистных и подготовительных работ в выемочном поле | Одновременный | Разновременный | Комбинированный |
| Дополнительные | Условия поддержания участковых выработок | В выработанном пространстве или на границе с ним | В массиве угля или зоне установившегося горного давления | В массиве и выработанном пространстве |
| | Направление движения очистных забоев и транспорта угля | Противоположное | Совпадает | Совпадает или не совпадает |
| | Направление движения очистных забоев и исходящей струи воздуха | Противоположное  | Совпадает  | Совпадает  Не совпадает  |

Рис. 9.1. Отличительные признаки систем разработки.

Направление движения:

очистного забоя; свежей струи воздуха;

транспорта угля; исходящей струи воздуха

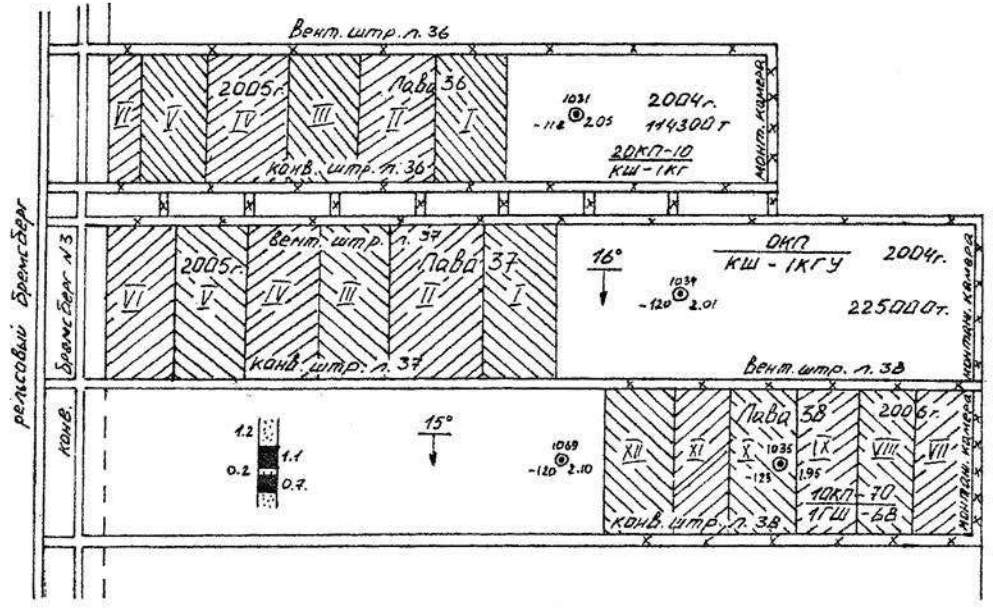



Рис. 9.2. Выкопировка из плана горных работ пласта «Ж»
шахты «Капитальная» (масштаб 1: 5000)

Таблица 9. 2

**Характеристика действующих выемочных участков**

| Выемочной участок | Система разработки | Мощность пласта, м | Угол падения, град | Вмещающие породы | | Длина лавы, м | Запасы выемочного участка, тыс. т | Способ охраны выработки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | кровля | почва | | | |
| Лава 36 | Длинные столбы по простиранию | 2,05 | 16 | Алевролит, песчаник | Аргиллит | 150 | 300,0 | Целик-массив |
| Лава 37 | То же | 2,00 | 16 | То же | То же | 175 | 460,7 | То же |
| Лава 38 | - « - | 2,10 | 15 | - « - | - « - | 160 | 421,1 | Без целика с повторным использованием |

*Пример.* По плану горных работ (рис. 9.2) устанавливаем следующее:

1) шахта «Капитальная» ОАО «Челябинская угольная компания», пласт «Ж», лава 38;

2) мощность пласта $m = 2{,}1$ м; угол падения $\alpha = 16°$; непосредственная кровля – алевролит мощностью 4 – 8 м; основная кровля – песчаник мощностью 6 – 8 м, почва – аргиллит; глубина ведения работ 250 м; шахта III категории по газу; глубина ведения работ 250 м; шахта III категории по газу;

3) очистной забой – лава длиной 160 м;

4) лава обслуживается конвейерным и вентиляционным штреками;

5) вентиляционным штреком лавы 38 является сохраненный для повторного использования конвейерный штрек лавы 37;

6) очистные и подготовительные работы разделены в пространстве и времени;

7) направление движения исходящей струи воздуха и транспортирования угля совпадает с направлением подвигания лавы.

Данная система разработки имеет классификационные признаки столбовой системы разработки. Полное название системы – «Столбовая система разработки с выемкой одинарными лавами по простиранию».

## Контрольные вопросы

1. Назовите основные факторы, влияющие на выбор системы разработки.
2. Как влияет на выбор системы разработки мощность пласта?
3. Как влияет на выбор системы разработки и ее параметры угол падения пласта?
4. Назовите основные признаки классификации систем разработки пластовых месторождений.
5. Назовите главные отличия столбовых систем разработки от сплошных.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица П.1.1

**Углы сдвижения пород и ширина предохранительной бермы для основных бассейнов и месторождений**

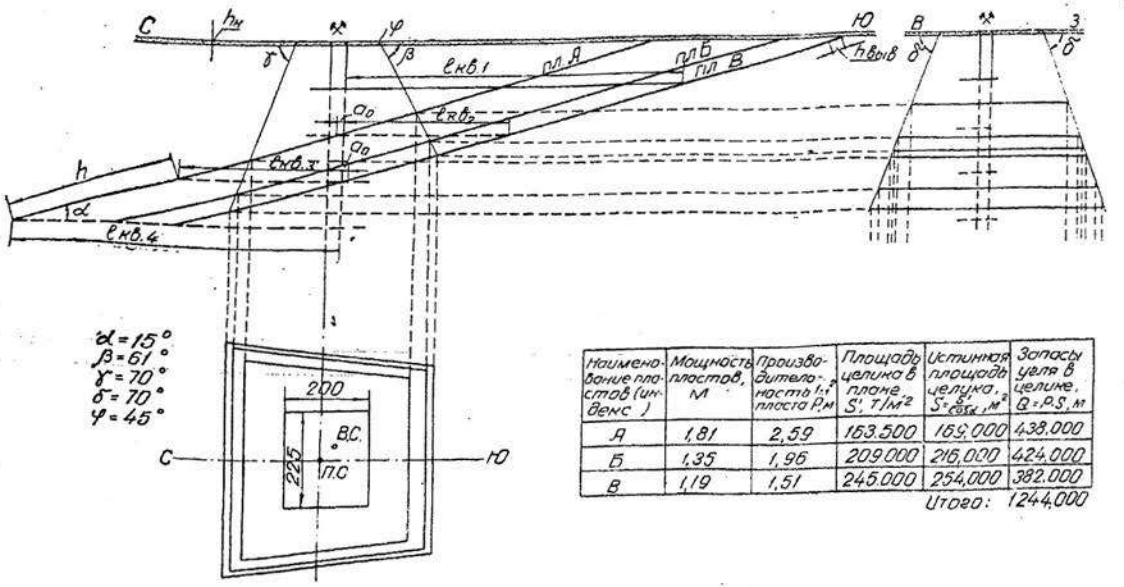
| Бассейны или месторождения | Углы падения пластов α, град | Углы сдвижения пород, град | | | | Ширина берм для объектов охраны, м |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | в коренных породах | | | в наносах | |
| | | β | γ | δ | φ | |
| Донецкий и Печорский | 0…5 | 85 | 85 | 85 | 60 | 10 |
| | 6…44 | 90 | 85 | 85 | 60 | |
| | 45…65 | 90 | 85 | 85 | 60 | |
| | 66…69 | 40 | 90 | 85 | 60 | |
| | 70…85 | 30 | 85 | 85 | 60 | |
| Челябинский | 0…10 | 65 | 65 | 65 | 50 | 10 |
| | 11…60 | 70 – 0 | 70 | 65 | 50 | |
| | 61…65 | 40 | 75 | 65 | 50 | |
| | 66 и более | 40 | 75 | 65 | 50 | |
| Воркутинское | 0…65 | 80 | 80 | 80 | 55, в обводненных 45 | 10 |
| Карагандинский | 0…70 | 70-0,6 | 70 | 70 | 45 | 10 |
| | 70…80 | 30 | | 70 | 45 | |
| Подмосковный | 0…10 | - | - | 55 | - | 5 |
| Кузнецкий | 0 | 80 | 80 | 80 | 55 | 10 |
| | 10…50 | 82- 0 | 80 | 80 | 55 | |
| | 51..55 | 31 | 80 | 75 | 55 | |
| | 56…90 | 30 | 80 | 75 | 55 | |

*Примечание.* В Челябинском бассейне углы сдвижения пород β, γ, и δ в подработанной ранее толще пород принимаются на 10° меньше, чем углы, определенные по табл. П.3.1.

При разработке угольных пластов с углами падения более 65° угол сдвижения $\beta_1$ в породах лежачего бока изменяется от 55 до 40° обратно пропорционально изменению углов падения от 65 до 90°, т. е. при возрастании угла падения на каждые 5° угол сдвижения уменьшается на 3°.

В Донецком бассейне при наличии в толще меловых и третичных отложений углы сдвижения $\beta = \gamma = \delta = 70°$.

В Печорском бассейне при наличии в наносах плывунов угол сдвижения φ принимается равным 45°.




| Наименование пластов (индекс) | Мощность пластов, м | Производительность 1 м² пласта Р, м | Площадь целика в плане S', т/м² | Истинная площадь целика, м² $S = \frac{S'}{\cos\alpha}$, м² | Запасы угля в целике, Q = P·S, м |
|---|---|---|---|---|---|
| А | 1,81 | 2,59 | 163.500 | 169.000 | 438.000 |
| Б | 1,35 | 1,96 | 209.000 | 216.000 | 424.000 |
| В | 1,19 | 1,51 | 245.000 | 254.000 | 382.000 |
| | | | | Итого: | 1244.000 |

Рис. П. 1.1. Построение предохранительных целиков под промплощадку

Приложение 2

Таблица П.2.1

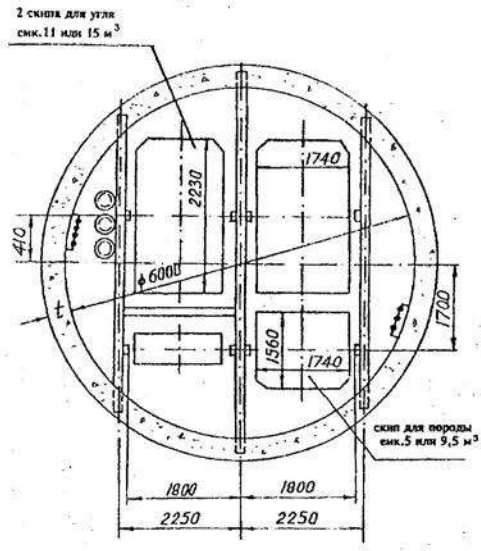
Габаритные размеры подвижного состава

| Параметры | Шахтные вагонетки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ВГ-0,7 | ВГ-1,2 | ВГ-2,0 | ВГ- 2,2 | ВГ-3,3 | ВГ-4,5А | ВГ-9А | ВГ-10А | УВГ-1,3 |
| Вместимость кузова, $м^3$ | 0,7 | 1,2 | 2,0 | 2,2 | 3,3 | 4,5 | 9 | 10 | 1,3 |
| Основные размеры, мм | | | | | | | | | |
| Длина | 1250 | 1850 | 3070 | 2950 | 3450 | 4100 | 8000 | 7300 | 1500 |
| Ширина | 850 | 1000 | 1250 | 1200 | 1240 | 1350 | 1350 | 1800 | 850 |
| Высота | 1220 | 1300 | 1200 | 1300 | 1300 | 1550 | 1550 | 1600 | 1300 |
| Колея, мм | 600 | 600, 750 | 750, 900 | 600, 750 | 900 | 750, 900 | 750, 900 | 750, 900 | 600, 750 |
| | Аккумуляторные электровозы | | | | | | | | |
| Тип электровоза | 4,5 АРП-2М | 5АРВ-2М | АРИ-7 | АРВ-7 | АМВД | 2АМ-8Д | АРИ-10 | АРИ-14 | АРП-28 |
| Длина по буферам, мм | 3300 | 3480 | 4200 | 4200 | 4550 | 9470 | 5500 | 5865 | 10870 |
| Ширина, мм,при размере колеи 600 мм | 1000 | 1000 | 1050 | 1050 | 1045 | 1045 | 1060 | - | - |
| Ширина, мм,при размере колеи 900 мм | 1300 | 1300 | 1350 | 1350 | 1315 | 1345 | - | 1350 | 1350 |
| Высота, мм | 1310 | 1450 | 1500 | 1500 | 1415 | 1415 | 1650 | 1650 | 1650 |
| Исполнение электрооборудования | РВ | РВ | РВ | РВ | РВ | РВ | РВ | РВ | РВ |

Окончание табл. П.2.1

| Контактные электровозы | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Тип электровоза | 3КР-600 | 4КР-1 | К-10 | К-14 | КТ-14 | КТ-28 |
| Длина по буферам, мм | 2900 | 3120 | 5200 | 5440 | 5440 | 12300 |
| Ширина, мм, по выступающим частям при колее 600 мм | 960 | 1000 | 1350 | 1350 | 1350 | 1350 |
| Ширина по выступающим частям при колее 750 и 900 мм | - | 1300 | 1650 | 1650 | 1650 | 1650 |
| Высота, мм | 1400 | 1515 | 1650 | 1650 | 1650 | 1650 |
| Шахтные конвейеры с шириной ленты 800 мм | | | | | | |
| Тип конвейера | КЛ 150Д, КЛ-150У | 1Л80 | 1ЛТ-80 | 2П80 | 2ЛБ80 | 1ПБ80 |
| Максимальная ширина, мм | 1080 | 1108 | 1108 | 1108 | 1108 | 1108 |

*а*




*б*

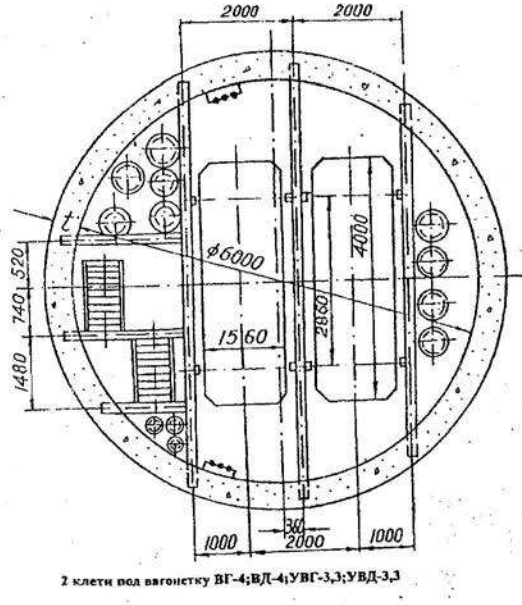



Рис. П. 3.1. Сечение скипового *(а)* и клетевого *(б)* стволов

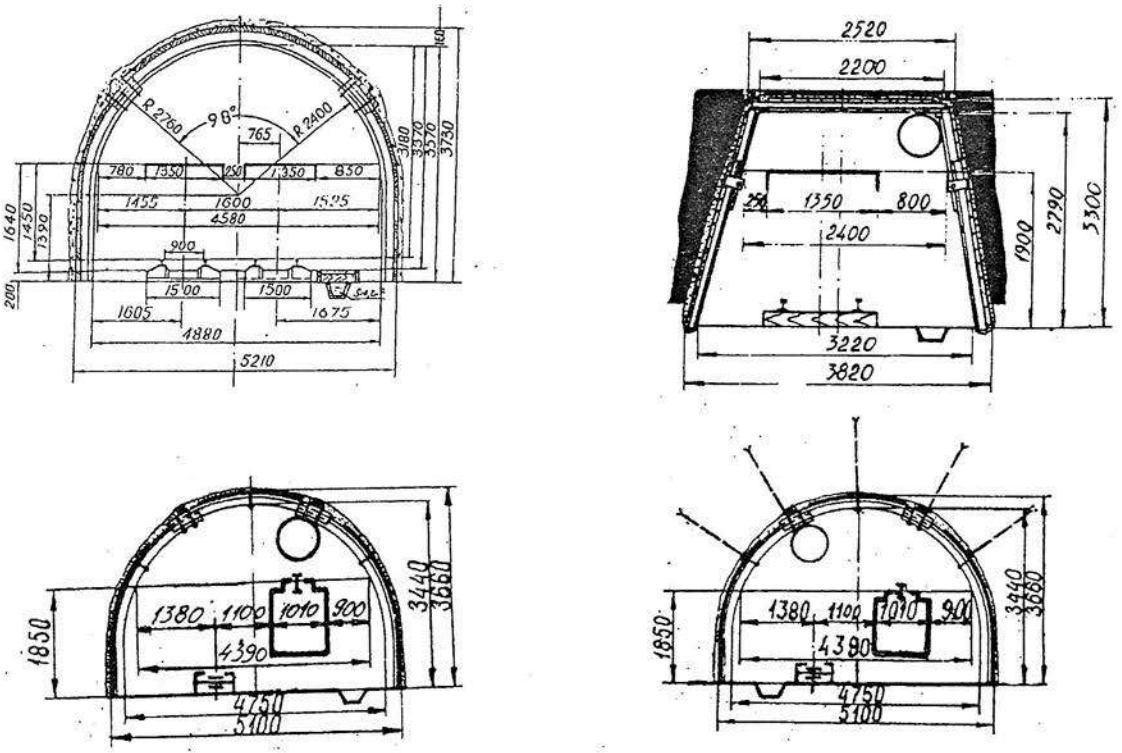



Рис. П. 3.2. Сечение квершлага *(а)*, вентиляционного штрека *(б)* и бремсберга *(в, г)*

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Горно-геологические условия залегания угольных месторождений весьма разнообразны. Это приводит и к различным техническим решениям на различных стадиях их разработки.

На этапе изучения дисциплины «Основы горного дела» при многовариантности решения вопросов во всех звеньях технологической цепи угольной шахты следует освоить основные ее элементы. При этом наибольший эффект в освоении материала достигается в результате прорисовывания чертежей схем графиков и проведения соответствующих расчетов после изучения теоретических вопросов.

Учебное издание

Александр Михайлович Вандышев

Владимир Валентинович Потапов

# ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА. ПОДЗЕМНАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ

*Учебно-методическое пособие*
по выполнению практических работ по дисциплине
«Основы горного дела» для студентов
специальности 21.05.04 Горное дело специализации
«Электрификация и автоматизация горного производства»

Редактор Устьянцева Л.В.
Компьютерная верстка Реснянской И.В.

Подписано в печать 2019 г.
Бумага писчая. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$
Гарнитура Times New Roman Печать на ризографе.
Печ. л. Уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ




**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**
**ФГБОУ ВО**
**«Уральский государственный горный университет»**

М. Л. Хазин

# Б1.О.ДВ.02.02 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

Екатеринбург

2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**
Методической комиссией
горно-механического
факультета УГГУ
14.10.2020г.
Председатель комиссии
П. А. Осипов

М. Л. Хазин

# Б1.О.ДВ.02.02 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: форма обучения: очная, заочная

Издание УГГУ Екатеринбург, 2021

Х12

Рецензент: Ю. Н. Жуков, профессор, доктор технических наук (УрФУ)

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры
Эксплуатации горного оборудования 09 октября 2020 (протокол № 2)
и рекомендовано для издания в УГГУ

**Хазин М. Л.**
Х12 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ: методические указания по самостоятельной работе студентов направления подготовки 21.05.04 Горное дело. - Екатеринбург: Изд-во, УГГУ, 2021. – 14 с.

Для студентов направления подготовки 21.05.04 Горное дело. Представлены современные конструкционные материалы, которые будут использоваться в горных машинах и оборудовании в ближайшие десятилетия. Данная работа позволяет учащимся ориентироваться в широкой номенклатуре материалов, осуществлять подбор по физико-механическим характеристикам с целью обеспечения наивысшего качества и точности изготавливаемых конструкций.

Табл. 2. Библ. 9 назв.

© Хазин М. Л., 2021
© Уральский государственный
горный университет, 2021

**Оглавление**

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ…… 5
1.1. Цель преподавания дисциплины..... 5
1.2. Задачи изучения дисциплины..... 5
1.3. Место дисциплины в структуре ОПОП…….. 5
1.4. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины 5
2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ..... 6
2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах..... 6
2.2. Распределение часов по темам и видам занятий……. 6
3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ..... 7
3.1. Методические рекомендации по самостоятельной подготовке теоретического материала ..... 8
3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям ..... 10
3.3. Методические рекомендации по подготовке практико-ориентированного задания ..... 11
3.4. Контроль знаний студентов..... 11
4. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ…… 13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……. 13
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…….. 14

## 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

### 1.1. Цель дисциплины

*Цель дисциплины*: формирование научного и практического представления о структуре и свойствах материалов, позволяющих решать задачи, возникающие при выполнении профессиональных функций.

### 1.2. Задачи изучения дисциплины

Основная задача дисциплины – подготовка студентов к применению навыков разработки систем по обеспечению экологической и промышленной безопасности при производстве работ по эксплуатационной разведке, добыче и переработке твердых полезных ископаемых, строительству и эксплуатации подземных объектов.

Для этого необходимо:

- развитие у обучаемых знаний и навыков, необходимых для выбора материалов;
- ознакомление обучаемых с методами стандартных испытаний по определению физико-механических свойств и технологических показателей используемых материалов и готовых изделий;
- обучение студентов применению полученных практических и теоретических знаний при обеспечении качества и надежности горных машин и оборудования.

### 1.3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Место дисциплины в структуре ОПОП: Дисциплина «МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ» является дисциплиной обязательной, части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана по направлению подготовки 21.05.04 «Горное дело» специализации Электрификация и автоматизация горного производства.

### 1.4. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

В процессе изучения дисциплины формируются общепрофессиональные компетенции и индикаторы достижения компетенции.

ПК-1: Способен демонстрировать знание и понимание фундаментальных наук, а также знания в междисциплинарных областях, позволяющие решать современные прикладные инженерные задачи;

ОПК-16.1 Принимает участие в разработке систем автоматического анализа и контроля экологической ситуации и промышленной безопасности

ОПК-16.2 Продумывает и предлагает мероприятия по улучшению существующей системы контроля экологической ситуации и промышленной безопасности.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

*Знать:*

- общую классификацию материалов, их характерные свойства, области применения;
- типовые методы измерения параметров и свойств материалов;

*Уметь:*

- выбирать материалы с необходимым комплексом физико-механических характеристик;
- проводить измерения параметров материалов;

*Владеть:*

- навыками использования технической и справочной литературы для выбора материалов.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Наименование и содержание тем

**Тема 1: Строение, свойства и кристаллизация материалов.**

Аморфная и кристаллическая структура. Кристаллизация и структура металлов и сплавов. Виды сплавов. Диаграммы состояния сплавов. Диаграмма железо-углерод. Технологии термической обработки: отжиг, закалка, отпуск, нормализация. Поверхностная закалка; химико-термическая обработка. Деформация и разрушение. Виды деформации, диаграмма деформации. Твердость, усталость, выносливость и износостойкость.

**Тема 2: Конструкционные металлы и сплавы. Композиционные материалы.**

Углеродистые и легированные конструкционные стали. Чугуны. Цветные металлы и их сплавы. Стекло и керамика. Пластмассы и полимеры. Классификация и виды композиционных материалов.

### 2.2. Распределение часов по темам и видам занятий

Тематический план изучения дисциплины для студентов очной формы обучения

| *№* | *Тема* | *Контактная работа обучающихся с преподавателем, час* | | *Самостоятельная работа* |
|---|---|---|---|---|
| | | *лекции* | *практич. занятия/* | |
| 1. | Строение, свойства и кристаллизация | 8 | 8 | 42 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | материалов. | | | |
| 2. | Конструкционные металлы и сплавы. Композиционные материалы. | 8 | 8 | 43 |
| | **ИТОГО** | **16** | **16** | **85** |

Тематический план изучения дисциплины для студентов заочной формы обучения

| *№* | *Тема* | *Контактная работа обучающихся с преподавателем, час* | | *Самостоятельная работа* |
|---|---|---|---|---|
| | | *лекции* | *практич. занятия/* | |
| 3. | Строение, свойства и кристаллизация материалов. | 4 | 4 | 59 |
| 4. | Конструкционные металлы и сплавы. Композиционные материалы. | 4 | 4 | 60 |
| | **ИТОГО** | **8** | **8** | **119** |

Освоение дисциплины предусматривает репродуктивные (информационные лекции, опросы, работа с книгой и т.д.); активные (доклады, работа с информационными ресурсами).

## 3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов по дисциплине «материаловедение в машиностроении» позволяет сформировать знания, умения и навыки магистрантов направления подготовки 21.05.04 «Горное дело» специализации Электрификация и автоматизация горного производства.

Проверка знаний материала лекционных и практических занятий проводится в виде тестирования.

Основные цели самостоятельной работы:

- систематизация и закрепление теоретических знаний и практических умений, обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирование самостоятельного мышления;
- развитие исследовательских умений.

Особую важность приобретают умения обучающихся выбирать материалы для профессиональной деятельности, определять основные свойства материалов по маркам, знание свойств, классификации, характеристики применяемых в профессиональной деятельности материалов, самостоятельное применение полученных знаний и умений на практике. Методические рекомендации помогут обучающимся целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении самостоятельной работы.

### 3.1. Методические рекомендации по самостоятельной подготовке теоретического материала

Основной формой изучения курса является самостоятельная работа студента с книгой. В начале следует ознакомиться с программой курса, затем прочитать соответствующие разделы по учебнику. При изучении раздела необходимо усвоить основные понятия, термины, внимательно рассмотреть примеры и выводы. Усвоив тот или иной раздел учебника необходимо ответить на вопросы для самопроверки, приведённые в настоящих методических указаниях. Вопросы для самопроверки обращают внимание студента на наиболее важные разделы курса и дают возможность установить, всё ли главное им усвоено.

Самостоятельная работа студентов по изучению отдельных тем дисциплины включает поиск учебных пособий по данному материалу, проработку и анализ теоретического материала, самоконтроль знаний по данной теме с помощью нижеприведенных контрольных вопросов и заданий.

#### Контрольные вопросы

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?
2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?
3. Что такое элементарная ячейка?
4. Что такое полиморфизм?
5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?
6. Что такое мозаичная структура?
7. Виды дислокаций и их строение.
8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?
9. Каковы параметры процесса кристаллизации?
10. Что такое переохлаждение?
11. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число

степеней свободы?

12. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.

13. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения? 4. Как строятся диаграммы состояния?

14. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.

15. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.

16. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.

17. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.

18. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?

19. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?

20. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

21. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?

22. Какие вы знаете износостойкие стали?

23. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющим сталям?

24. Что такое композиты?

25. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?

26. Как подразделяют композиты по виду матрицы?

27. От чего зависят механические свойства композитов?

28. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?

29. Что лежит в основе классификации полимеров?

30. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?

31. Какие вы знаете наполнители пластмасс?

32. Для чего вводят в пластмассы отвердители?

33. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.

34. Укажите область применения термопластов и реактопластов.

35. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

### 3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Самостоятельная работа студентов по подготовке к практическим занятиям, включает проработку и анализ теоретического материала, а также

самоконтроль знаний по теме практического занятия с помощью нижеприведенных контрольных вопросов и заданий. При изучении тем дисциплины рекомендуется использовать литературные источники.

## Контрольные вопросы

1. Какие вы знаете хладостойкие стали и сплавы? Укажите их состав, свойства и назначение.
2. Какие вы знаете жаропрочные и жаростойкие стали и сплавы? Укажите их состав, свойства и назначение.
3. Какие вы знаете материалы с высокой твердостью? Укажите их состав, свойства и назначение.
4. Какие требования предъявляются к сплавам с высокой упругостью? Приведите примеры таких сплавов с указанием их состава, структуры, свойств и области применения.
5. Приведите примеры сплавов с особенностями теплового расширения. Их состав, свойства и назначение.
6. Какие вы знаете сплавы с заданными упругими свойствами? Их состав, свойства и назначение.
7. Каковы особенности титановых сплавов и области их применения?
8. Какой термической обработке подвергают сплавы на основе титана?
9. Приведите примеры сплавов на основе титана. Укажите их состав, обработку, свойства и область применения.
10. Высокопрочные стали.
11. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?
12. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?
13. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?
14. Какова термическая обработка цементуемых деталей?
15. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
16. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
17. Какова природа фазовых и термических напряжений?
18. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?
19. Каковы виды и причины брака при закалке?
20. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особенности?
21. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?
22. Какие вам известны технологические приемы уменьшения

деформации при термической обработке?

23. Для чего и как производится обработка холодом?

24. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

### 3.3. Методические рекомендации по подготовке практико-ориентированного задания

Необходимо уяснить принципы обозначения сталей и сплавов. Обратить внимание на различение обозначений конструкционных и инструментальных сталей. Помнить, что одна и та же буква может обозначать различные легирующие элементы в обозначениях сталей и цветных металлов.

*Примерные практико-ориентированные задания*

1. Расшифруйте состав и марку сплавов КЧ30-6 и А12
2. Расшифруйте состав и марку сплавов 8Х18Н9АТ и 8Х18Н9ТА
3. Расшифруйте состав и марку сплавов 12ХГ2МТР и ТТ15К6

### 3.4. Контроль знаний студентов

Экзамен – форма контроля промежуточной аттестации, в результате которого обучающийся получает оценку по четырехбалльной шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Экзамен проводится по расписанию.

Цель экзамена– завершить курс изучения дисциплины, проверить сложившуюся у обучающегося систему знаний, понятий, отметить степень полученных знаний, определить сформированность компетенций.

Для того чтобы быть уверенным на экзамене, необходимо ответы на наиболее трудные, с точки зрения обучающегося, вопросы подготовить заранее и тезисно записать. Запись включает дополнительные ресурсы памяти.

К экзамену необходимо начинать готовиться с первой лекции, практического (семинарского) занятия, так как материал, набираемый памятью постепенно, неоднократно подвергавшийся обсуждению, образует качественные знания, формирует необходимые компетенции.

При подготовке к экзамену следует пользоваться конспектами лекций, учебниками.

На подготовку к устному ответу обучающегося дается 40-60 минут в зависимости от объема билета. На подготовку ответа в письменной форме – не менее 120 минут.

При опоздании к началу письменного зачета - обучающийся на зачет не допускается. Использование средств связи, «шпаргалок», подсказок на зачете- является основанием для удаления обучающегося с зачета, а в зачетной ведомости проставляется оценка «не зачтено».

Для подготовки к зачету в письменной форме обучающийся должен иметь лист (несколько листов) формата А-4.

Лист (листы) формата А-4, на котором будет выполняться зачетное - задание, должен быть подписан обучающимся в начале работы в правом верхнем углу. Здесь следует указать:

- Ф. И. О. обучающегося;
- группу, курс
- дату выполнения работы
- название дисциплины

Страницы листов с ответами должны быть пронумерованы.

Проверка письменных работ осуществляется преподавателем, проводившим зачет, в течение 3-х рабочих дней после его проведения. Результаты письменного зачета - объявляются путем выдачи копии зачетной ведомости старосте группы, результаты устного зачета объявляются в процессе проведения зачета- после ответа обучающегося.

Зачет - может проводиться с использованием технических средств обучения.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

**Профессиональные пакеты программных средств:**

1. Microsoft Windows 8 Professional
2. Microsoft Office Professional 2010
3. Microsoft Windows 8.1 Professional

**Информационные справочные системы**

ИПС «КонсультантПлюс»
ИПС «Гарант»

**Базы данных**

Scopus: база данных рефератов и цитирования
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri
E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработка систем по обеспечению экологической и промышленной безопасности при производстве работ по эксплуатационной разведке, добыче и переработке твердых полезных ископаемых, строительству и эксплуатации подземных объектов является одной из важнейших составляющих

деятельности человека, без которых невозможно создание и последующее внедрение в производство наукоемких ресурсосберегающих и экологически чистых технологий и, тем самым, развитие научно-технического прогресса, определяющего будущее любого государства, в том числе и России.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балин В. С. Конструкционные материалы: учебное пособие. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2006. - 138 с.

2. Балин В. С., Зубов В. В. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ: учебное пособие/ 2-е изд., перераб. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2012. - 202 с.

3. Балин В. С., Хазин М. Л. Стали и сплавы с особыми физическими свойствами: учебное пособие. - 3-е изд., стер. - Екатеринбург: УГГУ, 2007. - 49 с.

4. Болтон У. Конструкционные материалы: металлы, сплавы, полимеры, керамика, композиты: Карманный справочник = Engineering materials : пер. с англ. / - 2-е изд., стер. - Москва: Додэка-XXI, 2007. - 320 с.

5. Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

6. Хазин М. Л. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ: учебно-практическое пособие, Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

7. Хазин М. Л. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Учебное издание

Хазин Марк Леонтьевич

# МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ:

методические указания по самостоятельной работе студентов направления подготовки 21.05.04 Горное дело

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Редактор В. В. Баклаева

Подписано в печать . .20 г. Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16
Печать офсетная. Печ. л. 5,0. Уч.-изд. л 4,41. Тираж 50. Заказ №_____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета
В лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

# *МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ*

## ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ..... 3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ..... 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ..... 4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса ..... 4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам ..... 5
Подготовка и написание контрольной работы ..... 6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) ..... 7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ..... 8
Подготовка к зачёту ..... 8
Подготовка к экзамену ..... 8

# ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

## Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

– рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

– изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
– изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– составление плана проведения эксперимента;
– составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
– аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

**Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

– чтение основной и дополнительной литературы;
– работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

– работа с конспектом лекций;
– ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

– решение задач по образцу и вариативных задач;
– выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
– оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- -во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

**Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### Подготовка к экзамену

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

# КОММУНИКАТИВНАЯ КУЛЬТУРА ЛИЧНОСТИ

Специальность
***21. 05.04 Горное дело***

Специализация

***Электрификация и автоматизация горного производства***

***формы обучения: очная, заочная***

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| Философии и культурологии | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Беляев В.П. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 29.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по работе с текстом лекций | 5 |
| 2 | Методические рекомендации по подготовке к опросу | 8 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации) | 9 |
| 4 | Методические рекомендации по написанию эссе | 11 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям | 14 |
| 6 | Методические рекомендации по подготовке к дискуссии | 15 |
| 7 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 17 |
| | Заключение | 20 |
| | Список использованных источников | 21 |

## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

***Самостоятельная работа студента*** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям*:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

***Вступление***.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

***Основная часть.***

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

***Заключение.***

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

| *Критерии оценки доклада, сообщения* | *Количество баллов* |
|---|---|
| Содержательность, информационная насыщенность доклада | 1 |
| Наличие аргументов | 1 |
| Наличие выводов | 1 |
| Наличие презентации доклада | 1 |
| Владение профессиональной лексикой | 1 |
| Итого: | 5 |

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

## 4. Методические рекомендации по написанию эссе

***Эссе*** - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

*Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

***Дискуссия*** (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении** дискуссии выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## Б2.В.01 (П) ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА
## часть 1

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
|---|---|
| Электрификации горных предприятий | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРАКТИКИ

Подготовка высококвалифицированного специалиста может быть успешной только при правильном сочетании теоретических знаний, полученных в ВУЗе, и практических навыков, приобретенных студентами во время прохождения производственных практик.

При прохождении первой производственной практики перед студентами ставятся следующие цели:

- закрепить теоретические и практические знания, полученные при изучении естественнонаучных и специальных дисциплин;
- изучить должностные инструкции электрослесаря, электромонтера, электрика, мастера цеха, участка;
- изучить технологический процесс и оборудование одного из производств;
- получить представление об особенностях эксплуатации и ремонта машин и оборудования, об их оснащенности электрическими устройствами и системами;
- получить практические навыки по организации производства, эксплуатации и ремонту электромеханического оборудования.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие задачи:

- изучить правила устройства электроустановок, правила безопасности при эксплуатации электроустановок;
- детально изучить основные и вспомогательные технологические процессы, и организацию производства предприятия, на котором проходит практика;
- ознакомиться с электромеханическим оборудованием технологических процессов, специфическими требованиями к нему, условиями и особенностями его эксплуатации;
- изучить условия применения электроэнергии на предприятии;
- ознакомиться с применением и общим устройством систем автоматического управления;
- получить основные сведения об охране труда и окружающей среды;
- изучить структуру электромеханической службы на предприятии;
- собрать исходные данные для курсового проектирования на 4-м курсе.

## 2. РАБОЧЕЕ МЕСТО СТУДЕНТА И БАЛАНС ВРЕМЕНИ

Перед выездом на предприятие студент подписывает обходной лист, получает на кафедре ЭГП путевку-удостоверение с подписями ответственных лиц, заверенную печатью университета.

При прохождении первой производственной практики рабочими местами студентов могут быть: ученик электрослесаря, электрослесарь, электромонтер, электрик.

Во время практики студенты являются членами коллектива подразделений предприятия, подчиняются правилам внутреннего распорядка и выполняют распоряжения администрации как штатные работники.

Практика студентов на предприятиях организуется по приказу руководителя, которым определяется порядок проведения практики, ее задачи, мероприятия по созданию студентам необходимых условий выполнения программы практики, обеспечению общежитием, спецодеждой и т.п. Определяется порядок допуска студентов к работе, проведение инструктажа по технике безопасности и охране труда.

Общая продолжительность практики 6 недель. За время практики студент должен подготовиться и сдать экзамен на квалификацию электрослесаря (электромонтера, электрика) и получить удостоверение на право работы.

При выезде на практику студенты должны иметь при себе следующие документы: паспорт, военный билет, студенческий билет или приписное свидетельство, справку о состоянии здоровья, выданную поликлиникой УГГУ, трудовую книжку (при ее наличии).

## 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет составляется каждым студентом на производстве. Во время практики студент ведет дневник, в котором записывает все сведения, полученные на производстве. Дневник, отчет о практике и путевка-удостоверение являются основными документами, по которым осуществляется оценка деятельности студента на практике.

В путевке-удостоверении на предприятии проставляется дата прибытия и выезда студента с предприятия, руководителем практики от предприятия дается краткий отзыв-характеристика. Путевка-удостоверение скрепляется подписями ответственных лиц и печатями.

Отчет по практике должен состоять из двух частей:

общей части, выполненной в соответствии с программой практики;

индивидуальной части, посвященной конкретной работе студента на рабочей должности (в ней содержится описание работ, выполненных студентом, либо при его участии).

Общий объем отчета – 30 - 40 страниц.

При составлении отчета необходимо дать критическую оценку процессам производства и его организации.

В отчете должны быть упрощенные схемы, рисунки, эскизы, которые нумеруются и на них делаются ссылки в тексте.

Громоздкие схемы должны быть переработаны и сокращены до структурных или функциональных так, чтобы при сохранении сущности они имели разумный для отчета объем.

К отчету должны быть приложены:

1. Документы о сдаче экзамена на квалификацию электрослесаря (электромонтера).
2. Производственная характеристика студента на практике.
3. Путевка-удостоверение.

Отчет сдается на кафедру в 3-х дневный срок после начала занятий для проверки. В течение двух недель после начала осеннего семестра студент защищает отчет перед комиссией кафедры.

Получение неудовлетворительной оценки по практике влечет отчисление из университета.

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ

### 4.1. Общие сведения о предприятии

Название предприятия, его местоположение, краткая история развития. Состав предприятия, назначение его сооружений и цехов.

### 4.2. Технология и электромеханическое оборудование технологических процессов

В этой части отчета должны быть отражены следующие вопросы (в зависимости от места прохождения практики):

*а) Для шахт и рудников.*

Вскрытие месторождения, система разработки. Оборудование очистных и подготовительных работ, стационарные установки (подъемные, водоотливные, вентиляционные, компрессорные): назначение, устройство, технические характеристики, основные сведения об управлении и автоматизации. Электроснабжение машин и установок подземных горных работ.

*б) Для открытых горных работ.*

Краткая геологическая характеристика месторождения, технология добычи полезного ископаемого. Характеристики технологического оборудования на очистных и вкрышных работах. Транспорт полезного ископаемого. Схемы электрооборудования основных механизмов. Электроснабжение машин и установок открытых горных работ.

*с) Для обогатительных фабрик.*

Характеристика полезного ископаемого, перерабатываемого на фабрике. Технология

обогащения полезного ископаемого, схема цепи аппаратов фабрики. Подготовительные технологические процессы (дробление, измельчение), технология, оборудование. Основные технологические процессы (флотация, магнитная сепарация, отсадка и т.д.). Технология, оборудование. Схемы электроснабжения основных механизмов.

*д) Для промышленных предприятий.*

Общие сведения о предприятии, структура предприятия. Характеристика перерабатываемого сырья и выпускаемой продукции. Описание технологического процесса.

Типы и характеристики технологического оборудования. Электроснабжение основных технологических объектов и установок. Электропривод основных технологических механизмов.

4.3. Внешнее электроснабжение предприятия

Основные сведения о внешнем электроснабжении предприятия: источник питания, питающие линии, уровни напряжения и основное оборудование подстанций. Общие принципы распределения электроэнергии внутри предприятия. Основные требования по обеспечению электробезопасности.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### *Приложение 1*

Для выполнения ***курсовой работы по дисциплине «Электрический привод»,*** необходимо собрать следующие материалы:

1. Виды электроприводов, используемых на основных технологических механизмах. Основные характеристики технологических машин, установок и электрических двигателей.

2. Виды пуска электроприводов. Способы регулирования скорости вращения электроприводов. Основные технико-экономические показатели регулирования электроприводов. Система регулирования, используемая в электроприводах. Способы и технические средства электрического торможения электроприводов. Схема автоматического управления электроприводом технологической установки.

3. Коэффициент полезного действия электропривода и коэффициент мощности, коэффициент загрузки электродвигателей основных механизмов предприятия.

### *Приложение 2*

Для выполнения ***курсового проекта по дисциплине «Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов»*** необходимо собрать следующие материалы:

1. Сведения об электроприводе главных механизмов машин и установок основных объектов технологического комплекса предприятия: переменного или постоянного тока; регулируемый или нерегулируемый; способы регулирования скорости вращения электропривода; тип системы электропривода постоянного тока (Г-Д или ТП-Д с указанием типа возбудителя); переменного тока (преобразователь переменного напряжения ППН-АД, преобразователь частоты ПЧ-АД, каскадные схемы и т.п.); необходимость и способы ограничения нагрузок в электроприводе. Схема силовой части электропривода одного из основных механизмов машины и дать ее описание.

2. Структура системы управления электроприводом (какие переменные регулируются, виды обратных связей, обратные связи по регулируемым переменным заведены на один сумматор или на отдельные регуляторы). Структурная и функциональная схемы электропривода одного из основных механизмов машины или установки.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
Комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## Б2.В.02 (П) ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА, часть 2

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
|---|---|
| Электрификации горных предприятий | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРАКТИКИ

Вторая производственная практика является продолжением учебного процесса в условиях производственного предприятия. Основной целью практики является детальное ознакомление с организацией электромеханической службы данного предприятия, монтажом, эксплуатацией, ремонтом и наладкой автоматизированного электропривода и электрооборудования (ЭО).

При прохождении практики перед студентами ставятся следующие задачи:

закрепить и расширить теоретические знания, полученные при изучении специальных и общепрофессиональных дисциплин: электрические машины, электрические привод, теория электропривода, автоматизированный электропривод ТПМ и ТК, основы электроснабжения и электротехнические системы, механическое оборудование горных предприятия, надежность и диагностика электрооборудования, основы энергосбережения, системы управления электроприводов, с учетом применения этих знаний в практической работе специалиста на производстве.

Во время прохождения второй производственной практики студент должен изучить следующие технические и организационные стороны работы предприятия:

- организация технологического процесса на производственные предприятия с расстановкой оборудования по основным технологическим операциям;
- вспомогательные технологические процессы, обеспечивающие основную деятельность предприятия (вентиляция, воздухо- и теплоснабжение, водоотлив и т.д.);
- структура и организация электромеханической службы предприятия;
- организация эксплуатации и ремонта электромеханического оборудования, в том числе применение индустриальных методов монтажа и ремонта ЭО, современных инструментов и приспособлений для диагностики неисправностей, испытаний ЭО после ремонта и в процессе эксплуатации;
- организационные и технические мероприятия по соблюдению ПТЭ и ПБ при эксплуатации электрооборудования;
- автоматизация технологических комплексов и применение автоматизированного электропривода.

## 2. ПОРЯДОК ПРОХОЖДЕНИЯ ПРАКТИКИ

Вторая производственная практика проводится на горном или промышленном предприятии на 8-м семестре после окончания 4-го курса. Продолжительность практики 6 недель.

Ознакомление студентов с настоящей программой и выдачу индивидуальных заданий производит перед отъездом на практику руководитель практики от кафедры.

Перед отъездом на практику необходимо подписать и сдать обходной лист.

В случае, когда студент к моменту окончания 8-го семестра выбрал тему и согласовал ее с руководителем выпускной квалификационной работы специалиста (ВКР), индивидуальное задание на практику выдает руководитель ВКР.

Изменение места прохождения практики после получения путевки не допускается. Предприятие не может направить студента для прохождения практики на другое предприятие.

По прибытию к месту прохождения практики студент должен предъявить путевку в отдел кадров предприятия.

Все организационные вопросы по прохождению практики, допуску студентов к необходимым материалам и документам осуществляет руководитель практики от предприятия, назначенный приказом или распоряжением по предприятию. В период практики студенты являются членами трудового коллектива одного из структурных подразделений

предприятия, подчиняются правилам внутреннего распорядка, нормам трудового законодательства и выполняют свои обязанности на рабочих местах в соответствии с должностными инструкциями.

Вторую производственную практику студенты могут проходить на рабочем месте электрослесаря по ремонту и обслуживанию электрооборудования, электрика или электромонтера (в соответствии со штатным расписанием предприятия), либо дублером указанных специалистов. Допускается прохождение производственной практики на других вакантных рабочих местах при безусловном выполнении требований по сбору сведений практического характера, предусмотренных настоящей программой.

Распределение времени при прохождении второй производственной практики:

- оформление на предприятие, изучение правил техники безопасности, допуск к работе – 1 неделя;
- работа на рабочих местах или дублирование, сбор материала – 4 недели;
- оформление отчета – 1 неделя.

При отъезде на практику необходимо иметь при себе паспорт, студенческий билет, трудовую книжку, военный билет или приписное свидетельство, путевку-удостоверение, справку о состоянии здоровья, выданную поликлиникой университета.

## 3. СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАТИКИ

Во время второй производственной практики студенты должны систематически и самостоятельно собирать, и анализировать материалы, связанные с решением задач производственной практики и собирать исходные данные для курсового проектирования и выполнения ВКР.

Примерный перечень сведений и вопросов, обязательных для изучения и отражения в отчете, приведен ниже.

### 3.1. Технологические процессы на предприятии

Общие сведения о предприятии: местоположение, краткая характеристика предприятия, общие сведения о технологии предприятия, инфраструктуре (транспорт, водоотлив, вентиляция, освещение и т.п.).

Основное технологическое оборудование и установки: назначение, конструктивные особенности, основные характеристики.

Стационарные машины и установки предприятия. Назначение, технические характеристики.

### 3.2. Электромеханическое оборудование и электроснабжение машин и установок предприятия

Основное электромеханическое оборудование предприятия.

Назначение, устройство и эксплуатация основного электрооборудования предприятия: трансформаторные подстанции, распределительные устройства и распределительные пункты, приключательные пункты, коммутационные аппараты, релейная защита.

Эксплуатация, ремонт и испытания элементов электрических сетей, коммутационной и защитной аппаратуры характерные неисправности, методы технической диагностики электроаппаратуры и сетей, настройка и проверка защиты от аварийных и ненормальных режимов работы и т.п.).

Применяемые на предприятии способы и схемы управления энергосбережением.

Устройство и контроль защитного заземления, зануления.

Ремонт и эксплуатация электрических машин. Структура электроремонтных цехов и участков на предприятии. Разборка и дефектация электродвигателей при ремонте. Механический ремонт деталей и узлов. Сборка асинхронных двигателей после ремонта. Испытания двигателей после ремонта.

Техническая диагностика и ремонт трансформаторов и электрооборудования. Технология ремонта и электрических испытаний.

Ремонт и эксплуатация воздушных линий напряжением до 35 кВ. Общие требования к воздушным линиям электропередачи. Осмотр линий электропередачи.

Защитные средства при эксплуатации электроустановок. Средства индивидуальной защиты. Правила пользования защитными средствами. Испытание средств защиты.

Организационные и технические мероприятия при производстве работ в электроустановках: подготовка работ, допуск к работе, производство работ. ПБ при работе в электроустановках.

Энергетические показатели: удельный расход электроэнергии, стоимость электроэнергии. Мероприятия по рациональному расходованию электроэнергии, компенсации реактивной мощности, регулированию напряжения.

### 3.3. Электропривод машин и установок

Электропривод основных и вспомогательных механизмов. Технические данные электрических машин. Схема силовой части электропривода. Функциональные и структурные схемы систем управления электроприводом. Защиты и блокировки. Частотно-регулируемый электропривод переменного тока. Задачи модернизации электропривода на предприятии. Регламенты наладки, обслуживания и ремонта электропривода.

### 3.4. Автоматизация машин и установок технологического комплекса предприятия

Автоматизация технологических комплексов предприятия.

Системы автоматического управления технологическими комплексами, машинами и механизмами на предприятии. Назначение и функциональные структуры этих систем. Аппаратура автоматизации, контроля, защиты и сигнализации. Устройство и принцип действия средств автоматизации технологических комплексов на предприятии. Профилактика, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов, преобразователей, микропроцессорных средств, систем контроля и управления на базе микропроцессоров и микроЭВМ.

Связь и диспетчеризация.

### 3.5. Экономика предприятия и организация производства

Штаты трудящихся, профессиональный состав. Себестоимость конечного продукта по предприятию. Калькуляция себестоимости. Прибыль и рентабельность производства.

Структура управления предприятием.

### 3.6. Техника безопасности и охрана окружающей среды

Организация службы и мероприятия по охране труда и окружающей среды, техника безопасности, промышленная санитария. Противопожарные мероприятия.

### 3.7. Собственные наблюдения и выводы

Оценка уровня технического прогресса на предприятии.

Основные сведения о внедренных на предприятии новых разработках электромеханического оборудования и автоматизации машин и установок, их экономическая эффективность, мероприятия по энергосбережению.

Личная оценка увиденного и изученного на предприятии. Предложения по улучшению технической оснащенности производства, организации производства и сбыта продукции, условий работы на предприятии.

### 3.8. Исходные данные для курсового проектирования

В период практики студенты должны собрать исходный материал для курсового и дипломного проектирования, предусмотренного учебным планом специализации по дисциплинам «Автоматизация технологических комплексов горных предприятий», «Электрификация горных производств» и «Системы управления электроприводов».

Исходные данные для курсового проектирования собираются и включаются в отчет по перечню в соответствии с приложениями.

## 4. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА ПО ПРАКТИКЕ

Отчетным документом по второй производственной практике является технический отчет. Он составляется во время прохождения практики на предприятии.

Отчет рекомендуется составлять из трех частей:

- общей части, выполненной на основе раздела 3 настоящей программы;
- индивидуальной части, в которой дается описание конкретной работы практиканта на рабочей должности, выполненной студентом непосредственно или при его участии;
- специальной части, соответствующей полученному студентом перед отъездом на практику индивидуальному заданию.

Общий объем отчета 30 … 40 страниц.

В отчете должны быть помещены схемы, рисунки, эскизы, которые нумеруются и на них делаются ссылки в тексте. Громоздкие схемы должны быть переработаны и помещены так, чтобы при сохранении существа имели разумный для отчета объем.

Страницы отчета нумеруются, а графический материал вклеивается в соответствующие места или представляются в виде приложения в отдельной папке. В конце отчета помещается список использованной литературы и оглавление.

Отчет обязательно просматривается руководителем практики от предприятия, который дает предварительную оценку, отмечая выполнение студентом программы практики и качество освещения поставленных в ней вопросов.

**Отчет и отзыв заверяются подписью руководителя и печатью предприятия.**

К отчету должны быть приложены:

1. Документы о сдаче экзамена на квалификационную группу по ТБ в электроустановках;
2. Краткая производственная характеристика студента.
3. Дневник прохождения практики.
4. Путевка-удостоверение с записями о прохождении практики и печатью предприятия.

В недельный срок после начала занятия отчет должен быть сдан на кафедру ЭГП для проверки. После этого студент публично защищает отчет перед комиссией кафедры с получением оценки. Защита отчетов должна быть проведена в течение двух недель после начала семестра.

В случае неудовлетворительной оценки, или отрицательной производственной характеристики, либо самовольного сокращения продолжительности практики, последняя не засчитывается, что влечет за собой отчисление из университета.

### *ПЕРЕЧЕНЬ ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ЗАДАНИЙ НА ВТОРУЮ ПРОИЗВОДСТВЕННУЮ ПРАКТИКУ*

В индивидуальное задание входит подробное описание одного из перечисленных ниже вопросов:

1. Существующий порядок приемки в эксплуатацию вновь смонтированного электрооборудования.
2. Порядок приемки в эксплуатацию смонтированных воздушных и кабельных ЛЭП.
3. Испытание и определение мест повреждения в кабельных ЛЭП.

4. Эксплуатация осветительных установок.

5. Профилактические испытания и измерения на линиях электропередачи.

6. Обслуживание подстанций и распределительных устройств.

7. Организация, содержание и сроки осмотров, ремонта и профилактических испытаний электрооборудования подстанций и распределительных устройств.

8. Осмотр электроприводов и контроль за их работой при техническом обслуживании.

9. Техническое обслуживание и текущий ремонт электроаппаратуры.

10. Ремонт кабелей со свинцовой и поливинилхлоридной оболочкой.

11. Неисправности трансформаторов и организация их ремонта.

12. Разборка и дефектация асинхронных электродвигателей при ремонте.

13. Ремонт деталей и узлов электродвигателей.

14. Разборка и дефектация электрических машин постоянного и переменного тока при ремонте.

15. Микропроцессорные системы контроля.

16. Микропроцессорные системы управления электроприводами.

17. Применение микро-ЭВМ в системах контроля и управления.

18. Тиристорные преобразователи для двигателей постоянного тока мощностью до 20-30 кВт.

19. Тиристорные преобразователи для двигателей постоянного тока большой мощности.

20. Преобразователи частоты для электродвигателей переменного тока.

21. Тиристорные коммутационные устройства (пускатели).

22. Автоматизированный электропривод экскаваторов.

23. Автоматизированный электропривод драг и установок гидромеханизации.

24. Автоматизированный электропривод буровых станков.

25. Автоматизированный электропривод стационарных установок (подъемные машины, вентиляторы, компрессоры, водоотлив и др.).

26. Системы автоматизации технологических комплексов и установок.

***Примечания:***

1. Тема индивидуального задания может быть самостоятельно скорректирована или изменена студентом по реальным условиям прохождения практики.

2. Невыполнение индивидуального задания не допускается.

3. Материалы производственной практики используются в качестве базы для курсового проектирования.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

***Приложение 1***

### *Исходные данные для выполнения курсового проекта по дисциплине «Электрификация горных производств»*

### I. Предприятие - шахта, рудник

Для выполнения курсового проекта необходимо во время второй производственной практики собрать следующие данные:

1. Наименование шахты, рудника, производственного объединения и т.п.

2. Характеристика месторождения: мощность пласта, угол падения пласта, крепость пород, пылегазовый режим, схема подготовки шахтного поля, глубина откаточного гори-

зонта, система разработки, способ управления кровлей, размер панели (этажа) по простиранию и по падению, длина лавы, суточная добыча, подвигание очистного забоя в сутки и за месяц.

3. Общие сведения о принятой системе разработки полезного ископаемого.

4. Горно-технологическое оборудование очистного (подготовительного забоя и участкового транспорта. Основные технические характеристики машин и механизмов, установленных на участке.

5. Система электроснабжения участка. Трансформаторы участковой подстанции, количество, места установки и шаг передвижки передвижной участковой понизительной подстанции (ПУПП). Кабельная сеть участка. Максимальная токовая защита и коммутационные аппараты.

6. Сигнализация, автоматизация и связь на участке.

7. Аэрогазовый контроль и защита.

8. Технико-экономические и энергетические показатели по участку. Списочный штат рабочих по очистному забою. Организация работ в очистном забое.

9. Вопросы электробезопасности.

## II. Предприятие – карьер, разрез

Для успешного выполнения курсового проекта необходимо во время второй производственной практики собрать следующие данные:

1. Наименование, месторасположение горного предприятия.

2. Краткая горно-геологическая характеристика месторождения.

3. Система разработки.

4. Применяемые горные машины и транспорт. Техническая характеристика этих машин.

5. Схема электроснабжения экскаваторов, буровых станков (провода, кабели, ПКТП, приключательные пункты, соединительные муфты и др.).

6. Однолинейная схема электроснабжения.

7. Схема воздушных и кабельных линий карьера на плане горных работ.

8. Система освещения карьера, применяемое оборудование.

9. Релейная защита электроприемников на открытых горных работах.

10. Заземление, конструкция и место расположения главных заземлителей. Заземляющая сеть и ее исполнение. Местные заземлители.

11. Технико-экономические показатели электрохозяйства карьеров.

Дополнительный материал собирается по индивидуальному заданию, выдаваемому в соответствии со специальным вопросом проекта перед отъездом на практику руководителем проекта.

## III. Предприятие – обогатительные фабрики

Собранные в ходе второй производственной практики материалы должны обеспечить расчет и проектирование системы электроснабжения обогатительной фабрики (промышленного предприятия), и должны включать в себя следующие данные (применительно к одному из производственных цехов, участков, отделений, объектов и т.п.):

1. Внешнее электроснабжение предприятия, принципиальная схема, источники питания, величина питающего напряжения, характеристика питающих ЛЭП.

2. Главная понизительная подстанция фабрики (ГПП). Число и мощность трансформаторов, их типы и характеристика. Вводное распредустройство предприятия, принципиальная схема, место расположения, конструктивные особенности, основное электрооборудование, планы, разрезы ВРУ ВН и РУНН. Молниезащита ГПП.

3. Основные виды защиты, применяемые на ГПП, их характеристика, типы реле.

4. Внутреннее электроснабжение фабрики (предприятия), принципиальная схема и ее особенности, прокладка сетей внутреннего электроснабжения по промплощадке фабрики (предприятия), использование шинопроводов, способы подключения электроприемников к магистралям и распредпунктам.

5. Описание существующего силового электрооборудования с указанием номинальной мощности, режима работы, коэффициента мощности, степени загрузки и т.д.

6. Система освещения с указанием числа и типа светильников, мощности ламп, схемы питания и коммутационной аппаратуры.

7. Расположение и конструктивные особенности цеховых ТП-10-6/0,4 и РП-0,4 кВ.

8. Аппаратура управления силовыми электроприемниками (шкафы и блоки управления, пусковая аппаратура, защита, силовые шкафы и сборки), место установки.

9. Принципиальная схема электроснабжения цеха, отделения, участка, объекта и т.п. Обеспечение надежности электроснабжения, аппаратура управления и защиты напряженностью до 1000 В.

10. Конструктивное выполнение системы электроснабжения цеха, схема разводки кабельных сетей, способ прокладки, типы и марка основных кабелей, проводов и шинопроводов.

11. Защитное заземление и зануление, конструкция и место расположения главных заземлителей, разводка заземляющей сети и ее исполнение. Акты скрытых работ.

12. Системы контроля и учета электроэнергии, тарифы, плата за электроэнергию.

***Приложение 2***

***Исходные данные для выполнения курсовой работы***
***по дисциплине «Автоматизация технологических комплексов горных предприятий»***

Для выполнения курсовой работы в период второй производственной практики необходимо собрать следующие материалы:

1. Сведения о технологическом комплексе как объекте автоматизации. Назначение. Краткое описание технологического комплекса. Технологическая характеристика машин, механизмов, процессов. Основные статические и динамические характеристики объекта автоматизации. Основные параметры, характеризующие процесс.

2. Процессы автоматизации. Функциональная схема системы автоматизации. Функциональные уровни системы автоматизации. Характеристика основных элементов. Передаточные функции отдельных элементов системы.

3. Датчики контроля параметров процесса, их характеристики, статические и динамические свойства датчиков.

4. Регуляторы, их передаточные функции, обратные связи, их передаточные функции.

Интерфейсы и протоколы обмена данными. Контроллеры, модули ввода-вывода. Аппаратура уровня низовой автоматизации. Аппаратура управления технологическими процессами. Программные средства, аппаратура уровня диспетчерского контроля.

5. Принципиальная схема системы автоматизации и ее описание.

Для выполнения курсовой работы необходимо иметь функциональную и принципиальную схемы системы автоматизации.

***Приложение 3***

***Исходные данные для выполнения курсовой работы***
***по дисциплине «Системы управления электроприводов»***

Для выполнения курсовой работы в период второй производственной практики необходимо собрать следующие материалы (применительно к одному из регулируемых электроприводов машины, установки):

1. Схема цепей защит и блокировок электропривода.
2. Функциональная схема системы управления.
3. Структурная схема системы управления электропривода.
4. Технологическая программа контроллера управления электроприводом.
5. Данные о наладке системы управления (стопорный ток (момент), установленный темп разгона и замедления, тахограмма движения, передаточные функции регуляторов).
6. Описание системы управления электроприводом.
7. Решения по рекуперации энергии.
8. Решения по обеспечению электромагнитной совместимости электропривода с питающей сетью и электродвигателем.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
Комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## Б2.В.03 (П) ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА, Часть 3

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
|---|---|
| Электрификации горных предприятий | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

## АННОТАЦИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Методические материалы по производственной составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 21.05.04 *Горное дело* специализации подготовки *Электрификация и автоматизация горного производства.*

Программа содержит цели и задачи производственной практики, место производственной практики в структуре основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) высшего образования (ВО), компетенции студентов, формируемые в результате прохождения практики, структуру и содержание отчета по практике, оценочные средства для аттестации по производственной практике.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИПРОХОЖДЕНИЯ ПРАКТИКИ

1.1 Производственная практика обеспечивает готовность выпускников, освоивших программу специалитета *Электрификация и автоматизация горного производства*, решать следующие профессиональные задачи согласно видам деятельности:

*в области производственно-технологической деятельности (ПТД):*

- осуществлять техническое руководство работами по обеспечению функционирования оборудования и технических систем горного производства;
- разрабатывать, согласовывать и утверждать нормативные документы, регламентирующие порядок выполнения работ, связанных с переработкой и обогащением твердых полезных ископаемых, строительством и эксплуатацией подземных сооружений, эксплуатацией оборудования, обеспечивать выполнение требований технической документации на производство работ, действующих норм, правил и стандартов;
- разрабатывать и реализовывать мероприятия по повышению экологической безопасности горного производства;
- разрабатывать и реализовывать мероприятия по совершенствованию и повышению технического уровня горного производства, обеспечению конкурентоспособности организации в современных экономических условиях;
- создавать и (или) эксплуатировать оборудование и технические системы обеспечения эффективной и безопасной реализации технологических процессов при производстве работ по эксплуатационной' разведке, добыче и переработке твердых полезных ископаемых, а также при строительстве и эксплуатации технических систем подземных объектов различного назначения;

*в области организационно-управленческой деятельности (ОУД):*

- организовывать свой труд и трудовые отношения в коллективе на основе современных методов, принципов управления, передового производственного опыта, технических, финансовых, социальных и личностных факторов;
- контролировать, анализировать и оценивать действия подчиненных, управлять коллективом исполнителей, в том числе в аварийных ситуациях;
- организовывать работу по повышению собственного профессионального уровня и знаний работников, их обучению и аттестации в соответствии с требованиями Федерального закона «О промышленной безопасности опасных производственных объектов» и требованиями нормативных документов;
- проводить технико-экономический анализ, комплексно обосновывать принимаемые и реализуемые оперативные решения, изыскивать возможности повышения эффективности

производства, содействовать обеспечению подразделений предприятия необходимыми техническими данными, нормативными документами, материалами, оборудованием;
- осуществлять работу по совершенствованию производственной деятельности, разработку проектов и программ развития предприятия (подразделений предприятия);
- анализировать процессы горного, горно-строительного производств и комплексы используемого оборудования как объекты управления;

*в области научно-исследовательской деятельности (НИД):*

- планировать и выполнять теоретические, экспериментальные и лабораторные исследования, обрабатывать полученные результаты с использованием современных информационных технологий;
- осуществлять патентный поиск, изучать научно-техническую информацию, отечественный и зарубежный опыт по тематике исследований;
- разрабатывать модели процессов, явлений, оценивать достоверность построенных моделей с использованием современных методов и средств анализа информации;
- составлять отчеты по научно-исследовательской работе самостоятельно или в составе творческих коллективов;
- проводить сертификационные испытания (исследования) качества продукции горного предприятия, используемого оборудования, материалов и технологических процессов;
- использовать методы прогнозирования и оценки уровня промышленной безопасности на производственных объектах, обосновывать и реализовывать действенные меры по снижению производственного травматизма;

*в области проектной деятельности (ПД):*

- проводить технико-экономическую оценку эффективности использования технологического оборудования;
- выполнять расчеты технологических процессов, производительности технических средств комплексной механизации работ, пропускной способности транспортных систем горных предприятий, составлять графики организации работ и календарные планы развития производства;
- обосновывать проектные решения по обеспечению промышленной и экологической безопасности, экономической эффективности производств по эксплуатационной разведке, добыче и переработке полезных ископаемых, при строительстве и эксплуатации подземных объектов;
- разрабатывать необходимую техническую документацию в составе творческих коллективов и самостоятельно;
- осуществлять проектирование технических систем предприятий по эксплуатационной разведке, добыче и переработке твердых полезных ископаемых, а также строительству подземных объектов с использованием современных систем автоматизированного проектирования.

1.2. При прохождении производственной практики перед студентами ставятся следующие ***цели***:

- закрепить теоретические и практические знания, полученные при изучении дисциплин профессионального цикла;
- изучить права и обязанности электротехнического и электротехнологического персонала, мастера цеха, участка;

- изучить технологический процесс, технологическое и электрооборудование электротехнического комплекса одного из производств;
- получить практические навыки по организации производства, эксплуатации и ремонту электромеханического оборудования горных и промышленных предприятий;
- приобрести профессиональные умения и опыт профессиональной деятельности;
- изучить вопросы обеспечения безопасности жизнедеятельности на предприятии;
- ознакомиться с мероприятиями по защите окружающей среды;
- ознакомиться с экономической деятельностью предприятия.
- собрать необходимый материал для выполнения выпускной квалификационной работы.

1.3. Для достижения указанных целей необходимо решить следующие ***задачи***:

- ознакомиться с организационной структурой предприятия (организации), характеристикой и показателями работы;
- ознакомиться с должностными и иными инструкциями применительно к конкретному рабочему месту;
- изучить основные и вспомогательные технологические процессы и организацию производства на предприятии;
- изучить условия использования электрической энергии на предприятии;
- изучить структуру электромеханической службы на предприятии;
- ознакомиться с электромеханическим оборудованием технологических процессов, специфическими требованиями к нему, условиями и особенностями его эксплуатации;
- ознакомиться с автоматизацией технологических комплексов и применением автоматизированного электропривода;
- ознакомиться с мероприятиями по энергосбережению;
- освоить организационные и технические мероприятия по соблюдению ПТЭ и ПБ при эксплуатации электроустановок;
- получить основные сведения об охране труда, производственной санитарии и охране окружающей среды.

## 2. МЕСТО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКИ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Производственная практика содержательно и методически связана с дисциплинами: «Электрические и электронные аппараты», «Основы электроснабжения горных предприятий», «Электробезопасность на горных предприятиях», «Надежность и диагностика электрооборудования», «Стационарные машины и установки», «Электроснабжение и электрооборудование горного производства», «Автоматизированный электропривод машин и установок горного производства», «Системы управления электроприводов машин и установок горного производства». «Автоматика машин и установок горного производства», «Монтаж и эксплуатация электроустановок».

Производственная практика содержит элементы, необходимые для выполнения научно-исследовательской работы и является базой для выполнения выпускной квалификационной работы.

Практика дает возможность расширения и углубления базовых знаний и навыков для успешной профессиональной деятельности.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕПРОХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКИ

В результате прохождения производственной практики студент должен приобрести профессиональные компетенции и компетенции в области специализации *Электрификация и автоматизация горного производства* (ПСК), соотнесенные с общими целями ОПОП ВО.

В результате прохождения производственной практики студент должен:

1) **знать:** организацию технологического процесса на предприятии; вспомогательные технологические процессы и оборудование, обеспечивающие основную деятельность предприятия; особенности систем внешнего и внутреннего электроснабжения горных предприятий; особенности конструктивного исполнения линий электропередач горных предприятий; виды исполнения рудничного электрооборудования; характеристики и регулировочные свойства электроприводов машин и установок горного производства; принципы синтеза систем управления электроприводами машин и оборудования горного производства; основы автоматики машин и установок промышленных предприятий; особенности средств и систем автоматики при добыче и переработке минерального сырья; организационные и технические мероприятия по соблюдению ПТЭ и Правил по охране труда при эксплуатации электроустановок потребителей, а так же требования отраслевых НТД по безопасному устройству и безопасной эксплуатации электроустановок горных предприятий.

2) **уметь**: применять, эксплуатировать и производить выбор электрооборудования систем электроснабжения горных предприятий; обосновать выбор средств автоматизации машин и установок горного производства; эффективно применять средства и системы защиты от поражения электрическим током.

3) **владеть** навыками практического выбора схем электроснабжения объектов различного назначения; навыками выбора оборудования систем электроснабжения горных и промышленных предприятий; навыками производства испытаний электроустановок, электромонтажных и пуско-наладочных работ; навыками выполнения ремонтов электромеханического оборудования предприятий.

## 4. ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИКИ

Форма проведения производственной практики – выездная.

## 5. МЕСТО И ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИКИ

Для прохождения производственной практики студент направляется на горное или промышленное предприятие, управление или организацию.

Возможные места проведения производственной практики: промышленные предприятия ООО «УГМК», АО "Первоуральский завод горного оборудования", АО "Золотодобывающая компания "Полюс", АО "ЕВРАЗ КГОК "Ванадий",АО "Машиностроительный завод им. Воровского", АО "Северский трубный завод", АО "Карабашмедь", АО "НИИПроектАсбест", АО "Свердловский завод трансформаторов тока", АО МПСО "Шахтспецстрой", АО "Селигдар", АО "Вишневогорский ГОК", АО "Шахта "Интауголь", АО "Серебро Магадана", ОАО "Уралэлектромедь", АО "Южуралзолото группа компаний", АО "Челябинский металлургический комбинат", АО "Екатеринбургские лесные машины", АО "ЗМК"Магнум", АО "Золотодобывающая компания "Полюс".

Перечень мест и условий прохождения производственной практики составляется на основе договоров на прохождение практики и доводится до сведения студентов за два-три месяца до начала практики.

Прохождение производственной практики осуществляется на основании договора между университетом и предприятием. Имеется типовая форма договора.

## 6. ПОРЯДОК ПРОХОЖДЕНИЯ ПРАКТИКИ

Ознакомление студентов с настоящей программой, оформление путевки-удостоверения на практику и выдачу индивидуальных заданий производит руководитель практики от кафедры ЭГП.

Приказом по университету устанавливаются общие сроки проведения практики, день выезда на предприятие и возвращения с него, список допущенных к практике студентов.

Перед отъездом на практику студенту очной формы обучения в течение одной недели после окончания весенней сессии, **независимо от наличия задолженностей**, необходимо получить в деканате, подписать и сдать на кафедру ЭГП обходной лист, получить на кафедре ЭГП оформленную путевку-удостоверение.

Студенты заочной формы обучения проходят производственную практику по месту своего постоянного местожительства.

**В случае, когда к моменту отъезда на практику студент выбрал тему и согласовал ее с руководителем выпускной квалификационной работы специалиста (ВКРИ), индивидуальное задание на практику выдает руководитель ВКРИ.**

Изменение места прохождения практики после получения путевки не допускается. Предприятие не может направить студента для прохождения практики на другое предприятие.

По прибытию к месту прохождения практики студент должен предъявить путевку в отдел кадров предприятия.

Все организационные вопросы по прохождению практики, допуску студентов к необходимым материалам и документам осуществляет руководитель практики от предприятия, назначенный приказом или распоряжением по предприятию. В период практики студенты являются членами трудового коллектива одного из структурных подразделений предприятия, подчиняются правилам внутреннего распорядка, нормам трудового законодательства и выполняют свои обязанности на рабочих местах в соответствии с должностными инструкциями.

Производственную практику студенты могут проходить на рабочем месте электрослесаря по ремонту и обслуживанию электрооборудования, электрика или электромонтера (в соответствии со штатным расписанием предприятия), либо дублером указанных специалистов. Допускается прохождение производственной практики на других вакантных рабочих местах при безусловном выполнении требований по сбору сведений практического характера, предусмотренных настоящей программой.

Желательно, чтобы за время практики студент смог подготовиться и сдать экзамен на квалификацию электрослесаря (электромонтера, электрика, электромонтажника) и получить удостоверение о группе допуска на право работы в электроустановках.

Распределение времени при прохождении производственной практики:

оформление на предприятие, изучение правил техники безопасности, допуск к работе – 1 неделя;

работа на рабочих местах или дублирование, сбор материала – 8 недель;

оформление отчета – 1 неделя.

При отъезде на практику необходимо иметь при себе паспорт, студенческий билет, трудовую книжку, военный билет или приписное свидетельство, путевку-удостоверение, справку о состоянии здоровья, выданную поликлиникой университета.

## 7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Во время производственной практики студенты должны систематически и самостоятельно собирать и анализировать материалы, связанные с решением задач производственной практики и собирать исходные данные для выполнения ВКРИ.

Отчет составляется каждым студентом на производстве. Во время практики студент ведет дневник, в котором записывает все сведения, полученные на производстве. Дневник, отчет о практике и путевка-удостоверение являются основными документами, по которым осуществляется оценка деятельности студента на практике.

В путевке-удостоверении на предприятии проставляется дата прибытия и выезда студента с предприятия, руководителем практики от предприятия дается краткий отзыв-характеристика. Путевка-удостоверение скрепляется подписями ответственных лиц и печатями.

Отчет по практике должен состоять из двух частей:

1) *общей части*, выполненной в соответствии с программой практики и включающей описание и количественные характеристики по разделам:

общие сведения о предприятии;

технологические процессы на предприятии (технология горных работ, организация технологического процесса);

стационарные машины и установки (основное механическое оборудование);

электроснабжение предприятия;

электроснабжение и электрооборудование одного из электротехнических комплексов;

электропривод машин и установок;

автоматизация комплекса и автоматизация учета и контроля энергоресурсов;

объекты и процессы для внедрения научно-технических достижений;

охрана труда и техника безопасности при эксплуатации электромеханического оборудования и обслуживании электроустановок;

производственные и экономические показатели предприятия;

2) *индивидуальной части*, посвященной конкретной работе студента на рабочей должности (в ней содержится описание работ, выполненных студентом, либо при его участии).

Общий объем отчета – 30 - 40 страниц.

При составлении отчета необходимо дать критическую оценку процессам производства и его организации.

В отчете должны быть упрощенные схемы, рисунки, эскизы, которые нумеруются и на них делаются ссылки в тексте.

Громоздкие схемы должны быть переработаны и сокращены до структурных или функциональных так, чтобы при сохранении сущности они имели разумный для отчета объем.

К отчету должны быть приложены:

1. Документы о сдаче экзамена на квалификацию электрослесаря (электромонтера).
2. Производственная характеристика студента на практике.
3. Путевка-удостоверение.

Отчет сдается на кафедру ЭГП в 3-х дневный срок после начала занятий для проверки.

В течение двух недель после начала следующего за практикой семестра студент защищает отчет перед комиссией кафедры.

## 8. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ

*Общие сведения о предприятии*. Название предприятия, его местоположение, краткая история развития. Состав предприятия, назначение его сооружений и цехов.

*Технологические процессы на предприятии*. Описание и технические показатели технологических процессов на предприятии согласно табл. 3

Таблица 3 – Содержание и графические материалы раздела *Технологические процессы на предприятии*

| Способ добычи, обогащения, технология | Содержание раздела | Графические материалы раздела |
|---|---|---|
| Подземный | Краткая геологическая характеристика месторождения. Вскрытие месторождения, система разработки, технология добычи полезного ископаемого. Количество разрабатываемых пластов и залежей, число рабочих горизонтов. Число и характеристика стволов. Промышленные запасы шахтного поля. Срок службы шахты. Основная сеть капитальных и подготовительных выработок. Глубина шахты, годовая производительность шахты.<br>Система разработки, паспорт крепления. Характеристика угольного пласта или рудной залежи. Схема транспорта на участке, механизация трудоемких работ в забоях, характеристики оборудования. Количество рабочих по профессиям, производительность труда в забое при выполнении отдельных операций. Расход крепежного материала на 1 т. добытого полезного ископаемого. Сечение наклонных и горизонтальных выработок, восстающих, бремсбергов и ходков. Механизация подготовительных работ, характеристика оборудования. | Схема вскрытия, схема вентиляции, поперечное сечение выработок, схема транспорта. |
| Открытый | Краткая геологическая характеристика месторождения. Климатические условия. Промышленное развитие района, расположение потребителей продукции. Состояние разработок на данный момент, перспективы развития.<br>Вскрытие месторождения, система разработки, технология добычи полезного ископаемого. Годовая производительность предприятия по полезному ископаемому и породе. Текущий коэффициент вскрытия. Характеристика полезного ископаемого (трещиноватость, крепость, коэффициент разрыхления), Глубина карьера проектная, фактическая. Углы откоса бортов, количество рабочих горизонтов. Элементы системы разработки (высота уступа, ширина площадки, ширина заходки и т. д.) Существующий способ вскрытия. Размеры капитальных и разрезных траншей, применяемые способы их проходки. Организация буровзрывных, погрузочных и транспортных работ. Производительность экскаватора. Скорость продвигания забоев. Количество рабочих смен в сутки, продолжительность смены.<br>Место расположения отвалов. Описание способа отвалообразования, высота отвальных уступов. Количество отвальных тупиков, приемная способность тупика в смену. Периодичность передвижки тупиков. Тип отвалообразователей, их производительность. Рекультивация выработанного пространства и отвалов. | План промышленного района, конструкция рабочей площадки, схема экскаваторной заходки, план карьера с указанием расположения основного технологического оборудования, общий план отвала. |
| Обогащение руд | Характеристика полезного ископаемого, перерабатываемого на фабрике. Технология обогащения полезного ископаемого, схема цепи аппаратов фабрики. Подготовительные технологические процессы (дробление, измельчение), технология, оборудование. Основные технологические процессы (флотация, магнитная сепарация, отсадка и т.д.). Технология, оборудование. | Схема цепи аппаратов, план расположения технологического оборудования. |

| | | |
|---|---|---|
| Производство строительных материалов | Характеристика полезного ископаемого, перерабатываемого на предприятии. Технология производства строительных материалов, схема цепи аппаратов комплекса. Подготовительные технологические процессы (дробление, измельчение). | Схема цепи аппаратов. |

*Стационарные машины и установки*. Описание и технические показатели стационарных установок и основного механического оборудования согласно табл. 4.

Таблица 4 – Содержание и графические материалы раздела *Стационарные машины и установки*

| Способ добычи, обогащения, технология | Содержание раздела | Графические материалы раздела |
|---|---|---|
| Подземный | Вентиляторы главного проветривания, компрессорная станция, подъемная установка, водоотливная станция. Типы вентиляторов, их число и характеристика, привод, системы управления, обслуживания и ремонта. Вопросы ТБ при эксплуатации вентиляторных установок.<br>Компрессоры: типы, число, схема подключения. Схема компрессорной станции с указанием основного и вспомогательного оборудования. Правила эксплуатации и ремонта. Основные неисправности и методы их устранения. Правила безопасности при эксплуатации компрессорных станций. Система охлаждения.<br>Подъемные машины: тип, размеры органов навивки и копровых шкивов подъемной установки. Тип и мощность привода. Тип и грузоподъемность подъемных сосудов. Разгрузочные и загрузочные устройства. Вопросы ТБ рудничного подъема.<br>Центральная водоотливная установка. Притоки воды. Тип, число и характеристики насосов, объем водосборников. Схема водоотлива. Прокладка трубопроводов по стволу, отвод воды на поверхности. Правила безопасности при эксплуатации насосов. Неисправности и методы их устранения. | Схемы установок (вентиляторных, компрессорных, водоотливных и подъемных). |
| Открытый | Тип и количество буровых станков, их паспортные данные. Конструкция бурового инструмента.<br>Тип и модели экскаваторов, их характеристики. Продолжительность цикла, длительность отдельных операций. Штат экскаваторной бригады.<br>Тип, характеристика и количество машин и механизмов, применяемых для осушения и проветривания карьера. Притоки воды в карьере - нормальный и максимальный. Транспорт на карьере. Род тяги, тип применяемых машин, характеристика. Уклоны, радиусы кривых. Длительность погрузки и транспортировки. Скорость транспортировки. Производительность единицы транспорта. Производство путевых работ, способы передвижения путей в забоях. Механизация путевых работ. | Схема транспорта. |
| Обогащение руд | Основное технологическое оборудование процессов флотации, магнитной сепарации, отсадки и т.д. | План расположения технологического оборудования |
| Производство строительных материалов | Характеристика полезного ископаемого, перерабатываемого на предприятии. Технология производства строительных материалов, схема цепи аппаратов комплекса. Подготовительные технологические процессы (дробление, измельчение). | План расположения технологического оборудования. |

*Электроснабжение предприятия*. Основные сведения о внешнем электроснабжении предприятия: источники питания, питающие линии, уровни напряжения и основное оборудование подстанций. Схемы главных цепей ОРУ и ЗРУ ГПП предприятия. Планы расположения электрооборудования ОРУ и ЗРУ ГПП. Общие принципы распределения электроэнергии

внутри предприятия. Основные требования по обеспечению электробезопасности в электроустановках предприятия.

*Электромеханическое оборудование и электроснабжение машин и установок предприятия*. Основное электромеханическое оборудование предприятия. Назначение, устройство и эксплуатация основного электрооборудования предприятия: трансформаторные подстанции, распределительные устройства и распределительные пункты, приключательные пункты, коммутационные аппараты, релейная защита.

Эксплуатация, ремонт и испытания элементов электрических сетей, коммутационной и защитной аппаратуры характерные неисправности, методы технической диагностики электроаппаратуры и сетей, настройка и проверка защиты от аварийных и ненормальных режимов работы и т.п.

Применяемые на предприятии способы и схемы управления энергосбережением.

Устройство и контроль защитного заземления электроустановок предприятия. Устройство и контроль состояния и эффективности зануления.

Ремонт и эксплуатация электрических машин. Структура электроремонтных цехов и участков на предприятии. Разборка и дефектация электродвигателей при ремонте. Механический ремонт деталей и узлов. Сборка асинхронных двигателей после ремонта. Испытания двигателей после ремонта.

Техническая диагностика и ремонт трансформаторов и электрооборудования. Технология ремонта и электрических испытаний.

Ремонт и эксплуатация воздушных линий напряжением до 35 кВ. Общие требования к воздушным линиям электропередачи. Осмотр линий электропередач.

Энергетические показатели: удельный расход электроэнергии, стоимость электроэнергии. Мероприятия по рациональному расходованию электроэнергии, компенсации реактивной мощности, регулированию напряжения.

*Электропривод технологических машин и установок*. Электропривод основных и вспомогательных механизмов. Технические данные электрических машин. Схема силовой части электропривода. Функциональные и структурные схемы систем управления электроприводом. Защиты и блокировки. Частотно-регулируемый электропривод переменного тока. Задачи модернизации электропривода на предприятии. Регламенты наладки, обслуживания и ремонта электроприводов.

*Автоматизация машин и установок технологического комплекса предприятия*. Системы автоматического управления технологическими комплексами, машинами и механизмами на предприятии. Назначение и функциональные структуры этих систем. Аппаратура автоматизации, контроля, защиты и сигнализации. Устройство и принцип действия средств автоматизации технологических комплексов на предприятии. Профилактика, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов, преобразователей, микропроцессорных средств, систем контроля и управления на базе микропроцессоров и микро-ЭВМ.

Связь и диспетчеризация.

*Объекты и процессы для внедрения научно-технических достижений. С*истемы энергообеспечения предприятия, объекты малой энергетики, нетрадиционные источники энергии. Электрические сети. Системы стандартизации. Системы диагностики и автоматизированного управления технологическими процессами в электротехнике. Актуальные для предприятия технические, технологические, экономические, экологические и социальные критерии оценки принимаемых решений в области проектирования, создания и эксплуатации электротехнических комплексов и систем. Актуальные для предприятия проблемы безопасной и эффективной

эксплуатации, утилизации и ликвидации электротехнических комплексов и систем после выработки ими положенного ресурса.

*Техника безопасности и охрана окружающей среды*. Организация службы и мероприятия по охране труда и окружающей среды, промышленная санитария. Противопожарные мероприятия.

Защитные средства при эксплуатации электроустановок. Средства индивидуальной защиты. Правила пользования защитными средствами. Испытание средств защиты.

Организационные и технические мероприятия при производстве работ в электроустановках: подготовка работ, допуск к работе, производство работ. Правила безопасности при работе в электроустановках горных предприятий.

*Экономика предприятия и организация производства*. Структура предприятия, схема управления производством. Мероприятия по охране труда, промсанитарии и охране окружающей среды. Планы ликвидации аварии.

Технико-экономические показатели работы предприятия. Штаты трудящихся, профессиональный состав. Нормы выработки и расценки на различные виды работ. Производительность труда. Калькуляция себестоимости продукции по элементам затрат. Капитальные затраты. Стоимость основного оборудования. Прибыль и рентабельность производства. Контроль качества продукции.

*Собственные наблюдения и выводы*. Основные сведения о внедренных на предприятии новых разработках электромеханического оборудования, их экономическая эффективность.

Личная оценка технической оснащенности предприятия. Предложения по улучшению технического состояния и организации производства, условий труда на предприятии.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИКИ

*Основная литература*

1. Пичуев А.В., Петуров В.И., Чеботаев Н.И. Электрификация горного производства: Учебное пособие для вузов. – 3 издание. — М.: Издательство «Горная книга», 2010. — 135 с.: ил.

2. Онищенко Г.Б. Электрический привод: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Г.Б.Онищенко. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 288 с. — (Сер. Бакалавриат).

*Дополнительная литература*

3. Ахлюстин В. К. Электрификация обогатительных фабрик [Текст]: учебник / В. К. Ахлюстин. - М.: Недра, 1973. - 424 с. - Б. ц.

4. Справочник энергетика карьера [Текст]: справочное издание / ред. В. А. Голубев. - М.: Недра, 1986. - 424 с.: ил.

5. Машины и оборудование для угольных шахт [Текст]: справочник / ред. В. Н. Хорин. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Недра, 1987. - 424 с.: ил.

6. Справочник механика рудообогатительной фабрики [Текст] / А. С. Донченко, В. А. Донченко. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Недра, 1986. - 543 с.: табл., ил.

**Нормативная документация**

Правила устройства электроустановок. Все действующие разделы шестого и седьмого изданий с изменениями и дополнениями по состоянию на 1 марта 2007 г. [Текст]: научное издание. - М.: КНОРУС, 2007. - 488 с.: табл.

Правила технической эксплуатации электроустановок потребителей. 2003.

Правила по охране труда при эксплуатации электроустановок

ГОСТ 2.104-2006 ЕСКД. Основные надписи.

ГОСТ 2.105-95 ЕСКД. Общие требования к текстовым документам (с Изменением №1).

ГОСТ 2.106-96 ЕСКД. Текстовые документы (с Изменением №1).

ГОСТ 2.109-73 ЕСКД. Основные требования к чертежам (с Изменениями №1-11).

ГОСТ 2.301-68 ЕСКД. Форматы (с Изменениями №1,2,3).

ГОСТ 2.302-68 ЕСКД. Масштабы (с Изменениями №1,2,3).

ГОСТ 2.303-68 ЕСКД. Линии (с Изменениями N 1,2,3).

ГОСТ 2.304-81 ЕСКД. Шрифты чертежные (с Изменениями №1,2).

ГОСТ 2.305-2008 ЕСКД. Изображения — виды, разрезы, сечения.

ГОСТ 2.306-68 ЕСКД. Обозначения графические материалов и правила их нанесения на чертежах (с Изменениями №1-4).

ГОСТ 2.320-82 ЕСКД. Правила нанесения размеров, допусков и посадок конусов.

ГОСТ 2.321-84 ЕСКД. Обозначения буквенные.

ГОСТ 2.701-2008 ЕСКД. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению.

ГОСТ 2.702-2011 ЕСКД. Правила выполнения электрических схем.

ГОСТ 2.721-74 ЕСКД. Обозначения условные графические в схемах. Обозначения общего применения (с Изменениями №1, 2, 3, 4).

ГОСТ 7.1-2003 СИБИД. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

Правила безопасности при ведении горных работ и переработке твердых полезных ископаемых. Бюллетень нормативных актов федеральных органов исполнительной власти, N 38, 22.09.2014, (текст приказа)

## МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИКИ

Библиотечные фонды и помещения. Для написания отчета и получения дополнительной информации студенты на предприятиях – местах прохождения практики имеют доступ к компьютерам с доступом (выходом) в Интернет.

Методические материалы составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВПО по специальности - 130400*Горное дело* специализации подготовки – «Электрификация и автоматизация горного производства»

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

**С. Г. Паняк, Т. С. Бобина**

# УЧЕБНАЯ ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА

***Учебное пособие***
**для студентов специальности**
**21.05.04 – «Горное дело»**

**Екатеринбург**
**2020**

УДК
ББК
Б

Р е ц е н з е н т : А. Б. Макаров, доцент кафедры геологии, поисков и разведки полезных ископаемых УГГУ

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

**Паняк С. Г., Бобина Т.С.**

Учебная геологическая практика: Учебное пособие к первой учебной геологической практике по курсу «Геология» в окрестностях г. Екатеринбурга. Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. 95 с.

Настоящее пособие состоит из трех частей. Первая часть содержит методику проведения учебной практики и правила техники безопасности. Во второй – описываются геологические процессы, формирующие основные структуры земной коры и различные формы рельефа поверхности. В третьей части приводится описание опорных геологических маршрутов – основных объектов полевых исследований.

Данное пособие предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело». Однако может быть использовано студентами других специальностей, походящих учебную геологическую практику в окрестностях г. Екатеринбурга. Пособие может быть полезным также для любителей камня, интересующихся природой и красотой родного края.

УДК
ББК

© Паняк С. Г., Бобина Т.С., 2020
© Уральский государственный горный университет, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ..... 4
1. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКИ .. 6
1.1. Организация практики, цели и задачи ..... 6
1.2. Содержание практики ..... 7
1.3. Правила техники безопасности ..... 13
2. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ФОРМИРОВАНИИ ЗЕМНОЙ КОРЫ И РЕЛЬЕФА ЗЕМЛИ ..... 19
2.1. Эндогенные процессы и их продукты ..... 19
*2.1.1. Магматизм и его продукты* ..... 19
*2.1.2. Метаморфизм и его продукты* ..... 25
*2.1.3. Тектоника* ..... 38
2.2. Экзогенные процессы ..... 47
*2.2.1. Литогенез* ..... 47
3. ОПИСАНИЕ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МАРШРУТОВ ..... 60
3.1. По Уктусскому массиву ..... 60
3.2. Елизаветинское месторождение ..... 65
3.3. Шабровское рудное поле ..... 69
3.4. Шиловское месторождение ..... 76
3.5. Березовское рудное поле ..... 80
3.6. Гора Хрустальная ..... 83
3.7. Билимбаевское месторождение ..... 88
3.8. Суффозионные процессы вдоль линий метро ..... 92
ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ..... 94
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА ..... 94

# ВВЕДЕНИЕ

Учебная геологическая практика после первого курса является неотъемлемой и важнейшей частью высшего образования, способствует формированию у студентов практических профессиональных навыков. На практике студенты учатся наблюдать, документировать и обобщать геологические факты, что способствует закреплению пройденного материала по теоретическому курсу «Геология», «Динамическая геология». Кроме того, учебная практика играет важную роль в подготовке студентов к последующему изучению других специальных дисциплин, а также в трудовом воспитании, развитии чувства коллективизма, организаторских способностей.

При выборе места проведения практики и основных маршрутов выпускающая кафедра исходила из того, что наиболее удачным районом практики по динамической геологии является такой, где на относительно небольшой территории располагаются разнообразные геологические объекты. Их специфика определяется: 1 – сложным геологическим строением; 2 – продуктами различных процессов – магматизма, метаморфизма, тектоники; 3 – большим количеством разнообразных месторождений полезных ископаемых; 4 – выходами подземных вод; 5 – проявлениями опасных геологических и антропогенных процессов, включая жизнедеятельность человека. Таким районом с большим разнообразием процессов и их продуктов являются, прежде всего, окрестности г. Екатеринбурга.

Сам город Екатеринбург строился как город-крепость, для которого была необходима разведка новых полезных ископаемых. Многие из них эксплуатируются до сих пор. Район Екатеринбургского геологического полигона географически размещается в пределах лесной зоны, а в орографическом отношении охватывает зону главного водораздела и пологого восточного эродированного восточного склона Среднего Урала, и, частично, краевую зону Зауралья. Рельеф этого района грядовый, неравномерно всхолмленный, с общим понижением на восток, максимальная абсолютная отметка 545 м, относительные превышения 70-250 м.

Гидрографическая сеть представлена системой рр. Исети, Пышмы, Чусовой и их притоков, принадлежащих бассейнам рек Тобола и Камы. На реках Исети и Чусовой искусственно созданы крупные водоемы – оз. Исетское, Нижне-Исетский и Верх-Исетский пруды, Верхне-Макаровское и Волчихинское водохранилища. На площади имеются крупные естественные водоемы – озера Аятское, Таватуй, Щитовское, Балтым, Шарташ. Значительные площади, особенно в западной части района, заняты болотами. Территория Екатеринбургского геологического полигона являются частью одного из старейших горнорудных районов Урала, где и в настоящее время эксплуатируются месторождения коренного золота (Березовское, Крылатовское), россыпного золота (Чусовская группа), титаномагнетита (Первоуральск), благородного змеевика (Шабровская группа), мрамора (Мраморское, Шабровское), кирпичных глин и строительного камня. Район

густо населен и экономически развит, хорошо развиты пути сообщения: железные, шоссейные и улучшенные грунтовые дороги, благодаря чему большая часть района доступна для проведения геологических исследований. Многочисленные грунтовые дороги пригодны для проезда в сухое время года. Обнаженность района неравномерная и в целом удовлетворительная.

В настоящем пособии описаны геологические маршруты в окрестностях города Екатеринбурга, где можно увидеть результаты процессов, происходивших в далеком прошлом и зафиксированных в каменной книге. Маршруты открывают многообразие геологических процессов и их продуктов: хрупкие и пластические деформации, различные формы рельефа, магматические, метаморфические и осадочные породы, минералогические редкости, а также проявления оползней, карста, подтоплений и других опасных явлений.

Особый интерес для представителей студентов специальности «Прогнозирование и предупреждение опасных природных явлений» представляют отдельные формы эрозионного рельефа (речные террасы, долины, овраги), проявления тектоники (складки, разрывные нарушения), причудливые скальные городища, возникшие в результате выветривания и геологической деятельности ветра. Многие из этих геологических образований являются памятниками природы. К сожалению, человек нередко вносит изменения в природу, которые часто приводят к необратимым последствиям. Это необходимо иметь в виду при проведении маршрутов, чтобы не изуродовать скальные выходы при взятии образцов, иногда лучше зафиксировать объект на фотопленку, чем выколачивать его из скалы. Интересные объекты можно также зарисовать в пикетажную книжку, сохраняя их для будущих поколений.

Климат района континентальный. Среднегодовое количество осадков 450-550 мм, высота снежного покрова 0,4-0,6 м, глубина промерзания грунтов 0,5-2,0 м. Большая часть района покрыта хвойными, смешанными и лиственными лесами (сосна, лиственница, кедр, береза, осина).

# 1. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКИ

## 1.1. Организация практики, цели и задачи

Учебная геологическая практика после первого курса проводится в течение двух недель, состоит из нескольких этапов и заканчивается написанием отчета, который составляется составом бригады.

***Цель практики*:** Знакомство с результатами естественных геологических процессов в окрестностях г. Екатеринбурга путем их полевого наблюдения и документации. Овладение профессиональными навыками описания естественных и искусственных обнажений закрепляет теоретические знания, полученные в процессе изучения курсов «Геология» и «Динамическая геология».

***Задачи практики***:

— знакомство с методиками полевых геологических, геоморфологических, и гидрогеологических наблюдений;

— обучение студентов методики работы с горным компасом;

— знакомство с методикой документации полевых объектов: естественных обнажений, опорных разрезов, горных выработок, особенностей рельефа местности и т. д.;

— обучение приемам камеральной обработки полевых материалов, оформлению геологического отчета с необходимыми графическими приложениями;

— знакомство с некоторыми промышленными предприятиями и их влиянием на среду обитания.

Студенты, прошедшие геологическую практику, должны:

— иметь представление об эндогенных и экзогенных геологических процессах, потенциально несущих угрозу катастроф;

— различать экзогенные процессы, которые в последнее время все больше стимулируются антропогенными факторами, связанными с деятельностью человека;

— уметь делать предварительную оценку возможных потенциальных катастроф, связанных с теми или иными экзогенными, эндогенными и антропогенными процессами в районе практики.

После завершения практики студенты должны уметь:

— различать между собой магматические, метаморфические и осадочные породы;

— наблюдать и документировать обнажения горных пород;

— уметь вести абрис маршрута;

— вести дневник наблюдений (пикетажную книжку);

— отбирать образцы пород и вести их каталог;

— замерять элементы залегания слоистости, трещиноватости, сланцеватости;

— работать с горным компасом, составлять с его помощью фрагментарные схемы и планы, разрезы;

— анализировать геологические структуры, возрастные взаимоотношения различных геологических образований, как в обнажениях, так и на картах.

Таким образом, в результате освоения задач практики студенты должны получить:

— общекультурные компетенции ОК-6,7,8,10,11;

— профессиональные компетенции ПК-1,2,3,4,8,17,18.

## 1.2. Содержание практики

Геологическая практика проводится сотрудниками кафедры Геологии и защиты в чрезвычайных ситуациях. Как и любые другие полевые геологические исследования, она состоит из трех основных этапов – подготовительного, полевого и камерального.

*Подготовительный этап*

П о д г о т о в и т е л ь н ы й  э т а п продолжается один день, в течении которого со студентами проводятся лекции о целях и задачах практики, формируются учебные бригады из 4-5 человек, выбирается бригадир, готовится и выдается полевое снаряжение (рюкзак, полевая сумка, мешочки под образцы, компас, фотоаппарат, рулетка, геологический молоток, лупа, складной нож, ручка, карандаш, линейка, медицинская аптечка), а также документы (карты, полевой дневник, журнал образцов, этикетки). Перечисленным снаряжением и документами должна располагать каждая учебная бригада, полевой дневник должен иметь каждый студент для самостоятельного ведения записей и зарисовок обнажений.

Для успешного проведения учебной геологической практики необходимо осуществить ряд мероприятий, направленных на строгое выполнение правил техники безопасности в полевых условиях. Прежде всего, нужно организовать медицинский осмотр студентов, которые будут проходить практику, сделать предохранительные прививки. Эти мероприятия осуществляются до экзаменационной сессии в течение учебного семестра. Вторым обязательным мероприятием является ознакомление студентов с правилами безопасности и трудовой дисциплины. Студенты, сдавшие зачет по технике безопасности, расписываются в соответствующей ведомости, удостоверяя, тем самым, что они знакомы с правилами безопасности и дисциплины на учебной практике. Особое внимание в правилах техники безопасности уделяется следующим разделам:

- организация полевого лагеря;
- ведение маршрута;
- работа в горной местности;
- работа в карстовых областях;
- переправа через водные преграды;
- использование автотранспорта;
- пртивоэнцефалитная подготовка;
- обеспечение питьевой водой;
- оказание до врачебной помощи;
- правила передвижения группами по городским улицам и автомобильным дорогам;
- правила поведения в общественном транспорте.

В подготовительный период студентам читаются лекции о геологическом строении окрестностей г. Екатеринбурга, истории его геологического развития, а также знакомят с коллекцией образцов данного района.

*Полевой период*

В полевой период проводятся полевые маршруты на хорошо вскрыытых природных обнажениях, а также на участках с проявлениями антропогенного влияния на устойчивость промышленных и хозяйственных объектов.

Первые маршруты предусматривают усвоение студентами общих навыков работы в полевых условиях. С этой целью преподаватели рассказывают о методике полевых геологических наблюдений, показывают следствия их проявлений на рельефе местности.

Выполнение маршрутного задания зависит, прежде всего, от четкой организации работы студенческих бригад в полевых условиях. Этому способствует предварительное распределение обязанностей между членами бригады перед очередным маршрутом. В каждом маршруте посменно одни студенты отвечают за один из участков работы, на следующий день они отвечают за другой и т. д.

Объем геологической информации возрастает от маршрута к маршруту. Своевременная обработка этого материала определяет качество итоговых геологических документов, в связи, с чем эту работу следует проводить до периода составления отчета.

Основная форма проведения полевых геологических наблюдений – маршруты, которые являются составной частью учебного процесса практики. Количество их и содержание определяются целями и задачами, планом обучения и программой геологической практики с учетом специфики специальности.

Практически во всех случаях маршруты являются комплексными, когда одновременно ведутся наблюдения над несколькими процессами и объектами. Целесообразность таких маршрутов обусловлена выявлением взаимосвязи

отдельных геологических процессов и явлений. Например, в одном маршруте полезно проследить связи между формами рельефа, литологией пород и тектоникой района, выходами подземных вод на поверхность и определенным стратиграфическим горизонтом, выветриванием и составом горных пород.

Необходимо особо подчеркнуть, что геологические наблюдения в маршруте должны вестись непрерывно.

Основная работа в маршрутах – изучение горных пород, описание результатов тектонических, геоморфологических и других процессов, включая опасные. Записи проводятся на специальных остановках – точках наблюдения (Т.Н.). По характеру изучаемых явлений «Т.Н.» можно условно разделить на три вида. На одних проводится изучение и описание геолого-географических особенностей (тектоники, рельефа, деятельности подземных и поверхностных вод, выветривания и т. д.); на других - изучение и описание горных пород и условий их залегания в обнажениях; и, наконец, на третьих – (наиболее частый случай) исследуются и те и другие вопросы одновременно. Остановка на «Т.Н.» даже на небольшом объекте отнимает много времени, поэтому нужно выбирать каждую точку так, чтобы была возможность изучать наибольшее число объектов и явлений.

При остановке на «Т.Н.» прежде всего, следует сориентироваться по сторонам света (с использованием компаса, по солнцу, или другому способу) и определить нахождение точки на карте и местности, т. е. дать ее адрес. Определение местонахождения производится методом засечек по азимутам на хорошо заметные элементы рельефа, гидрографии и т. д. или методом глазомерной привязки точки по азимуту и расстоянию, определяемому, например, шагами. После привязки наносят местонахождение данной точки на карту под соответствующим номером (нумерация точек наблюдения должна быть сквозной). Сегодня следует осваивать переходить на новейшие методики ориентации на местности – ГЛОНАС и GPS.

Изучая на точке наблюдения геологическое строение отдельного участка, целесообразно, прежде всего, описать общегеологические явления – геоморфологию, гидрографию, тектонику и т. д. Переходя к конкретному описанию пород обнажения, прежде всего, отмечают его размер по высоте и ширине, а также тип (обрывистый склон, скальный выход на склоне, обнажение в русле рек, стенка карьера, элювиальный развал и т. д.). После этого приступают к описанию пород. В зависимости от целей и задач такое описание дается либо в общем виде, либо более подробно и послойно, либо по отдельным пачкам. В последнем случае лучше описывать слои и пачки снизу вверх.

В описании пород должна быть приведена сжатая характеристика их отличительных генетических свойств: текстура, структура, минеральный состав, тектонические дислокации и т. д. В описании указываются элементы залегания пород, их слоистости, сланцеватости, крыльев складок, плоскостей сместителей и т. д. Отмечаются места отбора образцов и их нумерация. На

левой стороне пикетажной книжки приводятся зарисовки и указываются места фотоиллюстраций.

При описании породы рекомендуется следующий порядок работы на обнажении. Прежде всего, следует внимательно осмотреть обнажение, отобрать серию образцов, определить все имеющиеся здесь породы, выделить отдельные пласты, магматические тела, метасоматические зоны, контакты. Определить элементы залегания. При этом руководитель контролирует и направляет работу отдельных студентов и всей группы для того, чтобы прояснилась общая картина обнажения. После этого делают полное описание, а затем схематическую зарисовку обнажения, которая дублируется фотографированием. При необходимости делают зарисовки и фотографии деталей обнажения.

В первых маршрутах и при изучении принципиально новых объектов преподаватель должен сам давать соответствующие описания. Позднее, когда студенты овладеют соответствующими навыками и усвоят общую схему описания, можно поручить одному из них рассказать о том, что он мог бы написать в своем полевом дневнике на данной «Т.Н.». Остальные студенты делают свои замечания и дополнения и, наконец, преподаватель обобщает все сказанное и формулирует итоги для общей записи.

Ниже приведены лишь наиболее важные методические положения из этой области.

### *Основные правила ведения первичной документации*

Формы первичной документации включают:

1 – дневники, полевые книжки;

2 – журналы документации горных выработок;

3 – журналы образцов, проб и т. д.;

4 – этикетки;

5 – зарисовки обнажений, горных выработок;

6 – фотографии естественных и искусственных обнажений.

В процессе документации исполнитель обязан придерживаться следующих правил:

1 – все записи ведутся максимально разборчиво;

2 – записи должны выполняться по одинаковой схеме;

3 – записи должны вестись карандашом или чернилами, которые не расплываются во влажных условиях;

4 – записные книжки или дневники должны иметь сквозную нумерацию листов.

Ниже приведены основные правила ведения дневников (полевых книжек).

*Дневник (полевая книжка)* – основной первичный документ регистрации геологических наблюдений всех видов (собственно геологических, поисковых,

геоморфологических и т. п.). Он изготовляется в виде книжки в твѐрдом переплѐте, покрытом дерматином или другим материалом, предохраняющим его от сырости, механических и иных повреждений. На случай потери рекомендуется использование материалов яркого цвета, хорошо заметных на фоне растительного и почвенного покрова.

На третьей странице обложки помещается карман. С внутренней стороны клапана располагается держатель для карандаша (ручки).

Формат книжки допускается в пределах от 10-12 х 15-18 см (для кармана одежды) до 13-15 х 20-22 см (для полевой сумки). Большие форматы не рекомендуются вследствие неудобства для использования в маршруте, меньшие – как неоправданно дробящие запись на чрезмерно короткие строки и затрудняющие еѐ чтение.

Рекомендуемый объѐм дневника – 100–130 листов. Дневник должен изготовляться из писчей бумаги, 6-10 листов миллиметровки и нескольких листов кальки.

Титульный лист дневника должен содержать название организаций, экспедиций (партий, отрядов), фамилию, имя, отчество исследователя, даты начала и окончания дневника, номера точек наблюдения и адрес, по которому следует вернуть утерянный дневник.

На обороте титульного листа помещается оглавление дневника.

На первой странице дневнике помещаются условные обозначения к зарисовкам, список сокращений, принятых в тексте, и необходимые замечания. Далее при необходимости могут быть помещены вспомогательные таблицы (определение истиной мощности и глубины залегания наклонных пластов, поправки к углам падения при пересечениях, не перпендикулярных к простиранию пластов и др.) и необходимые пояснения к ним.

На правой стороне дневника ведѐтся запись наблюдений. Здесь же отмечаются взятые пробы, образцы и другие виды каменного материала.

Перед описанием маршрута, разреза и т. п. указываются день, месяц, год и цель работы. Описание каждой точки наблюдения начинается с красной строки. Привязка точки к местности или предыдущей точке помещается рядом с еѐ номером и образует вместе с ним отдельную точку или абзац. Номера точек наблюдения рекомендуется выделить прямоугольными рамками (в примерах выделены полужирным шрифтом), номера образцов и проб и т. п. подчѐркиваются или заключаются в овальную рамку. Измерения элементов залегания, радиоактивности, содержания химических элементов и т. п. выделяются отдельной строкой.

На левой стороне дневника помещаются вспомогательные записи, облегчающие пользование документацией. На неѐ выносятся все номера образцов, проб и других видов каменного материала, номера фотографий (с указанием их содержания), могут выноситься также элементы залегания. На этой же стороне помещаются зарисовки геологических объектов и их деталей, а также различные схемы для обнажений (отбора образцов и проб, расположение рисунков и фотографий и т. п.) или участков (расположении е геологических

тел на местности, кроки местности с расположением обнажений, горных выработок и т. п.). Здесь же излагаются предположения и соображения исследования, возникающие в процессе наблюдения, но требующие подтверждения или детализации.

В конце описания каждого маршрута должны быть приведены основные выводы исследователя и протяжѐнность маршрута в километрах.

Законченный дневник подписывается исполнителем, проверяется и подписывается начальником партии (отряда, участка).

### *Камеральный этап*

К а м е р а л ь н ы й э т а п проводится последовательно после завершения одного или двух маршрутов и включает в себя время на обработку полевых материалов, составление отчета и его защиту.

В камеральный этап выполняются следующие виды работ:

- обработка полевых книжек;
- занесение в каталог образцов отобранных проб;
- оформление рисунков к отчету;
- изготовление и описание разрезов, схем и карт;
- изготовление фотографий и вынесение на них геологической информации;
- окончательное уточнение полевых определений горных пород, составление рабочей коллекции каменного материала;
- написание и оформление отчета;
- защита отчета.

Главная цель написания отчета – овладение анализом и обобщением геологических наблюдений и умение грамотно изложить результаты такого обобщения. При этом вырабатываются навыки правильного оформления отчетов, подбора и изготовления графических приложений, составление списка литературы и т. д. Поскольку цель настоящей практики состоит в закреплении теоретических знаний по курсу «Динамическая геология», то вопросам динамики эндогенных и экзогенных процессов, деформаций пород, формам рельефа, гидрогеологическим особенностям района работ необходимо уделить максимальное внимание.

Повышенные требования к методике наблюдения природных объектов и их документации особенно важны для будущих специалистов в области защиты в чрезвычайных ситуациях, поскольку они обязаны не только фиксировать природные и техногенные процессы, но научиться их прогнозировать.

## 1.3. Правила техники безопасности

*Введение*

Настоящая инструкция по технике безопасности предназначена для студентов, проходящих учебную геологическую практику в окрестностях г. Екатеринбурга. Опыт показывает, что незнание правил техники безопасности, пренебрежение элементарными правилами влекут за собой несчастные случаи.

Молодые люди, юноши и девушки, решив посвятить свою жизнь трудной профессии должны отчетливо представлять свою будущую специальность. Полевые исследования выполняются в различных природных и климатических условиях. Они требуют от человека физической выносливости, самообладания, умения в сложных условиях, в любой обстановке не теряться. Поэтому подготавливать свой организм, воспитывать в себе необходимые качества и навыки студент должен с первого курса. Участие в экскурсиях, геологических и туристических походах помогает закрепить и приобретать навыки полевой жизни. В этом случае студент на самостоятельной работе будет физически вынослив и морально подготовлен. Очень важным является то, что для успешного выполнения программы геологической практики необходимо знание и умение соблюдать на практике правила личной гигиены и правила безопасности ведения работ.

В данной инструкции приводятся основные положения Правил безопасности при полевых работах.

### 1. Общие правила безопасности

Геологическая практика должна проводиться по утвержденным в установленном порядке программам, в которых предусматриваются мероприятия по технике безопасности с учетом местных условий в соответствии с настоящей Инструкцией.

Перед геологической практикой все студенты должны пройти медицинское освидетельствование и сделать предохранительные прививки против энцефалита.

Руководители практики перед ее началом обязаны провести специальный инструктаж всех студентов об условиях практики, правилам безопасности и дисциплине. Врач проводит инструктаж об оказании необходимой медицинской помощи на маршруте. О прохождении инструктажа каждый студент расписывается в «Книге регистрации обучения и инструктирования студентов по технике безопасности». В процессе проведения полевых работ руководители групп должны также систематически проводить дополнительный инструктаж о мерах предотвращения наиболее вероятных для данного района работ опасностей и несчастных случаев.

Каждый работающий, заметивший опасность, угрожающую людям, обязан принять зависящие от него меры для ее устранения и немедленно сообщить об этом своему непосредственному руководителю. Руководитель обязан принять меры к устранению опасности; при невозможности устранения опасности – прекратить работы, вывести работающих в безопасное место.

Запрещается во время работы и во время перерывов располагаться в траве, кустарнике и других, не просматриваемых местах, если на участке работ используются транспортные средства.

Запрещается допускать к работе лиц в состоянии алкогольного, наркотического или токсического опьянения, а также в болезненном состоянии.

## 2. Требования безопасности работы в маршрутах

Перед выходом группы в маршрут руководитель группы обязан:

а) проверить готовность группы к маршруту (обеспеченность ее топоосновой, снаряжением, продовольствием, инструментом, защитными и спасательными средствами);

б) дать указание старосте о порядке проведения маршрута, о правилах передвижения применительно к местным условиям;

в) нанести на свою карту линию намеченного маршрута группы.

В дни, когда по прогнозу погоды затяжной дождь, сильный ветер, то выходить в маршруты запрещается. Если затяжной дождь, густой туман застают группу в пути, необходимо прервать маршрут, укрыться в безопасном месте и переждать непогоду.

### *2.1. Порядок передвижения в маршрутах*

Движение группы должно быть компактным, обеспечивающим постоянную зрительную или голосовую связь между людьми и возможность взаимной помощи. При отставании кого-либо из участников маршрута с потерей видимости или голосовой связи, старший группы обязан остановить движение и подождать отставшего.

При ухудшении метеорологической обстановки (снегопад, гроза, густой туман и т.п.), появлении признаков пожара, при агрессивном поведении хищных зверей следует прекратить маршрут и принять меры, обеспечивающие безопасность работающих.

В маршрутах каждому студенту рекомендуется надевать яркий шарф, косынку или рубашку для обеспечения лучшей взаимной видимости.

Запрещается употреблять в пищу неизвестные грибы, ягоды и рыбу во избежание возможного отравления.

Использование для питьевой воды минеральных источников, бальнеологические свойства которых неизвестны, запрещается, не рекомендуется также купаться в них.

При передвижении и на привалах необходимо соблюдать питьевой режим в соответствии с разделом 4 «Инструкции по оказанию первой помощи при несчастных случаях на производстве». Пить сырую воду из луж, ям и других поверхностных водоемов запрещается. Употребление сырой воды для питья допускается только с разрешения санитарно-противоэпидемической службы.

Особое внимание в маршрутах необходимо уделять мерам предупреждения тепловых и солнечных ударов. В жаркие безветренные дни работать с непокрытой головой не разрешается.

Одежда не должна стеснять движений при работе, обувь обязательно подбираться по ноге.

Для защиты от кровососущих насекомых рекомендуется надевать накомарники или периодически смазывать лицо, шею, руки репеллентами.

В маршруте каждый студент должен иметь нож, индивидуальный перевязочный пакет и запасную коробку спичек в непромокаемом чехле.

Перевозить и переносить острые колющие инструменты (топоры, пилы, ножи и пр.) следует в предохранительных чехлах или в обертке.

### *2.2. Маршруты в сложных условиях, в горных местностях*

При движении и работе на скалах сбрасывать камни и отваливать неустойчивые глыбы без надобности запрещается.

При передвижении по узким тропам и карнизам выступы камней, корни деревьев и т. п. следует обходить очень осторожно, т. к. при резких поворотах можно зацепиться рюкзаком, потерять равновесие и сорваться с обрыва. В таких условиях ремни рюкзаков должны быть ослаблены, связывать их на груди запрещается.

При работе на обрывистых и крутых (более $30^{o}$) склонах при отсутствии необходимой опоры следует организовать взаимную страховку работающих.

При движении по осыпям и скалам всегда следует иметь в виду возможность срыва сверху камней и каменных лавин. В таких местах, особенно с карнизными скальными развалами, в узких ущельях со слабоустойчивыми стенками и нависшими каменными глыбами, срыв камней может быть вызван звуком. Поэтому крики без надобности в подобных условиях запрещаются.

Выходить на скальные карнизы, на края обрывов и крутых склонов без соответствующей страховки запрещается.

Подниматься и спускаться по крутым склонам и осыпям следует длинными зигзагами («серпантином»). Подъем вверх «в лоб» и спуск прямо во избежание травмирования камнями идущих ниже не рекомендуется. В случае вынужденного движения таким способом необходимо держаться на максимально близком расстоянии друг от друга.

Подъем и спуск по крутым склонам должны производиться с обязательной взаимопомощью.

При подъеме на гору в залесенной местности, а также при передвижении в густых кустарниках расстояние между людьми должно быть не менее 3 м во избежание травмирования ветками идущего следом.

Подъем и спуск по крутым склонам в местах, где водятся ядовитые паукообразные и змеи, должны проводиться особенно осторожно во избежание внезапного укуса.

### *2.3. Маршруты в сложных условиях: в речных долинах и оврагах*

При работе в речных долинах и оврагах с крутыми обрывистыми склонами передвижение и осмотр обнажений (во избежание опасности обвала, оплыва, падения камней и деревьев) должны производиться очень осторожно.

В случае внезапных грозовых ливней работа в овраге должна быть немедленно прекращена.

Запрещается движение вблизи кромки берегового обрыва.

При передвижении по долинам рек, особенно в местах впадения притоков со спокойным течением, илистые и заболоченные участки следует по возможности обходить или преодолевать их с помощью охранных средств (веревки, шесты, настилы).

### *2.4. Маршруты в сложных условиях; в лесных районах*

При проведении маршрутов в лесу особенно строго должны соблюдаться правила зрительной и голосовой связи.

Передвижение через лесные завалы разрешается только с соблюдением соответствующих мер предосторожности

На участках, заросшей высокой и густой травой, рекомендуется начинать работу после высыхания росы.

При работе в лесу следует строго соблюдать меры пожарной безопасности.

Бросать в лесу непотушенные спички и окурки запрещается. Костры разрешается разводить лишь в местах, где исключена возможность возникновения пожара.

При малейшем признаке лесного пожара (запах дыма, гари, бег зверей и полет птиц в одном направлении) группа должна выйти к ближайшей речной долине или поляне.

При возникновении пожара необходимо приступить к его тушению с помощью всех имеющихся средств и одновременно сообщить об этом местным органам власти.

При передвижении по горелым лесам и торфяникам следует соблюдать особую осторожность.

При проведении маршрутов в местах распространения энцефалитных клещей рекомендуется плотно застегивать одежду и 3-4 раза в день осматривать тело и одежду.

***Запрещается:***

а) работать в зоне возможного падения сухостойных деревьев;

б) передвигаться по участкам леса с сухостойными деревьями во время сильного ветра;

в) ударять по сухостойным деревьям инструментом, рукой и т. п.;

г) укрываться во время грозы под высокими и отдельно стоящими деревьями.

### *2.5. Маршруты в сложных условиях: карст*

При движении по закарстованным площадям следует обходить блюдцеобразные и воронкообразные впадины.

***Запрещается:***

а) производить обследование вновь обнаруженных карстовых пустот;

б) разводить костры перед входом в пещеру.

### *2.6. Опробование*

При отборе образцов в выработках должны применяться меры по защите от падения кусков породы со склона и бортов выработки.

При одновременной работе двух или более пробоотборщиков на одном уступе расстояние между участками их работ должно быть не менее 1,5м.

## 3. Требования безопасности в аварийных ситуациях

3.1. Если произошел несчастный случай или студент почувствовал недомогание, то следует:

— прекратить работу, сохранить обстановку места происшествия, если это не представляет опасности для окружающих;

— сообщить руководителю, вызвать скорую помощь.

3.2. При получении травмы оказать первую помощь пострадавшему, сообщить руководителю, при необходимости вызвать скорую помощь или отправить пострадавшего в ближайшее лечебное учреждение. Для оказания первой помощи при ранениях и кровотечениях необходимо на рану наложить стерильный бинт, предварительно смазать настойкой йода очищенный от грязи участок вокруг раны. При сильном кровотечении необходимо наложить выше раны жгут не более, чем на 1.0 - 1.5 часа.

3.3. При возникновении пожара немедленно сообщить о нем преподавателю и в пожарную часть, известить руководителя практики, обезопасить людей и приступить к тушению очага возгорания с помощью первичных средств пожаротушения.

3.4. При обнаружении опасных ситуаций (оголенный электрический провод), оградить опасную зону и сообщить руководителю.

## 4. Требования безопасности по окончании практической работы

4.1. Привести в порядок снаряжение и другие принадлежности.

4.2. Провести мероприятия личной гигиены. Провести осмотр всех участников экскурсии на предмет обнаружения клещей.

4.3. Организованно пройти на автобусную остановку для возврата в город.

4.4. Ожидать транспорт разрешается только на посадочных площадках, а при их отсутствии – на тротуаре или обочине.

# 2. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ФОРМИРОВАНИИ ЗЕМНОЙ КОРЫ И РЕЛЬЕФА ЗЕМЛИ

Облик Земли в ходе ее развития непрерывно изменяется в результате разнообразных геологических процессов. Многие из них протекают настолько медленно, что человек за всю свою жизнь не может обнаружить каких-либо существенных изменений. Но когда процессы действуют в течение длительных отрезков геологического времени, исчисляемых миллионами лет, они приводят к крупным преобразованиям лика Земли. Другие процессы, например извержения вулканов, землетрясения, протекают быстро, и их проявления можно наблюдать непосредственно. Созидающие и разрушающие геологические процессы вызываются различными источниками энергии.

Одни из них связаны с силами, действующими внутри Земли, и называются процессами внутренней динамики или ***э н д о г е н н ы м и*** (от греческого «эндо» – внутри). Другие проявляются на поверхности Земли и в верхних частях земной коры и связаны с воздействием внешних по отношению к земной коре факторов. Эти процессы называются ***э к з о г е н н ы м и*** (от греческого «экзо» – внешний). В результате взаимодействия внешних и внутренних процессов формируется рельеф Земли (горы, равнины, ущелья, речные террасы).

## 2.1. Эндогенные процессы и их продукты

К эндогенным относят процессы, протекающие преимущественно внутри Земли, однако главным их признаком являются источники энергии, за счет которых они развиваются. Главным источником внутренней энергии считают гравитационный, второстепенными – радиоактивный и ротационный. К эндогенным процессам, например, относят формирование эффузивных пород, хотя застывание лавовых потоков происходит на дневной поверхности. К эндогенным относят магматические процессы, метаморфические преобразования пород, а также процессы движения литосферных плит (тектонику).

### *2.1.1. Магматизм и его продукты*

Под магматизмом понимают совокупность геологических процессов, связанных с деятельностью магмы и ее производными. Магма представляет собой высокотемпературный расплав (800-1500 градусов Цельсия), возникающий в астеносфере. В силу определенных физико-химических процессов расплав может оставаться на месте его рождения или подниматься по подводящим каналам на дневную поверхность.

В случае если магматический расплав достигает поверхности, после его остывания образуются так называемые *эффузивные породы* (от «эффузио» –

излияние). Сама магма при достижении поверхности называется лавой. Всю совокупность процессов, связанных с магматической деятельностью и протекающих на дневной поверхности, называют вулканизмом или эффузивным магматизмом.

Различия в химическом составе эффузивных и интрузивных пород незначительны. Значимые различия ощущаются лишь в содержании газов, которые при снижении давления в приповерхностных условиях из лавовых потоков быстро удаляются. В верхних частях таких потоков их остатки иногда сохраняются в виде газовых пузырьков.

Химический состав магматических пород определяют около 10-ти основных (породообразующих) компонентов. Однако ведущую роль в составе магмы играет компонент кремнезем – $SiO_2$, его количество, определяет минеральный состав пород, а также их классификацию. В магматических породах содержание кремнезема колеблется в пределах 35-75 %. Все породообразующие минералы магматических пород являются силикатами, т. е. соединениями разных химических элементов с кремнеземом. Такие соединения с кремнеземом образуют: $Al_2O_3$, $Fe_2O_3$, $FeO$, $MgO$, $CaO$, $Na_2O$, $K_2O$, $TiO_2$, $MnO$, $H_2O$.

Кроме главных (породообразующих) компонентов магматические породы могут содержать другие химические элементы, называемые редкими, их содержание обычно не превышает 1 %.

Все многообразие магматических горных пород представляет собой комбинацию одного или нескольких упомянутых выше химических компонентов, образующих один из семи породообразующих минералов (силикатов): оливин, пироксен, роговая обманка, слюда (темноцветные минералы), а также плагиоклаз, калиевый полевой шпат, кварц (светлоокрашенные минералы). Если горная порода состоит из одного минерала, то она называется ***мономинеральной***, если из нескольких – ***полиминеральной***.

Классификация магматических пород основана на их химическом, а значит минеральном составе. Все магматические породы разделяются по содержанию кремнезема ($SiO_2$) на 4 класса:

- кислые – более 63 %,
- средние – 52-63 %,
- основные – 45-52 %,
- ультраосновные – менее 45 %.

Максимальное количество кремнезема содержится, естественно, в кварце (100 %), минимальное – в оливине (40 %).

Минеральный состав магматических пород является отражением их химического состава. Например, кислые породы состоят из минералов с наибольшим содержанием $SiO_2$, а ультраосновные – с наименьшим. Исходя из этих соображений, минеральный состав различных классов магматических пород будет следующим:

***К и с л ы е*** – кварц, полевые шпаты (кислые плагиоклазы, калиевые полевые шпаты), биотит.

***С р е д н и е*** – полевые шпаты (средние плагиоклазы), роговая обманка.

***О с н о в н ы е*** – полевые шпаты (основные плагиоклазы), пироксен.

***У л ь т р а о с н о в н ы е*** – оливин, пироксен, редко роговая обманка.

Так как в природе не бывает дискретных (четко ограниченных) составов по химизму и минеральному составу, то выделяют промежуточные породы:

- гранодиорит (между гранитом и диоритом),
- граносиенит (между гранитом и сиенитом),
- габбро-диорит (между габбро и диоритом).

Выделение их визуально основано на совместном присутствии в породе двух темноцветных минералов. Например, у гранодиорита и граносиенита одновременно присутствуют роговая обманка и биотит, а у габбро-диорита – пироксен и роговая обманка.

Необходимо также знать еще некоторые правила:

1. В кислых породах в обязательном порядке присутствует кварц, с переходом к породам среднего состава его содержание постепенно приближается к нулю, а темноцветный минерал слюда сменяется роговой обманкой.

2. В средних породах темноцветом выступает роговая обманка, которая доминирует и в диоритах и в сиенитах. Различие между диоритом и сиенитом в соотношении полевых шпатов: в диоритах доминирует плагиоклаз, а в сиенитах – два полевых шпата (плагиоклаз и калишпат).

3. В основных породах темноцветом является пироксен, который при приближении состава породы к среднему может частично замещаться роговой обманкой. При смещении состава в сторону ультраосновных пород темноцветы могут быть представлены, кроме пироксена, оливином.

4. В состав ультраосновных пород не входят светлые минералы. В них доминирует, как правило, оливин и пироксен.

Если минеральный состав определить сложно вследствие очень мелкого размера зерен, класс породы определяется по ее цвету: кислые породы обладают светлой окраской, средние – серой, основные – темной (черной), иногда со светлыми пятнами, ультраосновные – только черной.

Таким образом, магматическая порода определяется в следующей последовательности: сначала по структурно-текстурным особенностям определяется генезис (условия образования), т. е. принадлежность к глубинным, плутоническим (интрузивным) или поверхностным, вулканическим (эффузивным) образованиям. Затем по минеральному составу устанавливается ее наименование (см. табл.1).

Трудности возникают с диагностикой магматических пород при изучении вулканических пород, когда в них выкристаллизованными могут быть: один, два или три минерала. Иногда таких минералов нет вообще, например, в обсидиане (вулканическом стекле). В некоторых случаях окончательная

диагностика возможна только с использованием микроскопических или химических исследований, что не входит в круг наших задач.

Среди плутонических пород следует выделять разновидность жильных или гипабиссальных образований, которые формируются в полуглубинных или малоглубинных условиях и выполняют трещины в земной коре. По условиям формирования (температура, давление, скорость остывания) они занимают промежуточное положение между глубинными интрузиями (плутонами), и поверхностными покровами (эффузивами). Для них наиболее часто употребляются комбинированные названия: гранит-порфир, сиенит-порфир.

Таблица 1

Классификация магматических горных пород

| **Тип породы по содержанию $SiO_2$** | | **Интрузивные породы** | **Эффузивные породы** | **Породообразующие минералы** |
|---|---|---|---|---|
| *Кислые (более 65 %)* | | Гранит | Риолит, липарит | Кварц, калишпат, кислый плагиоклаз, биотит |
| *Средние (65-53%)* | Щелочной ряд | Сиенит | Трахит | Калишпат, средние плагиоклазы, роговая обманка |
| | Нормальный ряд | Диорит | Андезит | Средние плагиоклазы, роговая обманка |
| *Основные (53-44 %)* | | Габбро | Базальт | Основные плагиоклазы, пироксен |
| *Ультраосновные (менее 44 %)* | | Пироксенит | Редко пикриты, коматииты | Пироксен |
| | | Перидотит | | Пироксен, оливин |
| | | Дунит, оливинит | | Оливин |

## Текстуры и структуры пород

***Текстуры*** магматических пород разделяются по степени и характеру заполнения пространства минеральным веществом. Различают следующие текстуры:

м а с с и в н а я – обусловлена компактным, плотным и однородным сложением составляющих породу минералов;

п о р и с т а я – определяется наличием округлых или неправильной формы пустот размером 1-10 мм;

н о з д р е в а т а я – определяется наличием округлых или неправильной формы пустот размером более 10 мм;

м и к р о п о р и с т а я – определяется наличием округлых или неправильной формы, невидимых для невооруженного глаза, пустот размером менее 0,1 мм;

м и н д а л е к а м е н н а я – образуется при заполнении пустот вторичными минералами (кальцитом, опалом, халцедоном, хлоритом). От пористой текстуры миндалекаменная отличается лишь тем, что мы имеем дело с заполненными пустотами.

***Структуры*** магматических пород обусловлены степенью кристалличности, а также наличием или отсутствием вулканического стекла. Выделяют следующие структуры:

*п о л н о к р и с т а л л и ч е с к а я* - порода полностью сложена кристаллическими зернами;

*п о р ф и р о в а я* – порода сложена крупными и мелкими зернами и вулканическим стеклом (крупные кристаллы называют *п о р ф и р о в ы м и в к р а п л е н н и к а м и* , а мелкие в совокупности с нераскристаллизованным стеклом – *о с н о в н о й м а с с о й* );

*с к р ы т о к р и с т а л л и ч е с к а я* (афировая)– обусловлена наличием в породе очень мелких, различимых только под микроскопом, кристаллов и вулканического стекла;

*с т е к л о в а т а я* – возникает, когда вулканическая лава застывает в водной среде, не успевая раскристаллизоваться.

## Основные разновидности магматических пород

### *Кислые породы*

Г р а н и т – плутоническая или интрузивная порода с массивной текстурой и полнокристаллической, от мелко- до крупнокристаллической, структурой. Минеральный состав: кварц, калиевый полевой шпат, кислые плагиоклазы, биотит. Наличие кварца в породе является главным признаком кислых пород. Зерна кварца характеризуются жирным стеклянным блеском, дымчато-серым цветом, отсутствием спайности.

Р и о л и т (липарит) – эффузивный аналог гранита. Имеет мелкопористую текстуру и порфировую структуру: на фоне светлой скрытокристаллической основной массы выделяются мелкие вкрапленники кварца, калиевого полевого шпата, плагиоклаза. Темноцветные минералы встречаются редко, представлены биотитом, реже игольчатыми кристаллами роговой обманки.

О б с и д и а н – застывшее вулканическое стекло. Текстура массивная, иногда флюидальная (со следами течения), структура стекловатая. Чаще всего встречаются обсидианы кислого состава, но имеются также стекла основного и среднего состава. Цвет у них различный: серый, бурый, черный. Образуются при быстром застывании излившейся на поверхность магмы.

П е м з а – «вспененное» стекло; текстура пористая, структура стекловатая. Образуется при быстром затвердевании бурно вскипающей богатой газами и парами лавы. По химическому составу пемзы обычно кислого состава, редко отмечаются разновидности среднего и основного состава.

## *Средние породы*

В этом классе выделяются два ряда – щелочной и нормальный. Породы щелочного ряда характеризуются наличием большого количества калиевого полевого шпата, который доминирует над плагиоклазом. В породах нормального ряда резко доминирует плагиоклаз.

### *Щелочной ряд*

С и е н и т – плутоническая или интрузивная порода; текстура массивная, структура полнокристаллическая. Состоит из калиевого полевого шпата, плагиоклазов (кислых и средних) и роговой обманки, количество которой колеблется от 10 до 20 %.

Т р а х и т – эффузивный аналог сиенита. Текстура тонкопористая, обуславливающая шероховатость породы на ощупь; структура мелкопорфировая, во вкрапленниках желто-розовые калиевые полевые шпаты и один или несколько темноцветных минералов (чешуйчатый биотит и игольчатая роговая обманка). В трахитах часто наблюдаются текстуры течения, т. е. взаимопараллельное расположение игольчатых минералов.

### *Нормальный ряд*

Д и о р и т – плутоническая (интрузивная) порода. Текстура массивная, структура полнокристаллическая. Минеральный состав: средний плагиоклаз, (60-65 %) и роговая обманка (30-35 %). Плагиоклаз образует белые или зеленовато-серые зерна неправильной формы; роговая обманка – в виде черных, удлиненной формы кристаллов.

А н д е з и т – эффузивный аналог диорита. Текстура пористая, структура скрытокристаллическая, поэтому минеральный состав не определяется визуально. Класс породы устанавливается по ее цвету – андезит имеет цвет от светло-серого до серого. Иногда структура породы мелкопорфировая, тогда во вкрапленниках содержатся мелкие прямоугольные кристаллы среднего плагиоклаза серого цвета.

## *Основные породы*

Г а б б р о – плутоническая (интрузивная порода). Текстура массивная, структура полнокристаллическая, часто крупно- или гигантозернистая. Состоит из белых или зеленовато-серых основных плагиоклазов и черного пироксена. На Урале пироксен часто замещается роговой обманкой, такое габбро называют уралитизированным.

Б а з а л ь т – эффузивный аналог габбро. Текстура крупнопористая, структура скрытокристаллическая, поэтому минеральный состав не определяется. Класс породы устанавливается по черному цвету. Иногда в

базальте наблюдаются мелкие порфировые вкрапленники основного плагиоклаза, пироксена, иногда оливина. При сравнении андезита и базальта, у последнего поры обычно более крупные и более темная черная окраска.

### *Ультраосновные породы*

П и р о к с е н и т – плутоническая (интрузивная) порода. Текстура массивная, структура полнокристаллическая, крупнозернистая. Состоит из изометрических кристаллов пироксена черного цвета, часто с зеленым или бурым оттенком.

П е р и д о т и т – плутоническая (интрузивная) порода. Текстура массивная, структура полнокристаллическая, неравномерно-зернистая. Состоит из крупных изометричных кристаллов пироксена и мелких зерен оливина, распределенных между зерен пироксена.

Д у н и т (оливинит) – плутоническая (интрузивная) порода. Текстура массивная, структура полнокристаллическая, мелкозернистая. Состоит из мелких зерен темно-зеленого оливина. При выветривании оливин становится бурым, поэтому дуниты с поверхности имеют бурую корочку.

Вулканических (эффузивных) аналогов ультраосновных пород обычно нет.

## *2.1.2. Метаморфизм и его продукты*

М е т а м о р ф и з м - процесс преобразования любых исходных пород под воздействием изменившихся физико-химических условий среды. Он реализуется преимущественно путем перекристаллизации пород без существенного плавления под воздействием меняющихся температур, давлений, газовой (флюидной) среды. Преобразуя свой минеральный состав, порода, таким образом, приспосабливается к изменившимся термодинамическим (Т-Р) условиям.

Название термина происходит от греческого слова метаморфосис – преобразование. Метаморфическим преобразованием могут подвергаться изначально осадочные, магматические и (повторно) метаморфические породы. При этом исходные породы, как правило, после таких преобразований полностью теряют свой первоначальный облик.

Факторами метаморфизма, т. е. непосредственными причинами преобразования пород, являются: давление (Р), температура (Т), а также растворы и газы (флюиды), пронизывающие толщи горных пород.

Д а в л е н и е при метаморфических преобразованиях может быть обусловлено рядом причин: давлением нагрузки вышележащих толщ (литостатическим - Рл), динамическим давлением тектонического движения (стрессовым - Рс), давлением движущейся магмы (Рм), а также давлением поровых (гидротермальных и флюидных) растворов (Рф). Главным среди

отмеченных причин следует считать тектоническое или стрессовое давление, способное достигать десятков тысяч атмосфер и распространяться на огромные пространства. При проявлении тектонического или стрессового давления роль нагрузки вышележащих пород может оказаться незаметной, а проявление магматического и порового давления флюидов на таком фоне может повлиять на характер минеральных преобразований лишь локально, в местах их проявления.

Температуры метаморфических преобразований могут быть обусловлены несколькими причинами и достигать уровней, когда порода начинает плавиться, т. е. 800-1200 °С. Всегда существует температурный фон, обусловленный глубиной погружения пород, т. е. геотермическим градиентом (Тг), составляющим обычно около 30°/1 км. Однако основные тепловые превращения в породе осуществляются за счет тектонических подвижек (Тс), и сопровождающих такие движения аномальных глубинных тепловых потоков (Тф). На контакте с магматическими породами преобразование осуществляется за счет прогрева пород очагом остывающей магмы (Тм).

Гидротермальные растворы и флюиды, которые способны привносить или выносить различные химические компоненты, влиять на характер минералообразования, создавать специфическую окислительную или восстановительную (Eh), а также кислую либо щелочную (pH) среды. Глубинные флюиды насыщены, прежде всего, парами воды и углекислоты, а также более редкими соединениями водорода, хлора, фтора и др.

### *Типы метаморфизма*

В зависимости от сочетания упомянутых выше факторов выделяются те или иные типы метаморфизма. Наиболее простая схема типов метаморфизма, выделяющихся в зависимости от термодинамических (P, T) параметров, показана на рис. 2, а геологические условия их проявления – на рис.1.

Можно говорить о термальном типе метаморфизма, когда порода преобразуется под преимущественным воздействием температуры, а также динамическом, когда основным фактором выступает давление, и динамо-термальном, когда проявляются оба фактора одновременно. Каждый из этих типов обладает своими специфическими геологическими условиями проявления (рис. 3).

Термальный тип проявляется обычно в обрамлении магматических тел, на контакте с ними, поэтому он обычно называется контактовым. Температура магматических тел может колебаться в интервале 800-1200 °С, а вмещающие породы, разогретые первоначально за счет геотермического градиента, могут быть относительно «холодным». Ширина зоны (ореол) контактового метаморфизма зависит, главным образом,

от объема магматического очага и может достигать нескольких километров. Если вмещающая порода разогрета жильным магматическим телом, то прогретой может быть лишь узкая полоса в несколько метров.

Весьма существенную роль при контактовом метаморфизме играет химический состав магмы и вмещающих пород, а точнее, контрастность состава между ними. В случае резкого контраста между многокомпонентной магмой и вмещающими породами на их контакте, в соответствии с законами Фика, протекают диффузионные процессы взаимного проникновения, меняющие как состав внешней оболочки магматического тела, так и состав вмещающих пород. Такой процесс перекристаллизации пород, протекающий с существенным изменением их химического состава, называется м е т а с о м а т о з о м .

Обычно метасоматоз сопровождается интенсивной гидротермальной и флюидной проработкой, способствующей привносу и выносу химических компонентов. Типичными представителями таких контактово-метасоматических процессов (на границе между силикатными магмами и известняками) являются с к а р н ы (см. описание ниже). С другой стороны, в случае, если силикатная магма находится в контакте с близкими ей по химическому составу вмещающими породами, то формируются р о г о в и к и – прогретые и перекристаллизованные продукты метаморфизма без проявления метасоматоза (см. описание ниже).

Д и н а м и ч е с к и й м е т а м о р ф и з м , который чаще называют д и с л о к а ц и о н н ы м , протекает в относительно «холодных» условиях под воздействием тектонических движений по разрывным нарушениям (разломам). При этом происходит дробление пород, их истирание. Обломки различной величины при последующих процессах, сопровождающихся проникновением в ослабленные зоны флюидов и гидротермальных растворов, могут подвергаться частичной или полной перекристаллизации и цементации с образованием структур катаклаза.

Среди новообразованных минералов – индикаторов высоких давлений – выделяют: кианит, глаукофан, пироп, омфацит (пироксен), алмаз и другие. Эти минералы фиксируют давления больших глубин, где всегда имеется и некоторый температурный фон, создаваемый геотермальным градиентом. В приповерхностных условиях можно наблюдать неперекристаллизованные брекчии, милониты, филлониты.

Контактовый и дислокационный типы метаморфизма развиваются в ограниченных пространствах, локально. Первый тип проявляется в виде полосы вокруг магматических тел, а второй такой же полосой сопровождает тектонические трещины. Поэтому тот и другой типы объединяются названием л о к а л ь н ы й (рис. 3).

В противоположность локальному выделяют р е г и о н а л ь н ы й м е т а м о р ф и з м , проявление которого охватывает большие пространства (регионы). Он протекает в широком интервале температур и давлений, поэтому его можно называть д и н а м о т е р м а л ь н ы м . Породы

регионального метаморфизма, естественно, имеют наиболее широкое распространение. Одновременное проявление температур и давлений создает условия для новообразования широкого диапазона пород, которые можно разделить на фации – совокупности (семейства) пород, формирование которых протекало в близких термодинамических (Р-Т) условиях. Эта близость устанавливается по т. н. индекс-минералам с известными параметрами устойчивости в тех или иных Р-Т условиях. Известен, например, ряд слюд, устойчивость которых возрастает от 200-300 $^{o}$С для серицита, до 300-400 $^{o}$С для мусковита и 500 $^{o}$С и более для биотита. Известны температуры устойчивости и для других минералов.

Название фации определяется по типичной породе. По мере возрастания Р-Т условий регионального метаморфизма выделяют: 1 – *зеленосланцевую* фацию; 2 – *эпидот-амфиболитовую* фацию; 3 **–** *амфиболитовую* фацию и 4 – *гранулитовую* фацию. В области термодинамических условий гранулитовой (иногда амфиболитовой) фации в породе может отмечаться частичное плавление, такое преобразование называют **ультраметаморфизмом**. Это переходная зона от метаморфизма к магматизму.

### *Особенности минерального состава*

Широкий диапазон термодинамических условий проявления метаморфизма обусловил большое разнообразие минерального состава пород. Кроме того, этот набор минералов зависит от состава исходных пород. Сам механизм перекристаллизации пород, протекающий в твердом виде, представляет собой сложный процесс замещения одних минералов (неустойчивых при новых Р-Т условиях) другими, более устойчивыми. При этом важную роль играют поровые флюиды как катализаторы реакций замещения.

Кроме упоминавшихся минералов, входящих в состав магматических пород, выделяется группа минералов, характерных преимущественно для метаморфических пород.

**Тальк –** низкотемпературный чешуйчатый минерал, возникающий при гидротермальной проработке магнезиальных пород. Мягкий, с жирным блеском.

**Хлорит –** низкотемпературный чешуйчатый минерал часто с зеленоватым оттенком. Образуется при гидротермальной проработке основных пород.

**Серпентин** – возникает как продукт гидротермальной проработки ультраосновных пород. Не обладает четко выраженной формой (иногда образует волокнистые агрегаты у хризотил-асбеста), серого с зеленоватыми оттенками цвета.

**Серицит** – низкотемпературная, мелкочешуйчатая, наиболее гидроксилнасыщенная разновидность слюды – мусковита. Присутствие в породе серицита обусловливает ее шелковистый блеск.

**А к т и н о л и т** – низкотемпературная разновидность роговой обманки. Образует волосовидные, тонколучистые неориентированные агрегаты. Цвет светло-зеленый.

**Г л а у к о ф а н** – разновидность роговой обманки, образующаяся при высоких давлениях. Образует тонколучистые агрегаты. Цвет густо фиолетовый до черного.

**С т а в р о л и т** – кристаллы в виде коротких ромбического сечения призм; характерные двойники, напоминающие прямой или косой (угол 60 °) крест. Цвет коричневый, красно-бурый до черного. Легко узнается по цвету и двойниковым формам.

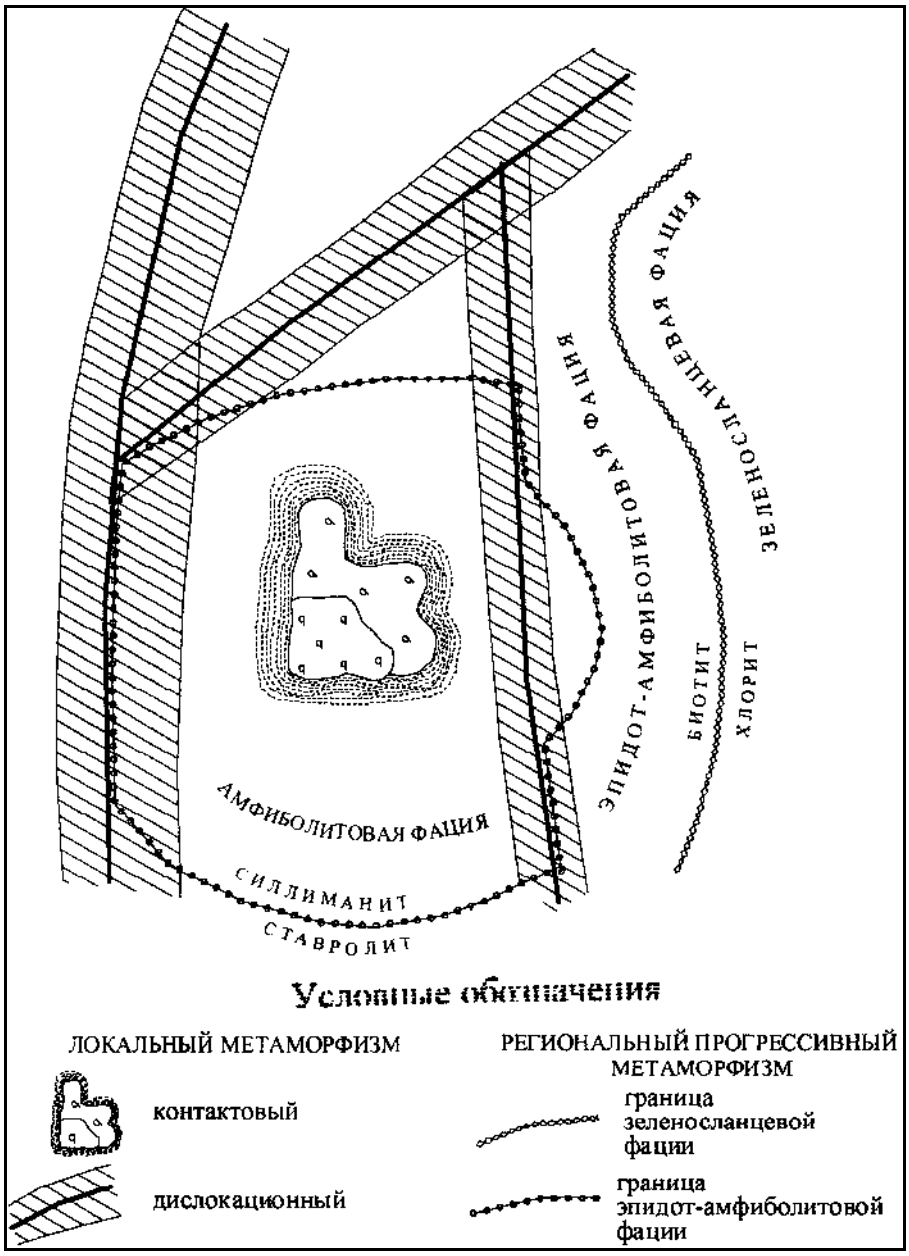



Рис. 1. Схематическая карта метаморфизма

**К и а н и т** – кристаллы длинные, уплощенные. Имеет анизотропию твердости. Цвет голубой или синий.

**Э п и д о т** – образует призматические кристаллы; лучистые или зернистые агрегаты. Цвет светло-зеленый. Блеск сильный стеклянный.

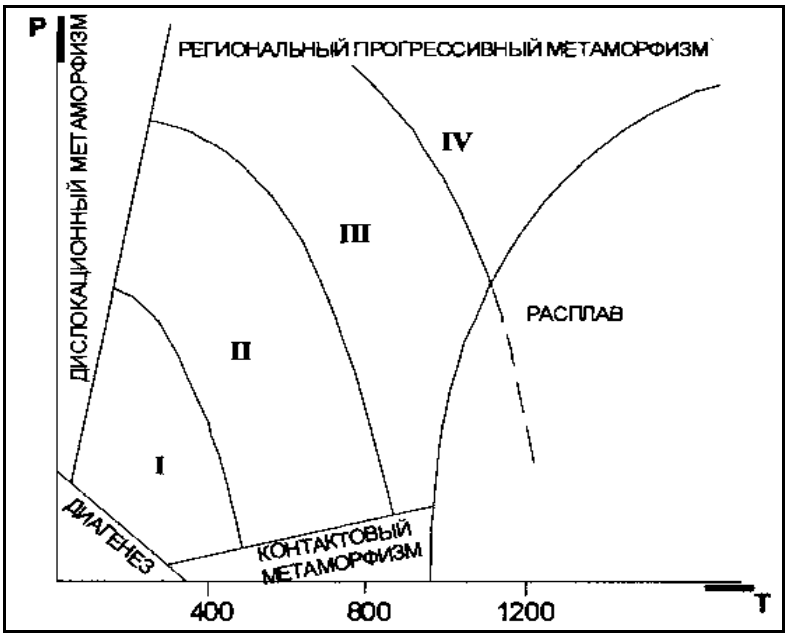



Рис. 2. Типы и фации метаморфизма
*1 – зеленосланцевая; 2 – эпидот-амфиболитовая; 3 – амфиболитовая; 4 – гранулитовая*

**Г р а н а т** – кристаллы изометричные в виде ромбододекаэдров, реже зернистые агрегаты. Цвет – от коричневого до красного. Макроскопически легко узнается по характерному облику кристаллов и цвету.

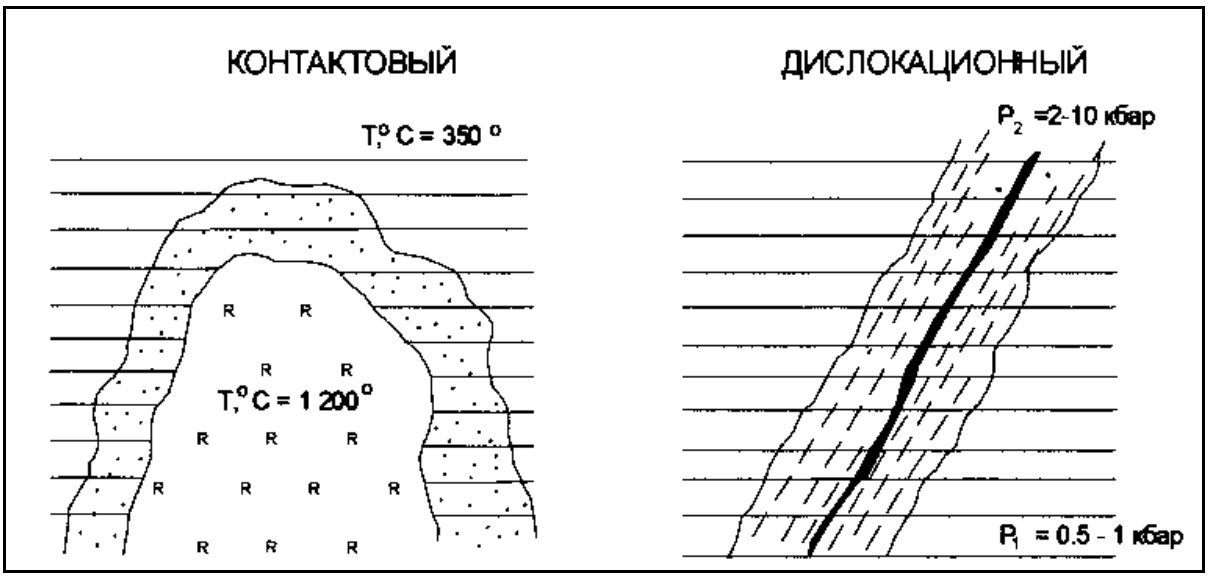



Рис. 3. Локальный метаморфизм

### *Текстуры и структуры*

Текстуры и структуры метаморфических пород зависят от специфических физических условий их образования. Эти условия отличаются от термодинамических параметров кристаллизации магматических пород, для которых действует в полной мере известный закон Паскаля, обеспечивающий при любом направленном тектонических движений одинаковое давление во все стороны. Этим условием обеспечивается повсеместная массивная текстура глубинных магматических пород. Слюды в гранитах, например, благодаря действию закона Паскаля, не ориентированы в одном направлении.

Метаморфические процессы не достигают условий плавления, поэтому они изменяются в твердом или пластичном состоянии, когда закон Паскаля работает лишь частично или не проявляется вовсе. Для регионального метаморфизма, например, ориентированное давление влияет на форму возникающих минералов, а также на их параллельную или субпараллельную ориентировку. Поэтому у низкотемпературных продуктов регионального метаморфизма отмечаются, как правило, сланцеватые текстуры с параллельным и субпараллельным расположением вытянутых, уплощенных или чешуйчатых минералов.

С повышением температуры, в условиях амфиболитовой фации, когда вещество начинает проявлять пластические свойства, а значит частично проявляется закон Паскаля, четкая ориентировка удлиненных, уплощенных минералов постепенно исчезает, т. к. давление становится, до определенной степени, всесторонним. Такая текстура со слабо выраженной ориентировкой минералов называется гнейсовой, по названию главного и типичного представителя пород амфиболитовой фации – гнейса.

Максимальное проявление закона Паскаля достигается в условиях гранулитовой фации, поэтому ее продукты не несут следов ориентировки минералов, а текстура называется массивной как у глубинных магматических пород.

Так как региональный метаморфизм протекает в условиях тектонического давления, то сланцеватые текстуры могут усложняться мелкой складчатостью. Тогда текстура называется плойчатой. Нередко метаморфические процессы высокотемпературных фаций сопровождаются расслоением первично однородной массы на слои контрастного минерального состава. Образуются темно-окрашенные (с амфиболом, слюдами) и светлоокрашенные (с кварцем, полевым шпатами) слои. В этом случае говорят о полосчатой текстуре пород.

Более широкий диапазон текстур характерен для продуктов локального (контактового и дислокационного) метаморфизма. Для скарнов, роговиков, березитов, лиственитов, мраморов, образующихся при контактовом метаморфизме без проявления тектонического (стрессового) давления, наиболее часто отмечается массивная текстура.

Структурные особенности метаморфических пород также в существенной степени определяются Р-Т условиями среды минералообразования. Очевидно

ведь, что в условиях полной анизотропии среды, когда относительно «холодная» твердая порода подвергается тектоническому направленному сжатию, легче кристаллизоваться и расти чешуйчатым минералам, которые относительно легко могут наращивать свой размер вкрест, перпендикулярно вектору давления.

В то же время в условиях изотропной среды гранулитовой фации, когда давление становится всесторонним, возникают благоприятные условия для кристаллизации изометричных, объемных минералов.

Так как для метаморфических процессов отмечается тесная обусловленность внешними факторами формы минералов, эта особенность заложена в понятие с т р у к т у р ы (в противоположность магматическим и осадочным породам, где в понятие структуры вкладывается не форма, а размер минералов, зерен и т. д.). Форма минералов, а значит и структура породы, совместно с ее текстурными особенностями позволяют восстанавливать Р-Т условия образования продуктов метаморфизма.

Конкретные названия структур определяются несколькими латинскими названиями упомянутых форм минералов: *л е п и д о с* – ч е ш у й к а; *н е м а т о с* – н и т ь, и г о л к а; *г р а н о с* – з е р н о. Кроме того, следует помнить, что метаморфизм – процесс постоянного обновления минерального состава породы, все минералы вновь выросшие, возникшие. Этот процесс называется ***б л а с т е з о м*** (от греческого б л а с т о с – р о с т о к).

В итоге структуры продуктов регионального метаморфизма, в зависимости от формы слагающих ее минералов, могут называться: лепидобластовая, гранобластовая, нематобластовая, либо более сложными комбинированными названиями: лепидогранобластовая, нематогранобластовая и т. д.

**Г р а н о б л а с т о в а я** структура чаще отмечается для пород амфиболовой и гранулитовой фаций метаморфизма при наличии зерен изометричной формы – кварца, полевых шпатов, гранатов, карбонатов и др.

**Л е п и д о б л а с т о в а я** характерна обычно для зеленосланцевой фации при обилии чешуйчатых, листоватых минералов – серицита, мусковита, биотита, хлорита, талька, серпентина.

**Н е м а т о б л а с т о в а я** в чистом виде встречается редко (амфиболы, актинолитовые сланцы) и отличаются наличием минералов игольчатой, длиннопризматической формы (эпидот, роговая обманка, актинолит, кианит, рутил).

Однако, как уже отмечалось, в природе чаще встречаются комбинированные структуры, когда в наличии имеется несколько минералов разной формы, например, лепидонематогранобластовая структура. В этом случае название структуры формируется по определенному правилу. В начале такого наименования ставится структура, определяющая форму наименее распространенного минерала, а в конце – наиболее распространенного.

Иногда в породе отмечаются разнозернистые агрегаты, когда один из новообразованных минералов резко выделяется по размеру среди остальных. В этом случае можно говорить о **п о р ф и р о б л а с т о в о й** структуре.

Значительно меньшую информацию об условиях образования несут структуры контактового метаморфизма, продукты которого чаще всего обладают **к р и с т а л л о б л а с т о в ы м и** структурами.

Среди пород регионального метаморфизма имеется два характерных исключения. В зависимости от P-T условий различные формы минералов возникают лишь в том случае, если в исходном химическом составе имелись в наличии необходимые породообразующие компоненты, позволяющие строить все многообразие решеток минералов (чешуйчатых, игольчатых, зернистых). Среди осадочных пород известны два мономинеральные, а значит простые по составу, образования – известняки ($CaCO_3$, $MgCO_3$) и кварцевые пески ($SiO_2$). При метаморфизме эти простые по составу породы не способны формировать игольчатые, чешуйчатые и другие, кроме зернистых, формы. Поэтому известняки при метаморфизме переходят в мономинеральную (с одним кальцитом) породу – мрамор с возможным укрупнением зерна по мере роста температуры. Аналогично ведут себя кварцевые пески, которые способны образовать только зернистый агрегат кварцита. Так как отмеченные породы не способны реагировать на давление изменением формы зерен, то для них, обычно, трудно восстановить тип метаморфизма – региональный или контактовый.

## Основные разновидности метаморфических пород

### *Продукты регионального метаморфизма*

Продукты регионального метаморфизма отличаются большим разнообразием. Это обусловлено, во-первых, разнообразием исходного состава горных пород (*эдукта*), во-вторых, зависимостью минерального состава пород от термодинамических условий (породы одного химического состава в условиях разных фаций имеют различный минеральный состав). Некоторым исключением выглядят две упомянутые выше породы: мрамор и кварцит, краткое описание которых приведено ниже.

***М р а м о р*** – карбонатная порода, образующаяся при метаморфизме известняков и доломитов и сложенная преимущественно кальцитом. Мраморы высокой степени метаморфизма лишь немногим отличаются от мраморов низкой степени. При увеличении температуры может возрастать крупность минеральных зерен. В остальном породы идентичны, хотя их генезис может быть весьма разнообразным.

Чистые разности мраморов имеют белый цвет, различные минеральные примеси окрашивают их в розовые (гематит), желтые (лимонит), серые (органическое вещество), зеленые (хлорит, эпидот) оттенки. Текстура массивная, реже полосчатая; структура гранобластовая.

***Кварцит*** – горная порода, состоящая существенно из кварца. Образуется при метаморфизме кварцевых песчаников и некоторых кислых магматических пород (кварцевых порфиров). Так как кварц слабо реагирует на изменение термодинамических условий, фациальный уровень того или иного кварцита (если нет других минеральных примесей) определить очень трудно.

Кварциты низких и высоких степеней метаморфизма, в силу упомянутых причин, очень похожи. Цвет чистых кварцитов белый, в зависимости от примесей может обладать розовым, черным, желтым, зеленым оттенками. Текстура массивная; структура гранобластовая.

Внешне кварцит очень похож на мрамор, но отличается от него следующими свойствами: твердостью (кварцит царапает стекло, мрамор - нет), спайностью зерен (у кальцита совершенная спайность в трех направлениях, у кварца отсутствует), реакцией с соляной кислотой (мрамор «вскипает» в кислоте, кварцит не реагирует).

Полиминеральные породы изменяют свой минеральный состав в зависимости от фациальных условий, поэтому эти породы будут рассмотрены в рамках минеральных фаций.

*Фация зеленых сланцев*

***Филлит*** образуется в самой низкотемпературной области фации зеленых сланцев. Исходной породой филлитов обычно являются аргиллиты (глинистые сланцы). Глинистые минералы в результате метаморфизма преобразуются в кварц, серицит, иногда хлорит, альбит (полевой шпат), часто с примесью графита. Так как зерна очень мелкие визуально минеральный состав не устанавливается, а внешне это темная, почти черная (за счет примеси графита) сланцеватая порода с шелковистым блеском на плоскостях сланцеватости, обусловленным присутствием серицита.

Часть исходного минерального состава может оставаться не перекристаллизованной. Текстура сланцеватая, структура чаще всего гранолепидобластовая. Гранулярность породы нередко обусловлена сохранившимся зернистым кварцем.

***Кварц – серицитовый сланец*** является продуктом зеленосланцевой фации прогрессивного регионального метаморфизма и образуется либо по аргиллитам (глинистым сланцам), либо по аркозовым песчаникам, или кислым магматическим породам. Основными минералами являются кварц, серицит, альбит (полевой шпат). В зависимости от исходного состава пород могут присутствовать хлорит, эпидот или карбонаты. Размер зерен еще очень невелик (до 0,5 мм), поэтому отдельные минералы определяются с трудом. Цвет породы светло-серый, иногда с зеленоватым оттенком (за счет хлорита и эпидота); на плоскостях спайности – шелковистый блеск, обусловленный присутствием серицита. Текстура сланцевая, иногда плойчатая; структура гранолепидобластовая.

***Хлоритовый (зеленый) сланец*** – продукт зеленосланцевой фации прогрессивного регионального метаморфизма основных магматических

пород. Это сланцеватые зеленые породы, цветом своим обязаны обилию одного или более зеленых минералов (хлорита, эпидота и актинолита), из других минералов практически всегда отмечается альбит (полевой шпат) и кварц. Структура породы гранолепидобластовая.

***Тальковый сланец*** образуется за счет низкотемпературного гидротермального метаморфизма ультраосновных магматических пород (перидотитов и серпентинитов). Основным минералом породы является тальк (не менее 75 %, обычно 90 %), может присутствовать хлорит, актинолит, серпентин, карбонаты. Текстура сланцеватая, структура лепидобластовая.

*Эпидот-амфиболитовая фация*

***Слюдяной (кристаллический) сланец*** – продукт регионального метаморфизма эпидот-амфиболитовой фации. Исходными породами кристаллических сланцев могут быть осадочные (аргиллиты и песчаники) и кислые магматические породы. Основными минералами этих сланцев являются биотит, мусковит, кварц, полевые шпаты. При этом в сланцах преобладают слюды (биотит и мусковит), поэтому для них характерна грубая рассланцованность. Помимо этих минералов в кристаллических сланцах, как правило, присутствуют порфиробласты граната, кианита, ставролита и других минералов. Текстура сланцеватая; структура порфиробластовая, лепидогранобластовая, гранолепидобластовая.

*Амфиболитовая фация*

***Гнейс*** – продукт дальнейшего метаморфизма слюдяных кристаллических сланцев, т. е. исходными породами гнейсов являются осадочные и кислые породы. Главные минералы гнейсов – кварц, полевые шпаты, слюды (биотит, мусковит) и роговая обманка; может присутствовать гранат, кианит и др. Наиболее характерным отличием гнейсов от кристаллических сланцев является гнейсовая (полосчатая) текстура – чередование светлых кварц-полевошпатовых и темных биотит-роговообманковых прослоев – без отчетливой ориентировки удлиненных и чешуйчатых зерен. Такая расслоенность является результатом «метаморфической дифференциации» прогретых до высокой пластичности пород, при которой обычно не образуется сланцеватых структур. Структура лепидогранобластовая.

***Амфиболит*** – типичная порода амфиболитовой фации регионального метаморфизма, производная от основных магматических пород. Сложена преимущественно роговой обманкой и плагиоклазом. В ней могут присутствовать в небольших количествах гранат, биотит и кварц. Текстура визуально массивная, но под микроскопом часто заметна ориентировка призм роговой обманки. Нередко наблюдается полосчатая «гнейсовая» текстура. Структура нематогранобластовая или гранонематобластовая.

*Гранулитовая фация*

***Гранулиты*** представляют собой среднезернистую до крупнозернистой породу по облику, состоящую в основном из калиевого полевого шпата, натриевого плагиоклаза и пироксена, а также кварца, граната и других минералов. Гранулиты похожи на гнейсы, но поскольку у них обычно нет слюды, эти породы имеют массивную текстуру. Структура породы преимущественно гранобластовая.

*Продукты дислокационного метаморфизма*

При дислокационном метаморфизме основным фактором является одностороннее (стрессовое) давление, которое возникает при тектонических подвижках (взбросах, сдвигах, надвигах и т. д.).

***Тектонические брекчии*** – сильно раздробленные породы, состоящие из угловатых обломков различных размеров, сцементированных тем же, но мелко раздробленным, материалом. Разновидностью тектонической брекчии может считаться яшма – кремнистая пестро окрашенная порода, продукт тектонического дробления осадочных, вулканогенно-осадочных кремнеземсодержащих образований.

***Катаклазит*** – сильно раздробленная, перетертая горная порода, состоящая из деформированных, изогнутых, раздробленных зерен минералов.

***Милонит*** – еще более тонкоперетертая горная порода. От катаклазита отличается большей степенью раздробленности минеральных зерен и наличием линзовидно-полосчатой, сланцеватой текстуры, которая возникает вследствие неоднократных разнонаправленных перемещений блоков породы. В результате образуются линзы грубо раздробленного материала, сцементированные тонко раздробленной полосчатой, частично перекристаллизованной массой.

При более высоких температурах в зонах дислокационного метаморфизма происходит перекристаллизация и новообразование минералов, устойчивых при высоких давлениях – кианита, пиропа, омфацита (пироксена). Примером таких пород может служить эклогит.

***Эклогит*** – продукт метаморфизма высоких температур и очень высоких давлений. Исходными породами эклогитов являются основные магматические породы. Состоят преимущественно из пироксена (омфацита) и граната (пиропа). Иногда отмечается кианит и полевые шпаты. Омфацит темно-зеленого цвета, призматической формы. Гранат в эклогите представлен пиропом, который образует крупные порфиробласты красно-коричневого цвета. Текстура массивная, иногда слабо сланцеватая, структура гранонематобластовая.

Кроме того, хорошо известно, что алмазы образуются в «трубках взрыва», в кимберлитах при высоких давлениях. Минералами-спутниками алмазов служат те же омфацит и красный пироп.

*Продукты контактового метаморфизма и метасоматизма*

В случае если контактовый метаморфизм протекает в зоне сочленения разогретой силикатной магмы с близкими ей по химическому составу вмещающими породами, здесь происходит лишь прогрев пород без существенного перемещения химических компонентов. В таких условиях, при отсутствии контраста химических составов обеих пород, образуется, например, роговик.

***Р о г о в и к*** – плотная порода, обычно с высоким содержанием кремнезема, Следствием такого состава является присутствие у неѐ раковистого излома. Текстура массивная, структура гранобластовая (роговиковая). В состав роговика могут входить различные минералы: кварц, слюды, полевые шпаты, гранат и др. Но вследствие тонкозернистой (роговиковой) структуры эти минералы обычно не определяются.

При наличии градиента концентрации (контраста) химического состава на границе магма – вмещающие породы, такой контактовый метаморфизма обычно сопровождается *метасоматизмом* – существенной миграцией химических компонентов, что, в конечном счете, приводит к значительному изменению состава как магмы (в эндоконтакте), так и во вмещающих породах (в экзоконтакте). Так образуются скарны.

***С к а р н*** – контактово-метасоматическая порода, образующаяся на контакте мраморов или известняков и кислых (до средних) магматических пород. В зоне контакта под действием высоких температур магматического очага на начальной стадии образуются роговики, которые при дальнейшей их проработке высокотемпературными растворами преобразуются в метасоматическую породу – скарн.

Растворы имеют высокую минерализацию и пропитывают эндо- и экзоконтакты интрузии. В мраморы и известняки из интрузии обычно мигрируют элементы Fe, Mg, Si, Al и др., а в известняках растворы обогащаются Ca и $CO_2$. В результате взаимодействия этих растворов происходит образование новых минералов – граната (андрадита), кальцита, реже везувиана, эпидота, роговой обманки и актинолита. Очень часто скарны бывают рудными, т. е. содержат большое количество магнетита, сульфидов, иногда золота. Все крупнейшие на Урале месторождения железа, разрабатываемые еще Демидовым, на базе которых выросли такие города, как Н.Тагил, Екатеринбург, Магнитогорск, являются скарново-магнетитовыми.

В целом для скарнов характерны следующие признаки: разнообразие и непостоянство минерального состава; резкое изменение размеров зерен даже в пределах одного штуфа; обязательное присутствие граната и кальцита; частое наличие рудных минералов (магнетита и др.). Текстура у них массивная, структура гранобластовая.

*Метасоматизм, или метасоматоз*, протекает без проявления ощутимого стрессового, тектонического давления. Поэтому объем исходных и конечных продуктов всегда сохраняется неизмененным. В некоторых случаях метасоматические породы образуются благодаря «пропариванию» пород

проникающими с глубин горячими растворами (серпентиниты, лиственити, березиты).

***Серпентиниты*** – гидротермально изменѐнные ультраосновные породы (дуниты, перидотиты). Серпентинизация может быть как автометаморфической, т. е. вызванной гидротермами самой интрузии, так и аллометаморфической, связанной с воздействием на ультраосновные породы гидротерм других, более молодых интрузий. Сущность процесса серпентинизации заключается в замещении первично безводных Fe-Mg-силикатов (оливина и пироксена) водным силикатом Mg (серпентином) и вторичным окислом железа (магнетитом). Цвет породы тѐмно-зелѐный, пятнистый, текстура массивная, структура лепидогранобластовая.

***Лиственит*** – конечный продукт единого процесса гидротермального преобразования ультраосновных пород, состоящего из 3-х стадий – серпентинизации, карбонатизации и лиственитизации. Гидротермы, вызвавшие серпентинизацию ультраосновных пород, с понижением температуры обогащаются углекислотой ($CO_2$), что вызывает интенсивную карбонатизацию серпентинитов с образованием талька и карбоната Mg. На следующем этапе, когда весь серпентин заместился тальком и карбонатом, начинается карбонатизация талька. Освобождающаяся при этом кремнекислота ($SiO_2$) образует кварц. В результате появляется кварц-карбонатная порода – лиственит. Обычно она имеет зелѐный цвет за счѐт примеси фуксита – зелѐной хромовой слюды. Характерны также примесь золотоносного пирита, поэтому лиственит используются как поисковый признак на золото. Текстура массивная, структура гранолепидобластовая.

***Березиты*** – гидротермально изменѐнные кислые магматические породы, в которых полевые шпаты под воздействием гидротерм были замещены серицитом. Состоят из кварца и серицита часто с примесью золотоносного пирита. Цвет серый, текстура массивная, структура гранолепидобластовая.

### *2.1.3. Тектоника*

Конвективные движения в пластичной астеносферной оболочке приводят в постоянное движение внешнюю хрупкую оболочку земли – литосферу. Ее движения осуществляются, главным образом, по двум направлениям: вертикальному и горизонтальному. И те, и другие приводят к нарушению первоначального залегания пластов литосферы, формируют ее внутреннюю структуру. Всесторонним изучением таких движений литосферы занимается наука геотектоника. В сфере ее изучения как сами процессы движения, их характер, причины, так и последствия – деформации литосферы. Как правило, именно после изучения и анализа деформаций восстанавливают характер процесса движения.

## *Классификация тектонических явлений*

Согласно современной классификации профессора МГУ В. Е. Хаина, тектонические движения делятся на два типа: вертикальные и горизонтальные. Давно и хорошо изучены вертикальные движения литосферы, которые имеют множество аргументированных доказательств. Здесь выделяют колебательные (эпейрогенические) и горообразующие (или орогенические) движения.

Колебательными, или эпейрогеническими, называют медленные радиальные движения литосферы вверх-вниз, которые обычно не приводят к существенным деформациям ее пластов. При орогенических (горообразовательных) движениях напряжения передаются тангенциально, по касательной к поверхности Земли, и в результате такого горизонтального сталкивания литосферных плит (коллизии) формируются складчатые пояса - геосинклиналии. Некоторые исследователи увязывают отмеченные два типа движений генетически, как имеющие единую, общую природу.

В середине XX века в геологии доминировали представления об исключительно вертикальных движениях литосферы. С ними связывались также складчатые и разрывные нарушения, т. е. формирование геосинклинальных структур. Их физико-химическая природа очевидна: движение вниз (прогибание) обеспечивает сила гравитации, а подъем вверх – тепловое расширение, подъем нагретого на глубинах тепло-массопотока.

За последние годы доминирующей стала концепция (теория) горизонтальных движений литосферных пластин, формирующих зоны растяжения (рифтинга) и зоны сжатия (геосинклиналии). Механизм и причины таких горизонтальных движений до конца не выяснены, однако обычно увязываются с так называемыми «вихревыми» движениями в подстилающем их слое – астеносфере. В настоящее время горизонтальные и вертикальные движения литосферы не являются взаимно исключающими друг друга.

С началом космической эры, когда начали внедрять лазерные методы инструментальных наблюдений, масштабы вертикальных и горизонтальных движений были надежно обоснованы. Речь идет обычно о движениях, достигающих первых сантиметров в год. Максимальный горизонтальный дрейф сегодня испытывает Австралийский континент, который перемещается к северо-западу со скоростью 16 см в год.

### *Вертикальные движения*

В недалеком прошлом в качестве свидетельств современных вертикальных движений привлекались, например, погруженные в прибрежные акватории древние города, а точнее - их остатки. Сегодня таким примером может служить Венеция, фундамент домов которой погружен в воду. Быстро поднимается Скандинавия, погружается северо-запад Европы, где Голландия, Бельгия спасают от наступающего моря свои северные территории при помощи

высотных дамб. Масштабы вертикальных перемещений сопоставимы с горизонтальными и достигают первых сантиметров в год.

Надежным индикатором современных вертикальных движений могут служить речные террасы. На Урале, например, реки бассейна Оби имеют четыре горизонтальные площадки, возвышающиеся над поймой. Обычно такие площадки (террасы) имеют высоту несколько метров (обычно 3-5 м). Они в свое время были поймой, однако, вследствие эпейрогенических движений, на фоне которых амплитуда восходящих движений была каждый раз больше, чем нисходящих, такие горизонтальные площадки оказывались приподнятыми. Русло реки каждый раз врезалось все глубже, а новая пойма все ниже. За последний миллион лет геологической истории на восточном склоне Урала по наличию речных террас устанавливается четыре колебательных движения с общей тенденцией к поднятию.

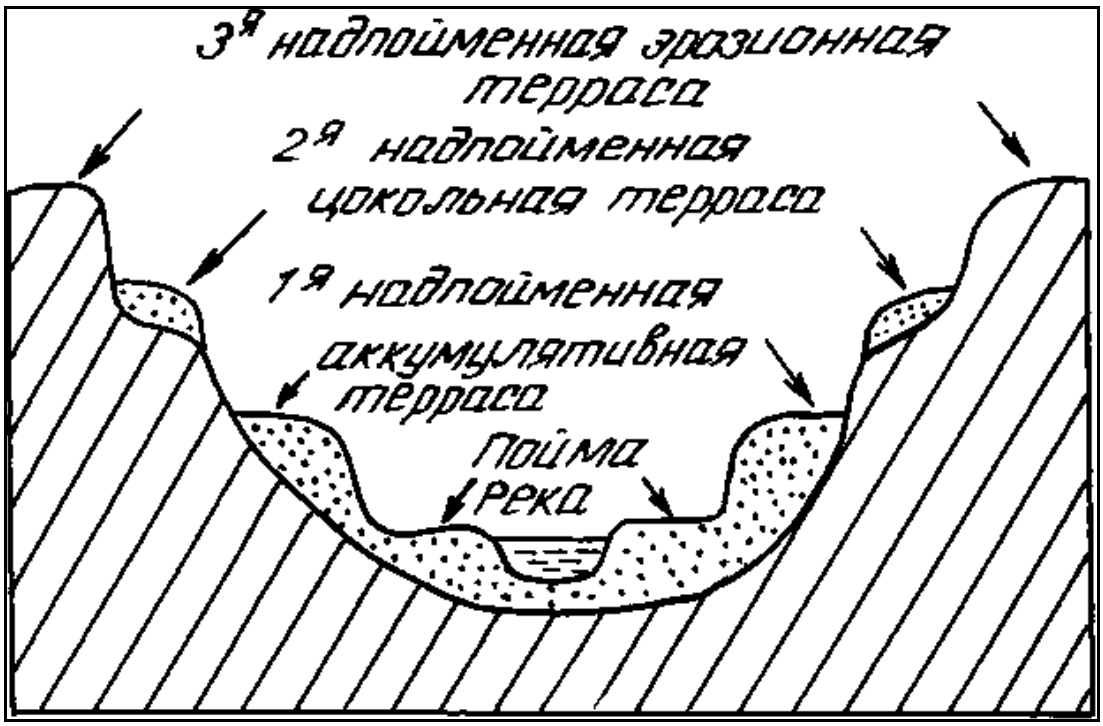



Рис.4. Схематический разрез речных террас

Характер движения и их масштабы фиксируются разрезом террас (рис. 4). Цокольные террасы, сложенные исключительно скальными, коренными породами, могут рассматриваться как свидетели подъема территории без предшествующего опускания, а аккумулятивные террасы, сложенные речными наносами, свидетельствуют о предшествующем опускании территории и т. д.

Классическими геологическими доказательствами вертикальных тектонических движений являются разрезы осадочных терригенных толщ. Быстрая смена вверх по разрезу грубообломочных пород (конгломератов) более мелкообломочными (гравелитами), а затем песчаниками и, наконец, глинистыми породами может рассматриваться как доказательство погружения дна моря, отступания береговой линии. Такой разрез называется

трансгрессивным (трансгрессия – наступление моря). Обратное чередование слоев, когда вверх по разрезу размер зерен становится все более крупным, может служить доказательством обратного тектонического процесса – поднятием морского дна. Такой разрез называется регрессивным. Аргументом в пользу такого толкования разреза может служить распределение осадков в современных морях: чем дальше от береговой линии – тем мельче осадочный материал. Волноприбойные движения строго сортируют привносимый с континента материал, крупный галечник остается в зоне пляжа, а мелкий глинистый материал выносится в глубинные и удаленные от берега зоны моря.

### *Горизонтальные движения*

Убедительные доказательства горизонтальных перемещений литосферных плит (пластин) получены лишь в последние десятилетия, хотя о расколе Пангеи (бывшего единого континента) говорили давно. До недавнего времени трудно было объяснить механизм такого перемещения, его причины и источники энергии. Известная с начала века теория «дрейфа континентов» Вегенера была вскоре опровергнута физико-математическими расчетами советских геофизиков, что надолго затормозило развитие исследований в этой области. Лишь в последние десятилетия теория горизонтальных перемещений литосферных пластин была аргументированно обоснована.

Серьезный сдвиг в восстановлении теории горизонтального дрейфа был получен с открытием астеносферы – слоя размягчения в верхней мантии. Ведь до сих пор главным контраргументом против возможного горизонтального смещения одного слоя верхней оболочки Земли по отношению к другому была математически доказанная невозможность процесса, способного оторвать отдельные слои по горизонтальным плоскостям с последующим движением по ним. Открытие астеносферы сняло это главное возражение геофизиков. Механизм горизонтального скольжения как своеобразного «транспортера» литосферных плит был установлен. Началась интенсивная разработка теории горизонтальных перемещений, известной в последующем как «новая глобальная тектоника», теория мобилизма, плейт-тектоника.

Первые аргументы в пользу горизонтальных перемещений верхней оболочки Земли привел в начале 20-го века немецкий геофизик Вегенер в своей книге «Дрейф континентов». Этот ученый полагал, что континентальные блоки коры перемещаются по океаническим. Как в последствии оказалось, это было невозможно. Возражение было снято лишь во второй половине века, когда была открыта астеносфера. Это открытие стало глобальной вехой в развитии геологических представлений вообще и стало основным аргументом в пользу горизонтальных перемещений литосферных плит в послевегенеровское время. Сегодня можно уверенно говорить о том, что двигаются не только континенты (континентальные блоки), но и блоки океанической коры, захватывая часть верхней мантии.

*Тектонические деформации (дислокации)*

Естественным следствием тектонических движений являются деформации слоев литосферы, которые нарушают их первоначальные залегания. Складчатые, или пликативные деформации, обычно развиваются на фоне горизонтальных сжатий и проявляются без разрыва сплошности пластов. При этом может наблюдаться их уплотнение, утончение или утолщение, хотя следует отметить, что на практике складчатые деформации обычно всегда сопровождаются сетью тонкой трещиноватости, называемой кливажом. Трещины кливажа могут иметь различную ориентировку, а их образование связывается с неравномерным движением вещества при формировании складок. При изгибе пласта внешние слои растягиваются, а внутренние сжимаются.

По форме складки делятся на ***антиклинальные*** – выпуклые вверх и ***синклинальные*** – вогнутые вниз, однако в природе, на отдельных обнажениях, нередко видна лишь часть складки, когда пласты наклонены в одну сторону. Такой фрагмент складки называется моноклиналью.

В относительно спокойных тектонических областях, без проявления интенсивных горизонтальных сжатий, антиклинальные складки могут иметь вид купола – слабо выпуклой складки, изометричной в плане. Если эта изометричность в плане нарушена, но отношение длины складки к ее ширине не превышает 2:1, такие деформации называют брахискладками, в данном случае – ***брахиантиклиналью***. Аналогичные синклинальные структуры называют мульдой или чашей, а в некоторых случаях – ***брахисинклиналью***. Более напряженные складки называют линейными, изоклинальными.

Наиболее часто употребляют классификации складок по морфологическому (форме складок) или генетическому (по происхождению) принципу. Кратко коснемся лишь морфологии складок и, прежде всего, геометрических элементов отдельной складки.

У каждой складки выделяют ряд элементов: замок, крылья, ядро, шарнир, ось, осевая плоскость (рис. 5).

**Замок складки** – место перегиба пласта; **крылья** – боковые, расходящиеся части складки, которые сочленяются в замке; **ядро складки** – внутренняя часть складки, осевая плоскость делит складку на две симметричные части и проходит через **шарнир** – линию, соединяющую все точки максимального перегиба пласта.

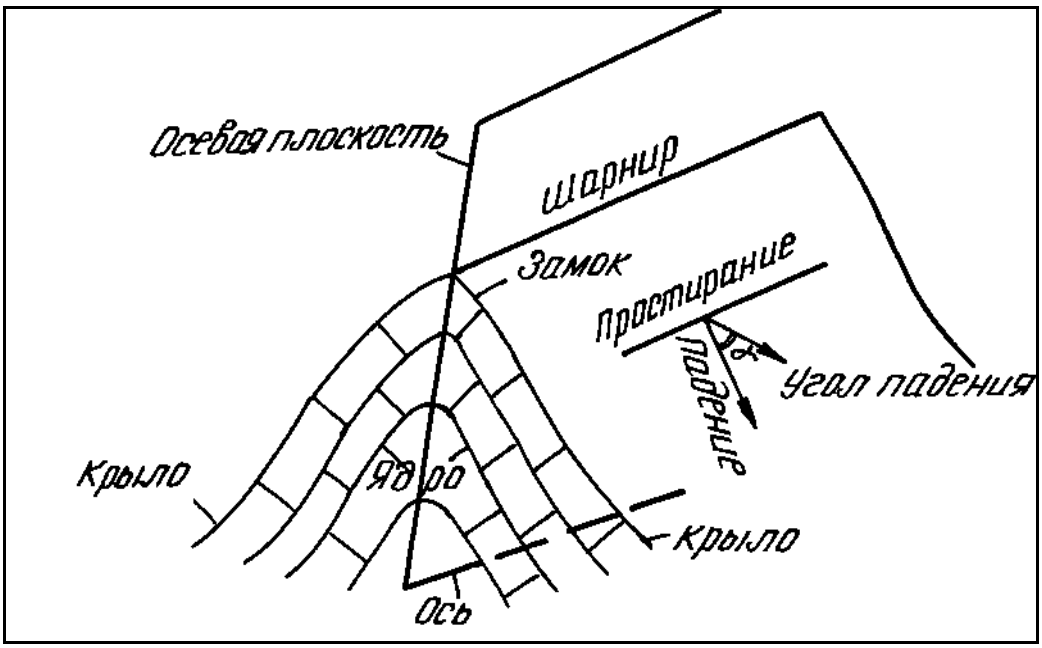



Рис. 5. Элементы складок

Если складка горизонтальна, то шарнир складки совпадает с ее осью, которая представляет собой линию пересечения осевой плоскости с горизонтальной плоскостью. Если складка наклонена, то шарнир, как материальная линия перегиба пласта, тоже наклоняется, или ундулирует. Ось же складки как воображаемая линия пересечения осевой плоскости с горизонтальной остается неизменной, т. е. всегда лежит в горизонтальной плоскости.

По морфологии и положению осевой плоскости складки делятся на *прямые* (а), *наклонные* (б), *опрокинутые* (в), *лежачие* (г), *ныряющие* (д).

В прямых складках осевая поверхность вертикальна, крылья наклонены в разные стороны, а их наклон одинаковый. В *наклонных (косых)* – осевая плоскость наклонна, а крылья падают под разными углами в разные стороны. Опрокинутые складки обладают наклонной осевой плоскостью, а их крылья падают в одну сторону. У *лежачих* складок осевая плоскость совпадает с горизонтальной, а у *опрокинутых* «ныряет» под углом к горизонтальной плоскости (рис. 6).

По форме замка выделяются следующие морфологические типы складок (рис. 6): *нормальные* или *гребневидные* (а), *изоклинальные* (б) – с приблизительно параллельными крыльями и узким замком, *веерообразные* (в) – напоминающие веер с широким замком, *сундучные* (г) – с широким замком и круто наклонными крыльями.

Кроме отмеченных типов складок выделяют более сложные модификации, которые образуются при наложении нескольких этапов деформаций. В этом случае более сложные гармоники складок, естественно, характерны для более древних пластов, залегающих на более глубоких горизонтах.

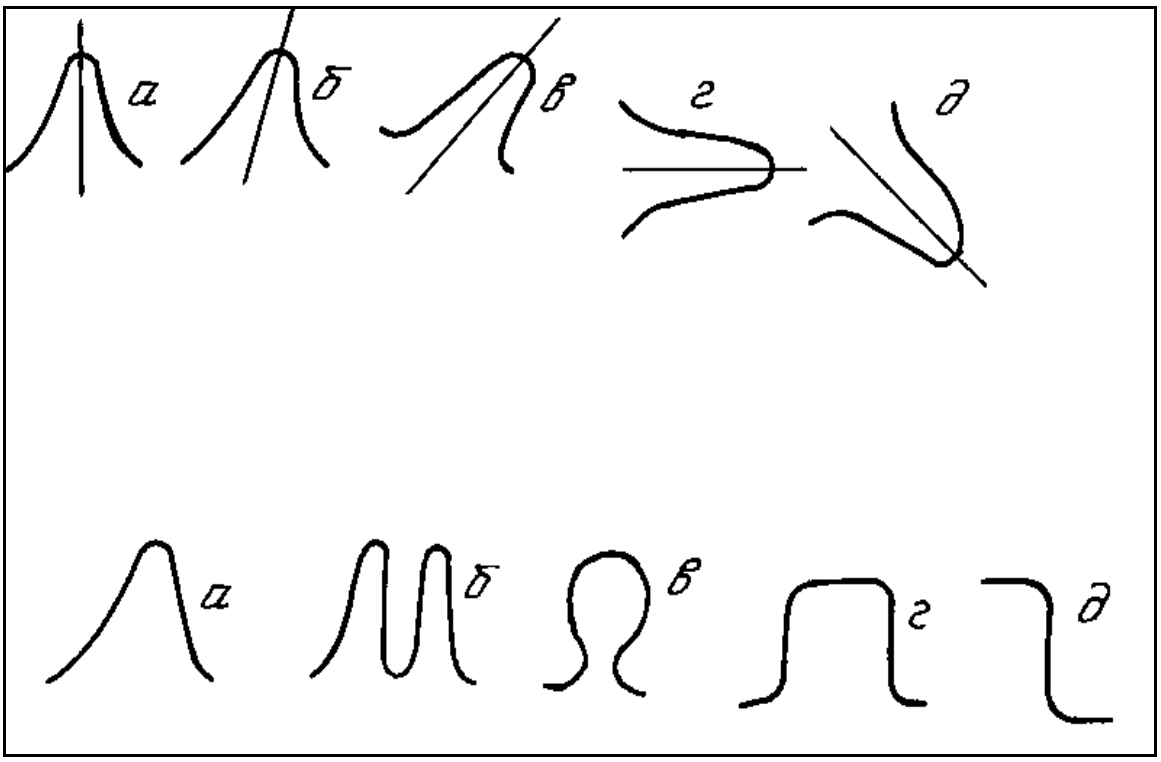



Рис. 6. Типы складок: вверху – по положению осевых плоскостей
*(а – прямая, б – косая, наклонная, в – опрокинутая, г – лежачая, д – ныряющая); внизу – по морфологии (а – нормальная, гребневидная, б – изоклинальная, в – веерообразная, г – сундучная, д – флексура)*

*Разрывные (дизъюнктивные) нарушения* формируются при достижении предела текучести пласта, когда происходит разрыв его сплошности. Поэтому хрупкие деформации обычно следуют за пластичными, а вместе они обычно сопровождают друг друга.

Трещины, разрывы сплошности геологических тел, бывают самого различного происхождения. В глубинных частях коры микротрещиноватость нетектонического происхождения обычно связывают с контракционными процессами в обрамлении магматических массивов, а также с диагенезом осадочных пород. Микротрещины обычно имеют петрогенетическую природу. На дневной поверхности трещиноватость обусловлена, прежде всего, экзогенными процессами, обусловленными энергией Солнца.

Рассмотрим главный тип разрывных нарушений в земной коре, обусловленный тектоническими причинами. В условиях больших динамических напряжений дизъюнктивные нарушения приводят к смещению пластов по т.н. плоскости сместителя, или по сместителю. В таких разрывах перемещение отдельных блоков единого в прошлом пласта может происходить как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях. Геометрия таких перемещений иллюстрируется рисунком элементов ***сброса*** – разрывного нарушения в условиях растяжения, когда сместитель (плоскость сместителя) наклонен в сторону опущенного блока (рис. 7).

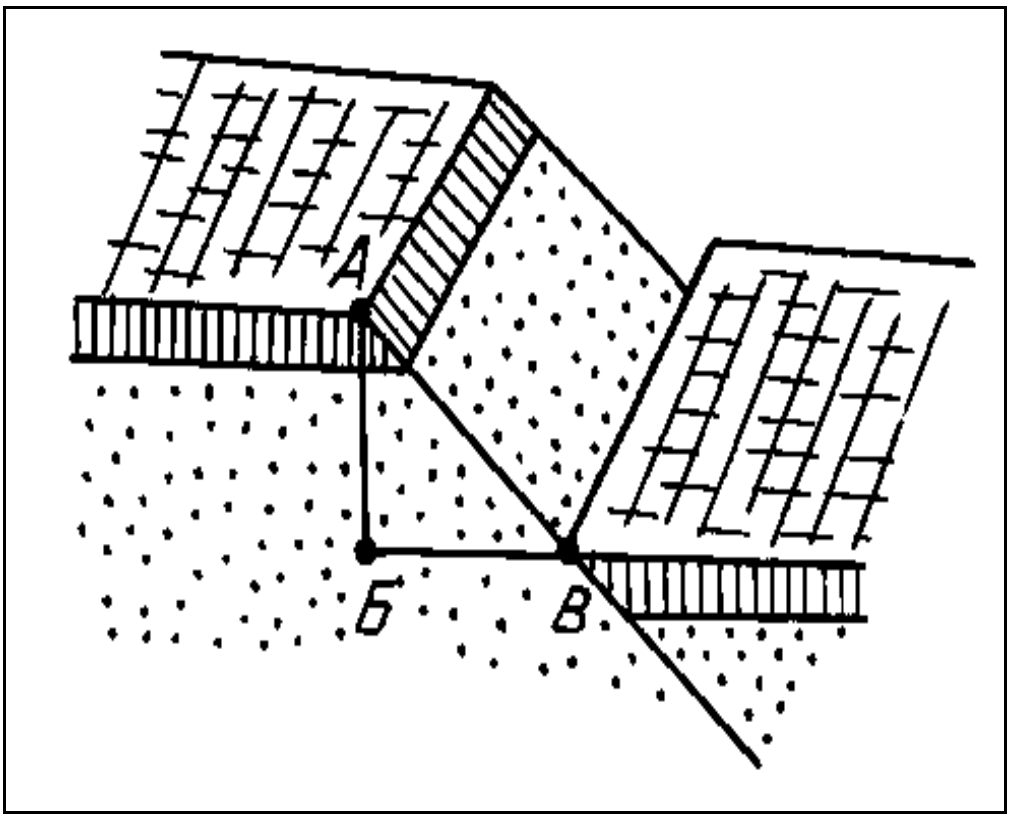



Рис. 7. Элементы сброса

*А-Б – вертикальная амплитуда сброса, Б-В – горизонтальная амплитуда сброса, А-В – амплитуда истинного смещения*

Аналогичные элементы выделяются у ***взброса*** – разрывного нарушения, развивающегося в условиях сжатия, когда сместитель наклонен в сторону поднятого блока (под него). Похожая на взброс структура, у которой сместитель образует острый угол (<30 °) по отношению к горизонтальной плоскости, называется надвигом. Видимое смещение пластов в горизонтальной плоскости (на карте) называют сдвигами. В природе такие смещения происходят как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях и тогда они называются сбросо-сдвигами, взбросо-сдвигами и т.д. (рис. 8).

Нередко в природе наблюдаются более сложные комбинации упомянутых структур: ступенчатые сбросы, грабены, горсты, сложные грабены и др.

Несколько особо следует упомянуть ***глубинные разломы*** – разрывные нарушения литосферного порядка. О них трудно говорить как о трещине, чаще это довольно мощная (до первых десятков километров в ширину) зона дробления, деструкции литосферы, корни которой нередко достигают мантии. Это особые зоны проницаемости литосферы, по которым происходит дренаж глубинной энергии в виде тепло-массопотоков, определяющих геологический режим целого региона. Такие разрывные нарушения планетарного порядка можно называть разломами первого порядка.

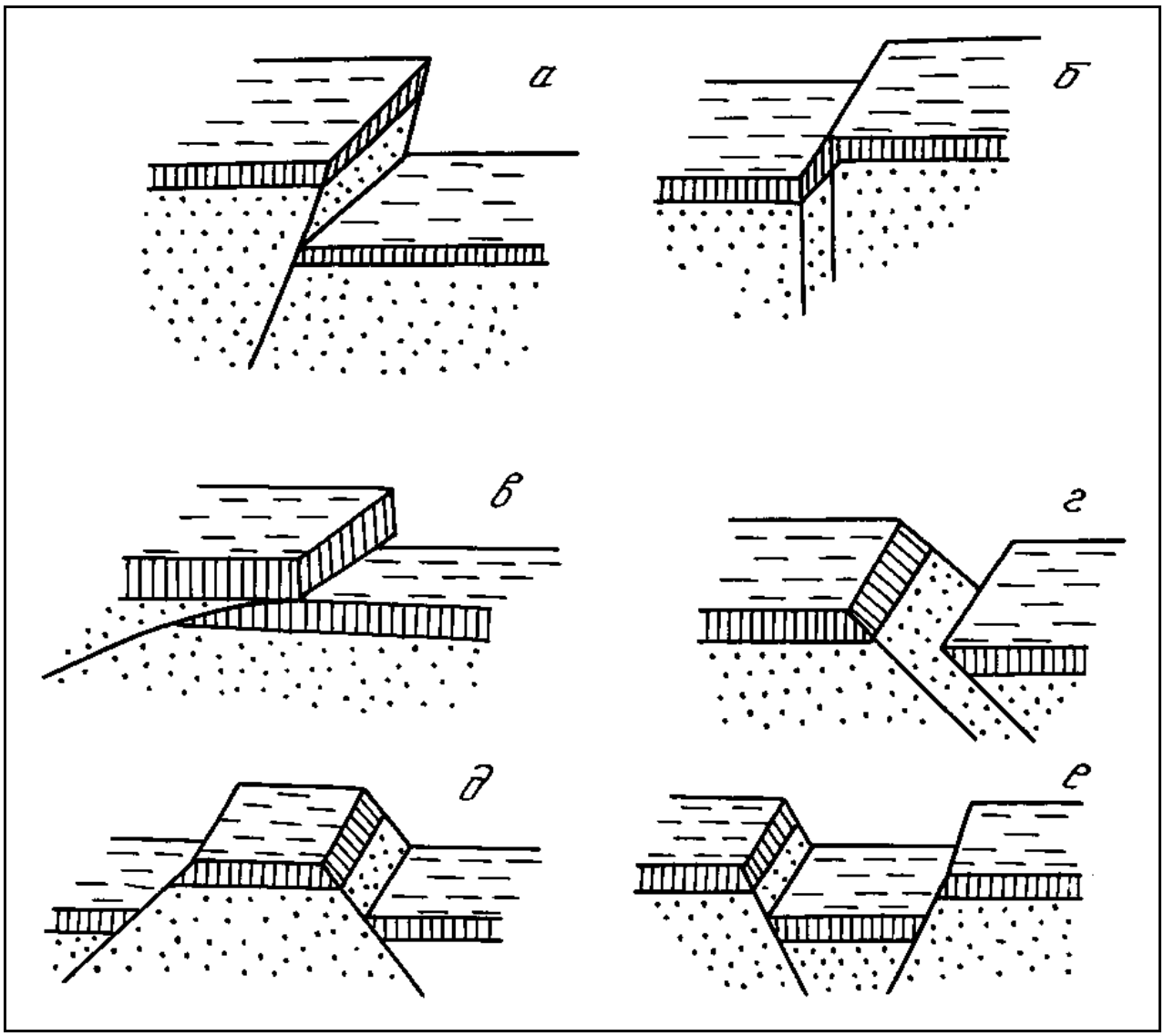



Рис. 8. Основные виды разрывных тектонических нарушений:
*а – взброс, б – сдвиг, в – надвиг, г – сбросо-сдвиг, д – горст, е – грабен*

К таковым можно отнести, прежде всего, планетарную систему СОХ (срединно-океанических хребтов), зоны Заварицкого-Беньофа, разлом Красного моря, в США – известный разлом Сан-Андреас и др. Нередко такие глубинные разломы на поверхности трассируются ультраосновными массивами, представляющими вещество мантии.

## 2.2. Экзогенные процессы

К экзогенным процессам относят такие превращения внешней оболочки Земли, которые протекают при участии солнечной энергии. Сюда относят геологическую деятельность ветра, постоянных и временных водотоков, озер и болот, морей, ледников, подземных вод, выветривания. Все они преобразуют лишь тонкую внешнюю оболочку коры.

Несколько отдельно стоят процессы, связанные с гравитационным воздействием на Землю Луны. Они вызывают в пределах морских акваторий приливы и отливы. При реализации этих природных явлений отмечается ряд последовательных стадий (разрушение горных пород, их перенос и транспортировка, сортировка и аккумуляция, осаждение и диагенез), конечным продуктом которых являются осадочные горные породы.

### *2.2.1. Литогенез*

Под литогенезом понимают совокупность экзогенных процессов, позволяющих, в конечном счете, формировать осадочные породы. Сюда относят процессы разрушения горных пород, слагающих континентальную кору, последующую транспортировку и осаждение продуктов разрушения в морских бассейнах, а также процессы формирования и седиментации органогенных и хемогенных образований в пределах морских и океанических акваторий.

Осадочные горные породы представляют собой скопления минерального или органического вещества, образующегося на дне водоѐмов или на поверхности суши как результат действия экзогенных процессов. Они покрывают около 75 % поверхности континентов. При этом многие из осадочных горных пород являются полезными ископаемыми: три четверти ежегодно добываемого сырья имеет осадочное происхождение. Это уголь, нефть, газ, вода, железные и марганцевые руды, бокситы, гипсы и ангидриты, соли, фосфориты, цементное сырьѐ, известняки, пески и глины.

Образуются осадочные горные породы, преимущественно, за счет разрушения и последующего переноса в водные бассейны всех типов пород: магматических, метаморфических и осадочных. Кроме того, они могут формироваться за счет жизнедеятельности и отмирания живых организмов, а также в процессе химических реакций осаждения из водных растворов.

Механизмы формирования осадочных пород, их вещественный и химический состав, в отличие от магматических и метаморфических разновидностей, намного более сложные и разнообразные. Выделяют терригенные («рожденные на суше»), органогенные (образованные за счет жизнедеятельности и отмирания живых организмов) и хемогенные (за счет химических реакций осаждения) разновидности. Широкий диапазон химического и вещественного состава объясняется тонким разделением продуктов разрушения первичных пород и переходом в раствор их составных

частей. Минералогический состав осадочных пород характеризуется широчайшим диапазоном минералов, устойчивых в экзогенных условиях: кварц, халцедон, опал, минералы группы каолинита, силикаты и оксиды железа, марганца, алюминия. Кроме того, осадочные породы могут содержать обломки других пород, скелетные остатки организмов, или продукты их жизнедеятельности (например, зубы акул, коралловые постройки и т. д.), а также состоять из солей.

Такое многообразие пород, обусловленное различиями условий их образования, стало причиной широкого диапазона их текстур и структур. Этим же обстоятельством обусловлены трудности, связанные с классификацией, разночтениями в определении некоторых разновидностей пород.

## Современное осадкообразование

Большая часть описываемых пород образуется за счѐт осаждения вещества, представляющего собой, в основном, продукты вывѐтривания, разрушения более древних пород суши. Отсюда их название – ***терригенные*** (образованные на континенте). Скопления таких продуктов, образующихся в современных условиях, называют осадками. Образование осадочного материала осуществляется в различных физико-географических условиях: на поверхности суши и в водных бассейнах в результате различных геологических процессов и явлений, ведущим из которых является выветривание – механическое дробление и химическое разложение пород различного состава и генезиса.

Механическое дробление происходит на поверхности Земли и осуществляется под воздействием внешних климатических факторов (перепада температур днѐм и ночью, который приводит к формированию сети трещин в породах), а также ветра, речных вод, временных водотоков, морских течений и т. д. Химическое разложение происходит, главным образом, под действием природных вод, заметное влияние при этом оказывают также свободный кислород и углекислый газ. Интенсивность и скорость химического разложения зависит от климатических условий, их величина резко возрастает с приближением к экватору, по мере увеличения температуры. Осадочный материал, образующийся на поверхности суши, перемещается водой, ветром и льдом по еѐ поверхности в водные бассейны. Основным фактором-регулятором распределения обломочного материала, является гидродинамика бассейна, связанная с расстоянием от суши и его глубиной. По мере увеличения глубин и расстояния от суши происходит осаждение всѐ более и более мелких частиц, так как крупные частицы имеют большую скорость осаждения, чем мелкие.

В прибрежной зоне с активной динамикой вод наблюдается механическая дифференциация вещества – накопление валунов и гальки на пляже и на глубинах в несколько метров, ниже – песка, а ещѐ ниже (глубины более 60-80 м) – глинистых пород. В прибрежной зоне и на мелководье (глубины до 100 м) в результате жизнедеятельности моллюсков, иглокожих, известковых водорослей и других организмов образуются карбонатные осадки:

ракушняки, пески с ракушками, пески из раковинного детрита (мелких обломков), алевриты и илы, биогермы – постройки водорослей и т.п.

В процессе переноса и осаждения материала происходит осадочная дифференциация, в результате которой под влиянием механических, химических, биологических и физико-химических процессов происходит сортировка или избирательное выделение в твѐрдую фазу растворѐнных и газообразных веществ с последующим переходом отделившихся однородных продуктов в осадок. Образовавшиеся из таких осадков горные породы отличаются простым химическим составом, высокой концентрацией отдельных компонентов или большой однородностью частиц по размеру. Многие осадочные породы благодаря дифференциации представляют собой ценные полезные ископаемые (кварцевые пески, железные руды, каменная соль и др.).

В общем балансе осадочных пород значительно меньший объѐм занимают органогенные образования, которые представляют собой продукты жизнедеятельности или отмирания живых организмов. Сюда относятся, прежде всего, известняки – продукты отмирания организмов, извлекающих обычно из среды обитания $CaCO_3$, а также опоки, имеющие состав $SiO_2$, $nH_2O$, и угли, представляющие собой различные углеродистые соединения.

Ещѐ реже в разрезе осадочных пород отмечаются ***хемогенные*** образования, которые формируются в процессе химических реакций осаждения из пересыщенных вод (рассолов). Типичными представителями являются соли.

## Процессы образования и изменения

Образование осадочных пород (литогенез) представляет собой совокупность ряда последовательных стадий (рис.9):

1. Выветривание (физическое разрушение, дробление пород и последующее химическое разложение до состояния глин), которое приводит к разрушению верхней части всей континентальной коры.
2. Перенос преимущественно речными потоками, а также ветром, ледниками, временными водотоками в сторону водных бассейнов. Продукты выветривания при этом продолжают истираться, измельчаться.
3. Отложение или седиментация рыхлых осадков в водных бассейнах с проявлением процессов дифференциации.

Диагенез включает процессы уплотнения осадка, его цементацию и дегидратацию (удаление воды) вследствие постепенного погружения на большие глубины, увеличения лито- и гидростатической нагрузки, а также повышения температур (до 200-300 $^{o}$C) за счѐт геотермического градиента. Вследствие диагенеза рыхлый, мокрый песок превращается в сцементированный песчаник, глина – в алевролит, галечник – в конгломерат и т.д.

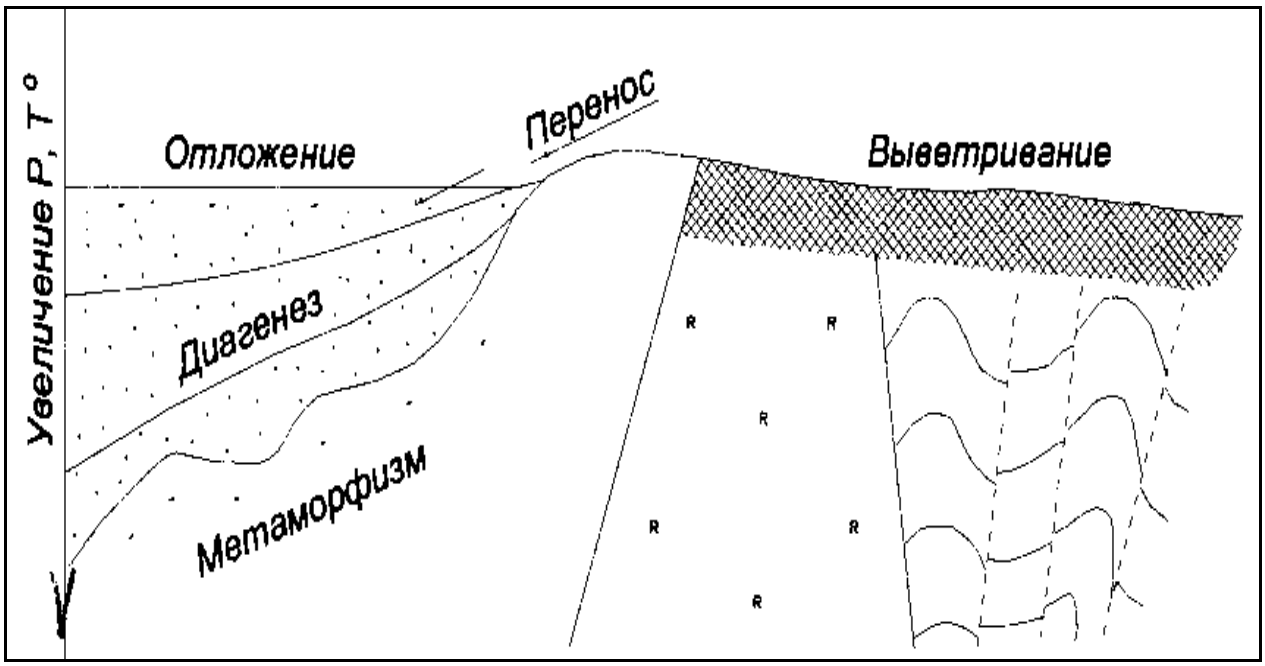



Рис. 9. Соотношение этапов образования и существования осадочных горных пород

Вся упомянутая выше совокупность рыхлых продуктов, вынесенных с территории суши, называется терригенными (рождѐнными на континентах, в дословном понимании) породами. Нередко образуются смешанные продукты, когда с терригенными осадками смешиваются с останками органики. Тогда имеем дело с известковистыми песчаниками, глинистыми известняками и т. д. В случае смешивания терригенных осадков с продуктами вулканизма получаем туфогенные песчаники, песчанистые туфы и т. д. Следует отметить, что прилагательное в названии породы относится к тому компоненту, который содержится в меньшем количестве. И, наоборот, существительным обозначается та часть, которая доминирует в породе. Для случаев, когда оба компонента содержатся в примерно одинаковых соотношениях, названия пород обозначаются специальными терминами. Туффитом, например, называют породу, в которой примерно одинаковое соотношение туфового и песчанистого материала. В аналогичном случае для терригенно-карбонатных пород используется термин мергель.

## Классификация осадочных горных пород

Общепризнанных классификаций осадочных горных пород нет, что связано, прежде всего, с разнообразием процессов и факторов, контролирующих образование осадков. В нашей стране распространением пользуется классификация осадочных пород, предложенная в 1958 г. М. С. Шевцовым, в основу, которой положено с одной стороны их происхождение, а с другой – их химический и минеральный состав. Подобная классификация осадочных пород по Г. А. Кейльману и В. Б. Болтырову (1985) приведена в виде таблицы 2.

По генетическим признакам среди осадочных горных пород выделяют три главные группы.

***Терригенные*** (обломочные) породы, образуются в результате механического разрушения ранее существовавших горных пород, и накопления обломочного материала. Сюда относят большую группу песчаников, гравелитов, конгломератов, а также их не сцементированные и не окатанные разности: пески, гравий, дресву, галечник и щебень. В эту же группу можно отнести глинистые породы, являющиеся продуктом преимущественно химического разрушения пород, а также переотложения глинистых минералов, освободившихся при выветривании глинистых толщ и тончайшего дробления химически стойких минералов.

***Органогенные*** породы, которые образуются в результате жизнедеятельности организмов (коралловые постройки) и их отмирания (кости рыб, зубы акул и т. д.). В отдельную группу могут выделяться каустобиолиты, образующиеся из растительных и животных (планктон) останков, преобразованных под влиянием биохимических, химических и других геологических факторов и обладающих горючими свойствами. Сюда относят угли, торф, сапропель и др.

***Хемогенные*** породы, образующиеся при химическом разрушении, растворении минералов материнских пород и последующем выпадении новых минералов в осадок из пересыщенных растворов.

Дальнейшее подразделение в пределах выделяемых генетических групп осадочных пород производится по вещественному и минеральному составу. Терригенные осадочные горные породы по размеру обломков (частиц) подразделяются на грубообломочные (псефиты), песчаные (псаммиты), пылеватые (алевролиты) и глинистые (пелиты). По характеру связи (цементации) обломочного материала они делятся на сцементированные и несцементированные (рыхлые).

При классификации органогенных и хемогенных пород определяющим является их химический состав (табл.2.).

## Текстуры, структуры, цвет

***Текстура*** – это общий рисунок породы, черты ее строения, определяемые способом заполнения пространства, характером сочетания между собой элементарных частиц (минералов, зерен, обломков). Текстура породы формируется с этапа накопления осадка. Возникшие в процессе осадконакопления первичные текстуры отражают состояние среды в момент накопления осадочного материала и результаты еѐ взаимодействия с осадком. Вторичные текстуры возникают в уже сформировавшейся породе при процессах диагенеза и гипергенеза.

***Структура*** осадочной породы – это особенности еѐ строения, которые определяются размером, формой, степенью однородности составных частей, а также количеством, размером и степенью сохранности органических

остатков. Элементы структуры породы формируются на протяжении всех этапов образования и жизни породы. Напомним, что для магматических пород важным диагностическим признаком был размер зерен, поэтому структуры назывались, например, крупно- или мелкозернистыми. Для метаморфических пород понятие структуры обуславливал другой важный диагностический признак – форма зерна (например, лепидо- или гранобластовая).

Важнейшим признаком, характеризующим строение осадочных пород, является их ***слоистая текстура***. Образование слоистости связано с условиями накопления осадков. Любые перемены этих условий вызывают либо изменение отлагающегося материала, либо обстановку в его поступлении, что внешне выражается в появлении слоѐв.

Слои представляют собой более или менее плоские тела, горизонтальные размеры которых во много раз больше их толщины (мощности), и отделяющиеся друг от друга поверхностями напластования. Слоистая текстура обусловлена чередованием слоѐв нескольких разностей осадочных пород и может быть вызвана резким изменением размера обломочных частиц и вещественного состава пород, либо ориентировкой осадочного материала.

Для осадочных пород характерна также ***пористая*** текстура, характеризующая степень еѐ проницаемости. По степени пористости выделяются следующие породы:

— ***микропористые***, в которых пористость незаметна на глаз, но устанавливается специальными методами;

— ***мелкопористые***, в которых можно различить мелкие частые поры;

— ***крупнопористые*** – с колебанием размера пор в пределах от 0,5 до 2,5 мм;

— ***кавернозные*** – имеют крупные поры (каверны) на месте выщелоченных раковин и остатков других организмов, а также отдельных частей горной породы.

Для однородных, преимущественно зернистых хемогенных и органогенных пород, характерны ***массивные*** текстуры.

Все несцементированные осадочные горные породы имеют ***рыхлую*** текстуру.

***Структура осадочных пород*** отражает их происхождение. Структуры осадочных пород определяются, главным образом, размером и отчасти формой слагающих их частиц. По величине обломков для терригенных горных пород выделяются следующие структуры:

- ***галечная*** (окатанные обломки) – размер обломков – 10-100 мм;
- ***щебеночная*** (остроугольные обломки) – 10-100 мм;
- ***гравийная*** (окатанные обломки) – 1-10 мм;
- ***дресвяная*** (остроугольные обломки) – 1-10 мм;
- ***псаммитовая*** – 0,1-1 мм;
- ***алевролитовая*** – 0,01-0,1 мм;
- ***пелитовая*** – < 0,01 мм;

Таблица 2.

## Классификация осадочных горных пород

| Т Е Р Р И Г Е Н Н Ы Е породы | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Рыхлые, несцементированные | | | Сцементированные | Размер, мм |
| псефиты | неокатанные | окатанные | Конгломераты | > 10 |
| | Глыбы, щебень Дресва | Валуны, галечники Гравий | Гравелит | 1-10 |
| псаммиты | | Песок | Песчаник | 0,1-1 |
| | | | песчаник мелкозернистый | 0,1-0,25 |
| | | | песчаник среднезернистый | 0,25-0,5 |
| | | | песчаник крупнозернистый | 0,5-1,0 |
| пелиты | Алевриты | | Алевролиты | 0,01-0,1 |
| | Глины | | Аргиллиты | <0,01 |

| О Р Г А Н О Г Е Н Н Ы Е породы | |
|---|---|
| Название | Химический состав |
| Известняки, мел | $CaCO_3$ |
| Доломит | $Ca, Mg(CO_3)_2$ |
| Опоки, трепела | $SiO_2 \cdot n H_2O$ |
| Сапропеллиты, торф, угли | Органические соединения углерода |

| Х Е М О Г Е Н Н Ы Е п о р о д ы | | |
|---|---|---|
| Название | | Химический состав |
| Соли галоидные: | **галит** | $NaCl$ |
| | **сильвин** | $KCl$ |
| Соли сернокислые: | **гипс** | $CaSO_4 \cdot 2 H_2O$ |
| | **ангидрит** | $CaSO_4$ |
| Соли фосфатные: | **апатит** | $Ca_3(PO_4)_3$ |
| Бурые железняки | **лимонит** | $FeO \cdot n H_2O$, $Fe(OH)_2$ |
| | **гематит** | $Fe_2O_3$ |
| Бокситы | | $Al_2O_3 \cdot n H_2O$, $Al(OH)_3$ $AlO(OH)$ |

Для хемогенных пород (известняки, доломит, гипс) характерна кристаллически-зернистая структура. В зависимости от размера слагающих породу зерен выделяют крупнозернистую (преобладают зерна величиной 1,0- 0,5 мм), среднезернистую (0,5-0,25 мм), мелкозернистую (0,25-0,1 мм), иногда выделяют разнозернистую, когда порода плохо отсортирована.

***Оолитовая*** структура наблюдается в случаях, когда в породе в массовых количествах присутствуют мелкие шаровидные стяжения (оолиты) различного размера (боксит, оолитовый известняк).

Структуры пород, в составе которых большое участие принимают остатки организмов (свыше 20-30 % объема породы), определяются степенью сохранности этих останков и их количеством. Выделяются следующие структуры: ***биоморфная*** – в случае хорошей сохранности скелетных остатков организмов; ***детритовая*** – порода почти полностью состоит из скелетных обломков размером крупнее 0,1 мм.

Осадочные породы имеют самую разнообразную окраску и оттенки. При этом иногда окраска является признаком, характерным для определения этих пород и зависит от: 1) – окраски минералов, слагающих пород, 2) – окраски рассеянных в породе примесей и цемента и 3) – цвета тончайшей корочки, часто обволакивающей зерна составляющих породу минералов. Белый и светло-серый цвета обычно обусловлены окраской главных минералов осадочных пород (кварца, каолинита, кальцита, доломита и др.) и свидетельствует до некоторой степени о чистоте породы. Темно-серый и черный цвета чаще всего появляются в результате примеси углеродистого вещества и, реже, оксидов и гидрооксидов марганца. Красный и розовый цвета связаны с примесью в породе оксидов железа, а зеленый цвет зависит от примеси закисного железа и присутствия минералов с зеленой окраской – чаще глауконита, реже хлорита и малахита.

## Основные разновидности осадочных пород

### *Терригенные породы*

Грубообломочные породы (псефиты) в зависимости от размера и формы обломков подразделяются на:

— глыбы и валуны, имеющие соответственно угловатые и окатанные обломки размером свыше 100 мм в поперечнике;

— щебень и галечник – угловатые и окатанные обломки размером от 100 до 10 мм в поперечнике;

— дресву и гравий – угловатые и окатанные обломки размером от 10 до 1 мм в поперечнике.

*Окатанность* материала свидетельствует о длительности времени и дальнем пути переноса обломков от места разрушения породы до места аккумуляции, не окатанные обломки – о кратковременности и незначительных расстояниях переноса.

*Сцементированные* породы, состоящие из окатанных, округленных обломков, размеры которых превышают 10 мм – называются **конгломераты**; соответственно порода, состоящая из не окатанных, угловатых обломков крупнее 10 мм, называется **брекчией**. Гальки в конгломератах состоят из магматических, метаморфических и осадочных пород, цементом служит

песчано-глинистый, известково-глинистый, карбонатный, кремнистый или иной материал. Возможно выделение олигомиктовых конгломератов, характеризующихся существенно кварцевым составом галек (белый жильный кварц, кварциты) и полимиктовых конгломератов, где гальки имеют разнообразный состав. Брекчии обычно обладают однообразным составом обломков и цементирующего материала.

**Гравелиты** слагаются обломками различных пород и, реже, минералов с преобладающим размером обломков 1-10 мм. Цемент – карбонатный, карбонатно-глинистый или песчано-глинистый.

Практическое применение грубообломочные породы находят в дорожном строительстве, при отсыпке железнодорожного балласта и изготовлении бетона, иногда используются в строительстве как декоративный материал (некоторые разности брекчий и конгломератов). Иногда грубообломочные породы содержат ценные полезные ископаемые (золото, уран и др.).

**Песчаные породы** (**псаммиты**) состоят из зерен, размеры которых составляют 0,1-1 мм, и представлены **песками** и **песчаниками.** Первые сложены несцементированными скоплениями обломков, вторые – сцементированные обломками той же величины. В зависимости от размера обломков выделяются крупнозернистые (0,5-1 мм), среднезернистые (0,25-0,5 мм) и мелкозернистые (0,1-0,25 мм) пески и песчаники. В породах существенно преобладает кварц, далее идут полевые шпаты, слюды, халцедон, глауконит, а также глинистые минералы, Цементирующая часть песчаных пород чаще всего представлена глинистым материалом и кальцитом, реже – доломитом, опалом, оксидами железа.

Мономинеральные песчаные породы состоят в основном из кварца, полимиктовые пески и песчаники состоят из зерен различных минералов (кварца, полевых шпатов, слюды).

Пески и песчаники имеют широкое применение для получения кирпича и бетона, а также в дорожном строительстве. Кварцевые пески и песчаники служат сырьем для получения динаса, оконного стекла, в литейном и керамическом производстве.

**Пылеватые породы** (**алевриты**) состоят из зерен, имеющих размер 0,1-0,01 мм. Рыхлые скопления таких обломков называются **алевритами**, а сцементированные – **алевролитами**. Минеральный состав обломочной части примерно такой же, как и в песчаных породах, но здесь выше доля устойчивых минералов – кварца, мусковита, халцедона. Характерными компонентами их являются частицы глинистых минералов и хлорит. Цементами алевролитов служат кремнисто-глинистая, хлорит-глинистая масса, карбонаты и гидрооксиды железа.

Наиболее характерным представителем является лесс.

**Лесс** – светлая палево-желтая легкая однородная порода, обычно слабо сцементированная, состоящая, главным образом, из частиц кварца и, меньше, полевых шпатов с примесью глинистых частиц и карбонатов. Наличие

последних легко обнаруживается с помощью соляной кислоты, от которой лесс «вскипает».

**Алевролит** – сцементированная порода различной окраски, алевролитовой структуры, часто имеет тонкослоистую текстуру с горизонтальной или косой слоистостью. Окраска породы определяется преимущественно окраской цементирующего материала (глинистыми минералами). Характерной особенностью алевролитов является шероховатость пород в изломе, что определяется размером (0,1-0,01 мм) обломочных зерен.

**Глинистые породы** состоят из мельчайших (< 0,01 мм) кристаллических и аморфных частиц различных глинистых минералов, в меньшей степени, из зерен хлоритов, оксидов и гидроксидов алюминия, глауконита, опала, кварца и других минералов – продуктов химического разложения горных пород в поверхностных условиях. Образование глинистых пород происходит в результате химических процессов, ведущих к накоплению глинистых минералов, и одновременном переносе мельчайших частиц.

**Глины** – это легко размокающие породы. В сухом состоянии являются или землистыми, рыхлыми, легко растирающимися в порошок, или плотными крепкими агрегатами с землистым или раковистым изломом, имеющими микропористую текстуру. В состав глин входят различные минералы, поэтому окраска глин разнообразна и зависит как от состава глин, так и от примесей.

Каолинитовые глины или **каолины** имеют преимущественно белый или светло-серый цвет, монтмориллонитовые или **бентониты** – светло-серый или с желтоватым, или с зеленоватым оттенком, гидрослюдистые – от белой до зеленой или пестрой окраски.

Глины являются ценным сырьем для изготовления фарфора, фаянса, огнеупорного кирпича и др.

**Аргиллиты** – уплотненные в процессе диагенеза глины. Обладают землистым или раковистым изломом. Цвет может быть различным, чаще всего, это серые или темно-серые породы. По минеральному составу это преимущественно гидрослюдистые породы с примесью кварца, полевых шпатов, слюд и др.

**Мергели** – породы смешанного состава, состоящие из кальцита и на 45-75 % из глинистых частиц. Мергели образуются в морских бассейнах, лагунах и пресноводных озерах при одновременном поступлении глинистого и карбонатного материала. В зависимости от содержания глины различают известковистый аргиллит, мергель и глинистый известняк. По внешнему виду это плотная и однородная порода белого, серого, желтоватого цвета. Вскипает при взаимодействии с соляной кислотой, оставляя желтые пятна за счет концентрации на месте реакции глинистых частиц. Мергели широко применяются в цементной промышленности.

Отмеченные продукты настолько часто представляют собой смешанные образования, что их разделение иногда не представляется возможным. Поэтому они рассматриваются под общим названием.

**Известняки** – наиболее распространенные карбонатные породы. Это обычно мономинеральные породы, состоящие из кальцита. Наиболее типичный признак известняков – интенсивная реакция с соляной кислотой. Цвет их обычно светлый-белый, светло-желтый, светло-серый. Интенсивность окраски определяется присутствием органического вещества. У них обычно *массивная* и *слоистая* текстуры. Структура ***биоморфная, детритовая, биогенно-шламовая, зернистая***.

По генетическим признакам выделяют: 1) органогенные известняки, образующиеся из скоплений раковин, их обломков, скелетов кораллов, внутренних слепков, сложенных кальцитом; 2) хемогенные известняки с характерной оолитовой структурой, пористой текстурой, образующиеся за счет реакций осаждения; 3) обломочные известняки, состоящие в основном из обломков известняков или ракушек в различной мере окатанных.

**Мел** – специфическая карбонатная порода, состоящая из кальцита. Окраска породы белая, иногда с сероватым или буроватым оттенком. Мел непрочен, легко поддается обработке ножом, стеклом, пачкает руки, высоко порист (до 40-50 %). Порода интенсивно «вскипает» при взаимодействии с соляной кислотой. Основная составная часть породы – органические остатки (раковинки фораминифер, остатки известковых водорослей). Структура мела ***пелитоморфная.***

**Доломиты** внешне сходны с известняками, но основной составной частью их является минерал доломит. Окраска доломитов преимущественно светлая, серая, кремовая, зеленовато-серая. Структура ***мелко-*** и ***тонкозернистая,*** текстура ***массивная*** и слабо выраженная ***слоистая.***

Карбонатные породы широко используются в различных отраслях промышленности: для производства цемента, в виде флюса при выплавке металлов, для известкования кислых почв и др.

**Опоки** – твердые породы белого, серого до черного цвета, часто обладающие раковистым изломом. Состоят из мельчайших округлых стяжений (глобулей) опала. Окраска пород в целом более темная, чем у трепелов – от серой до темно-серой и черной.

**Трепелы** – породы, состоящие из мельчайших зернышек опала, скрепленных опаловым цементом. Трепел может быть рыхлым, компактным, плотным и пористым. Цвет от белого, сероватого до желтовато-серого.

**Опоки и трепелы** – кремнистые породы, в значительной части состоят из опала $SiO_2.nH_2O$ и халцедона $SiO_2$. Содержание этих минералов в породах составляет от 50 до 98 %.

Кремнистые породы применяются как теплоизоляционные, строительные и фильтрационные материалы, как наполнители, катализаторы, адсорбенты.

**Каустобиолиты** образуются из остатков растительных или животных организмов, преобразованных под влиянием различных геологических факторов и способных гореть на воздухе.

**Торф** представляет собой скопление относительно малоизмененных останков растительных тканей, образующихся в условиях болот. Это более или менее рыхлая бурая или черная гумусовая масса, содержащая в большем или меньшем количестве видимые останки растительности (листья, стебли, корни, древесину, мох), высушенный торф обычно рыхлый, легкий.

**Каменные уголь** – порода черного цвета, хрупкая, пачкающая руки. Излом раковистый. Образуется, в частности, при преобразовании торфа в результате химического процесса его изменения (углефикации). Большинство углей обладает хорошо выраженной слоистостью. В зависимости от степени преобразования в них могут сохраняться следы растительных тканей, либо они могут состоять из однородной, практически бесструктурной матовой массы.

**Каустобиолиты** широко используются как промышленное топливо, а также в качестве сырья для химической промышленности.

**Соли галлоидные. Каменная соль**. Главная составная часть ее – **галит** (NaCl). Окраска породы светло-серая, белая, но иногда может быть красной, черной или синей. Структура породы ***кристаллически-зернистая***, текстура ***массивная*** или ***слоистая.*** Характерный диагностический признак – соленый вкус.

Каменная соль используется в пищевой промышленности для сохранения скоропортящихся продуктов и как приправа к пище. Взрослый человек в течение года потребляет 6 кг соли.

**Калийная соль (сильвинит)** – наиболее распространенная калийная соляная порода. Состоит из **сильвина** (KCl), обычно с существенной примесью карналлита (KCl, $MgCl_2$ .$6H_2O$) и галита. По характеру окраски выделяются красные и пестрые сильвиниты. Текстура их ***слоистая, массивная***, структура ***разнозернистая*** с преобладанием ***мелко-*** и ***среднезернистой.***

Основным потребителем калийных солей является сельское хозяйство, где калий применяется для удобрения почвы. Остальное количество калийных солей потребляется химической промышленностью, выпускающей несколько продуктов, в которых основной составной частью является калий.

**Соли сернокислые. Гипс** – мономинеральная порода, состоит из минерала гипса. Окраска породы светлая: белая, кремовая, реже серая или бурая. Структура ***мелко-*** и ***среднезернистая***, текстура ***массивная***, реже ***слоистая.*** Порода невысокой твердости, царапается ногтем.

**Ангидрит** имеет также светлый, голубовато-серый, серый, белый цвета. Плотность его выше, чем у гипса, поэтому по удельному весу он легко отличается от последнего. Отчетливо фиксируется различие по твердости (породы ногтем не царапается). Структура ангидрита ***средне-*** и ***мелкозернистая,*** текстура ***массивная*** и ***слоистая.***

Гипсы и ангидриты используются в строительстве для приготовления вяжущих материалов – алебастра, формовочного гипса и др., а также в производстве серной кислоты, бумаги, в медицине.

**Соли фосфатные**. **Фосфориты** – довольно распространенная порода, образование которой связано с гибелью, разложением и химической переработкой останков морских организмов. Это осадочные горные породы более чем на 50 % состоящие из фосфатов кальция. Окраска фосфоритов обычно темная, серая, черная, коричнево-серая и зеленовато-серая определяется, главным образом, присутствием органического вещества, сульфидов железа и глауконита. Встречаются и светлоокрашенные разности.

Фосфориты являются сырьем для производства фосфорных удобрений для сельского хозяйства.

**Бурые железняки**. Образование железистых и марганцевых пород, содержащих минералы железа и марганца (оксиды, гидроксиды и карбонаты) и являющи**х**ся рудами, связывается обычно с выветриванием богатых этими минералами горных пород. Из них в процессе диагенезе возникают морские, озерные, болотные и другие руды.

Бурые железняки обладают бурой окраской различных оттенков до черной и сравнительно большой плотностью. Характерна ***оолитовая, землистая, конкреционная, натечная*** структура, ***пористая*** текстура. В составе бурых железняков преобладают минералы – оксиды и гидроксиды железа: гетит, гидрогетит, лимонит, гематит.

**Глауконитовые песчаники** – глауконит-железистая разновидность гидрослюды характерного ярко-зеленого цвета, является аутигенным минералом морских бассейнов нормальной солености. Для глауконита характерно образование округлых комочков размером 0,2-0,4 мм. Песчаники, содержащие округлые зерна глауконита, называют глауконитовыми. Структура породы ***псаммитовая***, текстура слабо выраженная ***слоистая.***

**Бокситы** состоят преимущественно из минералов **-** гидрооксидов алюминия: гидраргиллита, диаспора и бемита, а также постоянной примеси гидроксидов железа. Цвет бокситов буровато-красный, кирпично-красный, охряно-желтый, серый. Встречаются в виде землистых или оолитовых масс.

Бокситы – основная руда для получения алюминия, кроме того, используются для получения огнеупоров, абразивов и в качестве химического сырья.

**Вулканические туфы**, генетически связаны с магматическими процессами, по условиям образования и внешнему облику относятся к осадочным горным породам. Продукты вулканических извержений, выброшенные в атмосферу, падают на землю и становятся обычными обломками. Этот материал в процессе диагенеза превращается в горные породы – туфы. Текстуры туфов слабо выраженные ***слоистые, пористые***. Структура определяется размерностью обломочного материала. Состав туфов – обломки вулканических пород, минералов, вулканического стекла.

# 3. ОПИСАНИЕ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МАРШРУТОВ

Ниже приведено описание ряда геологических маршрутов в окрестностях г. Екатеринбурга, представляющих наибольший интерес для студентов специальности «Защита в чрезвычайных ситуациях». Большинство из них расположены в пределах городской черты, и лишь некоторые – за ее пределами. Участки характеризуются разнообразием геологического строения, а также опасными потенциальными угрозами. За отведенное для практики время предполагается проведение пяти-шести экскурсий.

## 3.1. По Уктусскому массиву

Нечасто встречаются геологические массивы, в развитии и преобразовании которых принимают участие различные эндогенные и экзогенные процессы.

Наиболее интересными из таких является ***Уктусский дунит-клинопироксенит-габбровый массив,*** который расположен на южной окраине Екатеринбурга и слагает денудационную возвышенность с относительным превышением около 60 м над уровнем р. Исеть. Массив площадью около 50 км$^2$ имеет в плане овальную форму, слегка вытянут в меридиональном направлении и залегает среди вулканогенно-осадочных толщ предположительно силурийского возраста.

Массив слагают интрузивные породы – пироксениты, дуниты и габбро. Дуниты образуют три обособленных тела – южное, центральное и северное. Габбро отделены от дунитов полем пироксенитов и слагают восточную часть массива (рис. 10).

В пределах описываемого участка проявляются также многочисленные экзогенные процессы и их продукты. Особенностью строения данного участка является широкое проявление процессов речной деятельности с развитием разных типов террас.

### Описание маршрута

Маршрут начинается в пос. Уктус, на правом берегу р. Исети, в устьевой части р. Патрушихи, у каменного моста, сложенного из бутового камня, памятника архитектуры начала XIX в. (троллейбусная остановка «Уктус»).

Поселок Уктус был основан вокруг казенного железоделательного завода (одновременно с Алапаевским, Каменским и др.) в 1704 г., когда для войны со шведами Петру I потребовалось большое количество металла для пушек.

**Т.Н. 1.** В 500 м выше каменного моста сохранились остатки плотины пруда Уктусского завода. Место для пруда было выбрано весьма удачно. Здесь река имеет широкую (300-400 м) корытообразную долину с крутым скальным правым берегом и терасированным высоким левым берегом, где разместились

цеха завода (ныне лифтостроительный) и основные гражданские постройки поселка Уктус.

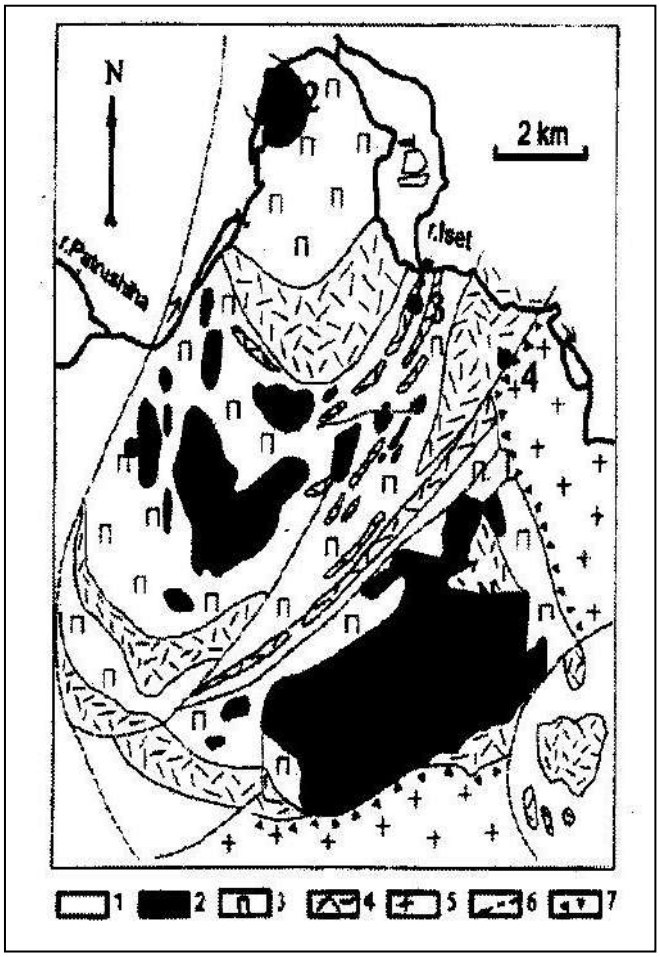



Рис. 10. Схема геологического строения Уктусского дунит клинопироксенит-габбрового массива.

*1 – вмещающие вулканогенно-осадочные и метаморфические породы палеозоя; 2 – дуниты; 3 – клинопироксениты и верлиты; 4 – оливиновые и амфибол-пироксеновые габброиды;5 – гранитоиды; 6 – тектонические нарушения; 7 – зоны развития эруптивных гипербазит-гранитных брекчий*

Скальные выходы сложены породами черного, темно-зеленого цвета средне- и крупнозернистой структуры, массивной текстуры, по составу представлены слабо серпентинизированными пироксенитами и перидотитами.

В настоящее время, когда воды пруда спущены, хорошо просматривается строение русла, которое можно описать. Можно также построить поперечный профиль р. Патрушихи в районе развилки автомобильных дорог.

**Т.Н. 2.** На данном участке русло реки делает меандрирующий (извивающийся) изгиб**,** обусловленный зонами дробления и выветривания в тектонических нарушениях. С этой точки хорошо видны надпойменные террасы левого берега, представленные эрозионно-аккумулятивным типом, верхний плодородный слой которых жители используют под огороды.

В пойменной части отчетливо выделяются пойменные и старичные отложения. На берегу реки можно видеть отложения русловой отмели и береговой вал. Экскурсанты составляют поперечный профиль реки.

Следует обратить внимание, что профиль реки асимметричный: левый борт пологий, а правый крутой. В случае аварийного спуска воды из Елизаветинского пруда могут пострадать строения, находящиеся в пойме реки на левом берегу. Поэтому строить объекты на левом берегу не рекомендуется.

**Т.Н. 3.** Карьер по разработке дунитов, которые в 50-е гг. XX столетия добывали в качестве сырья для получения магнезиальных огнеупоров. Размеры 60х30 м, борта отвесные, высота до 12 м. Выработкой вскрываются дуниты черного цвета с зеленоватым оттенком, массивные, мелко- и среднезернистые. С поверхности породы выветрелые, из-за чего их цвет становится светло-коричневым. Толщина корки выветривания 1-2 см. Окраска корочки выветривания обусловлена наличием глинистого минерала – керолита и гидрокарбоната магния. Дуниты разбиты густой сетью тектонических трещин.

По плоскостям некоторых трещин развита серпентинизация с образованием корок толщиной до 0,5 см. Серпентин светло-желто-зеленый. На плоскостях трещин видны борозды скольжения и уступчики, по которым участники экскурсии могут определить направление перемещения блоков.

На этой точке наблюдения можно сделать зарисовки одной из стенок карьера и произвести массовый замер для последующего построения диаграммы трещиноватости. Студентам напоминают устройство горного компаса, учат пользоваться им при определении элементов залегания пород и трещин.

По ходу движения к следующей точке наблюдения маршрут проходит у подножия техногенного отвала, образованного при строительстве трассы большого лыжного трамплина, и вдоль старицы р. Патрушихи. Здесь внимание участников экскурсии акцентируется на гравитационной дифференциации техногенного делювия (от лат. Deluer – смывать).

**Т.Н. 4.** Карьер размером 35х45 м с высотой бортов до 15 м. Карьером вскрыты те же дуниты**,** что и в Т.Н. 3. На этой точке наблюдения можно произвести хорошие зарисовки обнажения и набрать дополнительный материал для статистического измерения трещиноватости. Трещины более пологие и в верхней части имеют куполообразный изгиб. По некоторым плоскостям трещиноватости развивается корочка серпентинитов, что может способствовать перемещению больших блоков при искусственной встряске или при землетрясении. Необходимо обратить внимание студентов на то, что борта карьера в Т.Н. 3 почти вертикальные, а в Т.Н. 4 – не более 30 градусов. Пологие борта обусловлены соответствующей системой трещин. Рекомендуется сделать массовые замеры трещиноватости с последующим обобщением результатов.

**Т.Н. 5.** Выше по течению р. Патрушиха запружена. Выше плотины расположен Ново-Елизаветинский пруд. Водохранилище, к сожалению, затопило практически полностью старые песчано-глинистые карьеры кирпичного завода**.** Карьеры вскрывали аллювиальные (от лат. alluvio – нанос) отложения первой и второй надпойменных террас, в которых были найдены кости и бивни мамонтов, шерстистых носорогов и других животных, часть из которых можно видеть в экспозиции Уральского геологического музея. Разрез террасы можно наблюдать в западном борту пруда, у самой плотины. Возле плотины можно видеть небольшое зарастающее озерко, по-видимому, имеющее старичное происхождение. Здесь же можно проследить начальную стадию процесса торфообразования. Сама плотина имеет длину более 100 метров. Ее

восточная часть упирается в плотные магматические породы, а западная – в рыхлые песчано-глинистые отложения, что может быть причиной ее подмыва, если контакт недостаточно надежно закреплен.



Рис.11. Забой во 2-м дунитовом карьере

**Т.Н. 6.** На крутом склоне реки (Ново-Елизаветинского пруда) небольших размеров коренные выходы перидотитов**.** Горные породы темного цвета, чаще полосчатые или рассланцованные, реже массивные, мелко- среднезернистые. Пространство между коренными выходами задерновано, но геологическим молотком можно вскрыть растительный слой и докопаться до делювия, представленного остроугольными обломками перидотитов и сцементированных глинистой породой темно-зеленого цвета.

**Т.Н. 7.** Коренные гребневидные выходы пироксенитов на берегу водоема. Горные породы от черного до темно-зеленого цвета, средне- и крупнозернистые, массивные. В обнажении хорошо наблюдаются тектонические трещины различных направлений, элементы, залегания которых легко измерить.

Отчетливо видно, что пироксениты имеют высокую механическую устойчивость, чего нельзя сказать о перидотитах в предыдущем обнажении, которые образуют значительно сглаженные небольшие выходы.



Рис.12. Ново-Елизаветинский пруд. На противоположном берегу видны выходы пород Камышловской террасы

**Т.Н.** 8. Двигаясь дальше по тропе вдоль берега пруда до места впадения реки, наблюдаем практически непрерывно коренные скальные выходы, чаще гребневидного характера, пироксенитов, довольно сильно трещиноватых.

Особенностью данного участка горного массива является появление хорошо выраженной трещиноватости уже северо-восточного направления, что проявляется в тектонических ограничениях выходов пород и ориентировке логов и оврагов на склоне массива.

Северо-западное направление тектонических нарушений выражается здесь в спрямленных субпараллельных участках меандрирующей реки и частично в образовании оврагов на склоне.

**Т.Н. 9.** Маршрут переходит по склону на хребет Уктусского габбро-пироксенит-дунитового массива, по которому прорублена меридиональная просека. Двигаясь на юг по ходу маршрута, встречаем коренные выходы преимущественно пироксенитов. Породы черного, темно-зеленого цвета, массивной текстуры, крупнозернистой структуры, состоят преимущественно из пироксена с небольшим количеством оливина.

Хребтовая часть массива представлена чередованием небольших увалов и понижений. На вершинах этих увалов пироксениты образуют гребневидные выходы с тектоническими ограничениями северо-восточного простирания и углами падения 80-90 °.



Рис. 13. Крупный лог на западном склоне Уктусского массива, сформированный вдоль тектонического нарушения

В понижениях на хребте постоянно наблюдаются родники, которые свидетельствуют о заложении этих понижений на зонах трещиноватости, по которым циркулируют трещинные воды. Можно определить дебит (расход воды) источников, вкусовые качества воды.

Подытоживая маршрут, преподаватель делает акценты на потенциально возможном развитии на участке природных угроз. Сюда относится возможность прорыва плотины Елизаветинского пруда, суффозионных процессов вдоль русла реки с рыхлыми отложениями, подтопления построек на пойме реки, обвалов техногенного делювия с крутых склонов. При знакомстве с зеркалами скольжения преподаватель показывает механизм реализации тектонических движений, которые протекают и в новейшее время.

### 3.2. Елизаветинское месторождение

Маршрут начинается в пос. Рудном (куда доставит автобус № 17). На юго-западной окраине поселка размещается Елизаветинское месторождение природно-легированных бурых железняков. Месторождение было открыто в 1829 г. и отрабатывалось около 150 лет.

На месторождении рудоносной является кора выветривания в различной степени серпентизированных дунитов.

По генезису кора выветривания остаточная.



По морфологии – площадная, с линейными участками заглубления, развитыми по тектоническим нарушениям, образующими значительное количество глубоких карманов в палеозойском фундаменте.

Общая мощность элювиальных (от лат. eluo – вымываю) отложений колеблется от 5 до 80 и более метров, в среднем составляет 30-40 м.

Считают, что древний элювий сформировался в юрско-меловое время и отвечает тропическому или субтропическому, теплому и влажному климату.

Наиболее полно профиль коры выветривания описан А. Л. Яницким (1965), который приводит его в таком виде (снизу вверх):

1) зона дезинтеграции в различной степени серпентинизированных дунитов;

2) зона выщелачивания, сложенная карбонатизированными, слабо нонтронитизированными дунитами и аподунитовыми серпентинитами (мощность 1-5 и более метров);

3) зона охр представлена охристыми порошковатыми глинистыми рудами и кремнисто-железистыми породами.

***Зона дезинтеграции*** серпентинизированных дунитов**.** Дуниты*,* обнажающиеся в основании и по бортам карьера, мелко- или тонкозернистые, плотные. Крепкие, иногда почти свежие или слабо выветрелые дуниты наиболее полно вскрыты в щебеночном карьере в 200 м к западу от основного карьера.

Породы по тектоническим трещинам разбиты на блоки и практически превращены в щебень. По плоскостям трещин нередко можно видеть зеркала скольжения, свидетельствующие о тектонических перемещениях отдельных блоков.

В южном борту карьера можно в миниатюре увидеть всю зональность химического выветривания с образованием зон выщелачивания.

***З о н а  в ы щ е л а ч и в а н и я*** . Дуниты и серпентинизированные дуниты, как у поверхности, так и на глубине вдоль зон тектонических нарушений в разной степени подвергались процессам выветривания. Процессы выветривания выразились в разложении и выщелачивании материнских пород, в их карбонатизации, частичной нонтронитизации и керолитизации. Породы в большей части сохраняют основные черты первичной структуры материнских пород, в некоторых случаях эти породы могут переходить в кавернозно-пористые образования различной крепости.

Под влиянием процессов выветривания породы принимают зеленовато-серую или серовато-белую окраску, иногда с бурыми, желтыми или черными пятнами. Эта пестроцветная окраска обусловлена скоплениями различных минеральных агрегатов: магнезита, кальцита, нонтронита, керолита, минералов марганца и др.

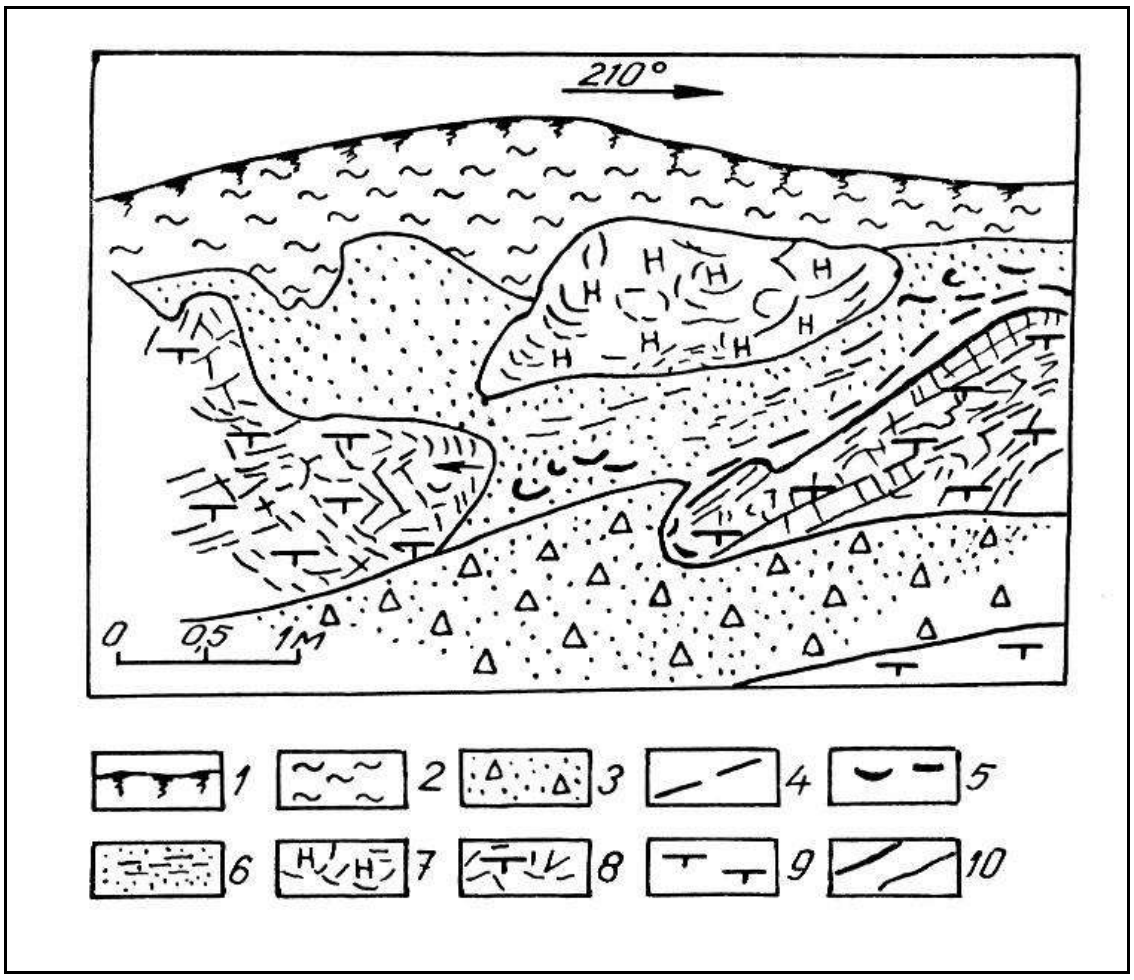



Рис.14. Карман коры выветривания серпентинизированных дунитов в борту щебеночного карьера (Елизаветинское месторождение).

*Условные обозначения: 1 – почвенно-растительный слой; 2 – глины, суглинки; 3 – осыпь; 4 – скопления магнезита; 5 – жеоды бурых железняков; 6 – охристые бурые железняки; 7 – нонтронитизированные серпентиниты; 8 – зона дезинтеграции дунитов; 9 – дуниты с корочкой выветривания; 10 – геологические границы.*

Тектонические трещины (сместители, разломы), многочисленные трещины отдельности, а также микропоры и пустоты, образовавшиеся вследствие выветривания и выщелачивания эндогенных минералов, выполнены преимущественно магнезитом, местами кальцитом, доломитом или керолитом, кварцем, опалом с образованием их гнезд и прожилков. Мощность некоторых прожилков магнезита достигает 2-3 см и более.

Рыхлые, землистые выветрелых дунитов представляют собой породы, подвергшиеся более глубокому изменению. Они не только дезинтегрированы механически, но и разложены и преобразованы химически. Они находятся в таком состоянии, что при слабом ударе рассыпаются на мелкий щебень или сыпучую землистую массу зеленовато-серого или грязно-серого цвета. На некоторых участках поверхность щебня покрыта многочисленными мельчайшими черными дендритами марганцевых минералов, а иногда пленками карбонатов, на которых также наблюдаются ветвистые дендриты марганцевых образований.

***Зона охр*** залегает в верхней части разреза и представлена рыхлой буровато-желтой или лимонно-желтой слабо сцементированной массой, состоящей из порошковатых и комковатых образований гетита, гидрогетита, гематита, магнетита, и марганцовых минералов. Охристые порошковатые руды заполняют также имеющиеся на поверхности карманообразные и воронкообразные углубления, развитые вдоль зон тектонических нарушений и уходящие на глубину на многие метры.

Такие взаимоотношения руд с подстилающими породами можно наблюдать в основном карьере. Среди охристых руд в железорудном карьере можно наблюдать останцовые глыбы и куски выветрелых карбонатизированных дунитов и серпентинитов, выделяющихся на буром фоне серовато-зеленой окраской. Здесь же отмечаются отдельные глыбы и куски кремнисто-железистых пород желтовато-бурого или бурого цвета.

Описываемые породы относятся к природно-легированным хромоникелевым железным рудам.

В ряде мест кремнисто-железистые породы слагают значительные участки. В некоторых обнажениях они образуют скальные выступы, положительные формы рельефа, что объясняется их сравнительно высокой прочностью. В карьере студенты могут познакомиться с различными формами выветривания: физического, химического, органического.

Здесь видно как разные продукты выветривания влияют на величину естественных откосов. Уменьшение механической прочности первичных ультраосновных пород приводит к уменьшению угла откоса искусственных выработок (карьера). Рыхлые породы в результате воздействия на них талой воды очень быстро оплывают. Здесь же в карьере можно проследить процессы естественной рекультивации земель.

## 3.3. Шабровское рудное поле

Шабровский рудный район расположен в 25 км к юго-западу от г. Екатеринбурга. В пределах Шабровского рудного района (рис.15) развиты месторождения железистых кварцитов, гондитов, родонитов, мраморов, тальк-магнезитового камня, талька, декоративно-облицовочного серпентинита и золота. Все они достаточно тесно сопряжены в пространстве, часто приурочиваются к одним и тем же тектоническим структурам – шовным зонам.

Шабровское рудное поле приурочено к полосе метаморфических пород, образующих крупную Шабровскую моноклиналь с крутопадающими крыльями и разделяющих Сысертский и Шабровский массивы гранодиоритов – гранитов (рис. 15).

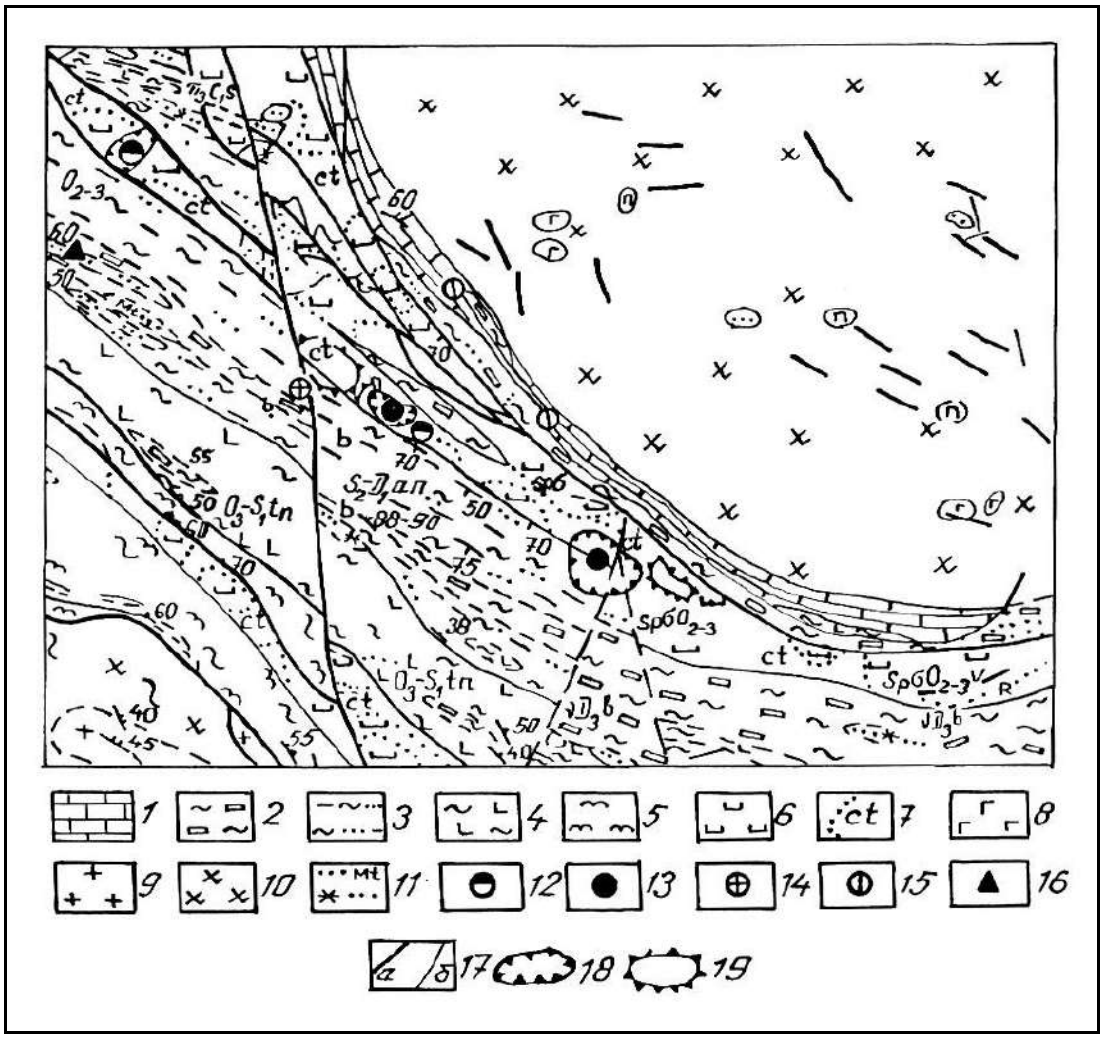



Рис. 15. Геологическое строение Шабровского рудного поля:

*1 – мраморы; 2 – сланцы преимущественно углисто-графит-кварцевые; 3 – серицит-кварцевые, филлитовидные сланцы; 4 – зеленые сланцы по афировым базальтам; 5 – кристаллические сланцы; 6 – серпентиниты; 7 – тальк-карбонатные породы; 8 – габбро; 9 – граниты; 10 – гранодиориты; 11 – кварциты магнетит- и марганецсодержащие; 12 – 16 месторождения: 12 –антигоритовых змеевиков, 13 – тальк-магнезитового камня, 14 – золота, 15 – мрамора, 16 – железистых кварцитов; 17 границы разломов (а), стратиграфические (б); 18 – карьеры; 19 - отвалы*

Среди метаморфических толщ в Шабровском районе, по последним данным геологосъемочных работ (Г. В. Ярославцев и др., 1995 г.), выделяется четыре свиты (сверху вниз): кунгурковская ($D_1$kn), андреевская ($S_2$-$D_1$an), тенякская ($O_3$-$S_1$tn) и саитовская ($R_2$st).

Основание разреза слагают высокометаморфизованные породы **саитовской свиты** (**$R_2$st**): кристаллические сланцы мусковитовые, биотитовые и мусковит-биотитовые, часто с гранатом, частично мигматизированные; амфиболиты, участками биотитизированные, часто с гранатом, частично мигматизированные; прослои железистых кварцитов, единичные линзы мраморов. Мощность более 1000 м.

**Тенякская свита** (**$O_3$-$S_1$tn**) представлена преимущественно вулканогенными образованиями основного состава, преобразованными в зеленосланцевой и эпидот-амфиболитовой фациях регионального метаморфизма. Мощность 600-800 м. Породы свиты имеют преимущественно моноклинальное падение на СВ под углом 30-60 °. Контакт пород свиты с нижележащими образованиями саитовской свиты везде тектонический, а с породами вышележащей андреевской свиты согласный.

**Андреевская свита** (**$S_2$-$D_1$an**) развита в виде широкой полосы и ряда небольших линз в юго-западной части района. В составе свиты преобладают серицит-кварцевые (филлитовидные), хлорит-серицит-кварцевые, альбит-серицит-кварцевые, серицит-биотит-кварцевые и слюдисто-кварцитовые сланцы по алевролитам и песчаникам; углисто-графит-кварцевые сланцы; кварциты железистые, магнетитсодержащие, марганецсодержащие и углисто-графитсодержащие. Мощность свиты превышает 1700 м.

**Кунгурковская свита** (**$D_1$kn**) развита в северной части площади и представлена метаморфизованными вулканогенными и вулканогенно-осадочными образованиями. Мощность более 2000 м. Границы свиты, как нижняя, так и верхняя, повсеместно тектонические. На контакте с телами гранитоидов породы свиты ороговикованы.

Среди пород метаморфизованного вулканогенно-осадочного комплекса широко развиты протрузии гипербазитов дунит-гарцбургитовой (альпинотипной) формации, контролируемые зонами глубинных разломов. Возраст протрузий ультрабазитов 401+12 млн. лет (Пушкарев,1999), габбро, габбро-диабазов $D_{2\text{-}3}$, гранитоидов поздней фазы 312-262 млн. лет (А. А. Машаров, 1990 г.).

Тела ультрабазитов фиксируются в виде линейно вытянутого пояса, согласного с общим простиранием пород района. Все эти массивы по существу представляют собой бескорневые тектонические линзы, залегающие согласно со сланцеватостью вмещающих их метаморфизованных вулканогенных и осадочных пород. Ультрабазиты гидротермально изменены, представлены серпентинитами, тальк-карбонатными и другими породами. На Шабровском тальковом месторождении среди тальк-карбонатных пород встречаются

жильные тела талько-хлоритов и хлоритолитов (мощностью до 0,1-1,0 м). Они характеризуются повышенным (до 5-10 %) содержанием магнетита.

Формирование интрузивных тел Шабровского комплекса ($C_1$) происходило в три фазы: в первую формировались гранодиориты; во вторую – граниты и адамеллиты; в третью – мелкозернистые граниты, граниты, гранит-порфиры, лейкократовые граниты, пегматиты. Шабровский массив округлой формы занимает площадь 50-55 км$^2$. В массиве много ксенолитов, провесов кровли, что свидетельствует о незначительном эрозионном срезе. Вмещающие породы – преимущественно пироксениты и габбро.

Сложен массив среднезернистыми, часто порфировидными, биотитовыми, реже роговообманково-биотитовыми гранодиоритами. Вмещающими массив породами являются: с севера ультрабазиты и габбро Уктусского массива, с запада, юга и востока – сланцы андреевской свиты и частично вулканиты кунгурковской свиты. Мощность массива 2,0 - 2,5 км. Западный контакт массива тектонический.

Осиновский комплекс ($C_1$) сложнопостроенный, формировался в четыре фазы: 1 – кварцевые диориты, гранодиориты; 2 – мелко- среднезернистые граниты; 3 – дайки лейкократовых гранитов, пегматитов; 4 – дайки порфировидных, мелкозернистых гранитов. В объеме массива резко преобладают граниты второй фазы.

## Описание маршрута

**Т.Н. 1**. Начинается маршрут на Белоусовском месторождении благородных змеевиков, расположенном в 500 м к северу от автобусной остановки (автобус № 105). Карьер по отработке Белоусовского месторождения расположен на небольшой возвышенности в пределах поселка Шабровский. Проходка карьера проводилась с применением буро-взрывных работ, поэтому по причинам безопасности разработка месторождения остановлена.

Карьер вскрывает небольшую часть Большой линзы тальк-карбонатных пород, в зоне преимущественного развития благородных змеевиков. Здесь по художественно-декоративным свойствам выделено три разновидности змеевика - пятнистый, полосчатый и пятнисто-полосчатый.

Тальк-карбонатные породы занимают здесь не менее половины площади месторождения. Форма их залежей чрезвычайно сложная и обусловлена очертаниями пород кровли массива ультрабазитов, с одной стороны, и тел антигоритовых серпентинитов, с другой.

**Т.Н. 2.** Далее маршрут переходит на Северо-Шабровское месторождение железистых кварцитов, которое находится в районе п. Шабровского к западу от Белоусовского карьера. Месторождение в центральной части рассекается затопленным карьером после отработки Вознесенской золотой россыпи (рис. 16).

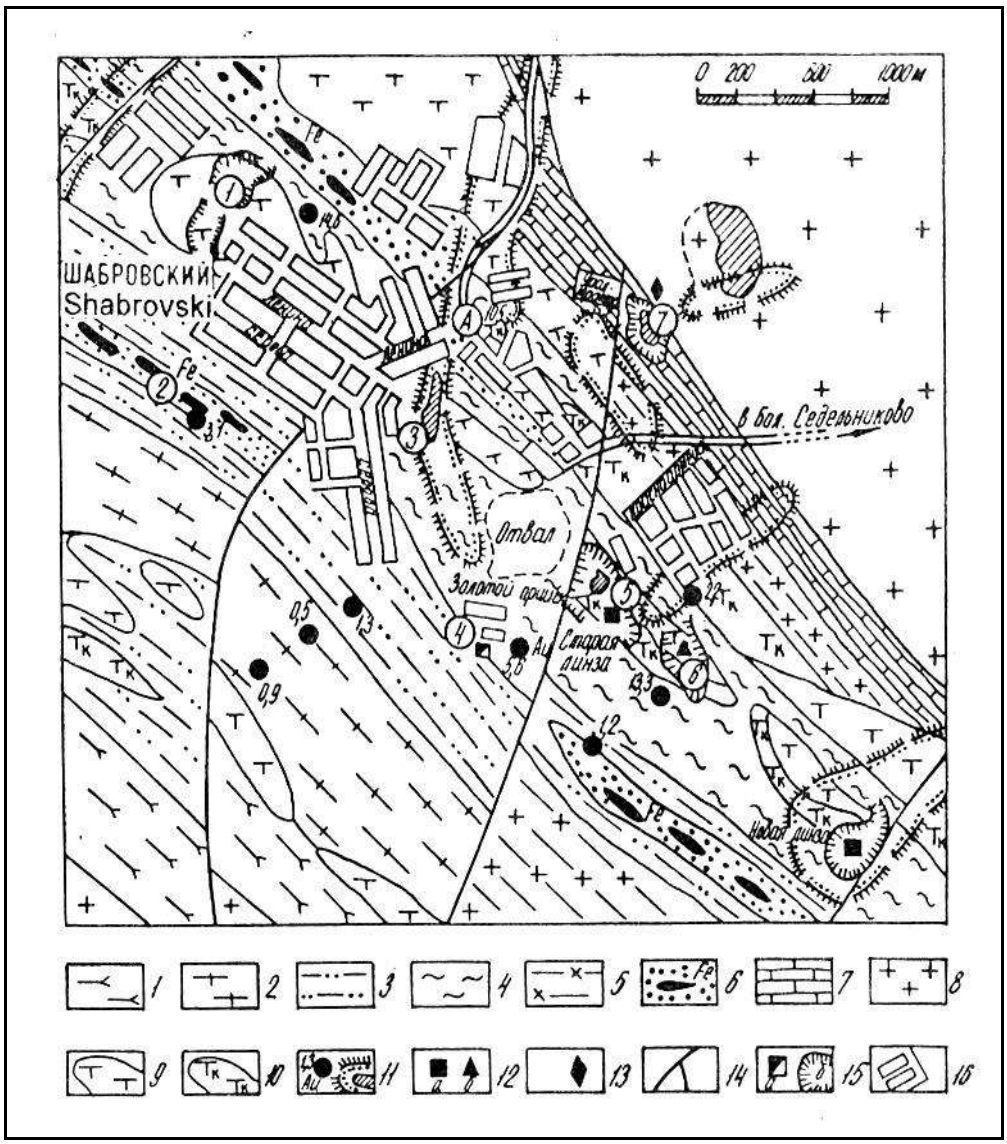



Рис. 16. Схематическая геологическая карта Шабровского рудного поля:
*1 – амфиболиты; 2 – актинолитовые сланцы; 3 – серицито-кварцевые сланцы с карбонатом; 4 – филлиты; 5 – серицит-хлоритовые сланцы; 6 – железистые кварциты; 7 – мраморы; 8 – гранодиориты; 9 – серпентиниты; 10 – тальк-карбонатные породы; 11 – золотопроявления и контуры россыпей; 12 – месторождения талька (а) и змеевиков (б); 13 – месторождения мрамора; 14 – тектонические нарушения; 15 – шахта (а) и контуры карьеров (б); 16 – поселок Шабры*

При отработке россыпи старатели породы вскрыши укладывали в узкие отвалы, которые расположены по бортам карьера. Взяв пробы песчано-глинистого материала с днища россыпи в западной сухой части выработки, где раньше размещалась промывальная установка, промываем их здесь же в карьере. Увидеть мелкие знаки золота в ковше – обычное дело.

От Вознесенской россыпи по бетонному тротуару перемещаемся в южном направлении к тальковой обогатительной фабрике, посещение которой можно предусмотреть в программе экскурсии, далее по асфальтовой дороге к карьеру тальк-магнезитового камня «Старая линза».

По возрасту выросших на отвалах деревьев студенты могут определить время отработки россыпи, а также наблюдать регуляторы естественной рекультивации открытой горной выработки.

**Т.Н. 3.** Шабровское месторождение тальк-магнезитового камня известно с 80-х годов 19-го столетия. В этот период оно отрабатывалось кустарным способом, и только возросшие потребности горно-металлургического и цементного производства в огнеупорном сырье в 1927 г положили начало планомерным разведочным работам на месторождении с последующей его механизированной эксплуатацией. Добыча тальк-магнезитового камня производилась карьерным способом со специальной технологией отработки и была прекращена в 1978 г. На момент остановки добычных работ глубина карьера составила чуть более 50 м. Буровыми скважинами месторождение разведано до глубины 200-220 м.

Производство огнеупорных тальк-магнезитовых блоков осуществлялось непосредственно в карьере машинами вертикальной и горизонтальной резки состемы А. М. Столярова. Отходы от распиловки шли на получение чистого высококачественного талька, который извлекался здесь же на обогатительной фабрике путем флотации. Подъем на поверхность нарезанных кирпичей осуществлялось с помощью трех лебедочных установок, которые в настоящее время можно видеть на бортах карьера.

Борта карьера очень крутые, а в некоторых участках с высокими вертикальными уступами (стенками), поэтому при подходе к краю этой искусственной выработки со стороны обогатительной фабрики перед исследователем открывается потрясающая панорама – идеальный срез ультраосновного массива со всеми деталями его внутреннего строения (рис. 18).



Рис. 17. Панорама карьера «Старая линза»

Маршрут по Шабровскому карьеру «Старая линза» начинается с его общего обзора (рис. 17). При спуске в карьер во вскрышных более пологих бортах выходят вмещающие породы, представленные в основном филлитовыми сланцами с тонкими маломощными прослойками мраморизованных известняков, слюдисто-кварцевых, серицит-хлоритовых и хлоритовых сланцев, с тонкими кварцевыми прожилками и будинками.

При переходе со вскрышных бортов на добычные, хорошо наблюдается северо-восточный контакт между вмещающими сланцами и продуктивным телом гипербазитов, превращенных в тальк-карбонатные породы (рис. 18). Контакт резкий, достаточно ровный с крутым, почти вертикальным падением. Участками фиксируются полости отслоения, в некоторых из них можно наблюдать разгрузку трещинных подземных вод в виде красочных водопадов. Вода пригодная для питья.

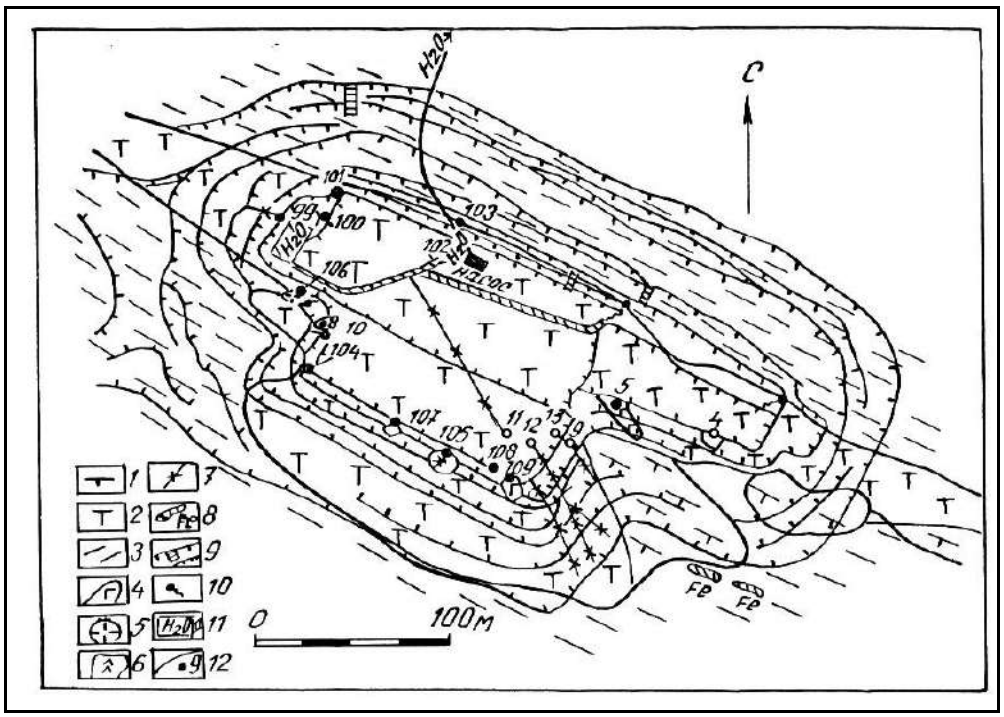



Рис. 18. Геологический план карьера «Старая линза»:
*1 – серпентиниты; 2 – тальк-карбонатные породы; 3 – филлитовидные сланцы; 4 – габброиды; 5 – плагиограниты; 6 – лиственитты; 7 – хлоритолиты по дайкам основного состава; 8 – железистые кварциты; 9 – контуры бортов карьера и лестницы; 10 – выходы трещинных вод; 11 – дренажные канавы; 12 – точки наблюдений*

Наибольшую площадь вскрытых бортов карьера «Старая линза» (см. рис. 18) занимают тальк-карбонатные породы светло-серого цвета, массивной или сланцевой текстуры. На 40-50 % порода состоит из талька и на 50-60 % из карбоната, представленного магнезит-брейнеритовой разновидностью. Из рудных минералов чаще всего встречается гематит, очень редко встречаются кристаллики магнетита и хромита. Эта порода и являлась объектом добычных работ.

В юго-восточной части юго-западной стенки карьера хорошо «отпрепарированы» две дайки основного состава, секущие массив в субмеридиональном направлении. На дневной поверхности дайки выходов скорей всего не имели и вскрываются только карьером. Габброиды имеют мелкозернистую структуру, массивную текстуру. Окраска темная, серовато-зеленая. Породы метаморфизованные и состоит из вторичного амфибола, полевого шпата, карбоната и эпидота.

В западном борту карьера вскрыто тектоническое нарушение, которое сопровождается мощными излияниями трещинных вод.

Поднявшись на поверхность, на борту карьера можно осмотреть систему лебедочного хозяйства.

При спуске в карьер следует обратить внимание на технику безопасности работы в карьерах. Крутые борта карьера обусловлены крутым падением рудного тела, углы падения в сланцах также составляют 70-90 градусов. По вскрытым тектоническим трещинам и разломам в карьере наблюдается дренирование подземных вод. Следует обратить внимание на то, что спуск по лестнице может осуществляться только небольшими партиями (не более 5 человек на одном прогоне).

Необходимо также обратить внимание студентов на осыпи и оползни на стенках карьера обусловленные просачивающимися подземными водами. Накапливаемые на дне карьера воды поднимаются трубами на дневную поверхность. Вся территория в плане обвалована по бортам карьера для предотвращения прорыва поверхностных вод, а также прохода к обрывистым бортам скота.

**Т.Н. 4.** Продолжая маршрут, по дороге, выходим на северный борт карьера «Новая линза» (рис. 19), вскрывающим крупное тело тальк-магнезитовых пород. Перед нами разворачивается панорама карьера, показывающая технологию разработки с применением буровзрывных работ, экскавации с последующей вывозкой горной массы железнодорожными составами по узкоколейке на обогатительную фабрику.

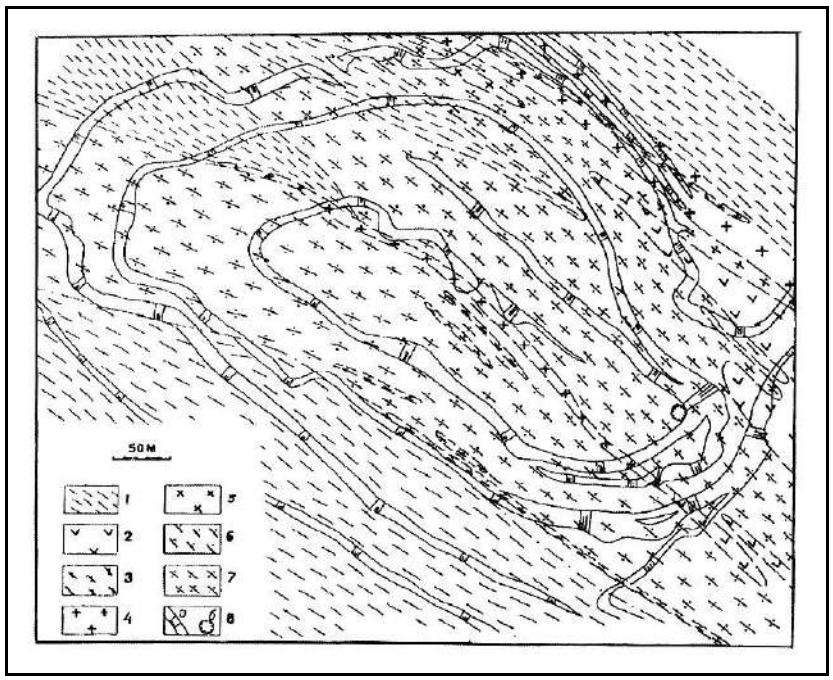



Рис. 19. Геологический план карьера «Новая линза»:
*1 – сланцы; 2 – серпентиниты; 3 – амфиболиты; 4 – плагиограниты; 5 – диориты; 6 – хлоритовые метасоматиты; 7 – тальк-карбонатные породы; 8 – карьер: а - борта, б - водосборный зумф*

Геологическое строение «Новой линзы» во многом схоже с таковым «Старой линзы». Отличие состоит в том, что здесь развиты дайки только среднего и кислого состава.

**Т.Н.5.** В западной части пос. Шабровский расположен отработанный мраморный карьер, а вблизи дороги на Б.Седельниково недавно заложен новый мраморный карьер. Он вскрывает полосу мрамора мощностью 80-90 м вдоль гранитоидов шабровской интрузии. Падение полосчатого мрамора на северо-восток под углом 70 °. Мрамор мелкозернистый, светло-серого цвета с оттенками от светло-голубого до темно-синего. Текстура неотчетливо полосчатая. Полируемость породы хорошая. В верхних горизонтах широко проявлены процессы карста. Пустоты в настоящее время заполнены глинами и бурыми железняками. На борту старого мраморного карьера расположен цех по обработке крупноблочных глыб мрамора, змеевика, гранитов и других облицовочных пород. Здесь можно ознакомиться с технологией обработки камня.

## 3.4. Шиловское месторождение

Шиловское месторождение более известно как меднорудное на восточной окраине пос. Медный (авт. № 185). Оно открыто в 1703 г. крестьянином И. Шиловым «со товарищами». Собственно Шиловское месторождение (рис. 21) расположено на краю поселка Медный, представлено карьером (35х15х10 м) и группой небольших горных выработок. В карьере обнажаются тела скарнов (в торцевой части карьера) на контакте габбро,

габбро-диоритов (забой слева) с мраморизованными известняками (правая часть карьера). Золотосодержащая медная минерализация наблюдается в маломощных зонах бортов карьера.

К северо-востоку от карьера на расстоянии нескольких сот метров по простиранию рудных скарнов размещаются еще несколько заросших карьеров со штольнями в их бортах и около десятка обрушенных шахт. Поэтому при движении по лесу необходимо соблюдать осторожность.

Шиловское месторождение локализуется в юго-восточном экзоконтакте Верхисетского массива гранитоидов. В этом экзоконтакте развиты сравнительно небольшие интрузии среднего-основного (от диоритов до габбро) состава. На контакте одного из них (Решетинского) с известняками сформировались скарны Шиловского месторождения. На контакте диоритов (реже габбро) с известняками развиты гранатовые, гранат-пироксеновые, гранат-эпидотовые скарны с магнетитом и наложенной медно-сульфидной минерализацией (Мурзин, Сазонов, 1990; Сазонов и др., 1994).

Месторождение локализовано в тектонической структуре с простиранием на северо-восток. Скарновые тела встречаются на всем протяжении этого разлома. Однако они вскрывались преимущественно шахтным способом. На современном этапе крепление шахт прогнило и поэтому горные выработки представляют большую опасность для посетителей.

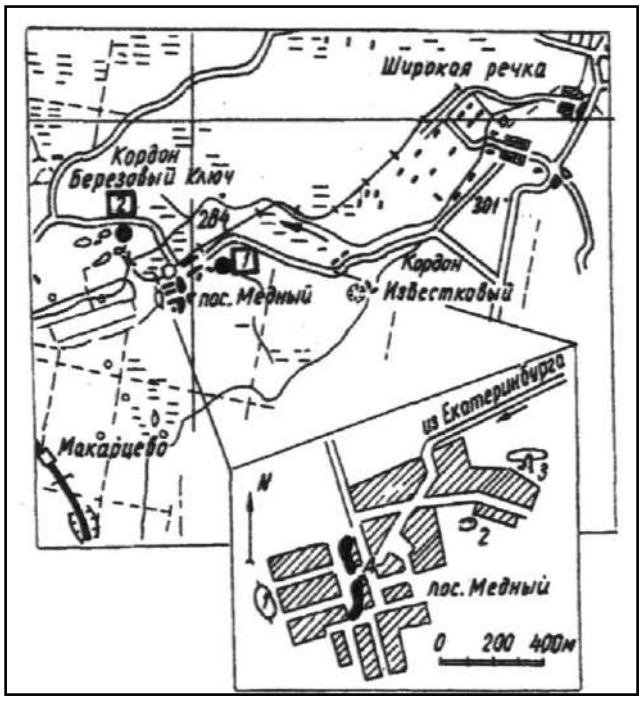



Рис. 20. Географическая схема Шиловской экскурсии:
*1 — Шиловское медно-скарное месторождение;*
*2 — Пушкинское золоторудное месторождение.*
*На врезке: 1, 2 - обнажения доступные для осмотра;*
*3 – карьер Шиловского месторождения*

Медно-магнетитовые руды отработаны практически полностью. Медно-судьфидная минерализация фиксируется в тектонических нарушениях северо-западной ориентировки, локализуясь как в скарнах, так и в пропилитизированных габбро.

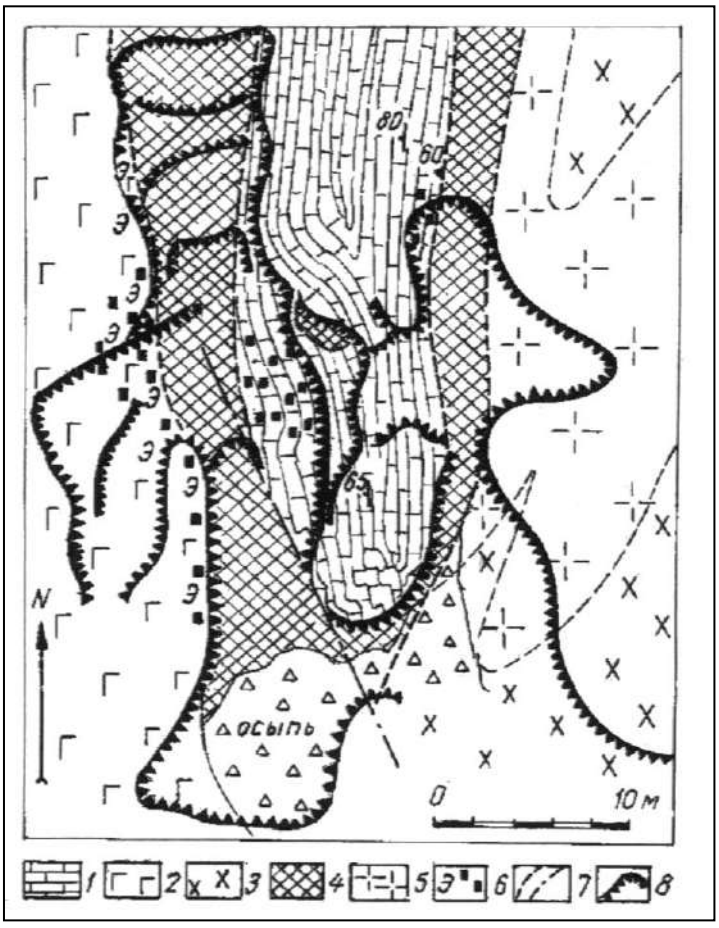



Рис. 22. Геологическая карта Шиловского месторождения:
*1 – мраморизованные известняки, участками с сульфидами (черные квадраты);*
*2 – меланократовые габбро;*
*3 – диориты;*
*4 – скарны (гранатовые, гранат-пироксеновые, гранат-эпидотовые с магнетитом и сульфидами);*
*5 – грано-диориты (иногда дайки аплитов) с участками развития кварц-серицитовых метасоматитов;*
*6 – места развития эпидотизации (э) и сульфидизации (черные квадраты);*
*7 – контакты пород и разрывные нарушения; 8 – границы карьера*

В скарнах выделяются участки перекристаллизованных эпидозитов, сложенные зеленым эпидотом и кальцитом.

Характерной для месторождения является повышенная (участками до промышленной) золотоносность руд. На окраине поселка можно видеть затопленные выработки на месте старательской отработки небольших золоторудных россыпей. Бассейн р. Шиловки, вдоль русла которой сейчас размещается крупный торфяник, является золотоносным.

Здесь, в окрестностях пос. Медный расположено одно из наиболее крупных на Урале месторождений торфа. Размер торфяника здесь достигает 20 квадратных километров, мощность достигает 6-9 метров. Торф древесно-осоковый, в кусках коричневого цвета, с остатками древесины и коры, главным образом березы, реже ольхи и ивы. Осоковыми формами сложена большая часть залежей торфяников, которые залегают непосредственно на магматических породах. Заторфовывание водоемов – одна из природных угроз для человека, она приводит к постепенному сокращению водоемов и последующему их исчезновению. Начало такого процесса несколько различается для озер с пологими и крутыми берегами. При зарастании болот с пологими берегами зарастание дна происходит в строгом порядке и зависит от глубины. На глубоких местах (2,0-2,5 м) поселяются водные лилии, на глубинах 1,0-1,5 м растут камыш и тростник, а прибрежных зонах – осоки. После отмирания этих растений на дне водоема отлагаются их остатки – стебли, корневища, листья. При этом лишь часть этих остатков разлагается, другая остается в полуразрушенном состоянии. Такое накопление растительных остатков со временем приводит к обмелению водоема. В дальнейшем более молодые растения вынуждены сдвигать свои ареалы обитания на большую глубину, отдаляясь от берега. В конце концов, все озеро высыхает, покрываясь осокой.

Несколько иной способ зарастания озер отмечается в случае наличия крутых берегов. При глубине прибрежных зон более 2,0 метров развитием пользуются растения, способные держаться на поверхности воды. Они прикрепляются ко дну у береговой линии и распространяют свои стебли далеко от берега. Переплетаясь между собой, стебли таких растений образуют прочную сеть, на которой могут развиваться другие растения-сателлиты. Питательной средой таких растений являются: растворенные в воде соли, мелкая пыль, попадающая в воду из атмосферы. Разрастание таких колоний растений приводит, в конечном счете, к полному покрытию всей водной поверхности озер. В процессе отмирания растительности происходит естественное обмеление водоемов и последующее их исчезновение. Однако при обмелении озера до приемлемых глубин в нем могут поселяться упомянутые выше растения, характерные для мелководных водоемов которые ускоряют процессы его исчезновения.

В связи с интенсивным проведением дренажных работ ранее заболоченные участки торфяников стали сухими. В летнее время, особенно в засушливую погоду, над торфяниками носится пыль, что является чрезвычайно

опасным в случае возгорания торфа. При такой большой мощности отложений торфа тушение сильно затруднено из-за возможности подземных пожаров. В настоящее время разработка торфа на участке Медном временно прекращена, за несколько лет площадь покрылась подлеском, который в определенной степени спасает торфяник от случайных пожаров. Торфяники поселка Медный являются главным объектом наблюдения студентов групп ЗЧС.

В данном районе, наряду с заторфовыванием озер, можно наблюдать процессы заболачивания лесов и лугов. Здесь, наряду с природными процессами, определенную роль играют техногенные процессы, связанные, прежде всего, со строительством плотин, запруд и других гидротехнических сооружений. Заболачивание связывается с созданием условий избыточной увлажненности участков, когда полезная для человека луговая или лесная растительность меняется на болотную. При этом из обращения изымается часть полезных земель

Кроме упомянутых выше процессов заболачивания культурных угодий и заторфовывания водоемов, значительную опасность на данном участке представляют собой древние шахты и глубокие шурфы, крепления которых давно прогнили. Студентам запрещается подходить близко к этим горным выработкам и заглядывать в них во избежание осыпей и провалов, что имело место в прошлом. Студентам следует напомнить некоторые правила поведения в таких участках. Все опасные участки развития старых горных выработок должны быть ограждены, а также иметь предупредительные знаки.

Кроме того, на участке Шиловского месторождения студентам следует напоминать правила противопожарной безопасности в связи с широким развитием здесь легковоспламеняющихся торфяников.

### 3.5. Березовское рудное поле

Березовское рудное поле расположено в 12км на северо-восток от г. Екатеринбурга. Оно является крупнейшим на Урале собственно золоторудным объектом. Ввод его в эксплуатацию (1748 г.) определил начало золотой промышленности региона, да и Российского государства в целом. Практически до конца 50-х гг. XX столетия Березовское рудное поле было крупнейшим по запасам золота в бывшем СССР. Месторождение на сегодня отрабатывается на горизонте до 520 м. Структурным бурением установлено, что в центральной и южной частях месторождения оруденение прослеживается до глубины 1 - 1,2 км.

Березовское рудное поле широко известно в мире. Оно рассматривается как классический золоторудный объект кварц-жильного типа во всех курсах полезных ископаемых практически во всем мире. Березовское месторождение представлено крупной серией даек гранитоид-порфиров, имеющих преимущественно субмеридиональное и северо-восточное, реже субширотное простирание. Большая часть даек имеет крутое (до вертикального) падение. Дайки по большей части березитизированы, вмещают «лестничные» кварцевые жилы, ориентированные по нормали к зальбандам даек. Кроме лестничных, на

месторождении развиты красичные кварцевые жилы. Последние представляют собой разновиднсти жил, вышедших из даек во вмещающие породы или же не имеющие связи с дайками иформирующиеся по тектонически ослабленным зонам (разломам), ориентированным, как правило, широтно или субширотно.

Вулканиты и вулканогенно-осадочные толщи в пределах Березовского рудного поля имеют моноклинальное залегание, полого падают на север и подразделяются на две толщи: нижнюю – чередование базальтовых лав, туфобрекчий, туффитов, кремнистых осадков, и верхнюю – диабазы. Общая мощность толщ превышает 1,2 км.

## Описание маршрута

Начало маршрута — южный фланг Березовского рудного поля.

**Т.Н.1.** На остановке общественного транспорта «Каменные Палатки» в скальном обнажении с этим же названием можно наблюдать типичные шарташские адамеллиты, а также разноориентированные трещины, характерные для Шарташского массива в целом, горизонтальные и пологопадающие, волнисто изогнутые трещины обусловливают матрацевидную отдельность, отчетливо подчеркнутую процессами выветривания.

На примере фигур «Каменных палаток» наблюдают результаты физического выветривания в гранитах, а также продукты эоловой деятельности: ***дефляции и коррозии***. Подобные изменения потенциально можно ожидать на техногенных объектах.

**Т.Н.2.** Далее маршрут проходит через Шарташский щебеночный карьер. Борта карьера представлены средне-крупнозернистыми адамеллитами. Величина зерен биотита в них составляет 0,1 – 3 мм, а количество не превышает 5 – 10 % от общей массы.

**Т.Н.3.** Карьер расположен в северо-восточном эндоконтакте Шарташского массива адамеллитов. Здесь можно наблюдать адамеллиты, а также даечный комплекс, гранит-пегматиты и кварцевые жилы. Шарташский каменный карьер эксплуатируется как щебеночный — запасы составляют 33,6 млн. $м^3$.В бортах, а также в донной части карьера можно наблюдать дайки гранит-порфиров, лампрофиров, аплитов, пегматитов, кварцевых с калишпатом жил.

Шарташский и Изоплитовый карьеры в настоящее время разрабатываются частными предпринимателями. Значительно проще посещение «Сибирского» карьера, вскрывающего южную часть Шарташского массива. Карьер расположен вблизи Сибирского тракта (остановка автобусов № 31, 1 - «Путевка»).

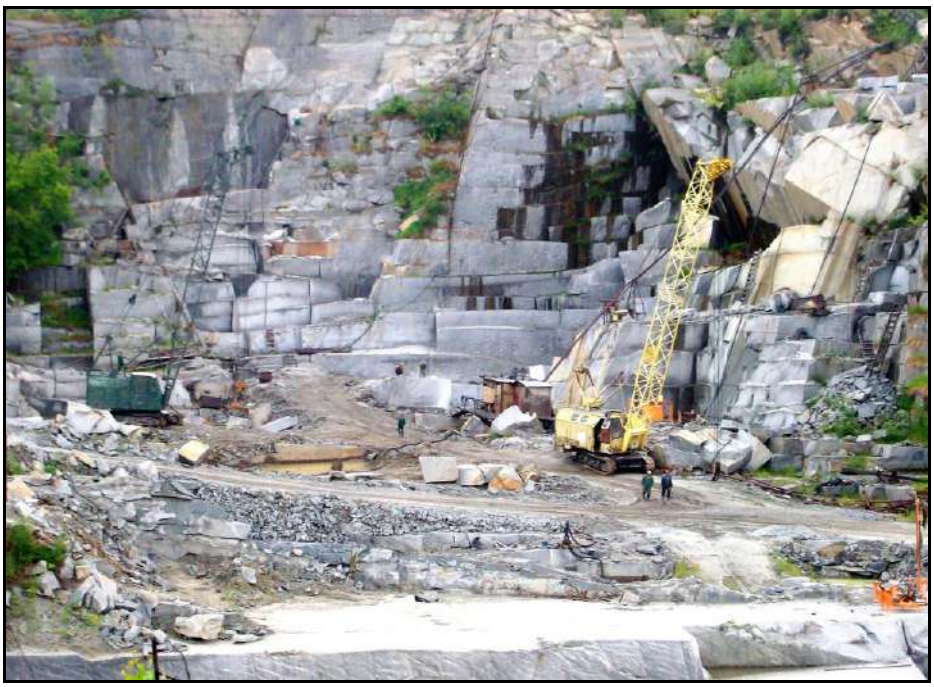


Рис. 22. Сибирский карьер по добыче облицовочных блоков гранитоидов

Сибирский разрабатывает монументальные блоки для облицовки или каменных архитектурных изделий, особенно на ранних стадиях разработки.

Отбор блоков гранитоидов осуществляется газо-плазменной резкой и клиновым отслоением через серию шпуров. Данную технологию можно видеть в северном забое карьера. Здесь же можно наблюдать самую мощную (около 1 м) дайку лампрофиров, выполняющую субмеридиональную трещину скалывания. Более мелкие дайки широко развиты в южном борту карьера (рис. 24). В бортах карьера картируются многочисленные дайки кислого состава: аплиты, гранит-порфиры, пегматиты.



Рис. 23. Дайка лампрофира (справа) и пересечение двух пегматитовых прожилков (слева) в гранитоидах Сибирского карьера

Во всех карьерах, пройденных в гранитоидах, следует обратить внимание студентов на крутые борта карьеров, что возможно только в крепких, устойчивых породах. На этих же объектах следует обратить внимание на систему водоотлива, которая защищает карьеры от затопления. Продолжаем маршрут в г. Березовском.

**Т.Н. 5.** Расположена на северной окраине г. Березовский в районе хвостохранилища. Здесь на правом берегу р. Пышмы высятся отходы от обогащения золотосодержащих руд. Отходы представлены тонко- и мелкозернистым кварцевым материалом. На хвостохранилище хорошо наблюдаются процессы ветровой и дождевой эрозии. В ветреную погоду поднимается кварцевая пыль, которая может вызвать у человека болезнь, известную под названием силикоз.

В данном маршруте в окрестностях г. Березовского для студентов специальности ЗЧС следует особое внимание обратить на провалы, которые расположены над шахтными полями. Здесь категорически нельзя вести строительство жилых зданий и сооружений. Обратить внимание на возможностях защиты таких территорий от потенциальной угрозы провалов.

## 3.6. Гора Хрустальная

На Среднем Урале в южной эндоконтактовой части Верх-Исетского гранитоидного массива расположен ряд крупных месторождений стекловидного и молочно-белого кварца.

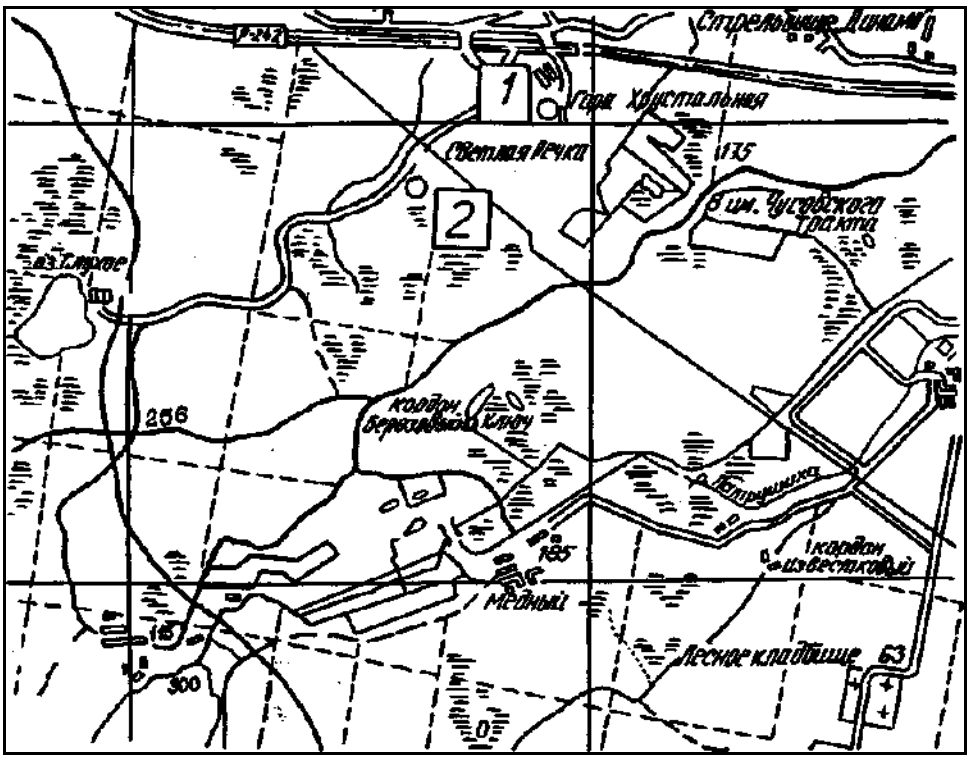



Рис. 24. Географическая схема размещения месторождений кварцевого сырья

Наиболее значительными и разведанными из них являются гора Хрустальная (1) и Светлореченское (2).

Кварц является наиболее распространенным минералом в природе, на описываемых месторождениях содержит большое количество минеральных и газово-жидких включений, довольно сильно «загрязнен» химически. В основном используется для варки различных специальных стекол, в качестве шихты для выращивания искусственных кристаллов кварца, в качестве заполнителя фильтров водоочистки, для футеровки различных агрегатов, в строительстве и для других нужд. При желании и дополнительных затратах всегда можно выбрать участки кварца, пригодные и для более ответственных назначений, но обычно это пока экономически нецелесообразно.

Понятие «молочно-белый кварц» сложилось исторически и не несет генетической или минералогической информации, в какой-то мере определяя лишь его замутненность газово-жидкими включениями.

Район месторождений характеризуется напряженной структурно-тектонической обстановкой. Восточная часть южного замыкания Верх-Исетского гранитоидного массива разбита многочисленными различно ориентированными тектоническими нарушениями преимущественно субмеридионального простирания. В эндоконтактовой зоне главного тела Верх-Исетского гранитоидного массива почти повсеместно развиты гранитоиды повышенной основности – диориты, кварцевые диориты, залегающие среди биотит-амфиболовых гнейсов. Возраст гранитоидов установлен как позднепалеозойский, т. к. они прорывают все породы района. Это подтверждается и определением абсолютного возраста (260-340 млн. лет).

***Месторождение горы Хрустальной*** представляет собой (Оболкин, 1981) крупное тело, вытянутое на 370-380 м в СВ (330-340 °) направлении. Форма его каплевидная в плане и неправильная в разрезе (рис. 26).

На глубину месторождение имеет тупое выклинивание с пологим падением (погружением) ЮЗ контакта к СВ под углом 8-10 °. Падение восточного контакта жильного тела крутое (75-90 °) к востоку, западный контакт до гор. 310-270 м падает к западу. Длина тела по вертикали непостоянная и колеблется от 90 м в его западной части до 190 м восточной. Ширина тела достигает 140 м.

Восточный контакт тела четкий крутопадающий (75-90 °) и контролируется тектоническим нарушением, западный контакт имеет более сложную конфигурацию, обусловленную заполнением пегматоидным и кварцевым материалом крупноглыбовой зоны брекчирования в диоритах.

Породы западного блока представлены сильно метаморфизованными диоритами. В них встречается тонкая и редкая вкрапленность пирита и халькопирита, а темноцветный минерал превращен в агрегат мелкочешуичатого биотита.

В породах восточного блока наблюдаются метасоматические образования, состоящие из биотита (флогопита), хлорита и тальковых сланцев, образованных по серпентинитам.

В жильном кварце месторождения выявлено и исследовано 22 минерала, являющихся вредными примесями: сера самородная, пирит, рутил, брусит, псиломелан, гематит, гидрогетит, апатит, графит, опал, магнетит, серицит, флогопит, альмандин, эпидот, мусковит, биотит, хлорит, актинолит, микроклин, калишпат, кальцит.

По степени минерализации кварц месторождения разделяется на две природные разновидности: мономинеральный или слабоминерализованный (до 8 %) и сильноминерализованный (более 8 %). По данным минералогических анализов (60 проб), содержание твердых минералогических примесей в первом типе кварце в среднем составляет 1,1 %, а во втором – 16,1 %.



Рис.25. Панорама Светлореченского месторождения кварца.
Кварцевая жила светлого оттенка

Другой характерной особенностью жильного кварца месторождения горы Хрустальной является его разлистованность. Впервые это подробно описано Г. Н. Вертушковым в начале 40-х годов и объяснено разлистованием кварца по плоскостям срастания полисинтетических бразильских двойников.

Кварц месторождения горы Хрустальной содержит значительное количество газово-жидких включений. Большинство из них располагаются в системах трещин и являются вторичными.

***Светлореченское месторождение*** жильного кварца расположено в юго-восточной части Верх-Исетского антиклинория. Данные разведочных работ показывают, что месторождение имеет зональное строение. Внешняя зона представлена пегматоидной породой, иногда с выделением в них кристаллов мусковита и калиевого шпата, размером от 1 до 5 см и измененными окварцованными диоритами, представляющими собой эруптивную брекчию, внутренняя – сложена массивным кварцем (кварцевое ядро).

Кварцевое ядро представляет собой крупное тело, простирающееся в северо-западном (330 °) направлении на 300 м.

Выклинивание жильного тела по простиранию в северо-западной и юго-восточной частях. А восточный и западный контакты падают в разные стороны (рис. 26). На глубину тело имеет тупое выклинивание с пологим юго-восточным падением (погружением) под углом 5-10 °. Форма тела линзовидная в плане и приближающаяся к трапециевидной в разрезе.

Восточный и западный контакт тела четкий и контролируется тектоническими нарушениями. Кварцевое тело рассечено системами трещин, в основном северо-западного и северо-восточного простирания с углами падения 30-70 °. Трещины обычно ожелезнены. В кварцевом ядре, особенно в нижнем эндоконтакте, достаточно много ксенолитов вмещающих пород, представленных диоритами и мусковитизированными гранитами. Размеры их достигают 7,5х30 м. Длинные оси ориентированы по простиранию тела параллельно его нижнему контакту.

Кварцевое ядро сложено кварцем светло-серого, серого, белого или дымчато-серого цвета с участками прозрачного или полупрозрачного кварца. Структура кварца среднезернистая, местами крупнозернистая до гигантозернистой. Текстура массивная, реже сланцеватая. Последняя, обусловлена разлистованием кварца по плоскостям срастания полисинтетических бразильских двойников.

Длина тела по вертикали не постоянна и колеблется от 120 м в его центральной части, постепенно уменьшаясь, до 20 м в направлении северного выклинивания и до 80 м в направлении южного выклинивания. Ширина тела достигает 140 м.

В кварце месторождения выявлены и исследованы 17 минералов, являющихся вредными примесями: группа полевых шпатов (в основном микроклин), кальцит, мусковит, биотит, альмандин, хлорит, эпидот, лимонит, гематит, пирит, актинолит, молибденит, пиролюзит, графит, турмалин, рутил, сфен. Наиболее распространены микроклин, мусковит, биотит, эпидот, лимонит, актинолит, кальцит.

Кварц Светлореченского месторождения содержит значительное количество газово-жидких включений. Большинство из них располагаются в системах трещин и являются вторичными. Гораздо реже встречаются первичные включения, которые в основном сгруппированы по зонам роста

индивидов. Их цепочки косо ориентированы по плоскостям трещин с вторичными включениями.

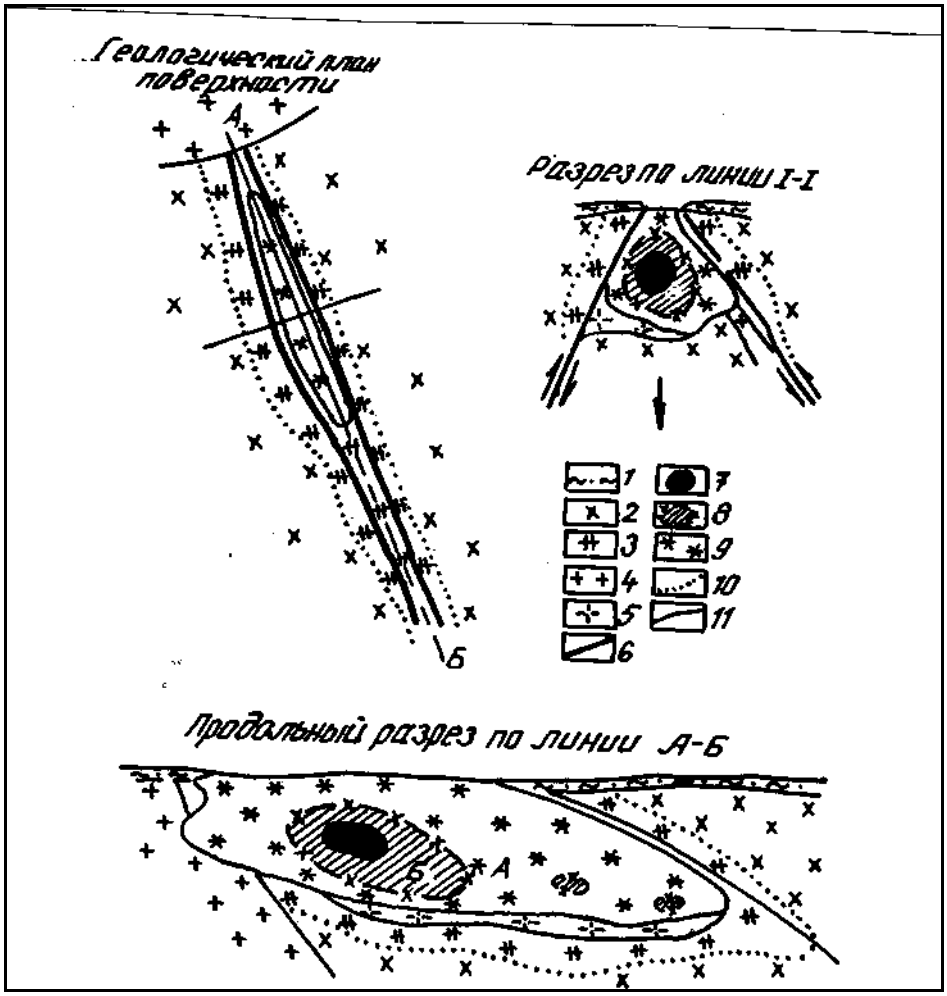



Рис. 26. Геологическое строение Светлореченского месторождения

*Условные обозначения:*

*1 - рыхлые отложения; 2 - диориты; 3 - диориты окварцованные, полевошпатизированные, мусковитизированные, аплитовой структуры; 4 -граниты биотитовые; 5 - пегматиты; 6 - тектонические нарушения; 7-9 - зоны распространения кварца с различным коэффициентом светопропускания, 10 - граница изменения диоритов; 11 - геологические границы.*

Характерной особенностью локализации крупных месторождений жильного кварца является их приуроченность к большим тектоническим нарушениям (месторождение горы Хрустальной) или тектоническим нарушениям, оперяющим под острым углом более мощную тектоническую зону (Светлореченское месторождение).

Формирование кварцевых тел происходило путем многократного раскрытия и заполнения трещин, образующихся при перемещении и расхождении блоков вмещающих пород и кристаллизации кварца в трещинных полостях в тектонически ослабленных зонах. Полученные результаты показывают несомненную связь крупных кварцевых месторождений с

тектоническими нарушениями южного обрамления Верх-Исетского гранитоидного массива.

Наиболее важными объектами наблюдения на участке с позиций специальности «Защита в чрезвычайных ситуациях» являются процессы формирования коры выветривания по породам различной устойчивости. Кварцевое тело в силу большой прочности образует в рельефе гребневидное тело, в то время как рыхлые продукты выветривания по измененным диоритам создают понижения в рельефе. Следует отметить, как меняется уровень обводненности карьера в зависимости от работы откачных насосов. С месторождениями кварца следует знакомить также как с объектами народнохозяйственного значения. Кварц данных месторождений потенциально может стать объектом получения особо чистого сырья – ценного продукта современных технологий. На промплощадке следует знакомить студентов с технологиями получения кварцевой продукции.

## 3.7. Билимбаевское месторождение

Участок расположен в 3,5 км южнее от г. Билимбай Свердловской области. От железнодорожной станции Билимбай карьер расположен в 7 км на восток. Добыча известняка ведется здесь, главным образом в Галкинском карьере, который в плане имеет изометричную форму, высота его бортов составляет около 20 метров.

Участок исследований расположен в Улсовско-Билимбаевской складчато-блоковой зоне, разделяющей два антиклинория: Уфалейский и Вишерско-Чусовской, которые, в свою очередь, входят в пределы Центрально-Уральского поднятия.

Галкинский карьер вскрывает известняки Билимбаевской свиты ордовикской системы. В разрезе свиты, кроме упомянутых известняков встречаются также: слабо метаморфизованные породы (филлиты), алевролиты, эффузивные образования. В известняках встречается фауна ордовикского возраста – остатки морских лилий, головоногих моллюсков. В известняках отмечаются находки остатков флоры в виде битуминозных примесей. Известняки в карьере сильно трещиноваты, преобладают разрывы с юго-восточными и юго-западными падениями. Углы падения пологие – 23-37 градусов. Мощность мезозойских пород, слагающих породы вскрыши составляет 4-5 метров, однако на отдельных участках она возрастает до 30-40 метров.

Известняки состоят преимущественно из кальцита – $CaCO_3$. Изредка встречается примесь доломита. Содержание двух минералов в породе составляет более 99,0 %, поэтому они представляют высококачественное флюсовое сырье для металлургической промышленности. Окраска известняков светлая, светло-серая, примеси железа местами придают породе рыжую окраску.

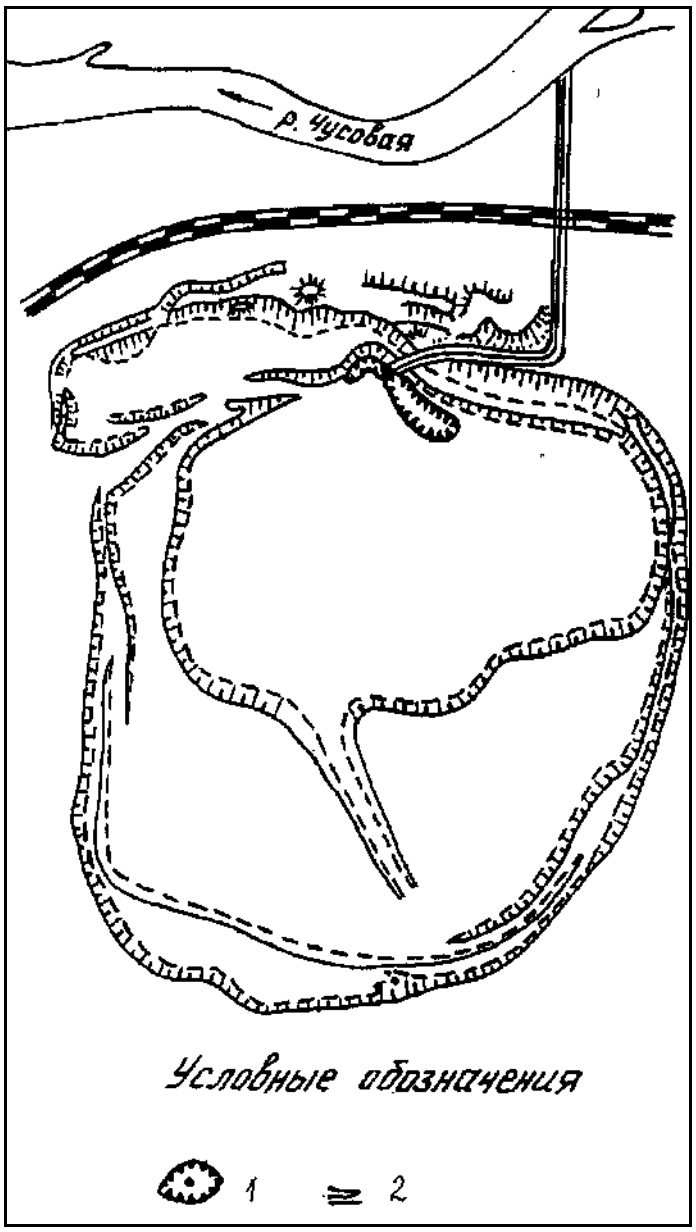



Рис. 27. План Галкинского карьера
*Условные обозначения: 1 – зумпф карьера, 2 – водоотлив*

Состав пород в карьере, а также обильные водопритоки создают на этом участке условия для карстовых процессов, которые здесь наблюдаются в изобилии. Следует, однако, отметить, что на поверхности пород чаще отмечаются суффозионные процессы, связанные с вымыванием (выносом) механических частиц фильтрующейся водой, что сопровождается оседанием пород с образованием провалов и воронок. Такая суффозия называется механической, при химическом растворении ее называют химической и в этом случае растворимая часть породы выносится в виде раствора.

Внимание студентов обращается на многочисленных следах начальных процессов суффозии, проявленных в геоморфологи. Делается акцент на различиях карстовой и суффозионной деятельности в различных по литологии породах.



Рис. 28. Вид северо-восточного борта Галкинского карьера

Закарстованность района Галкинского карьера составляет на поверхности около 25 %, с глубиной она уменьшается и к глубине 100 м практически не фиксируется. Под закарстованностью принимают соотношение закарстованных площадей участка к его общей, суммарной, площади. Снижение общей закарстованности с глубиной обусловлено несколькими причинами. Главная из них – снижение количества трещин и их объема по мере увеличения глубины, что, в свою очередь, снижает объем циркулирующей воды, а также скорость ее движения. Заполнителями карстовых полостей являются глины и суглинки, а также щебень и песок. Форма пустот клиновидная со сужением вниз.

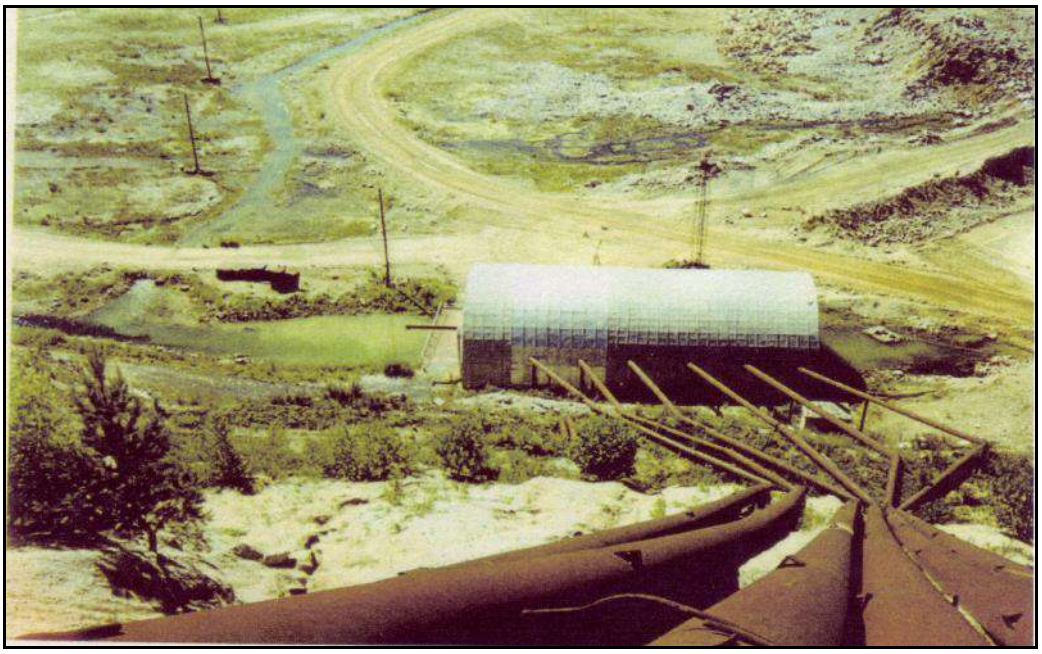


Рис 29. Система осушения Галкинского карьера: водосборные канавы, зумпф, модуль с насосами и водопроводные трубы

Водопроницаемость известняков близка нулю, поэтому обводненность карьера имеет трещинный характер. Общий водоприток в карьере составляет около 1500 $м^3$/час, однако, в настоящее время ежегодно он постепенно возрастает, в связи с изменением технологии процесса добычи и привлечения водных ресурсов из р. Чусовой. Плотность известняков составляет 2,70 $г/см^3$, временное сопротивление одноосному сжатию перпендикулярно слоистости – 130,0 МПа, а параллельно слоистости – до 55,0 МПа.

Известняки светло-серого цвета, часто массивной текстуры, скрытокристаллической структуры. Иногда отмечается мелкокристаллическая структура, которая фиксирует локальные участки слабого метаморфизма пород. В таких случаях в прослоях терригенных пород отмечаются переходы к филлитовидным разностям. В зонах наименее метаморфизованных пород можно встретить фауну ордовикского возраста. Элементы залегания известняков определяются с трудом. Такая возможность представляется благодаря наличию прослоев терригенных пород: алевролитов, алевропесчаников, реже – вулканитов.

Осушение карьера производится методом поверхностного дренажа, который включает в себя дренажные канавы и зумпф, куда вода стекается самотеком. Накопленная таким образом вода затем поднимается насосами вверх и сбрасывается в Чусовую. Перепад уровней воды в зумпфе карьера и реке Чусовой составляет 28 м.

В окрестностях Галкинского карьера, в поле развития известняков наблюдаются многочисленные воронки – небольшие карстовые провалы, фиксирующие начало карстообразования (рис. 31). Размер воронок различный, иногда не превышающий 1 метра. Как показывают результаты наблюдений, образование наблюдаемых воронок «молодого» карста началось сравнительно недавно и, по всей вероятности, увязывается с началом работ карьера. В данном маршруте студенты знакомятся с процессами суффозии и карста, производят локальное картирование воронок и описывают их. Для закрепления навыков работы с горным компасом здесь, в карьере, проводится массовый замер трещин с последующим построением розы-диаграммы трещиноватости.

На участке студенты знакомятся также с системой водоотлива, осушения месторождения. Характерной особенностью этого района являются многочисленные оползни, на которых можно наблюдать «пьяный лес». В самом карьере студенты знакомятся с характером выветривания известняков и других пород. При этом продукты всех этих процессов рекомендуется тщательно документировать, некоторые элементы – фотографировать и делать зарисовки.



Рис. 31. Свежая суффозионная воронка на левобережной пойменной террасе р. Чусовой, в 50 м от русла

### 3.8. Суффозионные процессы вдоль линий метро

Маршрут проходит непосредственно в пределах городской черты, сначала вдоль ул. 8-е Марта, где наблюдаются многочисленные разрушения домов, которые обтянуты стальными конструкциями. Начало маршрута на перекрестке улиц 8-е Марта и Декабристов. Наибольшему разрушению здесь подвергся старый дом с магазином «Гастроном», который стоит на ветке строящегося метро между станциями «Геологическая» и «Бажовская».

При движении к центру города студенты наблюдают здание сравнительно недавно построенного цирка, которое несет следы многочисленных реконструкций, призванных укрепить постройку. Причины деформаций в здании цирка могут объясняться двумя причинами. С одной стороны, строение стоит в непосредственной близости от сложной развязки двух веток метро, а, с другой – цирк, расположенный на контакте с активно живущим разломом, который расположен по руслу реки Исеть.

Инженерные меры защиты предприняты к старому зданию на перекрестке улиц 8-е Марта – Куйбышева. Как и в других местах, здесь здание «обвязано» стальным каркасом для предотвращения его дальнейшего развала.

Далее студенты наблюдают суффозионные процессы на западном берегу городского пруда. Каменная ограда пруда в нижней части в значительной степени разрушена. На улице Набережная рабочей молодежи видны следы

нового асфальта, закрывающего трещины, появившиеся в результате формирования оползневых процессов вдоль западного берега городского пруда.

Далее маршрут проходит между станциями метро «Уральская» и «Динамо». Вследствие процессов осушения, понижения уровня подземных вод, вдоль линии метро развиваются суффозионные процессы, которые приводят к многочисленным деформациям зданий и сооружений. Водопонижение осуществляется здесь с 1993 года с помощью 5 скважин диаметром 890 мм и насосами. Снижение уровня грунтовых вод привело к развитию суффозионных процессов, которые осуществляются путем механического выноса частиц фильтрующейся водой. Через некоторое время этот процесс привел к образованию пустот и полостей, что, в свою очередь, привело к проседанию зданий и сооружений и их видимых деформаций. Для спасения домов применены инженерные меры защиты, многочисленные стяжки.

Опасные явления природного и техногенного характера можно наблюдать в самом центре города, в районе городской «плотинки». На западном берегу городского пруда, на уровне поверхности воды наблюдаются процессы подмыва берега, что грозит обвалом чугунной ограды. Особенно хорошо заметны эти процессы зимой, когда наблюдения можно вести в непосредственной близости со льда. В 150 метрах от «плотинки» на север, в районе городского драмтеатра берег пруда укреплен бетонным сооружением.

В основании городской «плотинки» расположены две арки, одна из них недавно укреплена бетоном, в ней сделан переход. Другая арка, расположенная со стороны площади 1905 года, находится в аварийном состоянии. Только благодаря арочной конструкции потолки в ней не обрушиваются.

## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

*Паняк С.Г.* Динамическая геология. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. 280 с.

*Огородников В.Н., Поленов Ю.А., Григорьев В.В., Паняк С.Г., Дубейковский С.Г.* Учебная геологическая практика. Изд-во УГГГА, Екатеринбург, 1995. 223 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

*Огородников В.Н., Сазонов В.Н., Поленов Ю.А.* Геологические маршруты по Екатеринбуржью. Изд-во УГГГА, Екатеринбург, 1997. 227 с.

Стефан Григорьевич Паняк
Татьяна Сергеевна Бобина

# УЧЕБНАЯ ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА

*Учебное пособие*

для студентов специальности
21.05.04 – «Горное дело» (ГД)

Корректура кафедры геологии и защиты в чрезвычайных ситуациях

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16. Печать на ризографе.
Печ. л. 6.0. Уч.- изд. л. 5.8. Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет
Лаборатория множительной техники

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
Комплексу _____ С.А. Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

# Б2.В.03 (П) ПРЕДДИПЛОМНАЯ ПРАКТИКА

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С., доц., к. т. н.

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией факультета |
|---|---|
| Электрификации горных предприятий | Горно-механический |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Садовников М. Е. | Осипов П. А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 28.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

# 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРАКТИКИ

Главной целью преддипломной практики является сбор технической информации по предприятию и технологическому комплексу, которая в процессе выполнения выпускной квалификационной работы (ВКРИ) могла бы, при критическом анализе, оказать студенту техническую помощь в процессе проектирования подобного предприятия или комплекса. Объем материалов и их содержание должны быть достаточными для составления проектной документации по разделам, предусмотренным типовой структурой ВКРИ.

# 2. ПОРЯДОК ПРОХОЖДЕНИЯ ПРАКТИКИ

Общая организация преддипломной практики возлагается на выпускающую кафедру, которая выдает студенту необходимые документы для оформления прохождения практики на предприятии.

Этими документами являются*: программа преддипломной практики, путевка-удостоверение, предварительное задание на проектирование, выданное руководителем ВКРБ, дипломное задание по основному разделу специальной части проекта.* Только при наличии перечисленных документов студент может получить доступ к материалам на предприятии.

До отъезда на практику студенту необходимо ознакомиться с методическими указаниями по выполнению разделов будущего дипломного проекта и получить предварительное задание на проектирование у своего руководителя. Поскольку один из разделов специальной части является основным, по этому разделу необходимо получить дополнительное задание на сбор материалов во время прохождения практики.

На месте прохождения практики студент подчиняется требованиям внутреннего распорядка предприятия и через ответственного за проведение практики от предприятия получает доступ к сбору необходимых материалов.

# 3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ ПРАКТИКЕ

Нижеперечислены обязательные разделы отчета по практике, дифференцированные по типам предприятий.

3.1.***Введение***

*3.1.1. Шахты*

Географическое и административное расположение и генеральный план предприятия. Общая характеристика месторождения, качество полезного ископаемого, элементы залегания, балансовые и промышленные запасы в границах шахтного поля, категорийность по метану, пыли, по самовозгоранию угля или сульфидных руд, обводненность. Производительность. Рынки сбыта.

*3.1.2. Карьеры и угольные разрезы*

Географическое и административное расположение и генеральный план предприятия. Общая характеристика месторождения, вид залегания, качество полезного ископаемого, балансовые и промышленные запасы, перспективы развития. Производительность. Рынки сбыта.

3.1.3. *Обогатительные фабрики*

Территориальное расположение, административная или коммерческая принадлежность, генеральный план предприятия, качественные характеристики поставляемого сырья, конечная цель процесса обогащения и качественные характеристики концентрата или выходного продукта. Производительность. Рынки сбыта.

*3.1.4. Общепромышленные объекты*

Расположение и административное или коммерческое подчинение. Основное технологическое направление предприятия. Поставщики сырья или заготовок. Технические или технологические характеристики выпускаемой продукции или оборудования. Производительность. Рынки сбыта.

***3.2. Технологическая часть***

*3.2.1. Шахты*

Схема вскрытия месторождения и элементы системы разработки. Схема расположения шахтных стволов и капитальных горных выработок. Организация подготовительных и очистных работ. Основное технологическое оборудование, его технические характеристики, мощности электродвигателей, расположение в горных выработках, схема вентиляции.

Вид транспорта, технические характеристики транспортных средств. Мероприятия по защите окружающей среды.

3.2.2. *Карьеры и угольные разрезы*

Схема вскрытия месторождения и элементы системы разработки. План горных работ, поперечные разрезы карьера (разреза), размещение основного технологического оборудования на уступах и в забоях. Технические характеристики экскаваторов, буровых станков, транспортного оборудования. Вид транспорта, его технические характеристики. Организация вскрышных и добычных работ. Отвальное хозяйство. Мероприятия по защите окружающей среды.

*3.2.3. Обогатительные фабрики*

Организация технологического процесса. Схема цепи аппаратов. Основное механическое оборудование фабрики, его технические характеристики, мощности электродвигателей. Планы расположения оборудования на разных высотных отметках. Поперечные разрезы производственных помещений. Комплекс мероприятий по защите окружающей среды.

*3.2.4. Общепромышленные объекты*

Схема организации технологического процесса, его основные элементы. Основное механическое оборудование, его технические характеристики, мощности электродвигателей. Расположение оборудования в производственных помещениях, планы и поперечные разрезы производственных помещений. Комплекс мероприятий по защите окружающей среды.

3.3. ***Основное механическое оборудование***

*3.3.1. Шахты*

Шахтные стационарные установки (вентиляторные, компрессорные, подъемные, водоотливные), их технические характеристики, мощности электроприводов, расположение в помещениях или камерах. Сведения о напорах и притоках воды, расходе воздуха и

депрессии, производительности подъемных установок. Технологическая схема и технические характеристики оборудования техкомплекса поверхности. Организация ремонта основного механического оборудования и электрооборудования.

*3.3.2. Карьеры и угольные разрезы*

Карьерные стационарные установки (водоотлив, наклонные подъемные установки, компрессорные установки, дренажные шахты и др., если они имеются), их технические характеристики, мощности электроприводов, компоновочные чертежи и места расположения. Организация ремонта основного механического оборудования и электрооборудования.

*3.3.3. Обогатительные фабрики*

Компоновочные и установочные чертежи одного из главных элементов технологической цепи (эксгаустеры, шаровые или бесшаровые мельницы, дробилки и др.) с указанием подробных технических характеристик, мощностей электродвигателей; установочные чертежи (или эскизы) расположения электродвигателей на машине или механизме.

*3.3.4. Общепромышленные объекты*

Для общепромышленных объектов объем собираемых материалов определяется по аналогии с 3.3.3. с учетом специфики организации технологического процесса на предприятии. При этом в качестве объекта для сбора информации должно быть выбрано одно из главных звеньев технологической цепи.

3.4.***Электромеханическое оборудование и электроснабжение***

3.4.1. *Шахты*

Центральная подземная подстанция, схема, расположение оборудования в камере, технические характеристики оборудования и аппаратуры.

Схемы электроснабжения подготовительных и очистных работ. Расположение оборудования в забоях, основных и подготовительных выработках, камерах для размещения пусковой и защитной аппаратуры. Участковые трансформаторные подстанции: схемы, конструкции. Освещение: типы светильников, схемы их расположения в выработках. Конструкции заземляющих устройств.

3.4.2. *Карьеры и угольные разрезы*

Схема электроснабжения горных работ. Тип размещения электрооборудования в карьере и план электрических сетей. Расположение карьерных подстанций (КРП, ПКТП и др.) на плане горных работ.

Технические характеристики элементов схемы электроснабжения (подстанций, приключательных пунктов, кабельных и воздушных линий электропередачи). Устройства заземления в карьере. Схемы передвижных трансформаторных подстанций и приключательных пунктов. Освещение: типы светильников, схемы их подключения и расположения. Конструкции заземляющих устройств.

*3.4.3. Обогатительные фабрики*

С учетом специфики организации технологического процесса необходимо выделить из него одно из главных звеньев (например, цех флотации, цех дробления, цех сушки, цех измельчения и др.) и по согласованию с будущим руководителем проекта произвести сбор материалов для этого звена. Однако, в любом случае, необходимо включить в состав отчета следующие материалы:

Схема электроснабжения цеха с указанием технических характеристик пусковой и защитной аппаратуры. Схемы и чертежи конструкций комплектных трансформаторных подстанций и щитовых устройств. Схемы питания и размещение на планах и разрезах помещений осветительных устройств. Схемы расположения электроприемников и кабельных трасс. Схемы заземляющих устройств.

*3.4.4. Общепромышленные предприятия*

Сбор материалов по этому разделу отчета может производиться по аналогии с 3.4.3., при этом выбор участка, цеха, передела также должен быть сделан до отъезда на практику при согласовании предварительного задания на проектирование.

### *3.5. Электропривод машин и установок технологического комплекса*

Для выбранной машины или механизма (по согласованию с руководителем проекта) необходимо представить в отчете следующие материалы:

нагрузочную диаграмму и тахограмму, структурную и принципиальную схемы электропривода, способ управления двигателем или управляемым преобразователем, статические и динамические характеристики электропривода, режим работы, условия внешней среды и вид исполнения электрооборудования, тип электродвигателя, вид системы управления.

### 3.6. *Автоматизация технологического комплекса*

В качестве объекта автоматизации (по согласованию с руководителем проекта) может быть выбран один из наиболее крупных и ответственных элементов технологической схемы предприятия. Для горных предприятий это могут быть подъемные, вентиляторные, водоотливные, компрессорные установки, экскаваторы, буровые станки, конвейерные линии, дробильное или обогатительное оборудование, система контроля и учета энергоресурсов и т.д.

В отчет должны быть включены сведения о технической характеристике объекта автоматизации; параметрах, характеризующих работу технологического комплекса; датчиках контроля параметров, их назначении и характеристиках; функциональной (структурной) схеме, статических и динамических характеристиках основных элементов, передаточных функциях звеньев; принципиальной схеме автоматизации выбранного объекта.

### 3.7. *Внешнее электроснабжение*

Для выполнения соответствующего раздела дипломного проекта отчет по преддипломной практике должен содержать следующие материалы.

Сведения о потребителях электроэнергии, получающих питание с шин главной понижающей подстанции (ГПП) предприятия, их режимах работы и мощностях; схему электроснабжения предприятия и главную схему ГПП с указанием технических характеристик оборудования; компоновочные чертежи распределительных устройств; значения токов короткого замыкания; сведения и схемы устройств управления, релейной защиты и автоматики основных элементов главной схемы; конструктивные решения заземляющих устройств ГПП.

### 3.8. *Охрана труда и техника безопасности при эксплуатации электрооборудования*

В отчет должны быть включены сведения о технических способах и средствах защиты, обеспечивающих электробезопасность: защитном заземлении, занулении, выравнивании потенциалов, применении пониженных и малых напряжений, электрическом разделении сети, защитном отключении, изоляции токоведущих частей, компенсации токов замыкания на землю, обеспечении недоступности к токоведущим частям, находящимся под напряжением.

Кроме этого должны быть отражены организационные мероприятия, такие как назначение лиц, ответственных за организацию и производство работ, оформление нарядов на производство работ, осуществления допуска к проведению работ, организация надзора за производством работ, оформление окончания работ.

### 3.9. *Технико-экономические показатели работы электромеханического оборудования*

Электровооруженность труда, калькуляция себестоимости продукции по статье «электроэнергия», штаты работников электромеханической службы, фонд заработной платы, основные энергетические показатели. Мероприятия по экономии электроэнергии и повышению эффективности ее использования. Принятые на предприятии тарифы на оплату электрической энергии.

### *3.10. Заключение*

В заключении студент должен сделать общие выводы и критический анализ организации электромеханического хозяйства предприятия и дать рекомендации по повышению эффективности использования электрической энергии в технологическом процессе.

## 4. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Отчет составляется во время прохождения практики на предприятии.

Общий объем отчета не ограничивается.

В отчете должны быть помещены схемы, рисунки, эскизы, которые нумеруются и на них делаются ссылки в тексте. Громоздкие схемы должны быть переработаны и помещены так, чтобы при сохранении сущности имели разумный для отчета объем.

Страницы отчета нумеруются, а графический материал вклеивается в соответствующие места или представляется в виде приложения в отдельной папке. В отчете должен быть приведен список используемой литературы и содержание.

Отчет должен быть просмотрен руководителем практики от предприятия, который дает предварительную оценку, отмечая выполнение студентом программы практики и качество освещения поставленных в ней вопросов.

Отчет и отзыв заверяются подписью руководителя практики и печатью предприятия.

К отчету должны быть приложены:

1. Краткая производственная характеристика студента.
2. Дневник прохождения практики.
3. Путевка-удостоверение.

В недельный срок после окончания практики отчет должен быть сдан на кафедру ЭГП для проверки и оценки, которую выставляет руководитель проекта.

В случае неудовлетворительной оценки или отрицательной производственной характеристики, либо самовольного сокращения продолжительности практики, последняя не засчитывается.

Получение неудовлетворительной оценки по преддипломной практике влечет за собой повторное прохождение практики в сроки, установленные деканом факультета, или отчисление из института.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# ФТД.01 ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ТРУДА

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| Управления персоналом | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ *(подпись)* | Председатель _____ *(подпись)* |
| Ветошкина Т.А. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 5 |
| 2 | Методические указания по подготовке к опросу | 9 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 11 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 13 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 14 |
| | Заключение | 17 |
| | Список использованных источников | 18 |

# ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитияисследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации [1] . Формально можновыделить следующиеэтапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременностьи эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использованиедополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# ФТД.В.02 СРЕДСТВА КОММУНИКАЦИИ В УЧЕБНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

| | |
|---|---|
| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
| Управления персоналом | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ | Председатель _____ |
| *(подпись)* | *(подпись)* |
| Ветошкина Т.А. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 5 |
| 2 | Методические указания по подготовке к опросу | 9 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 11 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 13 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 14 |
| | Заключение | 17 |
| | Список использованных источников | 18 |

# ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитияисследовательскихумений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации [1] . Формально можно выделить следующиеэтапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы кпрактико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующимпринципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми.Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованностьоценок - ихаргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведениеитоговобсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременностьи эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использованиедополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала.кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб.пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

# ФТД.03 ОСНОВЫ СОЦИАЛЬНОЙ АДАПТАЦИИ И ПРАВОВЫХ ЗНАНИЙ

Специальность
***21.05.04 Горное дело***

Специализация
***Электрификация и автоматизация горного производства***

| Одобрена на заседании кафедры | Рассмотрена методической комиссией |
|---|---|
| Управления персоналом | Горно-механического факультета |
| *(название кафедры)* | *(название факультета)* |
| Зав. кафедрой _____ *(подпись)* | Председатель _____ *(подпись)* |
| Ветошкина Т.А. | Осипов П.А. |
| *(Фамилия И.О.)* | *(Фамилия И.О.)* |
| Протокол № 1 от 16.09.2021 | Протокол № 2 от 12.10.2021 |
| *(Дата)* | *(Дата)* |

Екатеринбург

**СОДЕРЖАНИЕ**


| | | |
|---|---|---|
| | Введение | 3 |
| 1 | Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий | 5 |
| 2 | Методические указания по подготовке к опросу | 9 |
| 3 | Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям | 11 |
| 4 | Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям | 13 |
| 5 | Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов | 14 |
| | Заключение | 17 |
| | Список использованных источников | 18 |

# ВВЕДЕНИЕ

***Самостоятельная работа студентов*** может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитияисследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

***Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций***. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации [1] . Формально можновыделить следующиеэтапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

***Дискуссия*** занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

***Метод «мозговой атаки»*** или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

***Презентация,*** или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

***Письменный опрос***

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременностьи эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использованиедополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## 3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## 4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

***Экзамен*** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf